Vektorer i 3D - en kort introduktion

Matematik A

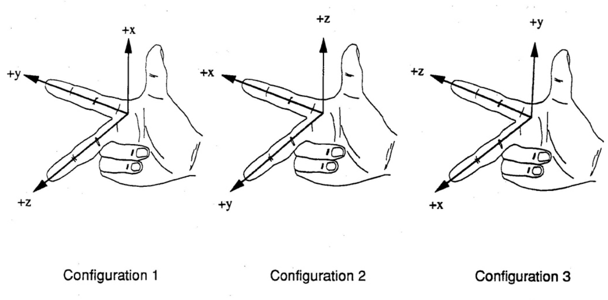
Vibenshus Gymnasium

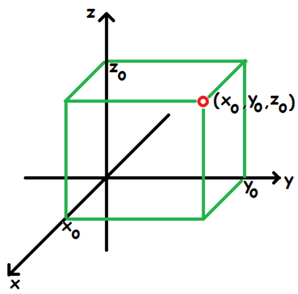
Repetition af gamle formler om vektorer samt introduktion til vektorer i 3D

Betragt de følgende sider som en formelsamling. Jeg vil gennemgå simple regneeksempler på brugen af formlerne i starten af undervisningen.

Det rumlige koordinatsystem

Ved konvention benytter vi et *højrehåndet* koordinatsystem, når vi beskæftiger os med rumlige kartetiske koordinater. Retningen af koordinatsystemets akser kan huskes ud fra følgende billeder.





Punkter og stedvektorer

Et punkt i rummet angives med x-, y- og z-koordinater

$$A = (A_x, A_y, A_z)\,.$$

En stedvektor til et punkt skrives som

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}\,.$$

En vektor mellem to punkter

Betragt punkterne

$$A = (A_x, A_y, A_z) \text{ og } B = (B_x, B_y, B_z)\,.$$

Vektoren fra A til B skrives som:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_x - A_x \\ B_y - A_y \\ B_z - A_z \end{pmatrix}\,.$$

Længden af tredimensionel vektor

For vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

findes længden på følgende måde:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,.$$

Enhedsvektoren

En enhedsvektor er en vektor, som har længden 1. For vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

kan man finde enhedsvektoren, der har samme retning som $\vec{a}$, på følgende måde:

$$\overrightarrow{e_a} = \begin{pmatrix} \frac{a_x}{|\vec{a}|} \\ \frac{a_y}{|\vec{a}|} \\ \frac{a_z}{|\vec{a}|} \end{pmatrix} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}\,.$$

Prikprodukt mellem to vektorer

For vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

er prikproduktet mellem dem defineret som

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z\,.$$

Vinklen mellem to vektorer

For vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

kan vinklen mellem dem findes på følgende måde:

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \, .$$

Projektion af en vektor på en anden vektor

For vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

kan projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ findes på følgende måde:

$$\overrightarrow{a_b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} \cdot \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \, .$$

Simple opgaver

Brug nu selv formlerne for beregninger på vektorer i 3 dimensioner til at besvare de tre følgende opgaver. Der er en facitliste til sidst (med et tvist).

Opgave 1

Betragt punkterne

$$A = (2, 5, 7) \text{ og } B = (-3, 4, 8)\,.$$

Vektorerne $\overrightarrow{OA}$ og $\overrightarrow{OB}$ betegner henholdsvis *sted*-vektorerne til punkterne A og B.

1. Beregn koordinaterne til $\overrightarrow{OA}$.
2. Beregn koordinaterne til $\overrightarrow{OB}$.
3. Beregn koordinaterne til vektorerne $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{BA}$.
4. Beregn længden af vektor $\overrightarrow{AB}$.

Opgave 2

Betragt vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}\,.$$

1. Beregn koordinaterne til enhedsvektoreren $\overrightarrow{e_a}$.
2. Beregn koordinaterne til enhedsvektoreren $\overrightarrow{e_b}$.
3. Beregn vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Opgave 3

Betragt vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}\,.$$

1. Bestem vha beregninger projektionerne $\overrightarrow{a_b}$ og $\overrightarrow{b_a}$.

Facitliste

Opgave 1

$$1.\ \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 10 \\ 101 \\ 111 \end{pmatrix},\ 2.\ \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -11 \\ 100 \\ 1000 \end{pmatrix},\ 3.\ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -101 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 101 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Opgave 2

$$1.\ \overrightarrow{e_a} = \begin{pmatrix} 0.324 \\ 0.487 \\ 0.811 \end{pmatrix},\ 2.\ \overrightarrow{e_b} = \begin{pmatrix} 0.549 \\ -0.824 \\ -0.137 \end{pmatrix},\ 3.\ v = 109.52°.$$

Opgave 3

$$1.\ \overrightarrow{a_b} = \begin{pmatrix} -2.821 \\ 3.949 \\ -1.128 \end{pmatrix} \text{ og } \overrightarrow{b_a} = \begin{pmatrix} 1.323 \\ -1.985 \\ -2.977 \end{pmatrix}.$$

Beviser

Længden af en vektor i 3 dimensioner

Hvorfor beregnes længden af $\vec{a}$ som $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ og ikke som $|\vec{a}| = \sqrt[3]{a_x^3 + a_y^3 + a_z^3}$, når nu det foregår i 3 dimensioner? Dette vil jeg bevise for jer rimeligt hurtigt på tavlen.

Enhedsvektoren

Jeg vil også vise en udledning af formlen for bestemmelse af koordinaterne til en enhedsvektor.