

Спектральные графы на многообразиях Калаби–Яу: Исследовательская гипотеза и программа

Евгений Монахов

ООО "ВОСКОМ ОНЛАЙН" Research Initiative <https://voscom.online/>

Сентябрь 2025

Аннотация

В данной работе представлена исследовательская гипотеза и программа, посвящённые спектральным свойствам графов, построенных на основе многообразий Калаби–Яу (СУ). Основное утверждение состоит в том, что дискретные лапласианы на СУ-графах отражают нетривиальную топологическую и геометрическую информацию, связанную с числами Ходжа и характеристикой Эйлера. Предлагается систематическое исследование спектральных моделей, вдохновлённых СУ, как шаг к построению теории СУ-битов и их мета-квантовых расширений. Хотя в данной работе отсутствуют численные эксперименты, она задаёт теоретическую основу и намечает подробный план исследовательских задач.

1 Введение и мотивация

Изучение вычислений в многомерных геометрических структурах может дать новые идеи для более простых моделей. Многообразия Калаби–Яу хорошо известны из теории струн и комплексной геометрии как богатые математические структуры с жёсткими топологическими ограничениями. Мы предполагаем, что спектральная теория графов на дискретизациях СУ-пространств может выявить вычислительные особенности, недоступные в обычных евклидовых условиях. Настоящий документ следует рассматривать как программное исследовательское сообщение: он формулирует гипотезы и предлагает систематический план их проверки.

2 Определения и постановка задачи

Пусть M — многообразие Калаби–Яу комплексной размерности k . Рассмотрим дискретизацию $\{p_1, \dots, p_N\} \subset M$ с рёбрами, заданными правилом k ближайших соседей. Дискретный лапласиан определяется как

$$(Lf)(p_i) = \sum_{j:(i,j) \in E} w_{ij}(f(p_i) - f(p_j)),$$

где w_{ij} зависит от СУ-метрики. Нас интересует спектр $\{\lambda_\alpha\}$ оператора L и его асимптотика при $N \rightarrow \infty$.

3 Центральная гипотеза

Мы выдвигаем следующие предположения:

- Распределение собственных значений L при $N \rightarrow \infty$ стремится к спектру оператора Лапласа–Бельтрами на M .
- Спектральные разрывы и вырождения содержат информацию о числах Ходжа $(h^{1,1}, h^{2,1})$ многообразия M .
- Эти спектральные характеристики могут быть использованы для определения *вычислительной ёмкости* $\mathcal{C}(M)$ в СУ-вдохновлённых квантовых моделях.

4 Программа исследований

Предлагаемая программа исследований состоит из нескольких этапов:

4.1 Этап 1: Методы дискретизации

1. Разработать численные дискретизации простых СУ-пространств: 2-тор T^2 , 3-тор T^3 и поверхность КЗ.
2. Реализовать как случайное распределение точек, так и решётчатые сетки.
3. Определить веса рёбер с использованием приближённых риккитиплых метрик (например, по алгоритму Дональдсона).

4.2 Этап 2: Спектральный анализ

1. Вычислить спектры дискретных лапласианов при росте N .
2. Изучить свойства сходимости к спектру непрерывного оператора.
3. Проанализировать плотность спектра, разрывы и вырождения.

4.3 Этап 3: Топологические проверки

1. Сравнить структуру вырождений с известными числами Ходжа.
2. Исследовать корреляции между низколежащими собственными значениями и характеристикой Эйлера.
3. Проверить устойчивость этих соответствий при различных схемах дискретизации.

4.4 Этап 4: Вычислительная интерпретация

1. Определить и уточнить понятие *вычислительной ёмкости* $\mathcal{C}(M)$ как функции спектральных инвариантов.
2. Интерпретировать $\mathcal{C}(M)$ в терминах возможных кодировок квантовых состояний.
3. Ввести аналогию с кубитами и предложить СҮ-биты как вычислительные примитивы.

4.5 Этап 5: К мета-СҮбитам

1. Расширить методику на более сложные СҮ-3, например квинтику в \mathbb{CP}^4 .
2. Изучить устойчивость спектра при деформациях комплексной структуры.
3. Определить мета-СҮбиты как составные структуры, построенные из семейств СҮ-битов.

5 Ожидаемые результаты

Подтверждение этих гипотез позволит установить количественную связь между топологией СҮ и вычислительной ёмкостью. Это станет первым шагом к СҮ-битам и мета-СҮбитам, открывая основу для нового класса мета-квантовых вычислительных моделей.

Благодарности

Автор благодарит ООО "ВОСКОМ ОНЛАЙН" исследовательские инициативы <https://voscom.online> за предоставленную концептуальную основу.

Список литературы

- [1] Candelas и др., "Vacuum configurations for superstrings," Nucl. Phys. B, 1985.
- [2] Exner, P., "Quantum graphs: An introduction," Annals of Physics, 2008.
- [3] Belhaj, A. и др., "Qubits from Calabi–Yau manifolds and toric geometry," arXiv:1408.3952, 2014.
- [4] Donaldson, S.K., "Numerical results on Calabi–Yau metrics," Class. Quantum Grav., 2005.
- [5] Chung, F., "Spectral Graph Theory," CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 1997.