# Appunti di Analisi II

Jacopo Tissino

6 giugno 2017

# Capitolo 1

# Serie

Definite in $\mathbb{C}$. Se omettiamo gli estremi della somma, s'intende da un qualche naturale, generalmente 1, a $+\infty$.

## 1.1 Definizioni

Se la successione delle somme parziali ha limite finito o infinito, allora scriviamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{1.1.1}$$

Data una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $(a_n)$ è la sua successione dei termini generali.

*Teorema* 1.1.1. Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

## 1.2 Serie notevoli

**Geometrica** Se $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$, allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \tag{1.2.1}$$

**Telescopica** Data $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a $\ell$, se $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è tale che $b_n = a_{n+1} - a_n$, allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \ell - a_0 \tag{1.2.2}$$

**Armonica generalizzata** Per $p \leq 1$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \tag{1.2.3}$$

diverge, converge invece per $p > 1$.

## 1.3 Criteri

**Confronto** Date le serie $\sum a_n$ e $\sum b_n$, entrambe a termini positivi, se $a_n \leq b_n$ definitivamente

1. se $\sum a_n$ diverge allora $\sum b_n$ diverge;
2. se $\sum b_n$ converge allora $\sum a_n$ converge;

**Confronto asintotico** Date le serie $\sum a_n$ e $\sum b_n$, entrambe a termini positivi, se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in \bar{\mathbb{R}}^+ \tag{1.3.1}$$

allora

1. se $\ell \in (0, +\infty)$, le serie hanno lo stesso carattere;
2. se $\ell = 0$, $a_n$ diverge $\implies$ $b_n$ diverge e $b_n$ converge $\implies$ $a_n$ converge;
3. se $\ell = +\infty$, $b_n$ diverge $\implies$ $a_n$ diverge e $a_n$ converge $\implies$ $b_n$ converge.

**Rapporto** Data $\sum a_n$ a termini positivi, se $\exists h \in (0, 1)$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq h \tag{1.3.2}$$

definitivamente, allora $\sum a_n$ converge. Se $\exists h > 1$ tale che per infiniti valori di $n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > h \tag{1.3.3}$$

allora $\sum a_n$ diverge.

**Rapporto asintotico** Data $\sum a_n$ a termini positivi, e $\ell = \limsup_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$. Allora $\ell \in [0, +\infty]$. Se $\ell < 1$, $\sum a_n$ converge. Se $\ell > 1$, $\sum a_n$ diverge.

**Radice ($n$-esima)** Data $\sum a_n$ a termini positivi, se $\exists h \in (0, 1)$ tale che

$$\sqrt[n]{a_n} \leq h \tag{1.3.4}$$

definitivamente, allora $\sum a_n$ converge. Se $\exists h > 1$ tale che per infiniti valori di $n$

$$\sqrt[n]{a_n} > h \tag{1.3.5}$$

allora $\sum a_n$ diverge.

**Radice asintotica** Data $\sum a_n$ a termini positivi, e $\ell = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Allora $\ell \in [0, +\infty]$. Se $\ell < 1$, $\sum a_n$ converge. Se $\ell > 1$, $\sum a_n$ diverge.

*Teorema* 1.3.1. (Indimostrato) Data una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a termini positivi:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \tag{1.3.6}$$

**Condensazione di Cauchy** Data $\sum a_n$ a termini positivi, con termine generale decrescente, le serie $\sum a_n$ e $\sum 2^n a_{2^n}$ hanno lo stesso carattere.

**Leibniz** Data la successione $a_n$ a termini positivi infinitesima con $a_{n+1} \leq a_n$, la serie

$$\sum b_n = \sum (-1)^n a_n \tag{1.3.7}$$

converge, e

$$\left| \sum_{n=k}^{\infty} b_n \right| \leq a_{k+1} \tag{1.3.8}$$

**Convergenza assoluta** Una serie $\sum z_n$ si dice assolutamente convergente se converge la serie $\sum |z_n|$. Se una serie è assolutamente convergente, allora è convergente, e vale $\left|\sum z_n\right| \leq \sum |z_n|$.

## 1.4 Riordinamenti

Data $\sum a_n$ a termini reali, e una biiezione $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definifiamo *riordinamento* la serie $\sum a_{\sigma(n)}$.

- Se $\sum a_n$ è assolutamente convergente, $\sum a_n = \sum a_{\sigma(n)}$;
- se $\sum a_n$ è convergente ma assolutamente divergente, $\forall L \in \bar{\mathbb{R}} : \exists \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \sum a_{\sigma(n)} = L$.

# Capitolo 2

# Integrali generalizzati

Una funzione $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$-integrabile in $[a, c]$ $\forall c \in [a, b)$, è integrabile in senso generalizzato se:

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R} \tag{2.0.1}$$

$f$ è integrabile in senso generalizzato in $(a, b)$ se lo è in $(a, k]$ e in $[k, b)$ per ogni $k \in (a, b)$.

## 2.1 Criteri di convergenza

**Esistenza del limite** Se $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, $b \in \bar{\mathbb{R}}$, $f \geq 0$,

$$\exists \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.1.1}$$

**Confronto** Se $f$ e $g$ sono $\mathbb{R}$-integrabili in $(a, c] \cup [c, b)$ $\forall c \in (a, b)$, allora se $0 \leq f \leq g$, se $g$ è integrabile in senso generalizzato lo è anche $f$, e se $f$ non lo è non lo è neanche $g$.

**Confronto asintotico** Date $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$, $b \in \bar{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}$-integrabili in $(a, c] \cup [c, b)$ $\forall c \in (a, b)$, allora se $\exists \lim_{x \to b^-} f/g = \ell \in [0, +\infty]$:

1. se $\ell \in (0, +\infty)$ i due integrali hanno lo stesso carattere;
2. se $\ell = 0$, $g$ converge $\implies$ $f$ converge, $f$ diverge $\implies$ $g$ diverge;
3. se $\ell = +\infty$, $f$ converge $\implies$ $g$ converge, $g$ diverge $\implies$ $f$ diverge;

**Convergenza assoluta** Data $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, se $|f|$ è integrabile in senso generalizzato allora lo è anche $f$, e

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^{+\infty} \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x \tag{2.1.2}$$

**Serie e integrali** Se $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ positiva e decrescente, allora

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \text{ hanno lo stesso carattere.} \tag{2.1.3}$$

## 2.2 Integrali notevoli

Se $P(x) = x^2 - 2px + q$ ha una o due radici reali, $\int_{\mathbb{R}} (P(x))^{-1}\,\mathrm{d}x$ diverge. Altrimenti, ovvero se $q - p^2 > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2 - 2px + q}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{q - p^2}} \tag{2.2.1}$$

# Capitolo 3

# Spazi metrici

# Capitolo 4

# Serie di funzioni

# Capitolo 5

# Calcolo differenziale multivariato

# Capitolo 6

# Curve e 1-forme differenziali in $\mathbb{R}^n$

# Capitolo 7

# Invertibilità locale e funzione implicita

# Indice