Vektorer i 3D

Bonus: Skalarprodukt

Matematik A

Vibenshus Gymnasium

Skalarprodukt

Skalarproduktet (også kaldet *prikproduktet*) mellem to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er defineret som

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\theta) \text{ for } 0 \leq \theta \leq \pi\,,}$$

hvor $|\vec{a}|$ og $|\vec{b}|$ er henholdsvis længden af vektor $\vec{a}$ og vektor $\vec{b}$, og θ er vinklen mellem vektorerne, når de har samme startpunkt.

Som navnet indikerer har skalarproduktet en størrelse, men ingen retning. Skalarproduktet kan læses som længden af vektor $\vec{a}$ multipliceret med *projektionen* af vektor $\vec{b}$ på vektor $\vec{a}$, og kan betragtes som et mål på *similariteten* mellem to vektorer.

Særligt har skalarproduktet følgende egenskab.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er *vinkelrette* på hinanden. Dette er en meget anvendt egenskab indenfor matematikken (og fysikken).

Ortonormale basisvektorer

Når vi i almindelighed taler om et koordinatsystem i tre dimensioner, så mener vi ofte et *euklidisk* rum med en *basis* bestående af de *ortonormale* vektorer $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ og $\vec{k}$. Eller sagt på mere almindeligt dansk:

$$\vec{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

er enhedsvektoren langs x-aksen,

$$\vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

er enhedsvektoren langs y-aksen, og

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

er enhedsvektoren langs z-aksen.

At disse tre vektorer er *ortonormale* betyder to ting:

- *Orto* betyder, at vektorerne er indbyrdes vinkelrette på hinanden. Orto kommer fra ortogonal, som betyder vinkelret. Dette betyder, at

$$\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = \vec{\imath} \cdot \vec{k} = \vec{\jmath} \cdot \vec{k} = 0\,.$$

- *Normal* betyder, at vektorerne er *normaliseret*, altså at de har længden én, og dermed er enhedsvektorer, hvilket medfører at

$$\vec{\imath} \cdot \vec{\imath} = \vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1\,.$$

En vektors komposanter langs basisvektorerne

For en vilkårlig vektor $\vec{a}$ kan komposanterne langs basisvektorerne findes ved hjælp af skalarproduktet på følgende måde:

Langs x-aksen:

$$a_x = \vec{a} \cdot \vec{\imath}$$

Langs y-aksen:

$$a_y = \vec{a} \cdot \vec{\jmath}$$

Langs z-aksen:

$$a_z = \vec{a} \cdot \vec{\imath}$$

Endeligt kan den oprindelige vilkårlige vektor $\vec{a}$ skrives som summen af disse tre komposanter som

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{\imath} + a_y \cdot \vec{\jmath} + a_z \cdot \vec{k} \,.$$

Skalarproduktet igen

Ved at skrive to vektorer op ved hjælp af komposanterne langs de tre basisvektorer, er det muligt at udlede en anden form for skalarproduktet. Betragt de to vektorer

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{\imath} + a_y \cdot \vec{\jmath} + a_z \cdot \vec{k}$$

og

$$\vec{b} = b_x \cdot \vec{\imath} + b_y \cdot \vec{\jmath} + b_z \cdot \vec{k}$$

da er skalarproduktet mellem dem

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= \left(a_x \cdot \vec{\imath} + a_y \cdot \vec{\jmath} + a_z \cdot \vec{k}\right) \cdot \left(b_x \cdot \vec{\imath} + b_y \cdot \vec{\jmath} + b_z \cdot \vec{k}\right) \\
&= a_x \cdot b_x \cdot \vec{\imath} \cdot \vec{\imath} + a_x \cdot b_y \cdot \vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} + a_x \cdot \vec{\imath} \cdot \vec{k} \\
&\quad + a_y \cdot b_x \cdot \vec{\jmath} \cdot \vec{\imath} + a_y \cdot b_y \cdot \vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath} + a_y \cdot b_z \cdot \vec{\jmath} \cdot \vec{k} \\
&\quad + a_z \cdot b_x \cdot \vec{k} \cdot \vec{\imath} + a_z \cdot b_y \cdot \vec{k} \cdot \vec{\jmath} + a_z \cdot b_z \cdot \vec{k} \cdot \vec{k} \\
&= a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z \,,
\end{aligned}$$

da vi husker at $\vec{\imath} \cdot \vec{\imath} = \vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$ og $\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = \vec{\imath} \cdot \vec{k} = \vec{\jmath} \cdot \vec{k} = 0$.

Altså er der nu to metoder til beregning af skalarproduktet mellem to vektorer:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\theta)}$$

og

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}$$

I kan se en videogennemgang af dette dokument på Bonusvideo: skalarprodukt i 3D.