Vektorfunktioner

Rette linjer og cirkler

Matematik A

Vibenshus Gymnasium

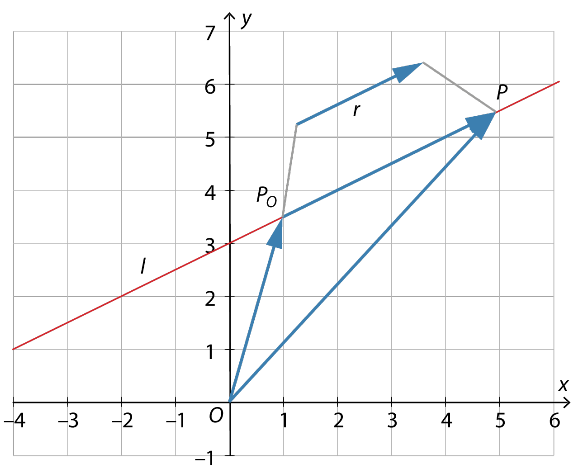
I dette skriv skal vi arbejde med rette linjer og cirkler som vektorfunktioner.

Først vil I blive introduceret til den rette linje som vektorfunktion. Derefter skal I regne to simple opgaver om netop dette. Dernæst vil I blive introduceret til en jævn cirkelbevægelse beskrevet som en vektorfunktion, hvorefter I igen skal regne to simple opgaver.

Efter opgaveregningen skal vi arbejde med "animationer"af vektorfunktioner i geogebra. Jeg demonstrerer i første omgang og siden prøver I selv.

Til sidst skal I arbejde med bestemmelse af hastigheds- og accelerationsvektorerne for en jævn cirkelbevægelse ved hjælp af differentialregning. Dette kommer til at foregå i jeres makkerpar og mundtligt.

Den rette linje som vektorfunktion



Figur 1: En ret linje som vektorfunktion.

En ret linje gennem et fast punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ og med retningsvektoren:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}$$

har parameterfremstillingen(vektorfunktionen):

$$\overrightarrow{OP}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x \cdot t + x_0 \\ r_y \cdot t + y_0 \end{pmatrix}.$$

Simple regneopgaver om rette linjer

Husk at vise formlen, som skal bruges. Skriv forklarende tekst. Medtag mellemregninger.

Opgave 1

En ret linje L går gennem punkterne $A = (4, -1)$ og $B = (1, 2)$.

1. Opstil en vektorfunktion for L.

Opgave 2

En ret linje med hældningstallet $a = 2.5$ skærer x-aksen i punktet $P_x = (4, 0)$.

1. Opstil en parameterfremstilling for linjen.

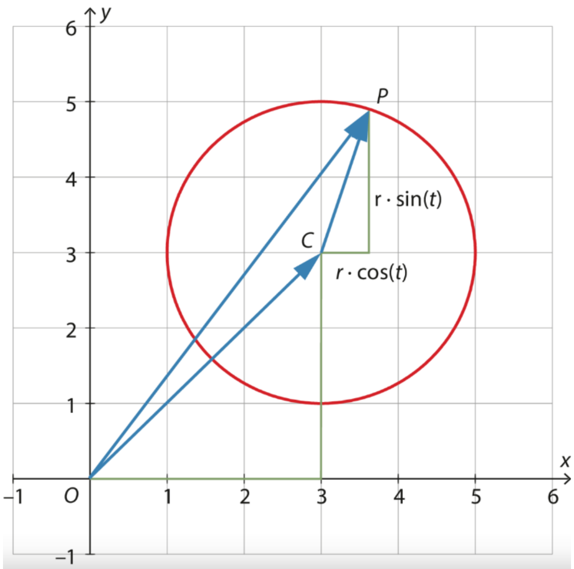
Opgave 3

En ret linje er givet ved vektorfunktionen:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t - 1 \\ 3 + 2 \cdot t \end{pmatrix}$$

1. Beregn linjens skæring med y-aksen.
2. Beregn linjens skæring med x-aksen.
3. Undersøg om punktet $P = (-3, 7)$ er beliggende på $\vec{r}(t)$.
4. Omskriv vektorfunktionen til en almindelig funktion af typen $f(x) = a \cdot x + b$.

Introduktion til cirklen



Figur 2: En cirkel som en vektorfunktion. Figuren er lånt fra jeres ibog https://mathtxa.systime.dk. Læg mærke til at vinkelhastighed og faseforskydning ikke er medtaget.

Et objekt som udfører en jævn cirkelbevægelse kan beskrives med følgende generelle parameterfremstilling:

$$\overrightarrow{OP}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi) \\ r \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) \end{pmatrix},$$

hvor $P_0 = (x_0, y_0)$ er centrumskoordinatet til cirklen, r er radius i cirklen, ω er vinkelhastigheden og ϕ er faseforskydningen.

Simple regneopgaver om cirkler

Husk at vise formlen, som skal bruges. Skriv forklarende tekst. Medtag mellemregninger.

Opgave 4

Et objekt bevæger sig rundt på periferien af en cirkel givet ved ligningen:

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 25\,.$$

med en vinkelhastighed på 3 s^{-1} og en faseforskydning på $-\frac{\pi}{2}$.

1. Omskriv ligningen til en vektorfunktion.
2. Afbild vektorfunktionen i et koordinatsystem.

Opgave 5

En cirkelbue er beskrevet ved vektorfunktionen:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1-\cos(t) \\ 3+\sin(t) \end{pmatrix}\text{ , hvor } 1 \leq t \leq 2\,.$$

1. Beregn buens radius.
2. Beregn koordinaterne til buens centrum.
3. Beregn koordinaterne til buens endepunkter.
4. Beregn koordinaterne til det punkt, hvor $t = 1.8$.

Et punkt på buen har koordinaterne $(x, y) = (0.733, y)$.

5. Beregn punktets tilhørende t-værdi.
6. Afbild alle oplysninger om cirkelbuen og punktet i et koordinatsystem.

Animation i geogebra af vektorfunktioner

Jeg viser jer, hvordan banekurver og stedvektorer kan tegnes og animeres i geogebra. Efterfølgende er det jeres opgave, at animere jeres løsninger til opgaverne.

Udledning af hastigheds- og accelerationsvektorer for den jævne cirkelbevægelse vha. differentiation på tavlen i makkerpar

Her i den sidste øvelse skal I finde sammen i jeres makkerpar. Øvelsen går ud på mundtlig formidling til jeres makkere, ligesom da I skulle gennemgå beviser for hinanden. I skal arbejde med den jævne cirkelbevægelse beskrevet med vektorfunktionen:

$$\overrightarrow{OP}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi) \\ r \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) \end{pmatrix}.$$

Makker 1 Bestem et udtryk for hastighedsvektorfunktionen ved at differentiere stedvektorfunktionen. Undersøg den indbyrdes orientering af henholdsvis stedvektorfunktionen og hastighedsvektorfunktionen gennem brug at det, som hedder tværvektorer.

Makker 2 Bestem et udtryk for accelerationsvektorfunktionen ved at differentiere hastighedsvektorfunktionen, som makker 1 lige har udledt. Undersøg den indbyrdes orientering af stedvektorfunktionen og nu accelerationsvektorfunktionen. Overvej, hvad modsatte vektorer er.