

# Anamorfoser

DANNI THORKILD PEDERSEN, Odense Katedralskole

Siden Bjarne Schmidts artikel her i bladet i 2005 ([1]), er vi nok mange, der har kørt projekter om reklamebogstaver. I denne artikel beskrives, hvordan forløbet kan udvides med andre typer anamorfoser.

## Reklamebogstaver

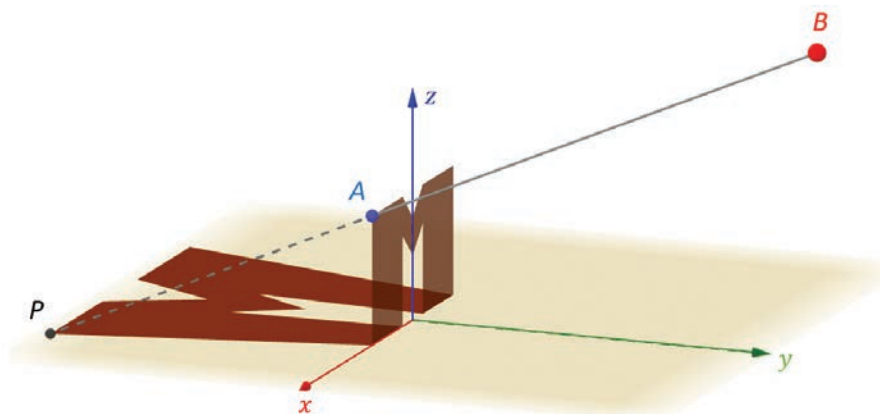
Betegnelsen reklamebogstaver skyldes, at denne type bogstaver ofte ses i stationære reklamer ved sportsarrangementer. Bogstaverne ligger fladt på fx et gulv, men set fra et bestemt punkt, ser bogstaverne ud til at stå oprejst. Et firma med hovedsæde i Vejle producerer sådanne reklamer (se evt. [2]).

Store reklamebogstaver kan laves ved at klippe bogstaverne ud af fx papirdug. Princippet til beregning af bogstavernes form fremgår af figur 1. Punktet  $B$  er øjepunktet, hvorfra bogstavet skal ses,  $A$  er et valgt punkt i bogstavet, som det skal se ud set fra  $B$ , og punktet  $P$  er det tilsvarende punkt på papirdugsudklippet. Punktet  $P$  findes som skæring mellem linjen gennem  $A$  og  $B$  og gulvplanet. Bogstavet kan klippes ud, når der er bestemt tilpas mange punkter som  $P$ . For en mere uddybende beskrivelse henvises til [1]. Det skal bemærkes, at effekten er bedst, når der tages et billede fra  $B$ .

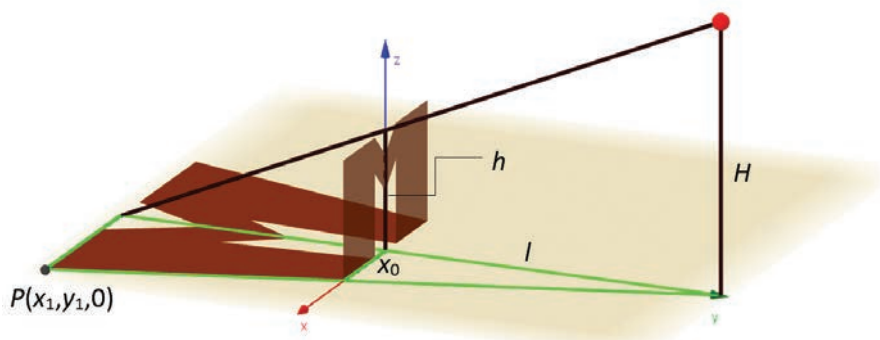
Jeg har endnu kun afviklet forløbet i 3.g-klasser, hvor vi har taget udgangspunkt i parameterfremstillingen for en linje og planens ligning. Idet beregningerne af koordinaterne til  $P$  også kan foretages udelukkende vha. ensvinklede trekanter, kan forløbet dog trækkes ned i 1.g (som beskrevet i [3]). De relevante ensvinklede trekanter ses på figur 2. Med betegnelserne på figuren findes  $P$ 's koordinater ved:

$$x_1 = \frac{l - y_1}{l} x_0 \quad \text{og} \quad y_1 = \frac{h}{h - H} l$$

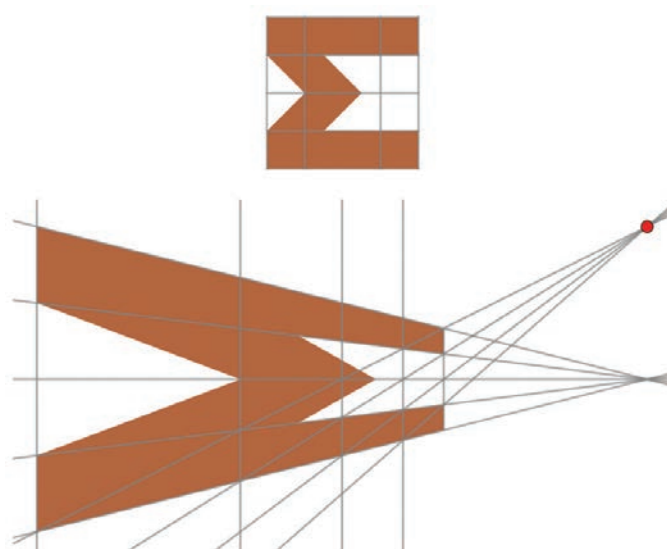
Man kan omgå alt regneriet ved at konstruere sig til formen af bogstavet. Dette er fx beskrevet i [4]. Naturligt nok er konstruktionen parallel til principperne for perspektivtegning, da geometrien for



Figur 1  
Reklamebogstav indlagt i koordinatsystem.



Figur 2  
 $P$ 's koordinater kan bestemmes vha. ensvinklede trekanter.



Figur 3  
Konstruktion af anamorf  $M$ .

den plane anamorfe illusion er fuldstændig som for perspektivtegningen, der er blot byttet om på positionerne af billedplan og motiv. Hvis man vil lave små plane anamorfe illusioner, som kan være på et stykke A4-papir, kan man med fordel konstruere et gitter til formålet. Dette er også beskrevet i [3] og [4]. En tegning på et stykke ternet papir kan overføres til gitteret ved at fokusere på hvert enkelt kvadrat for sig, og efterfølgende kan illusionen ses fra øjepunktet. Figur 3 viser en konstruktion lavet i Geogebra.

### Kegle-anamorfoser

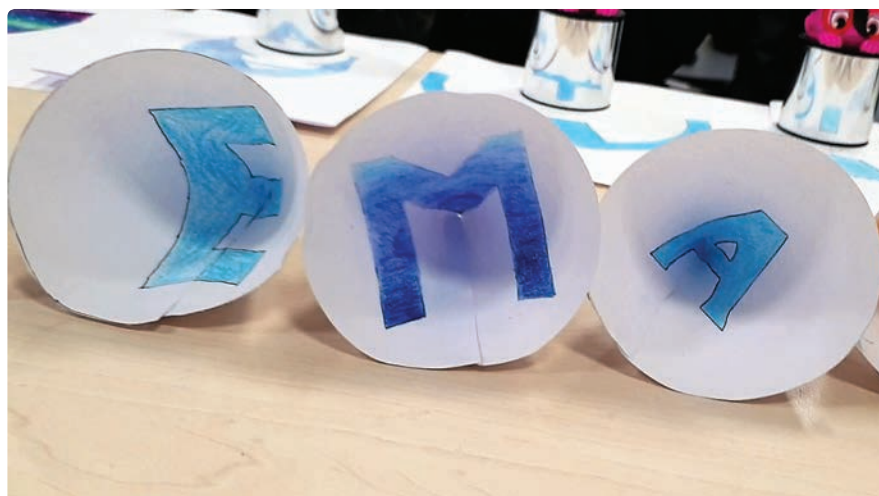
I [4] er beskrevet, hvordan man kan konstruere sig til en anamorf illusion, hvor en figur er tegnet på indersiden eller ydersiden af en kegle (se figur 4). Den analytiske beskrivelse af dette er helt ækvivalent til ovenstående for reklamebogstaverne. Figur 5 viser princippet for bogstavet M tegnet på indersiden af en kegle. Her er keglen placeret med bunden i  $xz$ -planen og keglens midterakse er sammenfaldende med  $y$ -aksen, hvilket giver følgende ligning for keglen:

$$x^2 + z^2 = \frac{r^2}{h^2}(y - h)^2$$

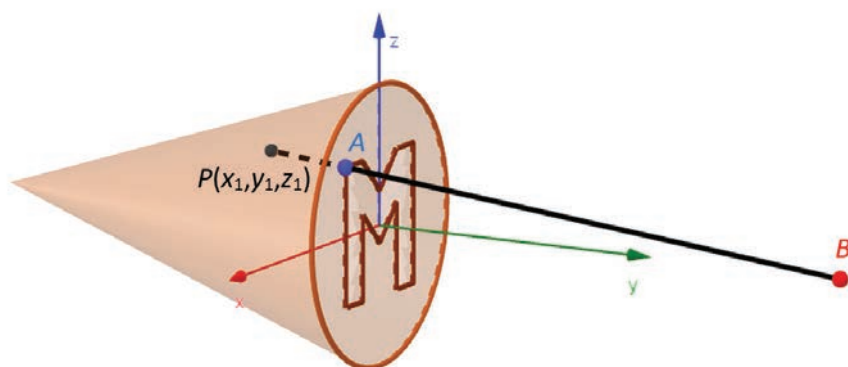
hvor  $r$  er radius af bundfladen, og  $h$  er spidsens  $y$ -koordinat. Idet denne ligning giver to kegler (med samme spids og midterakse, men med "åbninger" hver sin vej) fås to skæringspunkter mellem linjen gennem  $A$  og  $B$  og keglen. Her gælder det om at vælge det rigtige til de videre udregninger.

Som for reklamebogstaverne, skal der også her bestemmes tilpas mange skæringspunkter til at man kan tegne bogstavet på indersiden af keglen. Her vil det dog som regel ikke være nok kun at bestemme skæringspunkter for bogstavets hjørner, da rette linjer ikke afbildes i rette linjer.

Rent praktisk vil man ikke tegne på indersiden af en kegle. Skæringspunkterne og dermed bogstavet tegnes på et cirkeludsnit, som foldes til en kegle. Koordinaterne til



Figur 4  
Bogstaverne E, M og A tegnet på indersiden af kegler. Billedet er taget fra øjepunktet for den midterste kegleillusion.



Figur 5  
 $B$  er øjepunktet,  $A$  er et punkt valgt i billedet, og  $P$  er skæringspunktet med keglen.

skæringspunkterne med keglen skal altså omregnes til koordinater på et cirkeludsnit. Det kan gøres for hvert skæringspunkt ved at se på, hvor langt punktet ligger fra keglens spids, og hvilken vinkel i  $yz$ -planen, skæringspunktets retningsvektor (i  $yz$ -planen) danner med keglens samlingslinje (altså den linje ned langs siden af keglen, hvor den er klistret sammen). Afstanden  $a$  fra spidsen kan bestemmes med afstandsformlen:

$$a = \sqrt{x_1^2 + (y_1 - h)^2 + z_1^2}$$

Det tilsvarende punkt på cirkeludsnittet ligger i netop denne afstand fra cirke-

ludsnittets vinkelspids. Ved at bestemme ovennævnte vinkel, kan man bestemme i hvilken vinkel fra samlingslinjen punktet skal tegnes.

Man kan fx vælge, at samlingslinjen skal være på oversiden af keglen, som den er orienteret på figur 5. Vinklen  $\alpha$  mellem retningsvektoren (i  $yz$ -planen) til skæringspunktet og  $z$ -aksen, kan da bestemmes vha. trigonometri for retvinklede trekanter. For punktet  $A$  på figur 5 bliver vinklen (se også figur 6):

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{x_1}{z_1}\right)$$

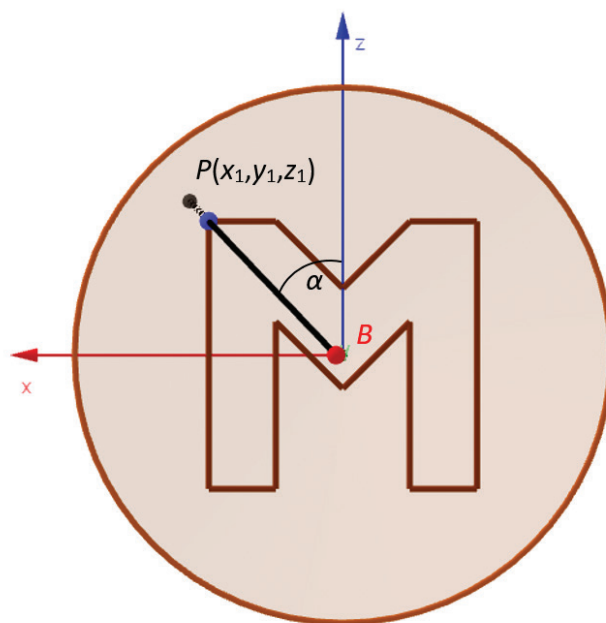
Hvis man vælger, at cirkeludsnittet, som keglen foldes af, skal have en vinkel på  $2\pi/3$ , vil vinklen til punktet i cirkeludsnittet være  $\alpha/3$  (se figur 7). Ud fra denne vinkel og afstanden  $a$  kan punktet afsættes på cirkeludsnittet. Når der således er afsat en række punkter på cirkeludsnittet, kan punkterne forbindes, hvorefter cirkeludsnittet kan klippes ud og samles til en kegle. Figur 7 viser, hvordan M'et skal tegnes på cirkeludsnittet.

Når den bagvedliggende matematik er studeret, kan man i undervisningen med fordel anvende et regneark til at beregne punkterne. Alternativt kan man konstruere sig frem til tegningen på cirkeludsnittet eller bruge et prædefineret gitter. Et sådan kan printes fra [4]. I [4] beskrives også situationen, hvor keglen beskues fra den modsatte side, altså hvor bogstavet tegnes på ydersiden af keglen. På figur 5 svarer dette til at flytte øjepunktet  $B$  til en negativ  $y$ -værdi.

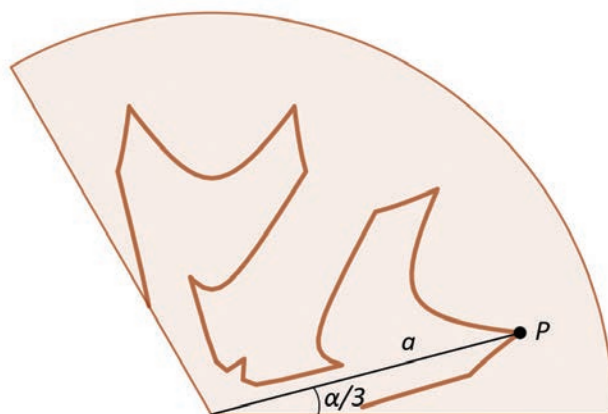
### Spejling i en cylinder

I det følgende beskrives illusioner, som opstår pga. spejling i en krum overflade. Først beskrives spejling i en cylinder. Som vist på figur 8 skal bogstavet tegnes på den flade, som cylinderen står på, men beskues i cylinderen, hvor det ligner, at bogstavet står i cylinderen. Figur 9 viser en illustration af situationen (betegnelser er som på de forrige figurer). Der findes en grundig gennemgang af matematikken i [5], hvor der dog bruges en lidt anden notation. Herunder gengives metoden i grove træk.

Man forestiller sig M'et stående oprejst inde i cylinderen. Proceduren er at bestemme skæringspunktet mellem cylinderen og linjen gennem øjepunktet og et valgt punkt på bogstavet. På figur 9 er valgt et punkt nederst på M'et. Ud fra dette skæringspunkt bestemmes en retningsvektor for en refleksionslinje, som bruges til at bestemme et skæringspunkt med underlaget. I det valgte koordinatsystem på figur 9 er cylinderens ligning givet ved:



Figur 6  
Keglen set fra øjepunktet.



Figur 7  
Cirkeludsnittet med bogstavet M.



Figur 8  
Spejling i en cylinder med en diameter på 5 cm.  
Bogstavet er printet fra et regneark.



$$x^2 + y^2 = R^2$$

hvor  $R$  er cylinderens radius. Ved hjælp af parameterfremstillingen for linjen gennem  $A$  og  $B$  findes to skæringspunkter med cylinderen. Det er skæringspunktet på "forsiden", der skal bruges. Dette kaldes  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ . Retningsvektoren for spejlingslinjen findes vha. en normalvektor til cylinderen i  $P_0$ . Som normalvektor bruges her:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

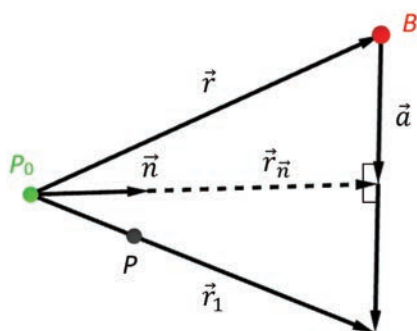
Som vist på figur 10 betragtes en vektor  $\vec{a}$  givet ved:

$$\vec{a} = \vec{r}_n - \vec{r}$$

hvor  $\vec{r}$  er vektoren  $\overrightarrow{P_0B}$ , som er en retningsvektor for linjen gennem  $B$  og  $A$ . En retningsvektor for refleksionslinjen er da:

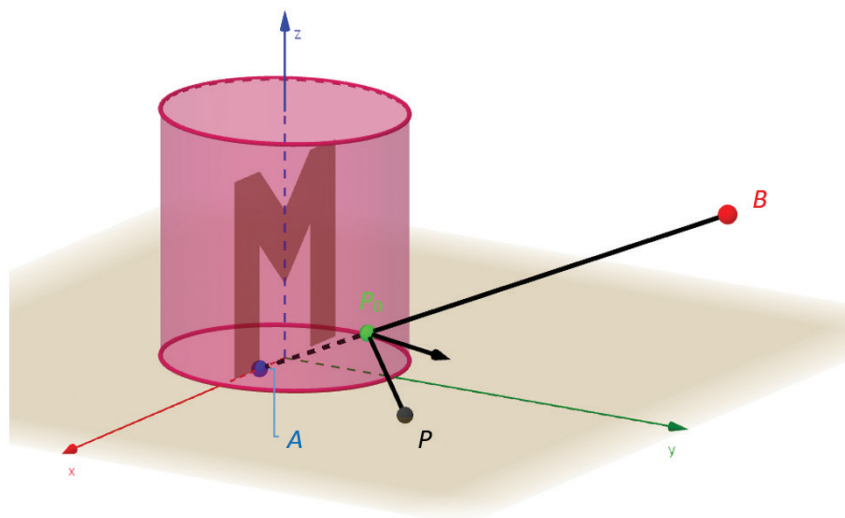
$$\vec{r}_1 = \vec{r} + 2\vec{a} = 2\vec{r}_n - \vec{r} = 2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n} - \vec{r}$$

Denne retningsvektor bruges til at opstille en parameterfremstilling for refleksionslinjen, som går gennem skæringspunktet  $P_0$ . Endelig bestemmes skæringspunktet mellem planen og refleksionslinjen.



Figur 10  
Geometrien for at bestemme retningsvektoren for refleksionslinjen.

I lighed med de ovenfor beskrevne illusioner, er det også her praktisk med et regneark eller et gitter. Figur 11 viser, hvordan bogstavet  $M$  skal tegnes foran cylinderen.



Figur 9  
Cylinder med  $M$ , som det skal se ud pga. spejlingen.



Figur 11  
Når cylinderen står på cirklen, ses et  $M$  i cylinderen.

Figur 12  
Bogstaverne på gulvet spejles i cylinderen. Spejlingen er ikke perfekt, pga. et ikke helt glat spejl.



Første gang, jeg havde elever til at lave cylinderspejlinger efter opskriften beskrevet her, var jeg så heldig at finde spejlcylindere i børnemenuerne på Burger King. Disse cylindere har en diameter på 5 cm, hvilket passer fint med at bogstavet kan printes på et stykke A4-papir. I år har jeg betrukket større cylindere med selvklæbende spejlfolie købt i jem og fix. Resultatet ses på figur 12. På en stor cylinder skal spejlfolien være meget jævn, for at resultatet bliver godt. Jeg vil derfor anbefale, at man evt. klistrer folien på pvc-rør med mindre diameter.

### Spejling i en kegle

Proceduren for konstruktion af bogstaver til spejling i en cylinder kan naturligvis anvendes for andre spejlende overflader. Herunder skitseret princippet for spejling i en kegle. Jeg har endnu ikke afprøvet dette i en klasse. Mest fordi det ikke er let at finde kegler med en spejlende overflade.

De relevante vektorer er indtegnet på figur 13, hvor keglen er orienteret, så dens ligninger er:

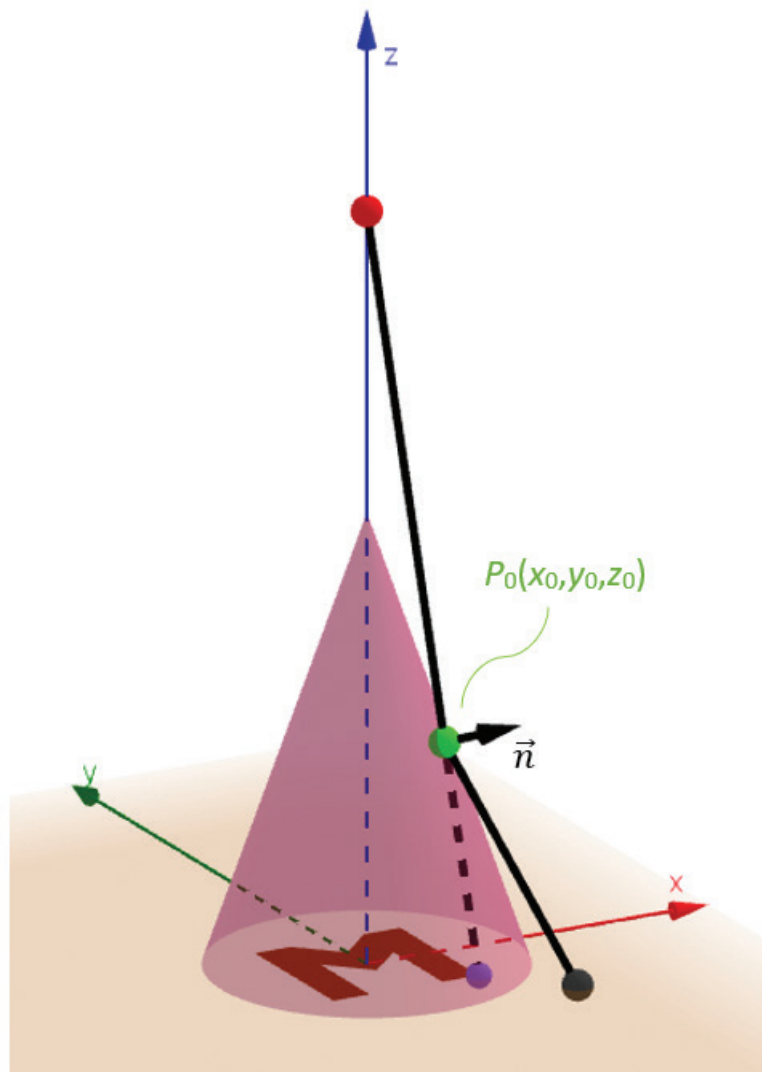
$$x^2 + y^2 = \frac{r^2}{h^2} (z - h)^2$$

Øjepunktet er placeret på  $z$ -aksen, og bogstavet skal tegnes i  $xy$ -planen på en måde, så det ligner, at det ligger inde i keglen. Som for cylinderen opstilles en parameterfremstilling for linjen gennem øjepunktet og et valgt punkt på bogstavet, som det skal se ud i bunden af keglen, og skæringspunktet  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  mellem denne linje og keglen bestemmes. Ligesom for cylinderspejlingen bruges også her en normalvektor til keglen til at bestemme en retningsvektor for refleksionslinjen.

$x$ - og  $y$ -koordinaten til den ønskede normalvektor  $\vec{n}$  fås direkte fra skæringspunktets tilsvarende koordinater.  $z$ -koordinaten kan bestemmes ved at udnytte, at normalvektoren er ortogonal med en vektor  $\vec{b}$  fra keglens spids til skæringspunktet. Normalvektorens  $z$ -koordinat, som herunder betegnes  $c$ , kan altså bestemmes ved:

$$\begin{aligned} \vec{b} \cdot \vec{n} = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \\ h - z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ c \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow c = \frac{-x_1^2 - y_1^2}{h - z_1} \end{aligned}$$

Når normalvektoren er bestemt, kan en retningsvektor for refleksionslinjen findes efter helt samme princip som for cylinderspejlingen. Endelig bestemmes skæringspunktet mellem refleksionslinjen og  $xy$ -planen.



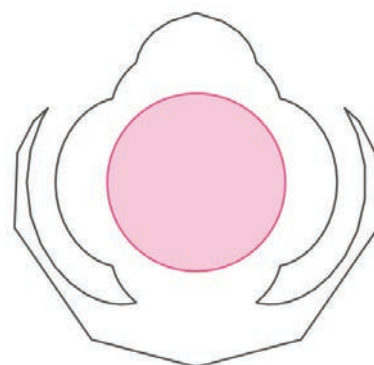
Figur 13  
Geometrien bag keglespejlingen.

Figur 14 viser, hvordan bogstavet M skal tegnes rundt om keglen for at få den rigtige effekt. Dog burde der være beregnet flere punkter, for at få mere glatte kurver.

Jeg har forsøgt at folde en spejlkegle med spejlfolien fra jem og fix, men specielt omkring spidsen bliver keglen desværre så ujævn at effekten fuldstændig ødelægges.

### Afsluttende bemærkninger

Der er flere oplagte gevinster ved et forløb om anamorfe illusioner. Mest umiddelbart er elevernes motivation, som for mange nok er båret af det anvendelsesorienterede og det taktile. Desuden opnås en sand glæde, når frugten af arbejdet med at regne, tegne og klippe bliver tydelig i det endelige produkt.



Figur 14  
Bogstavet M tegnet omkring keglen.





Figur 15  
Loftet i Sant 'Ignazio set fra "det rigtige"  
punkt. Søjlerne over vinduerne er malet,  
så det ligner at kirkerummet virker højere.



Figur 16  
Samme loft som på figur 15, men set fra  
et andet punkt.

Et projekt om anamorfe illusioner kan stykkes sammen, så eleverne får en fin forståelse for den tilhørende analytiske geometri og samtidig oplever styrken ved at lade et CAS-værktøj eller et regneark udføre de mange beregninger.

Slutteligt skal tilføjes, at et projekt om anamorfe illusioner fint vil kunne kobles med en studietur til Rom, hvor man flere steder kan se anamorfoser anvendt

i udsmykningen af kirker. Mest kendt er måske "den falske" kuppel i Sant' Ignazio og loftet i denne kirke. figur 15 og Figur 16 viser samme udsnit af loftet set fra to forskellige punkter. Det ses tydeligt, at den illusion, der skabes af søjlemotivet over vinduet, brydes, når man ikke står det rigtige sted i kirken. En god kilde til information om andre historiske eksempler på brug af anamorfe illusioner er bogen *Hidden Images* [6].

## Litteratur

- [1] Reklametekst med 3D-effekt, Bjarne Schmidt, LMFK-bladet, 4, 2005.
- [2] [amayse.com/da/forside](http://amayse.com/da/forside)
- [3] *Matematik og anamorfoser*, Gunner Andersen, Jytte Sloth og Jens S. Christensen, kursusnoter, Vestfyns Gymnasium, 2016.
- [4] [anamorphicart.wordpress.com](http://anamorphicart.wordpress.com)
- [5] *Cylinder Reflections, The Mathematics Behind the Images*, Don Spickler og Jennifer Bergner, Salisbury University, 2012 (PowerPoint præsentation).
- [6] *Hidden Images, Games of Perception, Anamorphic Art, Illusion*, Fred Leeman, Harry N. Abrams, Incorporated, New York, 1976.