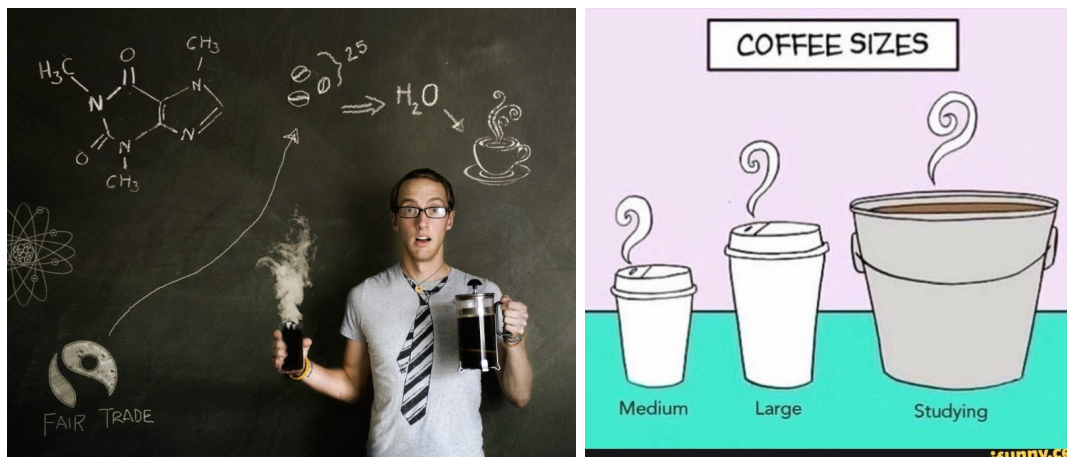


# Krusekaffe

Matematikprojekt om eksponential- og logaritmefunktioner

Jacob Debel



## Introduktion

I løbet af 3 år på Kruses Gymnasium bliver nogle elever mere og mere glade for kaffe, og koffeinens positive indvirkning på evnen til at lave lektier og skrive store rapporter.

Faktisk blev nogle af sidste års 3.g-elever så glade for kaffe, at de forsøgte at starte deres egen kaffeshop her på stedet: **Krusekaffe**.

Som de naturvidenskabeligt interesserede elever, de var, udførte de en del research, i deres stræben efter den **perfekte** kop kaffe. De fandt bl.a. ud af:

- at en kop **aeropress**-kaffe blev brygget bedst efter [James Hoffmanns ultimative aeropress-opskrift](#).
- at det bedste bryggevand består af 5 dele **demineraliseret** vand og 1 del postevand.

Vigtigst af alt fandt de dog ud af, at kaffen blev bedst, hvis den blev brygget ved  $100^{\circ}\text{C}$ , **men drukket ved mellem  $50^{\circ}\text{C}$  og  $60^{\circ}\text{C}$** .

I december måned sidste år, hvor en kop varm kaffe på en kold dag gør underværker, gik de derfor i gang med at undersøge afkølingen af deres kaffe. De bryggede en kop aeropresskaffe med 206.3 g vand og 11 g kaffe ved  $100^{\circ}\text{C}$  og satte den efterfølgende til at køle af udenfor. Udetemperaturen var  $0^{\circ}\text{C}$  og starttemperaturen af den færdigbryggede kaffe i kruset var  $90^{\circ}\text{C}$  efter endt brygning. Eleverne fik samlet sammenhørende værdier mellem tid og temperatur sammen. Disse kan ses i Bilag A, samt i datafilen `Afkoeling_af_kaffe_nul_grader_udenfor.csv`.

Desværre kom de tidligere 3.g-elever ikke længere med deres kaffeeventyr, for pludselig bankede SRP'en på døren, og resten af skoleåret blev brugt på at forberede sig til forårets eksaminer.

**Jeres opgave er derfor at samle op på arbejdet fra sidste års 3.g-elever, og undersøge temperaturudviklingen for kaffe yderligere.** Måske kan **I** få **Krusekaffe** op at stå.

## Opgave 1 - Plot og analyse

Undersøg, hvilken matematisk model, som bedst beskriver udviklingen i kaffens temperatur.

- Til dette skal I anvende datasættet vist i Bilag A, hvilket også er at finde i datafilen **Afkoeling\_af\_kaffe\_nul\_grader\_udenfor.csv**.
- Som de rigtige videnskabs-mændpersoner I er, så gælder det om at finde den simpleste model, som stadig ikke er for simpel.
- Ofte kan afbildning af datapunkterne i forskellige koordinatsystemer afsløre noget om datapunkternes sammenhæng.

## Opgave 2 - Modellering og bestemmelse af forskrift

Med udgangspunkt i jeres analysearbejde fra Opgave 1 **skal I opstille en funktionsforskrift for kaffens temperatur som funktion af tiden, og redegøre for forskriftens evne til at beskrive data.**

- Når der er så mange datapunkter, som der er, skal deres tages højde for dem alle sammen. Derfor skal I kunne **fitte** en valgt funktionstype til jeres data.

## Opgave 3 - Service til kunderne

Som en ekstra service havde de tidligere 3.g-elever tænkt sig at give advarsler og gode råd til deres kunder. Dette arbejde skal I nu færdiggøre.

- Til de utålmodige kunder, skal I informere dem om, hvor varm kaffen **forventes** at være efter hhv. 30 s, 1 min., 2.5 min., 5 min., 7.5 min. og 10 min. når omgivelserne er  $0^{\circ}C$ .
- Til kaffeaficionadoerne blandt kunderne skal I fortælle dem, hvornår kaffens temperatur er faldet til hhv.  $60^{\circ}C$  og  $50^{\circ}C$ , så de kan få den bedst mulige kaffeoplevelse.
- Endelig skal I fortælle alle kunder, hvor lang tid, de skal forvente, der går, før temperaturen er faldet til det halve.

## Opgave 4 - Forsøg og dataopsamling

Det er dog sjældent at temperaturen er  $0^{\circ}\text{C}$  der, hvor man skal drikke sin kaffe. Faktisk ligger den årlige middeltemperatur omkring  $9^{\circ}\text{C} - 10^{\circ}\text{C}$  i Danmark for tiden<sup>1</sup>. Dette vil I selvfølgelig gerne tage højde for.

**I skal derfor udføre jeres egne forsøg**, hvor I skal måle temperaturen af en kop kaffe(vand er lige så godt), men med en anden omgivelsestemperatur end  $0^{\circ}\text{C}$ .

**Til dette skal I bruge følgende:**

- Et termometer, som kan tåle kogende vand.
- En kop/et krus, som kan indeholde ca. 200 g kaffe/vand. (De tidligere 3.g'ere anvendte et almindeligt keramisk krus.
- Et stopur (det må gerne være på mobilen).

**Fremgangsmåden er som følger:**

1. Find et lokale, hvori temperaturen ikke rigtig forventes at ændre sig i de næste ca 3 timer.
2. Mål temperaturen i rummet, inden forsøget går i gang og skriv værdien ned.
3. Sæt termometeret i koppen/kruset.
4. Kog ca. 200 g kaffe/vand.
5. Nedskriv sammenhørende værdier af tid og temperatur hen over de næste **3 timer**. (Jo oftere jo bedre. Mindst én gang hver 5. min. i starten. Senere kan det være hver 10. min.) Sørg for at tiden måles i min. og temperaturen i  $^{\circ}\text{C}$ . På den måde er det sammenligneligt med de tidligere 3.g-elevs arbejde.

## Opgave 5 - Databehandling og analyse

I skulle gerne nu have et datasæt bestående af sammenhørende værdier af tid(min.) og temperatur( $^{\circ}\text{C}$ ). Lad tiden være x-værdier og temperaturen y-værdier.

1. Undersøg, hvordan sammenhængen nu er mellem tid og temperatur. Det hjælper helt sikkert at plotte datasættet i de samme koordinatsystemer som i Opgave 1. Beskriv, hvad I ser. Hvordan passer datapunkterne f.eks. med en **forsku**dt eksponentialfunktion?
2. Træk nu **omgivelsernes temperatur** fra alle de målte y-værdier (temperaturen), og plot igen i de samme koordinatsystemer som tidligere. Hvilken sammenhæng ser I nu?

---

<sup>1</sup>Se mere her: <https://www.dmi.dk/klima/temaforside-klimate-frem-til-i-dag/temperaturen-i-danmark/>

## Opgave 6 - Modellering

Undersøg, hvor godt jeres data passer med én af funktionsforskrifterne

$$T(t) = (T_0 - T_{\text{om}}) \cdot a^t + T_{\text{om}} \quad , \quad T(t) = (T_0 - T_{\text{om}}) \cdot e^{k \cdot t} + T_{\text{om}} \quad (1)$$

hvor  $t$  er tiden i min.,  $T(t)$  er den øjeblikkelige temperatur af kaffen/vandet som funktion af tiden,  $T_0$  er starttemperaturen til tiden  $t = 0$  og  $T_{\text{om}}$  er omgivelsernes temperatur.

- Dette kan gøres ved at **fitte** efter en selvvalgt funktionstype. Dette kan gøres i **geogebra** vha **fit()**-kommandoen.
- Alternativt kan I **fitte** jeres data fra Opgave 5 punkt 2 efter funktionerne

$$T(t) - T_{\text{om}} = b \cdot a^t \quad , \quad T(t) - T_{\text{om}} = b \cdot e^{k \cdot t}$$

og så **regne baglæns** til forskrifterne i ligning 1.

## Opgave 7 - Mere service til kunderne

Med jeres nyfundne viden om afkøling af kaffe ved forskellige omgivelsestemperaturer kan I yde jeres kommende kunder endnu en service. Hvis det antages, at den færdigbryggede kaffe altid har starttemperaturen  $T_0$  (den ligger nok omkring  $90^\circ\text{C}$ , men det præcise tal afhænger af jeres målinger fra tidligere), at kaffen altid smager bedst ved  $T(t) = 60^\circ\text{C}$  og at temperaturen altid falder med samme rate, så kan I nu forudsige, **tidspunktet for optimal drikketemperatur, som funktion af omgivelsernes temperatur**

1. Opstil en funktionsforskrift for tidspunktet, hvor kaffen smager bedst, som funktion af omgivelsernes temperatur, altså  $t(T_{\text{om}})$ .
2. Beregn, som minimum, de optimale tidspunkter for kaffeindtag, når omgivelsestemperaturerne er hhv.  $0^\circ\text{C}$ , som på en kold vinterdag,  $10^\circ\text{C}$ , som på en forårsdag,  $20^\circ\text{C}$ , som på en tidlig sommerdag,  $23^\circ\text{C}$ , som indenfor på en kaffebar og endeligt  $28^\circ\text{C}$ , som på en varm sommerdag.

God fornøjelse.

jde.

## Bilag A - Datasæt fra kold vinterdag

Her er de tidligere 3.g'ers datasæt over afkølingen af kaffe ved en omgivelsestemperatur på  $0^{\circ}\text{C}$ .

Data er også at finde i csv-filen `Afkoeling_af_kaffe_nul_grader_udenfor.csv`.

x	0.00	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00
y	90.10	87.73	85.62	83.44	81.37	79.34	77.48	75.56	73.63	71.67	70.20
x	11.00	12.00	13.00	14.00	15.00	16.00	17.00	18.00	19.00	20.00	
y	68.22	66.53	65.00	63.30	61.61	60.23	58.81	57.24	55.91	54.62	
x	21.00	22.00	23.00	24.00	25.00	26.00	27.00	28.00	29.00	30.00	
y	53.30	51.81	50.51	49.44	48.04	46.95	45.89	44.54	43.38	42.45	
x	31.00	32.00	33.00	34.00	35.00	36.00	37.00	38.00	39.00	40.00	
y	41.47	40.69	39.45	38.46	37.71	36.65	35.48	34.90	33.82	33.20	
x	41.00	42.00	43.00	44.00	45.00	46.00	47.00	48.00	49.00	50.00	
y	32.29	31.55	30.77	30.11	29.30	28.45	27.73	27.11	26.45	25.58	
x	51.00	52.00	53.00	54.00	55.00	56.00	57.00	58.00	59.00	60.00	
y	25.22	24.56	23.92	23.26	22.55	22.15	21.72	21.04	20.56	20.06	
x	61.00	62.00	63.00	64.00	65.00	66.00	67.00	68.00	69.00	70.00	
y	19.55	19.03	18.55	18.06	17.70	17.39	16.90	16.29	16.18	15.67	
x	71.00	72.00	73.00	74.00	75.00	76.00	77.00	78.00	79.00	80.00	
y	15.22	14.83	14.43	14.22	13.81	13.41	13.03	12.64	12.45	12.29	
x	81.00	82.00	83.00	84.00	85.00	86.00	87.00	88.00	89.00	90.00	
y	12.16	11.61	11.16	11.03	10.73	10.42	10.09	10.03	9.78	9.44	
x	91.00	92.00	93.00	94.00	95.00	96.00	97.00	98.00	99.00	100.00	
y	9.22	9.08	8.81	8.54	8.36	7.99	7.96	7.63	7.59	7.44	
x	101.00	102.00	103.00	104.00	105.00	106.00	107.00	108.00	109.00	110.00	
y	7.24	6.99	6.91	6.76	6.44	6.31	6.11	6.05	5.91	5.79	
x	111.00	112.00	113.00	114.00	115.00	116.00	117.00	118.00	119.00	120.00	
y	5.64	5.44	5.35	5.28	5.04	4.84	4.81	4.65	4.72	4.35	
x	121.00	122.00	123.00	124.00	125.00	126.00	127.00	128.00	129.00	130.00	
y	4.35	4.22	4.04	3.99	4.14	4.03	3.70	3.64	3.55	3.39	
x	131.00	132.00	133.00	134.00	135.00	136.00	137.00	138.00	139.00	140.00	
y	3.53	3.41	3.28	3.26	3.08	3.03	2.91	2.72	2.91	2.75	
x	141.00	142.00	143.00	144.00	145.00	146.00	147.00	148.00	149.00	150.00	
y	2.53	2.57	2.64	2.35	2.39	2.27	2.43	2.31	2.32	2.27	
x	151.00	152.00	153.00	154.00	155.00	156.00	157.00	158.00	159.00	160.00	
y	2.09	2.08	1.99	2.09	1.91	1.91	1.79	1.82	1.65	1.52	
x	161.00	162.00	163.00	164.00	165.00	166.00	167.00	168.00	169.00	170.00	
y	1.77	1.39	1.41	1.53	1.50	1.43	1.49	1.52	1.43	1.14	
x	171.00	172.00	173.00	174.00	175.00	176.00	177.00	178.00	179.00	180.00	
y	1.33	1.18	1.26	1.13	1.26	1.12	1.09	1.00	0.99	1.05	