

# Turbolenza

Fluidodinamica e Van Gogh

Jacopo Tissino

VB (CLIL)

Liceo Scientifico “M. Grigoletti”, Pordenone

A. S. 2015–16

## Sommario

Nello studio della fluidodinamica, la turbolenza è sempre stata un complesso ambito di ricerca. Il russo Andrej Kolmogorov nel 1941 propose una teoria al riguardo, che a tutt’oggi rimane una delle più note.

Un team di scienziati [1] la ha applicata ad alcuni quadri di Van Gogh spesso definiti (qualitativamente) “turbolenti”.

Lo scopo di questo documento è arrivare a comprendere il loro metodo, tramite una sintetica trattazione prima delle equazioni di Navier-Stokes, fondamento della fluidodinamica, poi di alcuni punti della teoria di Kolmogorov, ed infine del metodo utilizzato per applicare equazioni tipicamente viste nei fluidi a dei quadri.

## 1 Le equazioni di Navier-Stokes

### 1.1 Derivazione

Il punto di partenza è il *teorema del trasporto di Reynolds*, che afferma qualcosa di apparentemente scontato: data una certa proprietà intensiva (che può essere anche vettoriale) di una sostanza in un volume, la variazione dell’integrale di questa proprietà nel volume sarà pari alla differenza fra quanta ne entra e quanta ne esce, sommata a quanta proprietà si genera o si distrugge nel volume.

Se il volume considerato è  $\Omega$ , la proprietà intensiva è  $\phi$ , il suo flusso è  $\mathbf{v}$ , e  $s$  sono le *sources*, ovvero i luoghi dove la proprietà viene generata, scriviamo:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \phi dV = - \iint_{\partial\Omega} \phi \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA + \iint_{\Omega} s dV \quad (1.1)$$

Applicando il teorema della divergenza, possiamo rendere tutti gli integrali volumetrici e portare la derivata temporale nel primo integrale secondo la regola



Figura 1: *Notte Stellata.*

di Leibniz, per ottenere:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\nabla \cdot (\phi \mathbf{v}) + \mathbf{s} \quad (1.2)$$

**Massa** Se applichiamo il teorema del trasporto di Reynolds alla densità — ovvero scegliamo come proprietà generica  $\phi$  la densità  $\rho$ , definita in modo tale che per un volume  $\Omega$  la massa  $m$  sia pari a

$$m = \iiint_{\Omega} \rho \, dV \quad (1.3)$$

— per la conservazione della massa abbiamo  $\mathbf{s} = 0$  (non esistono “generatori” di massa) e quindi otteniamo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.4)$$

Postulando che il fluido non possa essere compresso — ovvero che la densità sia costante nel tempo e nello spazio, in formule  $\frac{d\rho}{dt} = 0$  e  $\nabla \rho = 0$ , in quanto una variazione della densità del fluido nel tempo implicherebbe che questo si è compresso o espanso — ricaviamo:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.5)$$

**Quantità di moto** Se, invece, applichiamo il teorema alla quantità di moto (sostituendo alla generica proprietà intensiva  $\phi$  il vettore  $\rho \mathbf{v}$ ), ricaviamo:



Figura 2: *Wheatfield with crows.*

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\mathbf{v}) = \mathbf{s} \quad (1.6)$$

dove con abuso di notazione intendiamo per  $\mathbf{v}\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{v}\mathbf{v} = (v_i v_j) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \begin{pmatrix} v_x v_x & v_x v_y & v_x v_z \\ v_y v_x & v_y v_y & v_y v_z \\ v_z v_x & v_z v_y & v_z v_z \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

in cui per  $\mathbf{e}_i$  intendiamo un versore nell' $i$ -esima direzione.

Nell'equazione (1.6) compare dunque la divergenza di un tensore: in generale la divergenza di un tensore di ordine  $n > 1$  ha ordine  $n - 1$ ; per un tensore del secondo ordine questa è definita come il vettore

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \left( \sum_i \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_j \quad (1.8)$$

(spesso nella notazione tensoriale si omette la somma, per evitare un'eccessiva verbosità).

Semplifichiamo dunque, utilizzando le seguenti identità dell'analisi tensoriale:

- $\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \mathbf{A}(\nabla \phi) + \phi(\nabla \cdot \mathbf{A})$
- $\nabla \cdot (\mathbf{AB}) = \mathbf{A} \cdot (\nabla \mathbf{B}) + (\nabla \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}.$

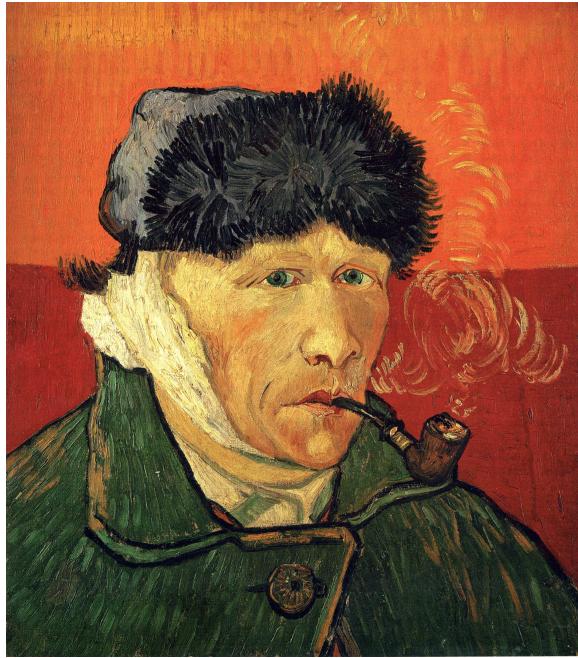


Figura 3: *Self-portrait with pipe and bandaged ear.*

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho (\mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{v}) + \mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{v})) &= \mathbf{s} \\
 \mathbf{v} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) + \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{v}) \right) &= \mathbf{s} \\
 \mathbf{v} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) + \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{v}) \right) &= \mathbf{s} \quad (1.9)
 \end{aligned}$$

Per la (1.4) il termine moltiplicato per  $\mathbf{v}$  nella (1.9) è pari a 0, dunque ci rimane:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{v}) \right) = \mathbf{s} \quad (1.10)$$

L'integrale volumetrico del termine  $\mathbf{s}$  comprende tutti gli altri tipi di forze che possono agire sull'infinitesimo di volume.

Ignorando le forze del corpo (quelle che, come la gravità, agiscono sull'intero volume di un corpo), possiamo scrivere

$$\mathbf{s} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (1.11)$$

dove  $\boldsymbol{\sigma}$  è un tensore del secondo ordine che include tutti gli sforzi sull'infinitesimo di volume  $dV$ .

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Possiamo dividere  $\boldsymbol{\sigma}$  in pressione e forze viscose, ovvero consideriamo prima le componenti ortogonali e poi gli sforzi di taglio.

Scomponiamo quindi  $\boldsymbol{\sigma}$  in:

$$\boldsymbol{\sigma} = -pI_3 + \begin{pmatrix} \sigma_{xx} + p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} + p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} + p \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

dove  $I_3$  è una matrice identità tre per tre. Se definiamo la pressione come  $-1/3$  della traccia di  $\boldsymbol{\sigma}$  (possiamo farlo assumendo che il flusso sia isotropico), ci rimane  $\boldsymbol{\sigma} = -pI_3 + \boldsymbol{\tau}$ . Intuitivamente, il primo termine rappresenta le forze che cercano di comprimere il parallelepipedo, mentre il secondo quelle che tendono a distorcerlo.

Dunque, la forma dell'equazione per ora è:

$$\mathbf{s} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (1.14)$$

**Forza viscosa** Consideriamo una sola direzione del parallelepipedo  $dV$ , ovvero due facce parallele. Già Newton aveva osservato che per alcuni fluidi, detti appunto *newtoniani*, vale:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.15)$$

dove  $\mu$  è una proprietà del fluido detta *viscosità dinamica*.

Troviamo poi che:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} \mathbf{e}_j = \mu \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_j \right) \quad (1.16)$$

e ricordando che per la conservazione della massa  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  arriviamo a:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.17)$$

## 1.2 Formulazione

Sinteticamente, dunque, le equazioni di Navier-Stokes si possono esprimere così:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{v}) = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.18a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.18b)$$

dove  $\nu$  è la *viscosità cinematica*, definita come  $\nu = \mu/\rho$

Possiamo introdurre l'operatore  $D/Dt$ :

$$\frac{D\mathbf{a}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{a}) \quad (1.19)$$

Oppure, scrivendo tutte le derivate parziali esplicitamente, se il vettore velocità è  $\mathbf{v}(u, v, w)$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \frac{\partial u}{\partial x} & v \frac{\partial u}{\partial y} & w \frac{\partial u}{\partial z} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} & v \frac{\partial v}{\partial y} & w \frac{\partial v}{\partial z} \\ u \frac{\partial w}{\partial x} & v \frac{\partial w}{\partial y} & w \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{bmatrix} + \nu \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

## 1.3 Il numero di Reynolds

Il numero di Reynolds (Re) è definito come

$$Re = \frac{vL}{\nu} = \frac{\rho v L}{\mu} \quad (1.21)$$

dove  $v$  è la velocità media del flusso e  $L$  è la lunghezza caratteristica del tratto che consideriamo.

Rappresenta il rapporto fra le forze inerziali e quelle viscose: per capirlo, scegliamo un volume (come un cilindro) di superficie  $S$  e lunghezza  $L$ , e un tempo unitario  $t$  (interpretando dunque, euristicamente, le derivate come divisioni per tale intervallo).

In questa semplificazione, possiamo esprimere le forze come:

$$F_i = ma = \rho S L \frac{L}{t^2} \quad (1.22a)$$

$$F_v = \mu S \frac{\Delta v}{\Delta L} = \frac{\mu S L}{L t} \quad (1.22b)$$

da cui

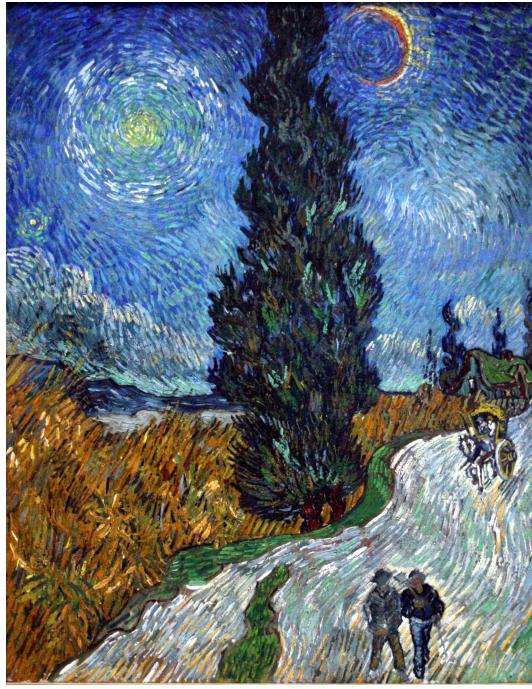


Figura 4: *Road with cypress and star.*

$$\text{Re} = \frac{F_i}{F_v} = \frac{\rho L^2}{t\mu} = \frac{\rho Lv}{\mu} \quad (1.23)$$

Questo calcolo non è formalmente impeccabile (abbiamo trattato le derivate come divisioni discrete), ma permette di comprendere il significato fisico del numero di Reynolds.

**Il numero di Reynolds nelle equazioni di Navier-Stokes** Prendiamo la (1.18a) e moltiplichiamola per  $L/v^2$ , dove  $L$  è una lunghezza caratteristica e  $v$  è la velocità media.

Ridefiniamo poi:

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}}{v}, \quad p' = \frac{p}{\rho v^2}, \quad \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{L}{v} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \nabla' = L \nabla \quad (1.24)$$

Ricaviamo dunque l'equazione adimensionale:

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + \mathbf{v}' \cdot (\nabla' \mathbf{v}') = -\nabla' p' + \frac{\mu}{\rho Lv} \nabla'^2 \mathbf{v}' \quad (1.25)$$

Ovvero, togliendo i primi:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{v}) = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.26)$$

Si può dunque vedere che, al tendere di Re all'infinito, il termine viscoso scompare, rendendo il regime completamente inerziale.

## Valutazioni qualitative

- Ad alti numeri di Reynolds, le forze inerziali dominano e il regime è *turbolento*, mentre
- a bassi numeri di Reynolds, le forze viscose dominano e il regime è *laminare*.

Intuitivamente, abbiamo un regime laminare quando la dissipazione viscosa è così alta da impedire che ci siano brusche variazioni di velocità con poca separazione spaziale.

## 2 Il flusso turbolento

Quando il moto diventa turbolento, a quello principale della direzione della velocità media si sovrappongono moti secondari caotici in direzioni perpendicolari, che provocano rimescolamento e vortici [14].

**Media** Per media (denotata  $\bar{\varphi}$ ) di una quantità qualsiasi  $\varphi(t)$  in un punto fisso dello spazio, intendiamo:

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{\vartheta} \int_0^{t_0+\vartheta} \varphi dt \quad (2.1)$$

Dividiamo la velocità in una parte media e una fluttuazione:  $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'$ , dove  $\mathbf{v}'$  è la fluttuazione, ovvero  $\bar{\mathbf{v}'} = 0$ , e facciamo lo stesso per la pressione ( $p = \bar{p} + p'$ ).

Applicando le proprietà della media, possiamo ricavare la versione *mediata* delle equazioni di Navier-Stokes:

$$\frac{D\bar{\mathbf{v}}}{Dt} = -\frac{\nabla \bar{p}}{\rho} + \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{v}} - \nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}' \mathbf{v}'}) \quad (2.2a)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0 \quad (2.2b)$$

dove  $\bar{\mathbf{v}' \mathbf{v}'}$  è sempre un tensore, secondo la formula (1.7).

**Viscosità turbolenta** Consideriamo il tensore  $\bar{\mathbf{v}' \mathbf{v}'} = \boldsymbol{\sigma}_T$  come parte di  $\boldsymbol{\tau}$ , il tensore che prima abbiamo considerato come componente viscosa, ovvero assimiliamo gli effetti della turbolenza ad un incremento della viscosità (non reale, ma efficace).

Come prima avevamo trovato la (1.15), sperimentalmente è stato anche ricavato:

$$\sigma_{Tij} = -\rho \bar{v}'_i v'_j = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.3)$$

Dove  $\mu_T$ , la *viscosità turbolenta*, non è una proprietà del fluido ma dipende dallo stato della turbolenza.

L'equazione di conservazione della quantità di moto si trasforma quindi in:

$$\frac{D\bar{\mathbf{v}}}{Dt} = -\frac{\nabla \bar{p}}{\rho} + (\nu + \nu_T) \nabla^2 \bar{\mathbf{v}} \quad (2.4)$$

dove chiaramente  $\nu_T = \mu_T/\rho$ .

## 2.1 La teoria di Kolmogorov

Il flusso turbolento è composto da vortici di diverse dimensioni che si muovono in modo caotico.

C'è una *cascata di energia*: questa viene trasmessa dai vortici più grandi ai più piccoli, fino a quando non viene dissipata completamente dalla frizione viscosa. Questo è stato espresso dal poeta Lewis Fry Richardson:

Big whorls have little whorls,  
which feed on their velocity;  
And little whorls have lesser whorls,  
And so on to viscosity. [7]

**Tasso di dissipazione** Il *tasso di dissipazione*  $\epsilon$  è definito come

$$\epsilon = \frac{\text{energia convertita in calore}}{\text{massa unitaria} \times \text{tempo unitario}} \quad (2.5)$$

Il fatto che la turbolenza sia statisticamente omogenea implica che i passaggi di energia da una scala ad un'altra siano uguali: l'energia inizialmente fornita ai vortici più grandi è pari a quella passata a quelli più piccoli, e infine a quella dissipata in calore. Dunque, malgrado il comportamento sia sempre caotico, possiamo dire che il comportamento dei grandi vortici è simile a quello dei più piccoli.

Come dimensioni:

$$[\epsilon] = L^2 T^{-3} \quad (2.6)$$

Assumiamo che la velocità orbitale  $\dot{v}$  di un vortice sia proporzionale a una potenza  $k$  del prodotto fra  $\epsilon$  e la dimensione  $d$  del vortice:  $\dot{v} \propto (\epsilon d)^k$ . Tramite l'analisi dimensionale, otteniamo:

$$\dot{v} = A(\epsilon d)^{1/3} \quad (2.7)$$

dove  $A$  è una costante adimensionale.

La turbolenza avviene in quello che è detto *inertial range*, ovvero l'insieme di scale per le quali dominano le forze inerziali. Queste sono comprese fra  $d_{\max}$ , la dimensione del sistema, e  $d_{\min}$ , la scala alla quale avviene la dissipazione in calore. Kolmogorov ha postulato che quest'ultima dipenda solo da  $\epsilon$  e  $\nu$ . Dimensionalmente, possiamo trovare gli esponenti di questi parametri:

$$d_{\min} \sim \nu^{3/4} \epsilon^{-1/4} \quad (2.8)$$

$\nu^{3/4}\epsilon^{-1/4}$  è quindi detta *scala di Kolmogorov*.

## 2.2 La funzione di struttura

Definiamo la funzione di struttura di ordine  $n$ :  $S_n(\mathbf{R}) = \langle (\delta_{v_R})^n \rangle$ , dove  $\delta_{v_R} = v(\mathbf{r} + \mathbf{R}) - v(\mathbf{r})$ .  $v$  qui è la componente della velocità nella direzione di  $\mathbf{R}$ , un qualsiasi vettore che va da una posizione ad un'altra dove misuriamo la velocità.

La funzione di struttura di secondo ordine può essere associata all'energia delle fluttuazioni (divisa per la massa), in quanto consiste in una velocità al quadrato.

Dalla (2.7) ricaviamo che lo *scaling* di  $S_2(\mathbf{R})$  è lo stesso di  $(\epsilon d)^{2/3}$ , dove  $d = |\mathbf{R}|$ .

Inoltre, Kolmogorov ha ipotizzato che una generica  $S_n(\mathbf{R})$  scali con:

$$S_n(\mathbf{R}) \propto R^{\xi_n}, \quad \xi_n = \frac{n}{3} \quad (2.9)$$

**Funzione densità di probabilità** Se abbiamo una *variabile aleatoria continua*  $X$ , definiamo la funzione densità di probabilità (*probability density function*, o *PDF*) come la  $f(x)$  per cui:

$$P(A \leq X \leq B) = \int_A^B f(x) dx \quad (2.10)$$

dove  $P(A \leq X \leq B)$  è la probabilità che la variabile assuma un valore fra  $A$  e  $B$ .

**Distribuzione log-normale** Abbiamo una distribuzione log-normale della variabile  $x$  quando  $\ln(x)$  ha una distribuzione normale: quindi, se la media è  $\mu$  e la varianza è  $\sigma^2$  la PDF è

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (2.11)$$

## 2.3 La distribuzione di $\epsilon$

Kolmogorov nel 1962 [17, pag. 115] ipotizzò che la media del tasso di dissipazione  $\epsilon$  in un volume di raggio  $r$

$$\epsilon_r(\mathbf{x}, t) = \frac{6}{\pi r^3} \int_{|\mathbf{h}| \leq r/2} \epsilon(\mathbf{x} + \mathbf{h}, t) d\mathbf{h} \quad (2.12)$$

avesse una distribuzione log-normale, con la varianza di  $\ln(\epsilon_r)$  data da:

$$\sigma_r^2 = A + \mu \ln\left(\frac{L}{r}\right) \quad (2.13)$$

dove la costante  $\mu$  è universale,  $A$  dipende dalla geometria del fluido, e  $L$  è la scala del fenomeno.

Poiché, come abbiamo visto, c'è una correlazione fra  $\epsilon$  e la funzione di struttura, abbiamo una distribuzione log-normale anche per quest'ultima.

### 3 La teoria di Kolmogorov applicata all'arte

Un team di scienziati spagnoli [1] ha messo in relazione la PDF delle fluttuazioni di luminanza<sup>1</sup> (intensità luminosa/unità di area) nei quadri di Van Gogh con la PDF delle differenze di velocità predette dalla teoria di Kolmogorov: per  $v$ , quindi, ora intendiamo luminanza, misurata come funzione dalle componenti RGB:  $v = 0.299R + 0.587G + 0.144B$  (i parametri derivano dalla sensibilità umana alle varie componenti della luce).

Quindi, nella griglia di pixel derivante dalla digitalizzazione dell'immagine è stato preso un campione di differenze di luminosità a diverse separazioni, e i risultati sono stati organizzati in un grafico semilogaritmico (ovvero nel quale un asse — quello della separazione — è lineare e l'altro — quello della differenza di luminanza — è logaritmico), nel quale dunque vedere una gaussiana indica una distribuzione log-normale della variabile effettiva. I risultati dell'analisi del quadro “Notte Stellata” (figura 1) del 1889, sono mostrati nella figura 5.

Il fatto che il comportamento sia lo stesso a diverse scale è particolarmente significativo: è analogo alla previsione di Kolmogorov che i vortici siano statisticamente simili a diverse scale.

La quantità analizzata,  $P_R(\delta v_R)$ , è in realtà normalizzata:

$$P_R(\delta v_R) = \frac{\delta v_R}{\sqrt{\langle (\delta v_R)^2 \rangle}} \quad (3.1)$$

(dove la quantità  $\left( \langle (\delta v_R)^2 \rangle \right)^{1/2} = \|\delta v_R\|$  è la norma del vettore  $\delta v_R$ ).

Inoltre, anche la previsione dell'equazione (2.9) è confermata, come possiamo vedere dalla figura 6.

Gli scienziati spagnoli hanno analizzato altri tre quadri:

- *Wheatfield with crows*, del 1890 (figura 2, PDF nella figura 7);
- *Road with cypress and star*, del 1890 (figura 4, PDF nella figura 8);
- *Self-portrait with pipe and bandaged ear*, del 1889 (figura 3, PDF nella figura 9).

---

<sup>1</sup>La luminanza è stata spesso usata da artisti (dall'inizio dell'impressionismo) per trasmettere una sensazione di movimento, poiché la parte del cervello che analizza il colore non riesce a percepire la luminanza, le parti con la stessa luminanza del dipinto non sono facilmente differenziabili e perciò sembrano “vibrare”.

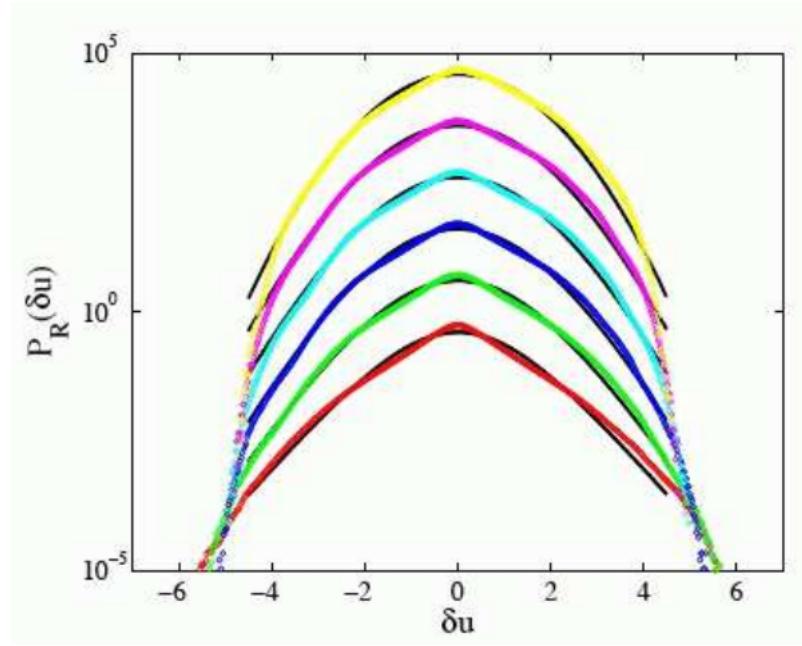


Figura 5: Densità di probabilità della variazione di luminanza di *Starry night* per diverse distanze  $R_i = 60, 240, 400, 600, 800, 1200$  dal basso in alto.

Le PDF dei primi due sono chiaramente riconducibili a curve gaussiane, come predetto dalla teoria di Kolmogorov, e infatti questi quadri presentano il distintivo aspetto “turbolento” che spesso associamo a questo artista; al contrario, la PDF del terzo quadro è estremamente distante dalla gaussiana prevista, malgrado siano presenti “avvolgimenti” nella rappresentazione del fumo della pipa (fenomeno effettivamente turbolento nella realtà).

L’ultimo quadro è stato dipinto agli inizi del 1889, poco dopo il noto episodio del 23 Dicembre 1888 in cui Van Gogh si mutilò parte dell’orecchio. Fu forzatamente ammesso in un ospedale e gli venne somministrato bromuro di potassio, un sale ai tempi usato come sedativo. Il quadro fu dunque dipinto in uno stato di

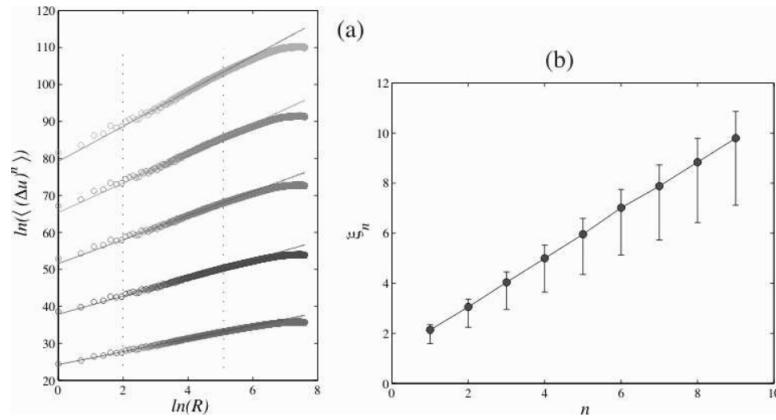


Figura 6: *Scaling* di funzioni di struttura di ordine da 1 a 5

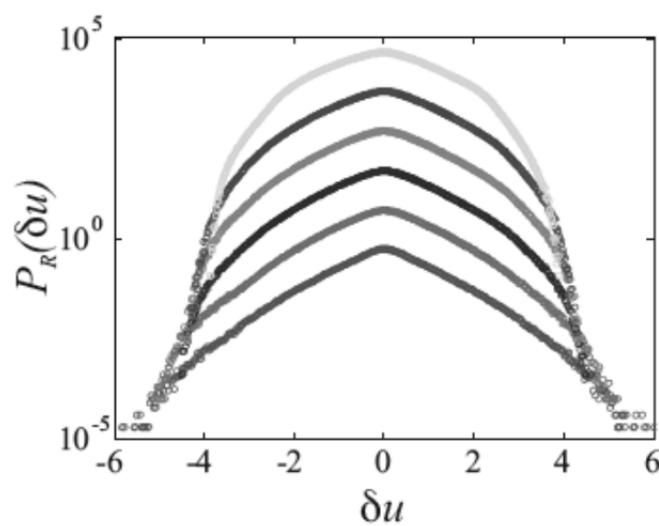


Figura 7: PDF di *Wheatfield with crows*.

calma indotta, al contrario di *Notte stellata* e gli altri, che furono dipinti durante periodi di prolungata e profonda agitazione psicotica.

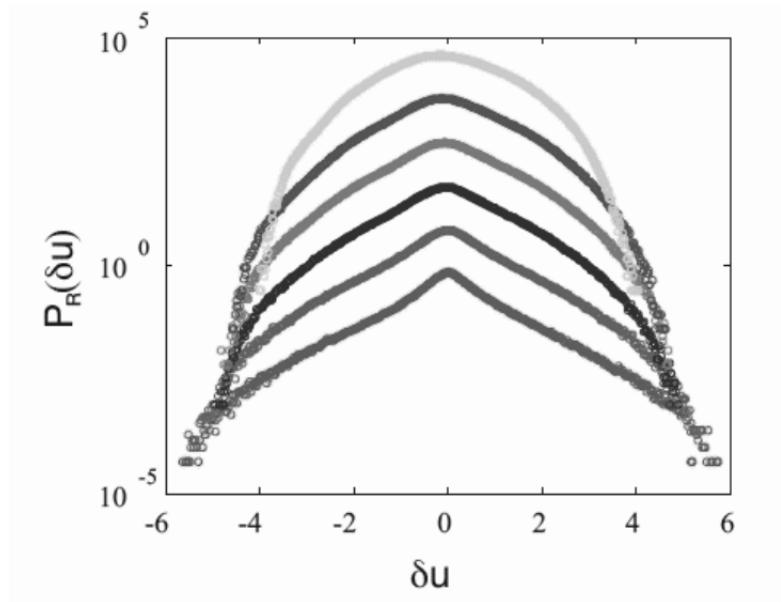


Figura 8: PDF di *Road with cypress and star*.

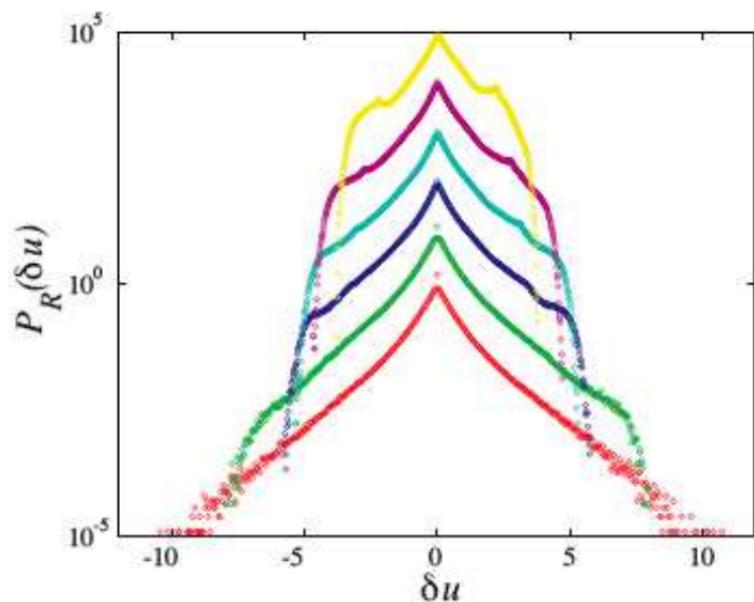


Figura 9: PDF di *Self-portrait with pipe and bandaged ear*.

# Indice

<b>1</b>	<b>Le equazioni di Navier-Stokes</b>	<b>1</b>
1.1	Derivazione . . . . .	1
1.2	Formulazione . . . . .	6
1.3	Il numero di Reynolds . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Il flusso turbolento</b>	<b>8</b>
2.1	La teoria di Kolmogorov . . . . .	9
2.2	La funzione di struttura . . . . .	10
2.3	La distribuzione di $\epsilon$ . . . . .	10
<b>3</b>	<b>La teoria di Kolmogorov applicata all'arte</b>	<b>11</b>

## Riferimenti bibliografici

- [1] J.L. Aragón, Gerardo G. Naumis, M. Bai, M. Torres, P.K. Maini, *Turbulent luminance in impassioned van Gogh paintings*, <http://arxiv.org/abs/physics/0606246>, 2006.
- [2] Contributori di Wikipedia, *Derivation of the Navier-Stokes equations*, *Wikipedia, l'enciclopedia libera*, consultata il 26 giugno 2016 <http://bit.ly/28W5aG1>
- [3] Karima Khusnutdinova, *Kolmogorov's 5/3 law*, [http://homepages.lboro.ac.uk/~makk/mathrev\\_kolmogorov.pdf](http://homepages.lboro.ac.uk/~makk/mathrev_kolmogorov.pdf), 2009.
- [4] Terence Tao, *Kolmogorov's power law for turbulence*, <https://terrytao.wordpress.com/2014/05/15/kolmogorovs-power-law-for-turbulence/>, 2014.
- [5] Marianne Freiberger, *Troubled minds and perfect turbulence*, <https://plus.maths.org/content/troubled-minds-and-perfect-turbulence>, 2006.
- [6] Philip Ball, *Van Gogh painted perfect turbulence*, <http://www.nature.com/news/2006/060703/full/news060703-17.html#close>, 2006, su "Nature".
- [7] Lewis Fry Richardson, 1922. <http://www.nature.com/nphys/journal/v12/n3/full/nphys3697.html>
- [8] Università di Auckland, *Solid Mechanics Book* <http://bit.ly/1KCFVst>
- [9] Università di Dartmouth, *Environmental Fluid Mechanics* <https://engineering.dartmouth.edu/~d30345d/books/EFM/chap8.pdf>

- [10] Contributori di Wikipedia, *Viscous stress tensor*, *Wikipedia, l'enciclopedia libera*, consultata il 26 giugno 2016  
<http://bit.ly/28U4H76>
- [11] Contributori di Wikipedia, *Inner product space*, *Wikipedia, l'enciclopedia libera*, consultata il 26 giugno 2016  
<http://bit.ly/28ZtURb>
- [12] Contributori di Wikipedia, *Probability density function*, *Wikipedia, l'enciclopedia libera*, consultata il 26 giugno 2016  
<http://bit.ly/28V8nGr>
- [13] Contributori di CFD Online, *Turbulence dissipation rate*, *CFD Online*, consultata il 26 giugno 2016  
<http://bit.ly/28Zugr8>
- [14] Valentino Pediroda, *Fluidodinamica* (dispense), A. A. 2005–2006, II semestre:  
 capp. 4, 5, 7, 9.
- [15] J. M. McDonough (Departments of Mechanical Engineering and Mathematics University of Kentucky), *Introductory Lectures on Turbulence*.  
<https://www.engr.uky.edu/~acfd/lctr-notes634.pdf>,  
 2007.
- [16] B. Castaing (Centre de Recherches sur les Très Basses Températures, CNRS,  
 BP 166 X, 38042 Grenoble Cedex, France),  
 Y. Gagne, E.J. Hopfinger (Institut de Mécanique de Grenoble, UMR 101,  
 BP 53 X, 38041 Grenoble Cedex, France),  
*Velocity probability density functions of high Reynolds number turbulence*,  
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016727899090035N>,  
 1990 (solo il sommario).
- [17] Lian-Ping Wang (Department of Mechanical Engineering, 126 Spencer Laboratory, University of Delaware, Newark, DE 19716, USA),  
 Shiyi Chen (BM Research Division, T.J. Watson Research Center, PO Box 218, Yorktown Heights, NY 10598, USA),  
 James G. Brasseur (Department of Mechanical Engineering, Pennsylvania State University, University Park, PA 16802, USA),  
 John C. Wyngaard (Department of Meteorology, Pennsylvania State University, University Park, PA 16802, USA)  
*Examination of hypotheses in the Kolmogorov refined turbulence theory through high-resolution simulations.* [http://research.me.udel.edu/~lwang/reprints/Wang\\_etal\\_JFM\\_1996.pdf](http://research.me.udel.edu/~lwang/reprints/Wang_etal_JFM_1996.pdf),  
 1995