Tema A.5

Jacopo Martellotto

Settembre 2025

1 Resistenza di irraggiamento

Siano $\hat{y}$ la direzione perpendicolare alle lastre del condensatore e $\hat{z}$ la direzione perpendicolare al piano del circuito. La radiazione irraggiata è dovuta sia al momento di dipolo del condensatore $\vec{p} = Q(t)d\ \hat{y}$, sia al momento di dipolo magnetico della spira $\vec{\mu} = I(t)l^2\ \hat{z}$. Nel caso di corrente monocromatica $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$, queste due quantità valgono:

$$\vec{p}(t) = \frac{I_0 d}{i\omega} e^{i\omega t}\,\hat{y}, \qquad \ddot{\vec{p}}(t) = \frac{I_0 d}{i\omega}(i\omega)^2 e^{i\omega t}\,\hat{y} = i\omega I_0 d\, e^{i\omega t}\,\hat{y},$$

$$\vec{\mu}(t) = I_0 l^2 e^{i\omega t}\,\hat{z}, \qquad \ddot{\vec{\mu}}(t) = (i\omega)^2 I_0 l^2 e^{i\omega t}\,\hat{z} = -\omega^2 I_0 l^2\, e^{i\omega t}\,\hat{z}.$$

L'espressione del campo elettrico di radiazione è quindi:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{rad} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{n}\times(\hat{n}\times\ddot{\vec{p}}(t_{rit}))}{rc^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{n}\times\ddot{\vec{\mu}}(t_{rit})}{rc^3} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 rc^2}\,\hat{n}\times\Big(\hat{n}\times\big(i\omega I_0 d\, e^{i\omega t_{rit}}\hat{y}\big)\Big) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 rc^3}\,\hat{n}\times\big(-\omega^2 I_0 l^2\, e^{i\omega t_{rit}}\hat{z}\big) \\
&= \frac{i\omega I_0 d}{4\pi\varepsilon_0 rc^2} e^{i\omega t - ikr}\,(\hat{n}\times(\hat{n}\times\hat{y})) - \frac{\omega^2 I_0 l^2}{4\pi\varepsilon_0 rc^3} e^{i\omega t - ikr}\,(\hat{n}\times\hat{z}) \\
&= \frac{iI_0 d}{4\pi\varepsilon_0 rc^2}\,\frac{2\pi c}{\lambda} e^{i\omega t - ikr}\,(\hat{n}\times(\hat{n}\times\hat{y})) - \frac{I_0 l^2}{4\pi\varepsilon_0 rc^3}\,\frac{4\pi^2 c^2}{\lambda^2} e^{i\omega t - ikr}\,(\hat{n}\times\hat{z}) \\
&= i\frac{I_0}{2\varepsilon_0 rc}\frac{d}{\lambda}\,e^{i\omega t - ikr}(\hat{n}\times(\hat{n}\times\hat{y})) - \frac{\pi I_0}{\varepsilon_0 rc}\frac{l^2}{\lambda^2}\,e^{i\omega t - ikr}(\hat{n}\times\hat{z}).
\end{aligned}$$

Per calcolare la potenza irraggiata dal circuito dobbiamo integrare il vettore di Poynting corrispondente ai campi di irraggiamento $\vec{E}_{rad}$, $\vec{B}_{rad} = \hat{n}\times\vec{E}_{rad}$. Notiamo che:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}_{rad}\times\vec{B}_{rad} = \frac{1}{\mu_0}|\vec{E}_{rad}|^2 = \frac{1}{\mu_0}(|\vec{E}_p|^2 + |\vec{E}_\mu|^2 + 2\vec{E}_p\cdot\vec{E}_\mu)$$

dove $\vec{E}_p$ e $\vec{E}_\mu$ sono le componenti di $\vec{E}_{rad}$ rispettivamente dovute a $\vec{p}$ e a $\vec{\mu}$. Tenendo a mente le regole sui tensori e sulla contrazione degli indici (come riportato in parentesi quadre), il termine misto in $\vec{S}$ risulta proporzionale a:

$$[\ (\mathbf{a}\times\mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk}a_j b_k, \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}, \quad y_i = \delta_{i2},\ z_i = \delta_{i3},\ \hat{n}\cdot\hat{n} = 1,\ \hat{n}\cdot\hat{y} = n_y.\ ]$$

$$\begin{aligned}
(\hat{n}\times(\hat{n}\times\hat{y}))\cdot(\hat{n}\times\hat{z}) &= \big(\varepsilon_{i\ell m}n_\ell\,\varepsilon_{mpq}n_p y_q\big)\,(\varepsilon_{irs}n_r z_s) \\
&= \big((\delta_{ip}\delta_{\ell q} - \delta_{iq}\delta_{\ell p})n_\ell n_p y_q\big)\,(\varepsilon_{irs}n_r z_s) \qquad \text{(contrazione di } \varepsilon\varepsilon) \\
&= \big(n_i(\hat{n}\cdot\hat{y}) - y_i(\hat{n}\cdot\hat{n})\big)\,(\varepsilon_{irs}n_r z_s) \\
&= n_y\,n_i\,\varepsilon_{irs}n_r z_s\ -\ y_i\,\varepsilon_{irs}n_r z_s \\
&= 0\ -\ y_i\,\varepsilon_{irs}n_r z_s \qquad \text{(poiché } n_i\varepsilon_{irs}n_r = 0) \\
&= -\,\delta_{i2}\,\varepsilon_{irs}n_r\delta_{s3} \\
&= -\,\varepsilon_{2r3}\,n_r \\
&= -\big(\varepsilon_{213}n_1 + \varepsilon_{223}n_2 + \varepsilon_{233}n_3\big) \\
&= -(-1)\,n_1\ =\ n_1\ =\ n_x.
\end{aligned}$$

Deduciamo che il termine misto dipende linearmente dalle componenti di $\hat{n}$. Integrando su tutta la sfera si ha

$$\int d\Omega\, n_x = 0,$$

poiché per simmetria i contributi positivi e negativi si cancellano. Concludiamo che il termine misto in $\vec{S}$ non contribuisce alla potenza totale irradiata.
Quindi le potenze irraggiate da $\vec{p}$ e da $\vec{\mu}$ si sommano. Poiché ognuno dei due campi è della forma $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$, abbiamo per la potenza irraggiata:

$$P_{irr} = 4\pi r^2 \langle \vec{S} \rangle = \frac{2\pi d^2}{3\varepsilon_0 c \lambda^2} I_0^2 + \frac{8\pi^3 l^4}{3\varepsilon_0 c \lambda^4} I_0^2$$

Poiché questa potenza è proporzionale a I^2 possiamo considerare l'effetto della radiazione sul circuito come quello dovuto ad una "resistenza di irraggiamento" pari a:

$$R_{irr} = \frac{2\pi d^2}{3\varepsilon_0 c \lambda^2} + \frac{8\pi^3 l^4}{3\varepsilon_0 c \lambda^4} = \frac{2}{3}\pi Z_0 \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 + \frac{8}{3}\pi^3 Z_0 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^4$$

2 Sezioni d'urto

Sul circuito ora incide l'onda con $\vec{B} = B_0 e^{i\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{r}}\ \hat{z}$, dove $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}(\cos\theta\ \hat{x} + \sin\theta\ \hat{y})$ è il vettore d'onda. Dalla legge di Faraday sappiamo che nel circuito si genera una f.e.m. pari a $\mathcal{E} = i\omega B_0 l^2 e^{i\omega t}$. La caduta di potenziale ai capi del condensatore è pari a:

$$Q = C(\Delta V - \vec{E}\cdot(d\ \hat{y})) = C(\Delta V - Ed\cos\theta)$$
$$\Delta V = \frac{Q}{C} + Ed\cos\theta$$

Dove $C = \varepsilon_0 A/d$ è la capacità del condensatore. Effettuando il bilancio energetico si ottiene quindi:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} I &= R_{load} I^2 + R_{irr} I^2 + \Delta V I \\
\mathcal{E} &= (R_{load} + R_{irr}) I + \left(\frac{Q}{C} + Ed\cos\theta\right) \\
&= (R_{load} + R_{irr}) I + \frac{1}{i\omega C} I + Ed\cos\theta \\
&= ZI + Ed\cos\theta,
\end{aligned}$$

dove $Q = I/(i\omega)$ e $Z = R_{load} + R_{irr} + 1/(i\omega C)$ è l'impedenza totale. La corrente risulta:

$$I = \frac{\mathcal{E} - E_0 d\cos\theta}{Z} = \frac{-E_0 d\cos\theta + i\omega B_0 l^2}{Z} e^{i\omega t}.$$

Per separare parte reale e immaginaria moltiplichiamo per il complesso coniugato di Z:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\big(-cd\cos\theta + i\omega l^2\big)(R + \frac{i}{\omega C})}{|Z|^2} B_0 e^{i\omega t}, \quad R = R_{load} + R_{irr}, \\
&= \frac{B_0 e^{i\omega t}}{|Z|^2}\left[-\Big(Rcd\cos\theta + \tfrac{l^2}{C}\Big) + i\Big(R\omega l^2 - \tfrac{cd}{\omega C}\cos\theta\Big)\right].
\end{aligned}$$

Infine, la potenza media su ciascun resistore è

$$\begin{aligned}
\langle P_{abs} \rangle &= \tfrac{1}{2} R_{load} |I_0|^2 = \frac{R_{load} B_0^2}{2}\,\frac{c^2 d^2\cos^2\theta + \omega^2 l^4}{|Z|^2}, \\
\langle P_{el} \rangle &= \tfrac{1}{2} R_{irr} |I_0|^2 = \frac{R_{irr} B_0^2}{2}\,\frac{c^2 d^2\cos^2\theta + \omega^2 l^4}{|Z|^2},
\end{aligned}$$

dove si è usato $|-cd\cos\theta + i\omega l^2|^2 = c^2 d^2\cos^2\theta + \omega^2 l^4$.
Poiché il modulo medio del vettore di Poynting incidente è

$$\langle |\vec{S}_{in}| \rangle = \frac{cB_0^2}{2\mu_0} = \frac{B_0^2}{2Z_0}, \qquad Z_0 = \mu_0 c,$$

le sezioni d'urto assumono la forma generale

$$\sigma_X = \left(\frac{4\pi^2 l^4}{\lambda^2} + d^2\cos^2\theta\right)\frac{Z_0 R_X}{(R_{load}+R_{irr})^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}},$$

dove R_X è resistenza efficace:

$$R_X = \begin{cases} R_{load} & \Rightarrow \sigma_{abs}, \\ R_{irr} & \Rightarrow \sigma_{el}, \\ R_{load}+R_{irr} & \Rightarrow \sigma_{tot}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{abs} &= \left(\frac{4\pi^2 l^4}{\lambda^2} + d^2\cos^2\theta\right)\frac{Z_0 R_{load}}{(R_{load}+R_{irr})^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \\ \sigma_{el} &= \left(\frac{4\pi^2 l^4}{\lambda^2} + d^2\cos^2\theta\right)\frac{Z_0 R_{irr}}{(R_{load}+R_{irr})^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \\ \sigma_{tot} &= \left(\frac{4\pi^2 l^4}{\lambda^2} + d^2\cos^2\theta\right)\frac{Z_0 (R_{load}+R_{irr})}{(R_{load}+R_{irr})^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \end{aligned}$$

3 Ampiezza di scattering e teorema ottico

Sostituendo nell'equazione per $\vec{E}_{rad}$ trovata all'inizio l'espressione per I_0 otteniamo:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{rad} &= \frac{i\omega I_0 d}{4\pi\varepsilon_0 r c^2} e^{i\omega t - ikr}(\hat{n}\times(\hat{n}\times\hat{y})) - \frac{\omega^2 I_0 l^2}{4\pi\varepsilon_0 r c^3} e^{i\omega t - ikr}(\hat{n}\times\hat{z}) \\ &= \frac{B_0 e^{i\omega t - ikr}}{4\pi\varepsilon_0 r c^3}\frac{-cd\cos\theta + i\omega l^2}{Z}(ic\omega d\ (\hat{n}\times(\hat{n}\times\hat{y}))\ - \omega^2 l^2\ (\hat{n}\times\hat{z})) \end{aligned}$$

L'ampiezza di scattering risulta quindi:

$$\vec{f}(k\vec{n}) = \frac{B_0}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{-cd\cos\theta + i\omega l^2}{R_{load}+R_{irr}+\frac{1}{i\omega C}}(ic\omega d\ (\hat{n}\times(\hat{n}\times\hat{y}))\ - \omega^2 l^2\ (\hat{n}\times\hat{z}))$$

Troviamo ora P_{diss} utilizzando il teorema ottico. Ricordiamo che $\vec{k} = k(\cos\theta\ \hat{x} + \sin\theta\ \hat{y})$ è il vettore d'onda dell'onda incidente, per cui abbiamo:

$$\hat{k}\times(\hat{k}\times\hat{y}) = \cos\theta(\sin\theta\hat{x} - \cos\theta\hat{y}), \quad \hat{k}\times\hat{z} = \sin\theta\hat{x} - \cos\theta\hat{y}$$
$$\vec{E}_0 = E_0(-\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y})$$

$$\begin{aligned} P_{diss} &= \frac{2\pi\varepsilon_0 c}{k}\Im[\vec{E}_0^* \cdot \vec{f}(\vec{k})] = \\ &= \frac{E_0 B_0}{2kc^2|Z|^2}\left[\left((R_{load}+R_{irr})cd\cos\theta + \frac{l^2}{C}\right)c\omega d\cos\theta + \left((R_{load}+R_{irr})\omega l^2 - \frac{cd}{\omega C}\cos\theta\right)\omega^2 l^2\right] = \\ &= \frac{(R_{load}+R_{irr})B_0^2}{2|Z|^2}(c^2 d^2\cos^2\theta + \omega^2 l^4) = \langle P_{abs}\rangle + \langle P_{irr}\rangle \end{aligned}$$

Notiamo che troviamo $P_{diss} = \langle P_{abs}\rangle + \langle P_{irr}\rangle$, come atteso.