

# Turbolenza

Fluidodinamica e Van Gogh

Jacopo Tissino

VB (CLIL)

Liceo Scientifico M. Grigoletti

A. S. 2015–16

## 1 Navier-Stokes

### 1.1 Ricavarle

Partiamo [7] dal *teorema del trasporto di Reynolds*, che afferma qualcosa di apparentemente scontato: data una certa proprietà (che può essere anche vettoriale) di una sostanza in un volume, la variazione dell'integrale di questa proprietà nel volume sarà pari alla differenza fra quanta ne entra e quanta ne esce, sommata a quanta proprietà si genera o si distrugge nel volume: se il volume è  $\Omega$ , la proprietà è  $\phi$ , il suo flusso è  $\mathbf{v}$ , e  $s$  sono i *sinks*, ovvero i luoghi dove la proprietà viene assorbita (presi come negativi), scriviamo:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi \, dV = - \int_{\partial\Omega} \phi \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA + \int_{\Omega} \mathbf{s} \, dV \quad (1.1.1)$$

Applicando il teorema della divergenza, possiamo rendere tutti gli integrali volumetrici, poi portare la derivata temporale nel primo integrale secondo la regola di Leibniz, per ottenere:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\nabla \cdot (\phi \mathbf{v}) + \mathbf{s} \quad (1.1.2)$$

**Massa** Se prendiamo come  $\phi$  la densità  $\rho$ , per la conservazione della massa otteniamo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.1.3)$$

Postulando che il fluido non possa essere compresso, ovvero che  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ , ricaviamo:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.1.4)$$

**Quantità di moto** Se, invece, consideriamo  $\phi = \rho \mathbf{v}$ , ovvero il campo vettoriale della quantità di moto, ricaviamo:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \mathbf{s} \quad (1.1.5)$$

Semplifichiamo dunque, utilizzando le seguenti identità dell'analisi tensoriale:

- $\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \mathbf{A}(\nabla \phi) + \phi(\nabla \cdot \mathbf{A})$
- $\nabla \cdot (\mathbf{A} \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot (\nabla \mathbf{B}) + (\nabla \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$ .

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho (\mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{v}) + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{v})) &= \mathbf{s} \\ \mathbf{v} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) + \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{v}) \right) &= \mathbf{s} \\ \mathbf{v} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) + \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{v}) \right) &= \mathbf{s} \end{aligned}$$

Per la 1.1.3 il termine moltiplicato per  $\mathbf{v}$  è pari a 0, dunque ci rimane:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{v}) \right) = \mathbf{s} \quad (1.1.6)$$

L'integrale volumetrico del termine  $\mathbf{s}$  comprende tutti gli altri tipi di forze che possono agire sull'infinitesimo di volume.

Ignorando le *body forces* (come la gravità), possiamo scrivere

$$\mathbf{s} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (1.1.7)$$

Dove  $\boldsymbol{\sigma}$  è un tensore del secondo ordine che include tutti gli sforzi sull'infinitesimo di volume  $dV$ .

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.1.8)$$

Lo possiamo dividere in pressione e forze viscosi, ovvero scrivere consideriamo prima le componenti ortogonali e poi gli sforzi di taglio).

Scomponiamo quindi  $\boldsymbol{\sigma}$  in:

$$\boldsymbol{\sigma} = -pI_3 + \begin{pmatrix} \sigma_{xx} + p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} + p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} + p \end{pmatrix} \quad (1.1.9)$$

Se definiamo la pressione come un meno un terzo della traccia di  $\boldsymbol{\sigma}$  (possiamo farlo assumendo che il flusso sia isotropico), ci rimane  $\boldsymbol{\sigma} = -pI_3 + \boldsymbol{\tau}$ . Intuitivamente, il primo termine rappresenta le forze che cercano di comprimere il volumetto, mentre il secondo quelle che tendono a distorcerlo.

Dunque, la forma dell'equazione per ora è:

$$\mathbf{s} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (1.1.10)$$

**Forza viscosa** Consideriamo una sola direzione del cubetto  $dV$ , ovvero due faccie parallele. Se il fluido che consideriamo è newtoniano, è stato osservato che:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.1.11)$$

dove  $\mu$  è la cosiddetta *viscosità dinamica*.

Troviamo poi che:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} \mathbf{e}_j = \mu \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_j \right) = \quad (1.1.12)$$

e ricordando che per la conservazione della massa  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  arriviamo a:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.1.13)$$

## 1.2 Formulazione

Sinteticamente, dunque, le equazioni di Navier-Stokes si possono esprimere così:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.2.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.2.1b)$$

Oppure, scrivendo tutte le derivate parziali esplicitamente, se il vettore velocità è  $\mathbf{v}(u, v, w)$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \frac{\partial u}{\partial x} & v \frac{\partial u}{\partial y} & w \frac{\partial u}{\partial z} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} & v \frac{\partial v}{\partial y} & w \frac{\partial v}{\partial z} \\ u \frac{\partial w}{\partial x} & v \frac{\partial w}{\partial y} & w \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{bmatrix} + \nu \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{bmatrix} \quad (1.2.2)$$

### 1.3 Il numero di Reynolds

È definito come

$$\text{Re} = \frac{vL}{\nu} = \frac{\rho v L}{\mu} \quad (1.3.1)$$

dove  $v$  è la velocità media del flusso e  $L$  è la lunghezza caratteristica del tratto che consideriamo. Rappresenta il rapporto fra le forze inerziali e quelle viscose.

**Ricaviamolo** Prendiamo la 1.2.1a e moltiplichiamola per  $L/v^2$ , dove  $L$  è una lunghezza caratteristica e  $v$  è la velocità media.

Ridefiniamo poi:

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}}{v}, \quad p' = \frac{p}{\rho v^2}, \quad \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{L}{v} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \nabla' = L \nabla \quad (1.3.2)$$

Ricaviamo dunque l'equazione adimensionalizzata:

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + (\nabla' \mathbf{v}') \mathbf{v}' = -\nabla' p' + \frac{\mu}{\rho L v} \nabla'^2 \mathbf{v}' \quad (1.3.3)$$

Ovvero, togliendo i primi:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.3.4)$$

Si può dunque vedere che, al tendere di  $\text{Re}$  all'infinito, il termine viscoso scompare, rendendo il regime completamente inerziale.

## Valutazioni qualitative

- Ad alti numeri di Reynolds, le forze inerziali dominano e il regime è *turbolento*, mentre
- a bassi numeri di Reynolds, le forze viscosi dominano e il regime è *laminare*.

## 2 Il flusso turbolento

Il flusso turbolento è composto da vortici di diverse dimensioni. L'energia viene trasmessa dai più grandi ai più piccoli, fino a quando non viene dissipata completamente.

Dividiamo la velocità in una parte media e una fluttuazione:  $\mathbf{v} = \mathbf{U} + \mathbf{u}$ , dove  $\mathbf{u}$  è la fluttuazione, ovvero  $\bar{\mathbf{u}} = 0$

Parentesi angolate: media?

$d$  dimensione del vortice,  $\mathring{v}$  velocità orbitale:  $\mathring{v} = f(d)$

*Cascata di energia della turbolenza*: descrizione a parole. Turbolenza statisticamente omogenea  $\implies$  passaggi di energia da una scala ad un'altra uguali:  $\epsilon(d_{\max}) = \epsilon(d_{\min})$

$\epsilon$  = energia fornita / (massa unitaria  $\times$  tempo), ovvero energia trasmessa di scala in scala, ovvero energia dissipata.

$$[\epsilon] = L^2 T^{-3} \quad (2.0.1)$$

Assumiamo che  $\mathring{v} \propto (\epsilon d)^k$ . Dimensionalmente, otteniamo:

$$\mathring{v} = A(\epsilon d)^{1/3} \quad (2.0.2)$$

La turbolenza avviene fra  $d_{\max}$  e  $d_{\min}$ . La prima è la dimensione del sistema, la seconda invece (postuliamo) dipende solo da  $\epsilon$  e  $\nu$ . Dimensionalmente:

$$d_{\min} \sim \nu^{3/4} \epsilon^{-1/4} \quad (2.0.3)$$

$\nu^{3/4} \epsilon^{-1/4}$  = scala di Kolmogorov

### 2.1 Spettro di energia

Definiamo il *numero d'onda* come:

$$k = \frac{\pi}{d} \quad (2.1.1)$$

(non  $2\pi$  perché la velocità cambia verso se passiamo da una parte all'altra del vortice)

$$k_{\min} = \pi/L, \quad k_{\max} \sim \nu^{-3/4} \epsilon^{1/4}$$

$E$  è l'energia cinetica per massa di fluido, con dimensioni  $L^2 T^{-2}$

$$dE = E_k(k) dk \quad (2.1.2)$$

Dimensionalmente:

$$E_k(k) = B \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (2.1.3)$$

$$\int_{k_{\min}}^{\infty} E_k(k) dk = \frac{(\overset{\circ}{v}(L))^2}{2} \implies \frac{2B}{3\pi^{2/3}} = \frac{A^2}{2} \quad (2.1.4)$$

La “legge dei  $-5/3$ ” funziona bene nell'area di mezzo, lontana dalle scale estreme.

## 2.2 Viscosità turbolenta

Assumiamo che

## Indice

<b>1</b>	<b>Navier-Stokes</b>	<b>1</b>
1.1	Ricavarle . . . . .	1
1.2	Formulazione . . . . .	3
1.3	Il numero di Reynolds . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Il flusso turbolento</b>	<b>5</b>
2.1	Spettro di energia . . . . .	5
2.2	Viscosità turbolenta . . . . .	6

## Riferimenti bibliografici

- [1] J.L. Aragón, Gerardo G. Naumis, M. Bai, M. Torres, P.K. Maini,  
*Turbulent luminance in impassioned van Gogh paintings*,  
<http://arxiv.org/abs/physics/0606246>, 2006.
- [2] Karima Khusnutdinova, *Kolmogorov's 5/3 law*,  
[http://homepages.lboro.ac.uk/~makk/mathrev\\_kolmogorov.pdf](http://homepages.lboro.ac.uk/~makk/mathrev_kolmogorov.pdf),  
 2009.

- [3] Terence Tao, *Kolmogorov's power law for turbulence*,  
<https://terrytao.wordpress.com/2014/05/15/kolmogorovs-power-law-for-turbulence/>, 2014.
- [4] Marianne Freiberger, *Troubled minds and perfect turbulence*,  
<https://plus.maths.org/content/troubled-minds-and-perfect-turbulence>,  
 2006.
- [5] Philip Ball, *Van Gogh painted perfect turbulence*,  
<http://www.nature.com/news/2006/060703/full/news060703-17.html#close>, 2006, su "Nature".
- [6] <http://scienceworld.wolfram.com/biography/Heisenberg.html>
- [7] [https://en.wikipedia.org/wiki/Derivation\\_of\\_the\\_Navier%E2%80%93Stokes\\_equations](https://en.wikipedia.org/wiki/Derivation_of_the_Navier%E2%80%93Stokes_equations)
- [8] [http://homepages.engineering.auckland.ac.nz/~pkel015/SolidMechanicsBooks/Part\\_III/Chapter\\_1\\_Vectors\\_Tensors/Vectors\\_Tensors\\_14\\_Tensor\\_Calculus.pdf](http://homepages.engineering.auckland.ac.nz/~pkel015/SolidMechanicsBooks/Part_III/Chapter_1_Vectors_Tensors/Vectors_Tensors_14_Tensor_Calculus.pdf)
- [9] <https://engineering.dartmouth.edu/~d30345d/books/EFM/chap8.pdf>