Jacob Manning

HW 1

1. Consider $F(\beta, p, L, U)$ with $\beta = 10$

a. What are the smallest p & U and largest value of L for 365.27 and 0.000512 can be represented in normalized system

$3.6527 \cdot 10^2 \qquad 5.12 \cdot 10^{-4}$

$L = -4 \quad U = 2 \quad p = 5$

b. What if not normalized?

$p = 6$ w/o normalization you would not need L or U

2. Let $x, y \in F(\beta, p, L, U)$. y is adjacent to x

a. Minimum possible spacing β^L

b. Maximum possible spacing $(\beta - 1) \ldots (\beta - 1)_{p-1} \cdot \beta^U = \beta^{p-1+U}$

3. Prove $\|A\|_\alpha = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\alpha}$ $\alpha \in \{1, 2, \infty\}$ is a matrix norm

if $A = 0$ the $\|A\|_\alpha = 0$

if $A \neq 0$ $Ax = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i$

$\frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\alpha} > 0$ $\frac{\max \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n |a_{ij} x_i|}{\sum_{i=1}^n |x_i|} > 0$ $\alpha = 1$ since $x \neq 0$ & ... sum of positive

$\alpha = 2$ $\frac{\max \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (a_{ij} x_i)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}} > 0$ since no negatives & $x \neq A \neq 0$

$\alpha = \infty$ $\frac{\max |\sum_{i=1}^n |a_{ij} x_i||}{\max |x_i|} > 0$ ratio of positive numbers

$\|kA\|_\alpha = |k| \|A\|_\alpha$ $\forall$ scalar k

$\|kA\|_\alpha = \max \frac{\|kAx\|_\alpha}{\|x\|_\alpha}$ $\alpha = 1$ $\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n |k a_{ij} x_i| = |k| \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n |a_{ij} x_i|$

$|k| \|Ax\|_\alpha$

$\alpha = 2$ $\|kAx\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n k^2 (a_{ij} x_i)^2} = |k| \|Ax\|_2$

$\alpha = \infty$ $\|kAx\|_\infty = \max |\sum k a_{ij} x_i| = |k| \|Ax\|_\infty$

$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ $\|A + B\|_1 = \frac{\|Ax + Bx\|_1}{\|x\|_1}$ $\alpha = 1$ $\frac{\sum \sum_{i=1}^n |a_{ij} x_i + b_{ij} x_i|}{\sum_{i=1}^n |x_i|} \leq \frac{\sum \sum_{i=1}^n |a_{ij} x_i| + \sum \sum_{i=1}^n |b_{ij} x_i|}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{\|Ax\|_1 + \|Bx\|_1}{\|x\|_1}$

$\alpha = 2$ $\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (a_{ij} x_i)^2 + (b_{ij} x_i)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} \leq \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (a_{ij} x_i)^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (b_{ij} x_i)^2}}{\sqrt{\sum x_i^2}} = \frac{\|Ax\|_2 + \|Bx\|_2}{\|x\|_2}$

$\alpha = \infty$ $\frac{\max |\sum_{i=1}^n |a_{ij} x_i + b_{ij} x_i||}{\max |\sum_{i=1}^n x_i|} \leq \frac{\max |\sum_{i=1}^n |a_{ij} x_i| + \sum_{i=1}^n |b_{ij} x_i||}{\max |\sum_{i=1}^n x_i|} = \frac{\|Ax\|_\infty + \|Bx\|_\infty}{\|x\|_\infty}$

5 cont $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$ $\alpha=1$ $\dfrac{\max\left|\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{ij} x_i\right|}{\sum_{i=1}^{n}|x_i|} \le \dfrac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}x_i|\,|b_{ij}x_i|}{\sum_{i=1}^{n}|x_i|} = \|A\|_1\|B\|_1$

$\alpha=2$ $\dfrac{\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}b_{ij}x_i)^2\right)^{1/2}}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2}} \le \dfrac{\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}x_i)^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(b_{ij}x_i)^2\right)^{1/2}}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2}} = \|A\|_2\|B\|_2$

$\alpha=\infty$ $\dfrac{\max\left|\sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{ij} x_i\right|}{\max\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|} \le \dfrac{\max\left|\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i\right| \max\left|\sum_{i=1}^{n} b_{ij} x_i\right|}{\max\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|} = \|A\|_\infty\|B\|_\infty$

4. For $A_{m\times n}$ prove that $\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| = \max\limits_{x\ne 0}\dfrac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}$

$\|Ax\|_1 = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}\right| \le \sum_{i=1}^{n}|x_i|\,|a_{ij}|$ Let k be max column

$\le \sum_{i=1}^{n}|a_{ik}|\sum_{i=1}^{n}|x_i|$

$= \max\limits_{1\le j\le m}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\,\|x\|_1$

$\|A\|_1 = \dfrac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \le \max\limits_{1\le j\le m}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$

$\max\limits_{1\le j\le m}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| = \sum_{i=1}^{n}|a_{ik}| = \sum_{i=1}^{n}|a_{ik}e_k| = \|Ae_k\|_1 \le \|A\|_1$

$\therefore$ $\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le m}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$

5. Show $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\,\|x\|_2 \le n\|x\|_\infty$

Let $\|x\|_\infty = x_k$ $\quad x_k^2 \le \sum_{i=1}^n x_i^2 \Rightarrow \|x\|_\infty \le \|x\|_2$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n (x_i^2)\right)^{1/2} \le \sum_{i=1}^n (x_i^2)^{1/2} = \|x\|_1 \Rightarrow \|x\|_2 \le \|x\|_1$$

$$\|x\|_1^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \le \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n 1 = n\|x\|_2^2 \Rightarrow \|x\|_1 \le \sqrt{n}\,\|x\|_2$$

$$\|\sqrt{n}\,x\|_2^2 = n\sum_{i=1}^n x_i^2 \le n\sum_{i=1}^n x_k^2 = n^2 x_k^2 = \|nx\|_\infty^2 \Rightarrow \sqrt{n}\,\|x\|_2 \le n\|x\|_\infty$$

6. $\mathrm{Cond}_2(A)/n \le \mathrm{Cond}_1(A) \le n\,\mathrm{Cond}_2(A)$

$$\|A^{-1}\|_1\|A\|_1 \le \|\sqrt{n}A\|_2\,\|\sqrt{n}A\|_2$$

$$\mathrm{Cond}_1 A = \|A^{-1}\|_1\|A\|_1 = \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}\frac{\|A^{-1}x\|_1}{\|x\|_1} \le \frac{\sqrt{n}\,\|Ax\|_2\sqrt{n}\,\|A^{-1}x\|_2}{\|x\|_1^2} \le \frac{n\|Ax\|_2\|A^{-1}x\|_2}{\|x\|_2^2} = n\,\mathrm{Cond}_2$$

$$\frac{\mathrm{Cond}_2 A}{n} = \frac{\|A\|_2\|A^{-1}\|_2}{n} = \frac{\|Ax\|_2\|A^{-1}x\|_2}{n\|x\|_2^2} \le \frac{\|Ax\|_1\|A^{-1}x\|_1}{n\|x\|_2^2} \le \frac{\|Ax\|_1\|A^{-1}x\|_1}{\|x\|_1^2} = \mathrm{Cond}_1 A$$

$$\frac{\mathrm{Cond}_\infty A}{n} \le \mathrm{Cond}_2 A \le n\,\mathrm{cond}_\infty A$$

given $\sqrt{n}\,\|x\|_2 \le n\|x\|_\infty$ $\Rightarrow$ $\|x\|_2 \le \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$

$$\|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \frac{\|Ax\|_2\|A^{-1}x\|_2}{\|x\|_2^2} \le \frac{n\|Ax\|_\infty\|A^{-1}x\|_\infty}{\|x\|_2^2} \le \frac{n\|Ax\|_\infty\|A^{-1}x\|_\infty}{\|x\|_\infty^2} = n\,\mathrm{Cond}_\infty A$$

and $\|x\|_\infty \le \|x\|_2$

$$\frac{\mathrm{Cond}_\infty A}{n} = \frac{\|Ax\|_\infty\|A^{-1}x\|_\infty}{n\|x\|_\infty^2} \le \frac{\|Ax\|_2\|A^{-1}x\|_2}{n\|x\|_\infty^2} \le \frac{\|Ax\|_2\|A^{-1}x\|_2}{\|x\|_2^2} = \mathrm{Cond}_2 A$$

6 cont. $\frac{\text{Cond}_1 A}{n^2} \le \text{Cond}_\infty A \le n^2 \text{Cond}_1 A$ $\quad \|x\|_1^2 \le n^2 \|x\|_\infty^2$

$\text{Cond}_\infty A = \frac{\|Ax\|_\infty \|A^{-1}x\|_\infty}{\|x\|_\infty^2} \le \frac{\|Ax\|_1 \|A^{-1}x\|_1}{\|x\|_\infty^2} \le \frac{n^2 \|Ax\|_1 \|A^{-1}x\|_1}{\|x\|_1^2} = n^2 \text{Cond}_1 A$

$\frac{\text{Cond}_1 A}{n^2} = \frac{\|Ax\|_1 \|A^{-1}x\|_1}{n^2 \|x\|_1^2} \le \frac{n^2 \|Ax\|_\infty \|A^{-1}x\|_\infty}{\cancel{n^2} \|x\|_1^2} \le \frac{\|Ax\|_\infty \|A^{-1}x\|_\infty}{\|x\|_\infty^2} = \text{Cond}_\infty A$

7. Prove the following for $\alpha = 1, 2, \infty$

a. $\text{cond}_\alpha I = 1$

$\|I\|_\alpha \|I^{-1}\|_\alpha = \|I\|_\alpha \|I\|_\alpha = 1 \quad \forall \alpha$

b. $\text{Cond}_\alpha A \ge 1 \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$1 = \text{cond}_\alpha I = \|I\|_\alpha = \|AA^{-1}\|_\alpha \le \|A\|_\alpha \|A^{-1}\|_\alpha$

c. $\text{Cond}\, P = 1$

$1 = \text{Cond}\, I = \text{cond}\, P^2 = (\text{Cond}\, P)^2 = 1$

d. $\text{Cond}\, D = \frac{\max_i |d_i|}{\min_i |d_i|}$

$D^{-1} = \frac{1}{d_i} \qquad \|D\| = \min \frac{1}{|d_i|}$

$\|D\| \, \|D^{-1}\| = \frac{\max |d_i|}{\min |d_i|}$