Vektorer i 3D

Bonus - Vektorprodukt

Matematik A

Vibenshus Gymnasium

Vektorprodukt

Vektorproduktet (også kaldet krydsproduktet) mellem to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ skrives som $\vec{a} \times \vec{b}$ og er defineret som en vektor, der er vinkelret på begge vektorer, og hvis længde er $|\vec{a}| \cdot |b| \cdot \sin(\theta)$, altså

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\theta) \cdot \vec{n}}$$

hvor $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ er henholdsvis længden af vektor a og vektor b, θ er vinklen mellem to vektorer, når vektorerne har samme begyndelsespunkt og $\vec{n}$ er en *enhedsnormalvektor* til begge vektorer.

Retningen på vektoren, som fremkommer ved krydsproduktet findes ved hjælp af *højrehåndsreglen*:

- Lad højre hånds tommelfinger være langs $\vec{a}$.
- Lad højre hånds pegefinger være langs $\vec{b}$.
- Da peger $\vec{a} \times \vec{b}$ i retning af højre hånds langefinger.

Note: Rækkefølgen af vektorerne er *vigtig* for krydsproduktet. Hvis man bytter om på $\vec{a}$ og $\vec{b}$ fås en vektor, som peger i den modsatte retning. Altså gælder det, at

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) .$$

Ud fra definitionen på krydsproduktet kan det ses, at

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \,,$$

hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle eller antiparallelle (med mindre én af vektorerne i sig selv er en nulvektor). Af samme grund gælder det altid, at

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}\,,$$

for en vilkårlig vektor $\vec{a}$.

Krydsproduktet er *kun* defineret for vektorer i tre dimensioner.

De euklidiske basisvektorer og vektorproduktet

Almindeligvis kaldes enhedsvektorerne langs x-, y- og z-aksen for henholdsvis $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ og $\vec{k}$ og er givet ved

$$\vec{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Da disse tre vektorer er gensidigt vinkelrette er det nemt at vise at deres krydsprodukter er

$$\vec{\imath} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}\,,$$

og

$$\begin{aligned} \vec{\imath} \times \vec{\jmath} &= -\left(\vec{\jmath} \times \vec{\imath}\right) = \vec{k}\,, \\ \vec{\jmath} \times \vec{k} &= -\left(\vec{k} \times \vec{\jmath}\right) = \vec{\imath}\,, \\ \vec{k} \times \vec{\imath} &= -\left(\vec{\imath} \times \vec{k}\right) = \vec{\jmath}\,. \end{aligned}$$

Altså kan man få z-retningen ved at krydse x-retningen med y-retningen og så videre.

Udledning af anden formel for beregning af vektorproduktet.

Med udgangspunkt i to vilkårlige vektorer, $\vec{a}$ og $\vec{b}$, opskrevet ved hjælp af deres komposanter langs de euklidiske basisvektorer

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{\imath} + a_y \cdot \vec{\jmath} + a_z \cdot \vec{k} \text{ og } \vec{b} = b_x \cdot \vec{\imath} + b_y \cdot \vec{\jmath} + b_z \cdot \vec{k}$$

kan vektorproduktet skrives som:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= \left(a_x \cdot \vec{\imath} + a_y \cdot \vec{\jmath} + a_z \cdot \vec{k}\right) \times \left(b_x \cdot \vec{\imath} + b_y \cdot \vec{\jmath} + b_z \cdot \vec{k}\right) \\
&= a_x b_x \cdot \vec{\imath} \times \vec{\imath} + a_x b_y \cdot \vec{\imath} \times \vec{\jmath} + a_x b_z \cdot \vec{\imath} \times \vec{k} \\
&\quad + a_y b_x \vec{\jmath} \times \vec{\imath} + a_y b_y \cdot \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} + a_y b_z \cdot \vec{\jmath} \times \vec{k} \\
&\quad + a_z b_x \cdot \vec{k} \times \vec{\imath} + a_z b_y \cdot \vec{k} \times \vec{\jmath} + a_z b_z \cdot \vec{k} \times \vec{k} \\
&= a_x b_x \cdot \left(\vec{0}\right) + a_x b_y \cdot \left(\vec{k}\right) + a_x b_z \cdot (-\vec{\jmath}) \\
&\quad + a_y b_x \left(-\vec{k}\right) + a_y b_y \cdot \left(\vec{0}\right) + a_y b_z \cdot (\vec{\imath}) \\
&\quad + a_z b_x \cdot (\vec{\jmath}) + a_z b_y \cdot (-\vec{\imath}) + a_z b_z \cdot \left(\vec{0}\right) \\
&= (a_y b_z - a_z b_y) \cdot \vec{\imath} + (-a_x b_z + a_z b_x) \cdot \vec{\jmath} + (a_x b_y - a_y b_x) \cdot \vec{k}
\end{aligned}$$

Skrevet som en vektor bliver det da til

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -a_x b_z + a_z b_x \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} .}$$

Vektorprodukt på determinantform

Den forrige formel for vektorproduktet kan være svær at huske. Hvis man kender til **determinanter**, kan den nemmere huskes, som

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Nu er der i altså tre måder at udtrykke vektorproduktet på

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -a_x b_z + a_z b_x \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\theta) \cdot \vec{n}}$$

Arealberegning ved hjælp af vektorproduktet

Som en sidste ting kan det nævnes, at vektorproduktet kan benyttes til arealberegning.

Arealet af en parallellogram, der er udspændt af to vektorer, $\vec{a}$ og $\vec{b}$, kan beregnes som *længden* af krydsproduktet mellem de to vektorer, altså

$$\text{Areal}_{\text{parallellogram}} = |\vec{a} \times \vec{b}|\,.$$

På samme måde kan arealet af en **trekant** udspændt af to vektorer, $\vec{a}$ og $\vec{b}$ beregnes som

$$\text{Areal}_{\text{trekant}} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|\,.$$

I kan se en videogennemgang af dette dokument på Bonusvideo: vektorprodukt(krydsprodukt) i 3D.