**Introduzione ai Modelli Probabilistici**
Corso interno per il I anno della Classe di Scienze Naturali A.A. 2016/2017

**Esercizi di fine corso**

**Esercizio 1**. Si consideri la seguente variante del problema del collezionista di figurine.
Una raccolta di figurine è formata da $N$ figurine distinte, identificate con l'insieme $\{1,\dots,N\}$. Supponiamo che le figurine vengano vendute singolarmente e che ad ogni acquisto la probabilità di trovare la figurina $k$ valga $p_k$, con $k=1,\dots,N$ e $p_1+\dots+p_N=1$. Sia $T$ il numero aleatorio di figurine necessarie a concludere la raccolta, e sia $Z_k$, con $k\in 1,\dots,N$, il numero di figurine necessarie per acquistare la figurina $k$.

(1) Determinare la distribuzione delle $Z_k$.
(2) Determinare la distribuzione e la media delle variabili $\min\{Z_{k_1},\dots,Z_{k_j}\}$, per $(k_1,\dots k_j)\subset\{2,\dots N\}$.
(3) Esprimere $T$ come funzione delle $Z_k$.
(4) Dai punti precedenti ed usando la seguente relazione, valida per valori reali $x_1,\dots,x_n$,
$$\max_i x_i=\sum_i x_i-\sum_{i<j}\min\{x_i,x_j\}+\dots+(-1)^{n+1}\min\{x_1,\dots,x_n\}$$
si determini la media di $T$ come funzione di $p_1,\dots,p_N$.

**Esercizio 2**. Si consideri il problema della rovina del giocatore in una serie di scommesse in cui il giocatore A risulti favorito, ovvero abbia probabilità di vincita di una scommessa pari a $p>\frac{1}{2}$.

(1) Calcolare la probabilità di rovina del giocatore A.
(2) Determinare il numero medio di scommesse che il giocatore A (e quindi il giocatore B) esegue per terminare il gioco.
*(Sugg: Indicare tale tempo come $T_x$ e metterlo in relazione con $T_{x+1}$ e $T_{x-1}$)*
(3) Si consideri la passeggiata aleatoria $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ così definita:
$$S_0=x\in\mathbf{N}\,,\quad S_n=x+\sum_{k=1}^{n}X_k\quad\text{per } n\ge 1$$
con $\{X_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ variabili aleatorie indipendenti e con distribuzione
$$\mathbf{P}(X_k=+1)=p\quad\mathbf{P}(X_k=-1)=1-p\,,\quad\text{con } p>\frac{1}{2}$$
Usare il punto precedente per calcolare la probabilità che $S_n$ non raggiunga mai lo $0$, ovvero posto $T:=\min\{n:S_n=0\}$, determinare $P(T=\infty)$.

**Esercizio 3**. Si consideri la passeggiata aleatoria simmetrica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con punto iniziale $x\in\mathbf{Z}$, definita come
$$S_0=x\,,\quad S_n=x+\sum_{k=1}^{n}X_k\quad\text{per } n\ge 1$$
con $\{X_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ variabili aleatorie indipendenti e con distribuzione $\mathbf{P}(X_k=+1)=\mathbf{P}(X_k=-1)=\frac{1}{2}$. Si indichi con $\mathbf{P}_x$ la probabilità relativa ai cammini $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con l'usuale convenzione che se $x=0$, $\mathbf{P}_0\equiv\mathbf{P}$. Provare le seguenti relazioni.

(1) Per ogni $x,y\in\mathbf{Z}$ vale che
$$\mathbf{P}(S_n=y)=\mathbf{P}_x(S_n=x+y)$$
$$\mathbf{P}(S_n=y,S_j\neq 0\,\forall j<n)=\mathbf{P}_x(S_n=x+y,S_j\neq x\,\forall j\le n)$$

(2) Per ogni $x \in \mathbf{N}$ e $y \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, vale che

$$\mathbf{P}_x\left(S_n = y,\, \exists k < n:\ S_k = 0\right) = \mathbf{P}_{-x}(S_n = y) \qquad \textbf{(Principio di riflessione)}$$

*(Sugg: Se la passeggiata ritorna in 0 entro il passo $n$, allora avrà un primo ritorno in 0 entro il passo $n$. Usare quindi la formula delle probabilità totali e la formula al punto precedente.)*

(3) Per ogni $x, y \in \mathbf{N}$, vale che

$$\mathbf{P}(S_n = x, S_k > -y\, \forall k < n) = \mathbf{P}(S_n = x) - \mathbf{P}(S_n = x + 2y)$$

Per ogni $y \geq x \in \mathbf{N}$, vale che

$$\mathbf{P}(S_n = x, S_k < y\, \forall k < n) = \mathbf{P}(S_n = x) - \mathbf{P}(S_n = 2y - x)$$

**Esercizio 4**. Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una catena di Markov a valori in $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definita tramite la seguente matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Sia $\tau = \min\{n \geq 0 : X_n \in \{1, 5\}\}$, e per ogni $k \in V$ definiamo $p_A(k)$ come la probabilità che la catena di Markov con stato iniziale $k$ raggiunga lo stato $1$ prima di arrivare allo stato $5$, ovvero

$$p_A(k) := P(X_\tau = 1 | X_0 = k)\,, \qquad \forall k \in V$$

Con una procedura analoga al problema della rovina del giocatore, calcolare $p_A(k)$ al variare di $k \in V$.

**Esercizio 5**. Si consideri una catena di Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a valori in $V = \{1, 2, \ldots, M\}$, con $M \in \mathbf{N}$, definita tramite le seguenti probabilità di transizione

$$p_{k,j} = \begin{cases} p & \text{se } j = k+1 \\ 1-p & \text{se } j = k-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \forall k \in \{2, \ldots, M-1\}$$

$$p_{1,j} = \begin{cases} p & \text{se } j = 2 \\ 1-p & \text{se } j = N \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad p_{M,j} = \begin{cases} p & \text{se } j = 0 \\ 1-p & \text{se } j = M-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con $p \in (0, 1)$ fissato.

(1) Calcolare la misura invariante di tale catena.

(2) Assumendo che $\mathbf{P}(X_0 = 1) = 1$, calcolare la media del tempo di primo ritorno in $1$, ovvero $\mathbf{E}(T)$, con $T := \min\{n \geq 1 : X_n = 1\}$.

**Esercizio 6**.

(1) Si consideri un processo di ramificazione con distribuzione della progenie $\mathbf{p}$ tale che $p_0 + p_1 = 1$ e $p_0 \neq 0, 1$. Indicando con $X_n$ il numero di individui nella $n$-esima generazione, calcolare $P(X_n = 0)$ e quindi la probabilità di estinzione $\pi_0$ del processo.

(2) Nel modello di Bernoulli Laplace per la dinamica dei fluidi, vi sono due stanze comunicanti, A e B, contenenti globalmente 2K palline di cui K bianche e K nere, con K $\in$ **N**. Il modello è definito tramite la seguente dinamica discreta: ad ogni passo viene scelta una pallina da A ed una da B, in modo uniforme, e vengono scambiate tra loro. Sia $X_n$, $n \in N$, il numero di palline bianche in A dopo l'ennesimo passo. Mostrare che $(X_n)_{n\in N}$ è una catena di Markov, determinare la probabilità di transizione tra gli stati, e calcolare la misura stazionaria del sistema.