Bevis for separation af de variable til løsning af differentialligninger

Matematik A

Vibenshus Gymnasium

Dette dokument er et bevis for og et regneeksempel på brugen af separation af variable i forbindelse med løsning af 1. ordens ordinære differentialligninger. Venstre side viser det generelle bevis, mens højre side viser et eksempel.

Lad os antage, at vi har en 1. ordens ordinær differentialligning på formen:

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)\,.$$

Denne omarrangeres til

$$\frac{1}{h(y)} \cdot \frac{dy}{dx} = g(x)\,.$$

Nu integreres der på begge sider med hensyn til x

$$\int \frac{1}{h(y(x))} \cdot \frac{dy(x)}{dx}\,dx = \int g(x)\,dx\,. \tag{1}$$

Nu betragter vi integranden på venstre side, som hedder $\frac{1}{h(y(x))} \cdot \frac{dy(x)}{dx}$. Lad os antage at $H(y(x))$ er stamfunktion til $\frac{1}{h(y(x))}$. Da gælder det fra kædereglen at

$$\begin{aligned} \frac{dH(y(x))}{dx} &= \frac{dH(y(x))}{dy(x)} \cdot \frac{dy(x)}{dx} \\ &= \frac{1}{h(y(x))} \cdot \frac{dy(x)}{dx} \end{aligned} \tag{2}$$

Højre side af ligning (2) er da lig integranden i (1), så venstre side kan indsættes i stedet.

$$\int \frac{1}{h(y(x))} \cdot \frac{dy(x)}{dx}\,dx = \int \frac{dH(y(x))}{dx}\,dx\,.$$

Vi ved alle, at integration og differentiation ophæver hinanden således at

$$\int \frac{dH(y(x))}{dx}\,dx = H(y(x))\,.$$

Nu kan ligning (1) skrives som

$$H(y(x)) = \int \frac{1}{h(y(x))}\,dy(x) = \int g(x)\,dx\,.$$

Alt dette kan også sammenfattes til

$$\frac{dy(x)}{dx} = g(x) \cdot h(y(x))$$

kan løses vha.

$$\int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(x)\,dx$$

Lad os antage, at vi har en 1. ordens ordinær differentialligning:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \cdot 2x\,.$$

Denne omarrangeres til

$$\frac{1}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 2x\,.$$

Nu integreres der på begge sider med hensyn til x

$$\begin{gathered} \int \frac{1}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx}\,dx = \int 2x\,dx \rightarrow \\ \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int 2x\,dx \end{gathered}$$

Hver side integreres for sig:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y^2}\,dy &= \int 2x\,dx \\ \frac{y^{-1}}{-1} + k_1 &= \frac{2x^2}{2} + k_2 \rightarrow \\ \frac{1}{y} &= -x^2 - k_2 + k_1 \rightarrow \\ y = y(x) &= -\frac{1}{x^2 + k_3}\,, \text{ hvor } k_3 = k_2 - k_1 \end{aligned}$$