VEKTORER I 2D - RESTEN

(Matematik)

VIBENSHUS GYMNASIUM

INDHOLD

SKALARPRODUKT

SKALARPRODUKT

Vi kender allerede

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

SKALARPRODUKT

Vi kender allerede

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

Nu skal vi se på

SKALARPRODUKT

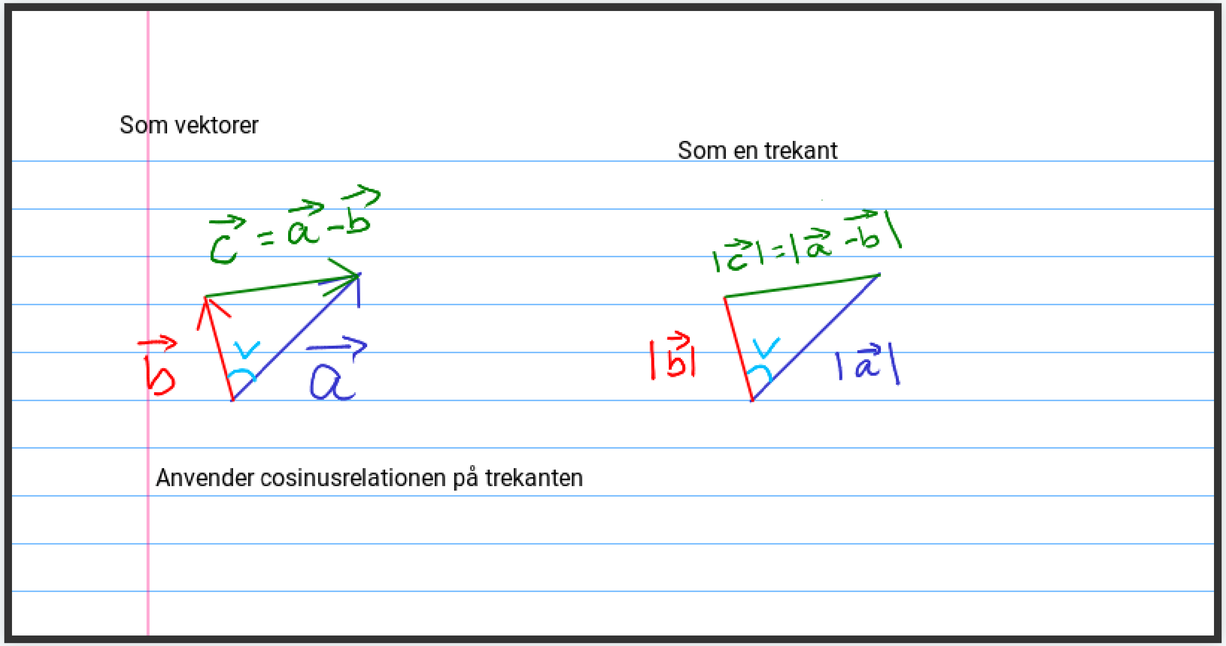
Vi kender allerede

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

Nu skal vi se på

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(v)$$

Udledning


Som vektorer
Som en trekant
$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$
$|\vec{c}| = |\vec{a} - \vec{b}|$
$\vec{b}$
$\vec{a}$
v
$|\vec{b}|$
$|\vec{a}|$
v
Anvender cosinusrelationen på trekanten

VINKEL MELLEM TO VEKTORER

Kombinér de to udtryk for skalarproduktet og isoler vinklen.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$$

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

VINKEL MELLEM TO VEKTORER

Hvis skalarproduktet mellem to vektorer er nul, er de to vektorer vinkelrette på hinanden.

$$\text{Hvis} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{så er} \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

OPGAVE

OPGAVE 5.5

Find prikproduktet af følgende vektorer:

a. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

b. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

c. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Bestem vinklen imellem de samme vektorer.

DETERMINANT

DETERMINANT

Determinanten mellem to vektorer udregnes således:

$$\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = a_x \cdot b_y - b_x \cdot a_y$$

DETERMINANT

Determinanten mellem to vektorer udregnes således:

$$det\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix}=a_x\cdot b_y-b_x\cdot a_y$$

Hvad kan determinanten så bruges til?

DETERMINANT

Determinanten mellem to vektorer udregnes således:

$$det\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = a_x \cdot b_y - b_x \cdot a_y$$

Hvad kan determinanten så bruges til?

Hvis determinanten mellem to vektorer er nul, er de to vektorer parallelle.

$$Hvis \quad det\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 0 \quad så\ er \quad \vec{a} \ /\!/ \ \vec{b}$$

Udledning

- Det vides at en vektor og dennes tværvektor er vinkelrette på hinanden

$$\vec{a} \cdot \hat{a} = 0$$

- Dvs. at hvis $\vec{a} \cdot \hat{b} = 0$ så er $\vec{a} \parallel \vec{b}$

Udledning af determinant

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$$

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix} \qquad \hat{b} = \begin{pmatrix} -b_y \\ b_x \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \hat{b} =$$

OPGAVER

1. Hvad er determinanten af $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$?
2. Hvad skal t være, for at vektorerne $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ og $\vec{d} = \begin{pmatrix} 5 - t \\ 6 \end{pmatrix}$ er parallelle?

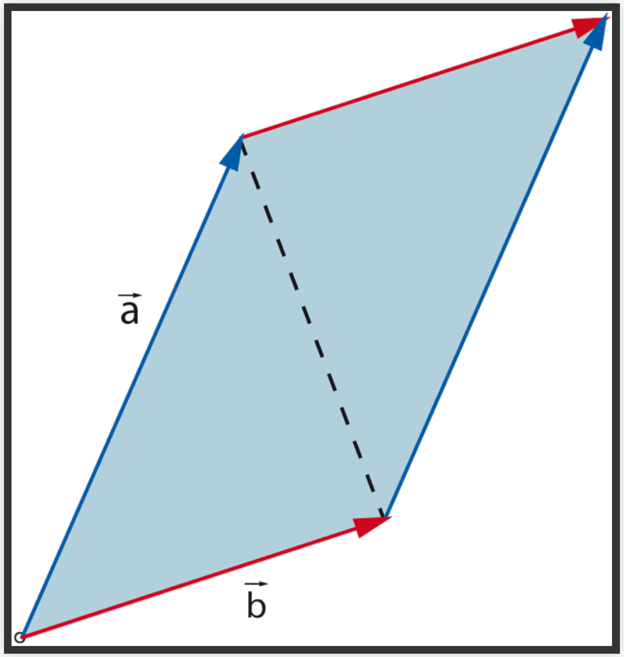
HVAD KAN DETERMINANTEN ELLERS BRUGES TIL?

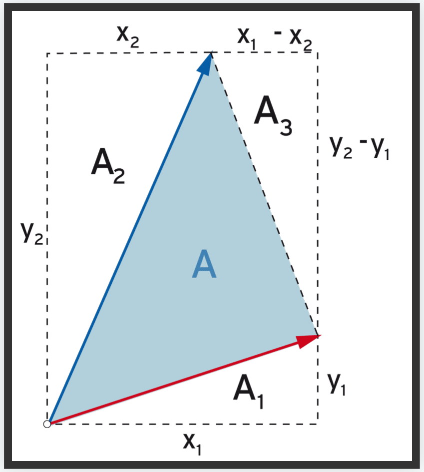
HVAD KAN DETERMINANTEN ELLERS BRUGES TIL?

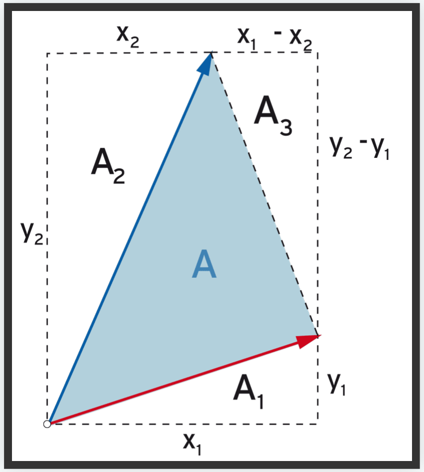
Bestemmelse af arealer af parallelogrammer og trekanter.

HVAD KAN DETERMINANTEN ELLERS BRUGES TIL?

Bestemmelse af arealer af parallelogrammer og trekanter.




x2
x1 - x2
A3
y2 - y1
A2
y2
A
A1
y1
x1

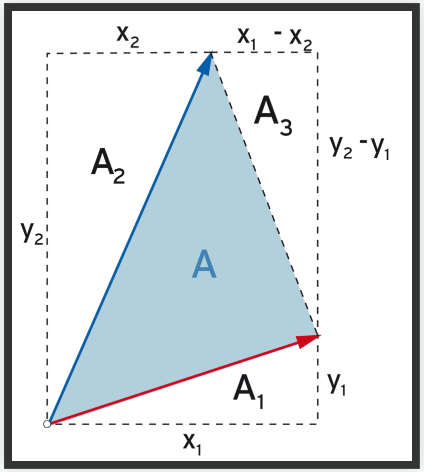


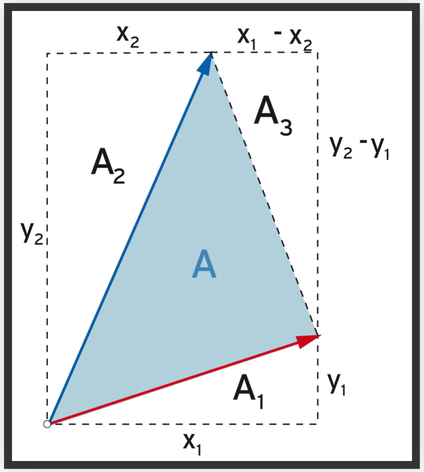
$$A_{\text{firkant}} = x_1 \cdot y_2$$

$$A_1 = \frac{1}{2} x_1 \cdot y_1$$

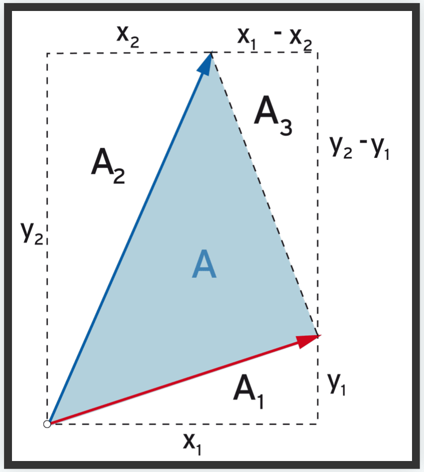
$$A_2 = \frac{1}{2} x_2 \cdot y_2$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \left(x_1 - x_2 \right) \cdot \left(y_2 - y_1 \right)$$


x2
x1 - x2
A3
y2 - y1
A2
y2
A
y1
A1
x1



Trekantens areal



Trekantens areal

$$A = A_{\text{firkant}} - A_1 - A_2 - A_3$$

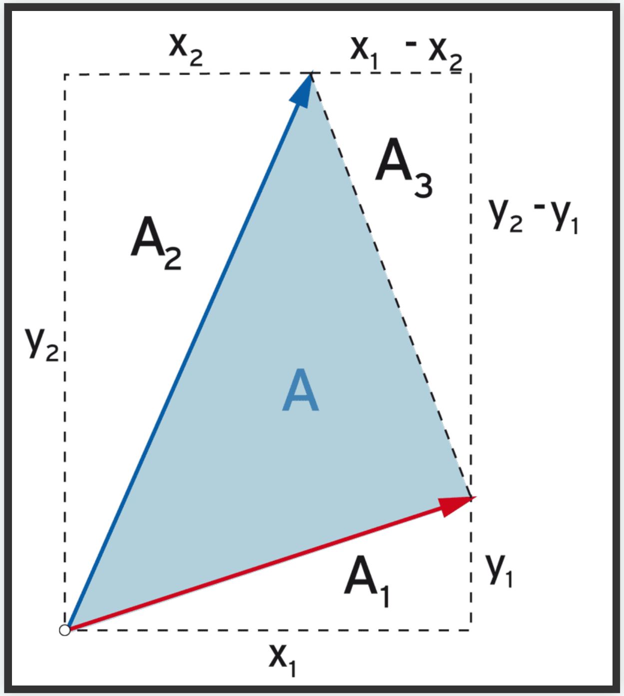
$$A = x_1 \cdot y_2 - \left(\frac{1}{2}x_1 \cdot y_1\right) - \left(\frac{1}{2}x_2 \cdot y_2\right) - \left(\frac{1}{2}\left(x_1 - x_2\right) \cdot \left(y_2 - y_1\right)\right)$$

$$A = x_1 \cdot y_2 - \frac{1}{2}x_1 \cdot y_1 - \frac{1}{2}x_2 \cdot y_2 - \frac{1}{2}x_1 y_2 + \frac{1}{2}x_1 y_1 + \frac{1}{2}x_2 y_2 - \frac{1}{2}x_2 y_1$$

$$A = x_1 \cdot y_2 - \frac{1}{2}x_1 y_2 - \frac{1}{2}x_2 y_1$$

$$A = \frac{1}{2}\left(x_1 \cdot y_2 - x_2 y_1\right) = \frac{1}{2} \det\left(\vec{b}, \vec{a}\right)$$

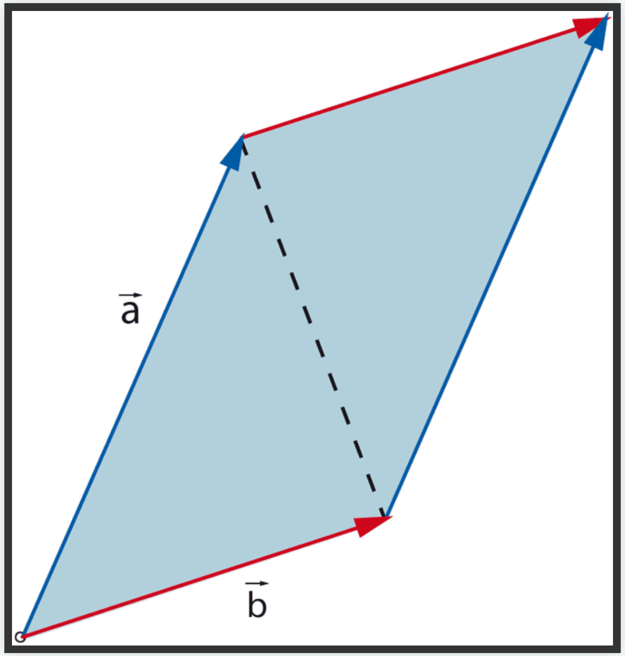
En trekants areal



$$A_{\text{trekant}} = \frac{1}{2}\left|x_1 \cdot y_2 - x_2 y_1\right|$$

$$A_{\text{trekant}} = \frac{1}{2}\left|\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right|$$

Et parallelograms areal



$$A_{\text{parallelogram}} = \left|x_1 \cdot y_2 - x_2 y_1\right|$$

$$A_{\text{parallelogram}} = \left|\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right|$$

Læg mærke til de numeriske værdier.

OPGAVER

Bestem arealerne til de tre trekanter, hvis hjørner er givet ved følgende:

1. (0,0), (4,6) og (7,5)
2. (-2,-3), (-5,6) og (-1,-7)
3. (3,-1), (2,3) og (-2,1)

OPGAVER

Bestem arealerne til de tre trekanter, hvis hjørner er givet ved følgende:

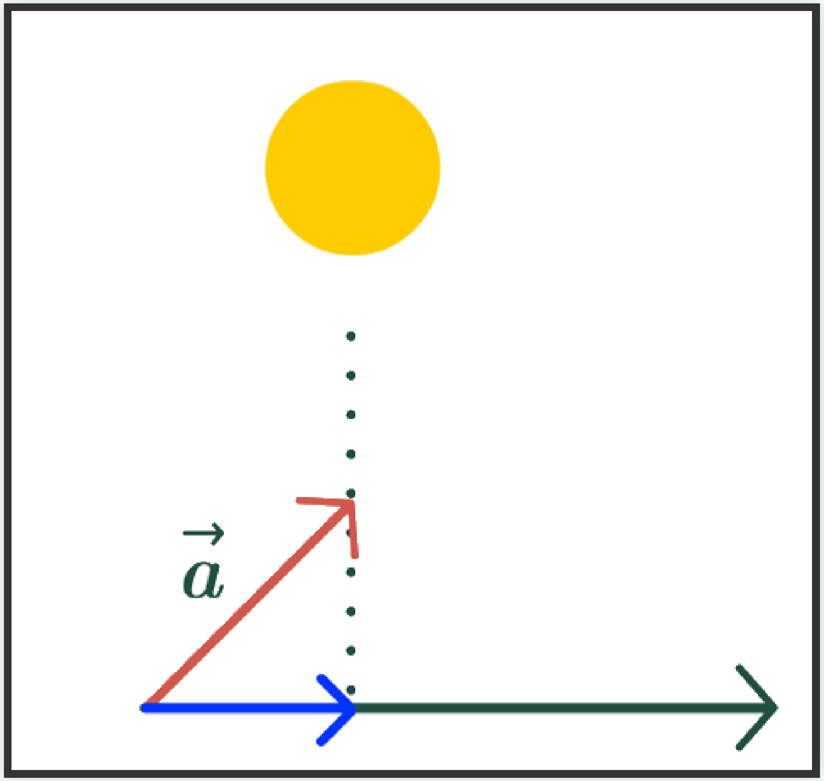
1. (0,0), (4,6) og (7,5)
2. (-2,-3), (-5,6) og (-1,-7)
3. (3,-1), (2,3) og (-2,1)

Hints: Opstil to vektorer, som har begyndelsespunkt i det samme punkt. Benyt herefter determinantmetoden til at bestemme trekantens areal.

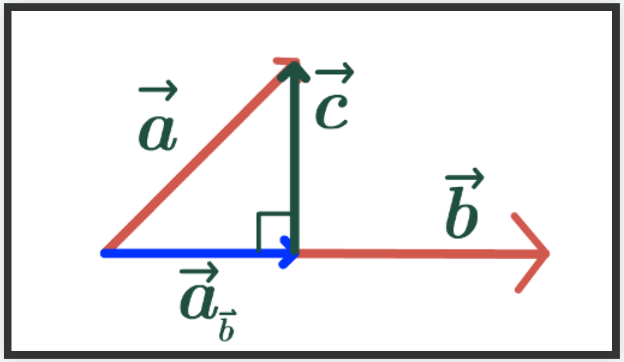
PROJEKTION

PROJEKTION

Lys med en lygte på både $\vec{a}$ og $\vec{b}$ så lyset falder vinkelret ind på $\vec{b}$. Projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er da skyggen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.



PROJEKTION



Koordinaterne til projektionsvektoren

$$\vec{a}_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \cdot \vec{e}_b$$

$$\vec{a}_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{a}_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} \cdot \vec{b}$$

BEVIS

- I makkerpar skal I læse beviset på https://matbhtx.systime.dk/?id=c15278. Skift til at læse højt for hinanden.
- Fortsæt først når alle har forstået sætningen.
- Hvordan kan det f.eks. være at $\vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2$?

BEVIS

Fra figur 5.22a fås, at:

$$\vec{a} = \vec{a_b} + \vec{c} \tag{2}$$

Da $\vec{a_b}$ er parallel med $\vec{b}$, vil det gælde, at:

$$\vec{a_b} = k \cdot \vec{b} \tag{3}$$

her er k en koefficient, hvor $k \in \mathbb{R}$.

Ved at kombinere (2) og (3) fås, at:

$$\vec{a} = k \cdot \vec{b} + \vec{c} \tag{4}$$

Prikproduktet:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \left(k \cdot \vec{b} + \vec{c}\right) \bullet \vec{b} = k \cdot \vec{b} \bullet \vec{b} + \vec{c} \bullet \vec{b} = k \cdot \vec{b} \bullet \vec{b} = k \cdot \left|\vec{b}\right|^2 \Leftrightarrow$$

$$k = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2} \tag{5}$$

Da $\vec{c}$ og $\vec{b}$ står vinkelret på hinanden, gælder det, at:

$$\vec{c} \bullet \vec{b} = 0$$

Vi kombinerer (3) og (5) og får:

$$\vec{a_b} = k \cdot \vec{b} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2} \cdot \vec{b} \tag{6}$$

LÆNGDEN AF PROJEKTIONSVEKTOREN

Er den numeriske værdi af det, der står foran enhedsvektoren.

$$|\vec{a}_b| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

EKSEMPEL

Eksempel på projektion af en vektor på en anden vektor

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Formel

$$\boxed{\vec{a}_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} \cdot \vec{b}}$$

Bestemmelse af $\vec{a}_b$

OPGAVE

For vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (De samme vektorer som i eksemplet) skal I

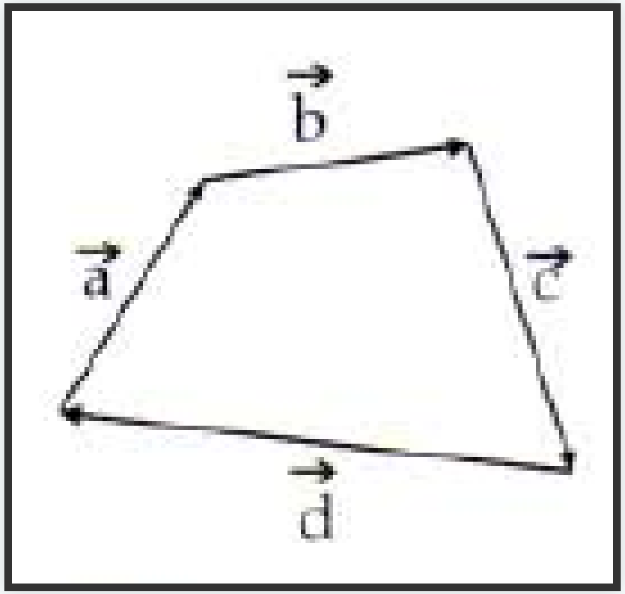
1. Bestemme koordinaterne til $\vec{b}_a$.
2. Bestemme længden af projektionsvektoren $|\vec{b}_a|$.

LIGEVÆGT / STATISKE KONSTRUKTIONER

LIGEVÆGT

Hvis summen af alle vektorer danner en lukket polygon, er der tale om ligevægt.

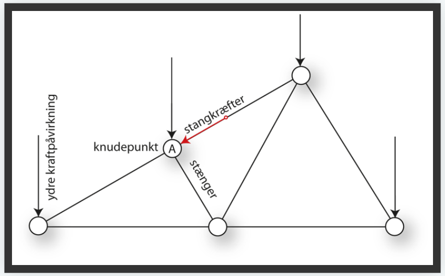
$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

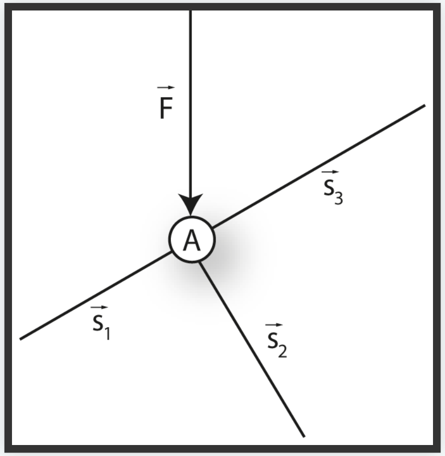


STATISKE KONSTRUKTIONER

Summen af alle (kraft)vektorer i et knudepunkt er lig nul.

$$\vec{F} + \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3 = \vec{0}$$





OPGAVER

Givet er vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

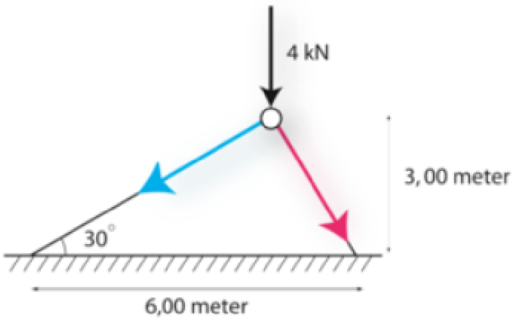
og

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. *Bestem koordinaterne til en vektor $\vec{c}$, der kan holde ligevægt med summen af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.*

OPGAVE 5.15

En simpel gitterkonstruktion i form af to stænger fastgjort i terræn påvirkes af en lodret kraft på 4 kN i knudepunktet. Bestem stangkræfterne i de to stænger.



Stangkræfter i en gitterkonstruktion

(Det er højden af gitterkonstruktionen, som er 3.00 meter.)

NORMALVEKTOR TIL RET LINJE

NORMALVEKTOR TIL RET LINJE

Hvis en ret linje skrives som

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

så kan den skrives som

$$y = -\frac{a}{b} \cdot x - \frac{c}{b}$$

NORMALVEKTOR TIL RET LINJE

For linjen

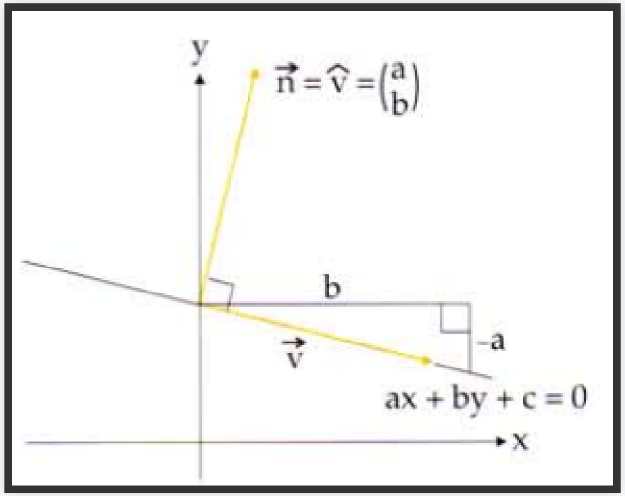
$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

Er *retningsvektoren*

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

og normalvektoren er da

$$\vec{n} = \hat{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$



NORMALVEKTOR TIL RET LINJE

For linjen

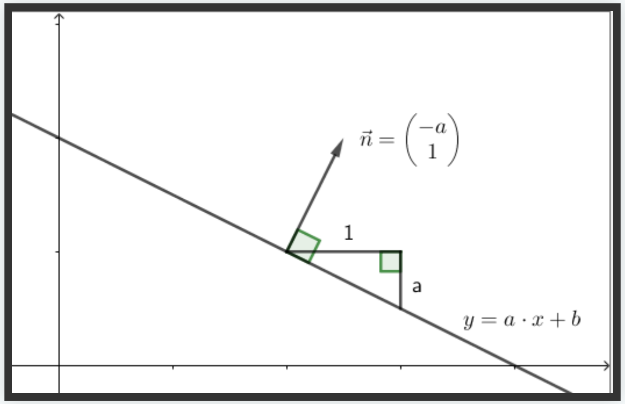
$$y = a \cdot x + b$$

Er *retningsvektoren*

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$$

og normalvektoren er da

$$\vec{n} = \hat{v} = \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix}$$



AFSTAND FRA LINJE TIL PUNKT

AFSTAND FRA LINJE TIL PUNKT

Hvis en ret linje er beskrevet med ligningen

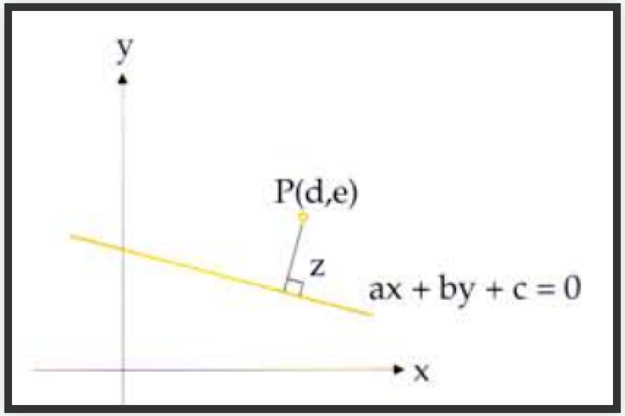
$$l : ax + by + c = 0$$

og et punkt er beskrevet som

$$P(d, e)$$

da kan den *vinkelrette* afstand mellem linjen og punktet bestemmes vha.

$$\boxed{dist(l, P) = z = \frac{|a \cdot d + b \cdot e + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$



OPGAVER

En ret linje er givet ved:

$$12x + 3y + 9 = 0$$

1. Bestem linjens normalvektor.
2. Bestem afstanden fra linjen til punktet $(-2, 4)$.
3. Bestem afstanden fra linjen til punktet $(0, 0)$.

To parallelle linjer er givet:

$$4x + 12y - 60 = 0$$
$$y = -\frac{1}{3}x - 2$$

1. Bestem afstanden mellem de to linjer.

EKSTRAOPGAVE

Hvordan vil afstandsformlen mellem en ret linje og et punkt mon se ud, hvis linjen er beskrevet ved

$$l : y = ax + b$$

og punktet ved

$$P(e, d)?$$

VEKTORER PÅ POLÆR FORM

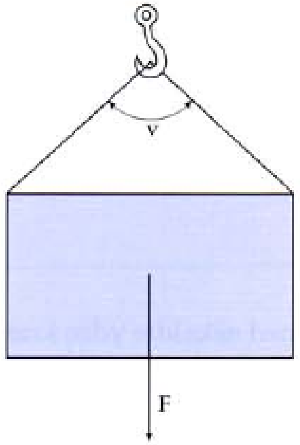
FINDES ALLEREDE I EN ANDEN PRÆSENTATION

PROBLEMOPGAVER

OPGAVE 282

Opgave 282

En container med en samlet tyngde F = 25 kN (kiloNewton) skal løftes af en kran. Til løfteopgaven anvendes wirer med forskellig længde.



Figur 9.56

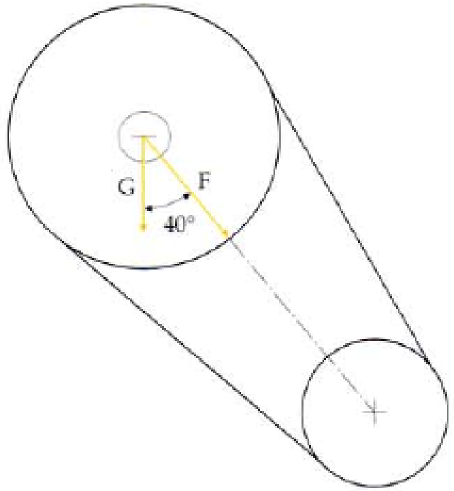
For at vurdere belastningen af wirerne, skal du bestemme størrelsen af kræfterne i wirerne, når vinklen v (se figur 9.56) er:

a) 60°
b) 90°
c) 120°
d) 150°

OPGAVE 283

Opgave 283

En aksel er gennem et kileremstræk påvirket af tyngden af en kileremsskive $|\vec{G}| = 1{,}2$ kN og gennem kileremstrækket af en kraft $|\vec{F}| = 3{,}43$ kN, som virker i retningen som vist på figur 9.57.



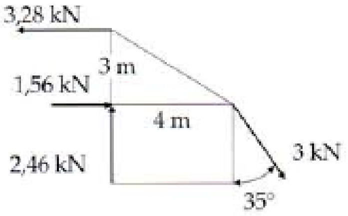
Figur 9.57

a) Du skal bestemme den resulterende kraftpåvirkning på akslen.
b) Du skal bestemme retningen af den resulterende kraftpåvirkning.

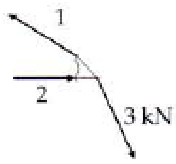
OPGAVE 284

Opgave 284

En gitterkonstruktion er belastet med såkaldte ydre kræfter som vist på figur 9.58.



Figur 9.58



Figur 9.59

a) Du skal vise, at summen af de ydre kræfter er lig med 0.

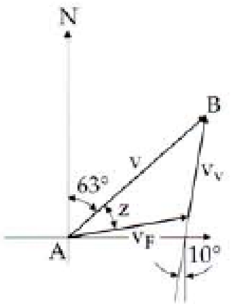
I knudepunktet som vist på figur 9.59 skal summen af ydre kræfter og de indre kræfter være lig med 0. De indre kræfter er kræfterne i stængerne.

b) Du skal ud fra de nævnte forudsætninger bestemme størrelsen af stangkraft nr. 1 og størrelsen af stangkraft nr. 2.

OPGAVE 285

Opgave 285

En flyvemaskine flyver fra en lufthavn A mod en anden lufthavn B, der ligger som vist på figur 9.60 i en retning på 63° i forhold til nord.



Figur 9.60

Flyvemaskinens hastighed $|\vec{v}_f|$ er 310 km/timen, men der er samtidig en vind fra syd (10° i forhold til nord). Vindens hastighed $|\vec{v}_v|$ er målt til 8 meter/sekund.

a) Du skal bestemme vinkel z under forudsætning af, at flyvemaskinen flyver direkte mod lufthavn B.
b) Du skal bestemme flyvemaskinens resulterende hastighed v.