De progressionibus harmonicis observationes.

Auctore

Leonh. Eulero.[*]

§. 1.

Progressionum harmonicarum nomine intelliguntur omnes series fractionum, quarum numeratores sunt aequales inter se, denominatores vero progressionem arithmeticam constituunt. Huiusmodi ergo forma generalis est $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{a+b}$, $\frac{c}{a+2b}$, $\frac{c}{a+3b}$, etc. Quique enim tres termini contigui ut $\frac{c}{a+b}$, $\frac{c}{a+2b}$, $\frac{c}{a+3b}$, hanc habent proprietatem, ut differentiae extremorum a medio sint ipsis extremis proportionales. Scilicet est $\frac{c}{a+b} - \frac{c}{a+2b} : \frac{c}{a+2b} - \frac{c}{a+3b} = \frac{c}{a+b} : \frac{c}{a+3b}$. Cum autem haec sit proprietas proportionis harmonicae; vocatae sunt istiusmodi fractionum series progressiones harmonicae. Vocari etiam possent reciprocae primi ordinis, quia in termino generali $\frac{c}{a+(n-1)b}$ index n unicam eamque negativam habet dimensionem.

[*]Copied by Walter Jacob. Every attempt has been made to create an accurate copy of the original paper, with a few exceptions. I have made the switch from consonantal *u* to *v*, where it is common (*e.g.*, *sive* instead of *siue*) and I only use contemporary orthographical symbols (so no long *s*). I also fixed several punctuation or capitalization errors; *e.g.*, line 11 of subsection 3 in the original has a comma followed by, "*Ex quo . . .* ," which I have changed to a period. Otherwise, any remaining errors are mine.

§. 2.

Quanquam in his seriebus termini perpetuo decrescunt; tamen summa huiusmodi serei in infinitum continuatae semper est infinita. Ad hoc demonstrandum non opus est methodo hasce series summandi; sed veritas facile ex sequente principio elucebit. Series quae in infinitum continuata summam habet finitam, etiamsi se duplo longius continuetur nullum accipiet augmentum, sed id quod post infinitum adiicitur cogitatione, re vera erit infinite parvum. Nisi enim hoc ita se haberet, summa seriei etsi in infinitum continuatae non esset determinata et propterea non finita. Ex quo consequitur, si id, quod ex continuatione ultra terminum infinitesimum oritur, sit finitae magnitudinis, summam seriei necessario infinitam esse debere. Ex hoc principio iudicare poterimus, utrum seriei cuiusque propositae summa sit infinita an finita.

§. 3.

Sit itaque series $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{a+b}$, $\frac{c}{a+2b}$, etc. in infinitum continuata, terminusque infinitesimus $\frac{c}{a+(i-1)b}$, denotante i numerum infinitum, qui sit index huius termini. Iam haec series ulterius continuetur a termino $\frac{c}{a+ib}$ usque as terminum $\frac{c}{a+(ni-1)b}$ cuius exponens est ni. Horum terminorum igitur insuper adiectorum numerus est $(n-1)i$; summa eorum vero minor erit quam $\frac{(n-1)ic}{a+ib}$ maior vero quam $\frac{(n-1)ic}{a+(ni-1)b}$. Sed quia i est infinite magnum, evanescet a in utroque denominatore. Quare summa maior erit quam $\frac{(n-1)c}{nb}$ at minor quam $\frac{(n-1)c}{b}$. Ex quo perspicitur hanc summam esse finitam, atque consequenter seriei propositae $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{a+b}$, etc. in infinitum continuatae summam infinite magnam.

§. 4.

Huius autem summae terminorum ab i ad ni limites propiores ex sequentibus proportionis harmonicae proprietatibus eliciuntur. Scilicet omnis proportio harmonica its est comparata, ut terminus medius minor sit quam pars tertia summae terminorum omnium. Hanc ob rem terminus medius inter $\frac{c}{a+ib}$ et $\frac{c}{a+(ni-1)b}$, qui est $\frac{c}{a+\frac{ni+i-1}{2}b}$, ductus in terminorum numerum $(n-1)i$, seu $\frac{(n-1)ic}{a+\frac{ni+i-1}{2}b}$ minor erit quam summa terminorum. Sive terminorum summa hinc maior erit quam $\frac{2(n-1)c}{(n+1)b}$ ob i inifinitum. Praeterea medium arithmeticum inter terminos extremos maius est parte tertia summae terminorum. Ex hoc sequitur fore etiam in serie harmonica terminorum summam minorem quam $(n-1)i$ in medium arithmeticum terminorum extremorum, quod est $\frac{(2a+(ni+i-1)b)c}{2(a+ib)(a+(ni-1)b)}$ seu $\frac{(n+1)c}{2nib}$, ductum. Quare summa erit minor quam $\frac{(n^2-1)c}{2nb}$, ita ut hi duo limites sint $\frac{2(n-1)c}{(n+1)b}$ et $\frac{(n^2-1)c}{2nb}$, adeoque summa proxime = $\frac{(n-1)c}{b\sqrt{n}}$ quod est medium proportionale inter limites.