

Tema B.3

JACOPO MARTELLOTTO

Settembre 2025

Vogliamo calcolare e disegnare il contorno del Dalitz plot per il decadimento del neutrone:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

Le masse delle particelle coinvolte sono:

$$\begin{aligned} m_n &= 0.939\ 565\ \text{GeV} \\ m_p &= 0.938\ 272\ \text{GeV} \\ m_e &= 0.510\ 999\ \text{MeV} \\ m_{\bar{\nu}_e} &\lesssim 1.1\ \text{eV} \sim 0 \end{aligned}$$

Nel riferimento del centro di massa vale $s = m_n^2$ (quindi $\sqrt{s} = m_n$) e l'impulso totale si annulla, $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 = \vec{0}$. Indichiamo con $E_{1,2,3}$ le energie e con $\vec{P}_{1,2,3}$ gli impulsi di protone, elettrone e antineutrino; i corrispondenti quadrvettori sono $P_i = (E_i, \vec{P}_i)$, mentre P_n è il quadrvettore totale nel CM. La costruzione del Dalitz plot richiede di determinare la porzione di spazio delle fasi consentita dai vincoli di conservazione di energia e quantità di moto. Per un decadimento a tre corpi lo spazio delle fasi è 5-dimensionale; nel CM i tre impulsi sono coplanari, per cui il processo giace su un piano. Una scelta naturale di coordinate consiste allora nei tre angoli che fissano l'orientazione di tale piano, insieme a due invarianti di massa:

$$s_{12} = (P_1 + P_2)^2 = (P_n - P_3)^2, \quad s_{23} = (P_2 + P_3)^2 = (P_n - P_1)^2.$$

In questa base la regione ammissibile per il Dalitz plot è rappresentata nel piano (s_{12}, s_{23}) . Poiché adotteremo (s_{12}, s_{23}) come coordinate, il passo successivo è determinarne il dominio fisicamente accessibile. Vogliamo quindi fissare gli intervalli di variazione di s_{12} e s_{23} compatibili con i vincoli on-shell $P_i^2 = m_i^2$ e con la conservazione di energia e quantità di moto. A tal fine risolviamo la cinematica del processo esprimendo le condizioni dell'urto direttamente in funzione di s_{12} e s_{23} . Introduciamo $s_{13} = (P_1 + P_3)^2$ che, in termini di s_{12} e s_{23} si esprime come:

$$\begin{aligned} s_{12} + s_{23} + s_{13} &= s + m_p^2 + m_e^2 + m_{\bar{\nu}_e}^2 \sim s + m_p^2 + m_e^2 \\ s_{13} &= s + m_p^2 + m_e^2 - s_{12} - s_{23} \end{aligned}$$

L'energia E_1 è data da:

$$\begin{aligned} s_{23} &= (P_n - P_1)^2 = s + m_p^2 - 2\sqrt{s}E_1 \\ E_1 &= \frac{1}{2\sqrt{s}}(s + m_p^2 - s_{23}) \end{aligned}$$

Nello stesso modo ricaviamo le espressioni per E_2 ed E_3 :

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{1}{2\sqrt{s}}(s + m_e^2 - s_{13}) = \frac{1}{2\sqrt{s}}(s_{12} + s_{23} - m_p^2) \\ E_3 &= \frac{1}{2\sqrt{s}}(s - s_{12}) \end{aligned}$$

I moduli degli impulsi sono dati da $|\vec{P}_i| = \sqrt{E_i^2 - m_i^2}$, mentre gli angoli fra questi si possono trovare scomponendo la conservazione dell'impulso nelle componenti parallela ed ortogonale a \vec{P}_1 . Detto θ l'angolo fra \vec{P}_1 e \vec{P}_2 e φ quello fra \vec{P}_1 e \vec{P}_3 , queste condizioni diventano:

$$\begin{aligned} |\vec{P}_1| + |\vec{P}_2| \cos \theta + |\vec{P}_3| \cos \varphi &= 0 \\ |\vec{P}_2| \sin \theta &= |\vec{P}_3| \sin \varphi \end{aligned}$$

Risolvendo queste equazioni si trova:

$$\cos \theta = \frac{1}{2|\vec{P}_1||\vec{P}_2|}(\vec{P}_3^2 - \vec{P}_2^2 - \vec{P}_1^2)$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2|\vec{P}_1||\vec{P}_3|}(\vec{P}_2^2 - \vec{P}_3^2 - \vec{P}_1^2)$$

Affinché l'urto avvenga devono quindi risultare positive le differenze $E_i^2 - m_i^2$ ed inoltre devono valere $\cos^2 \theta \leq 1$, $\cos^2 \varphi \leq 1$. Possiamo quindi implementare un codice che controlla la validità di queste condizioni al variare di s_{12} e s_{23} per ottenere il contorno del Dalitz plot. Facendo ciò si ottiene il grafico in Fig. ???. Per migliorare la leggibilità del Dalitz plot, limitiamo s_{12} e s_{23} ai loro intervalli cinematicamente consentiti.

$$(m_p + m_e)^2 \leq s_{12} \leq (\sqrt{s} - m_{\bar{\nu}_e})^2 \sim s$$

$$(m_e + m_{\bar{\nu}_e})^2 \sim m_e^2 \leq s_{23} \leq (\sqrt{s} - m_p)^2 = (m_n - m_p)^2$$

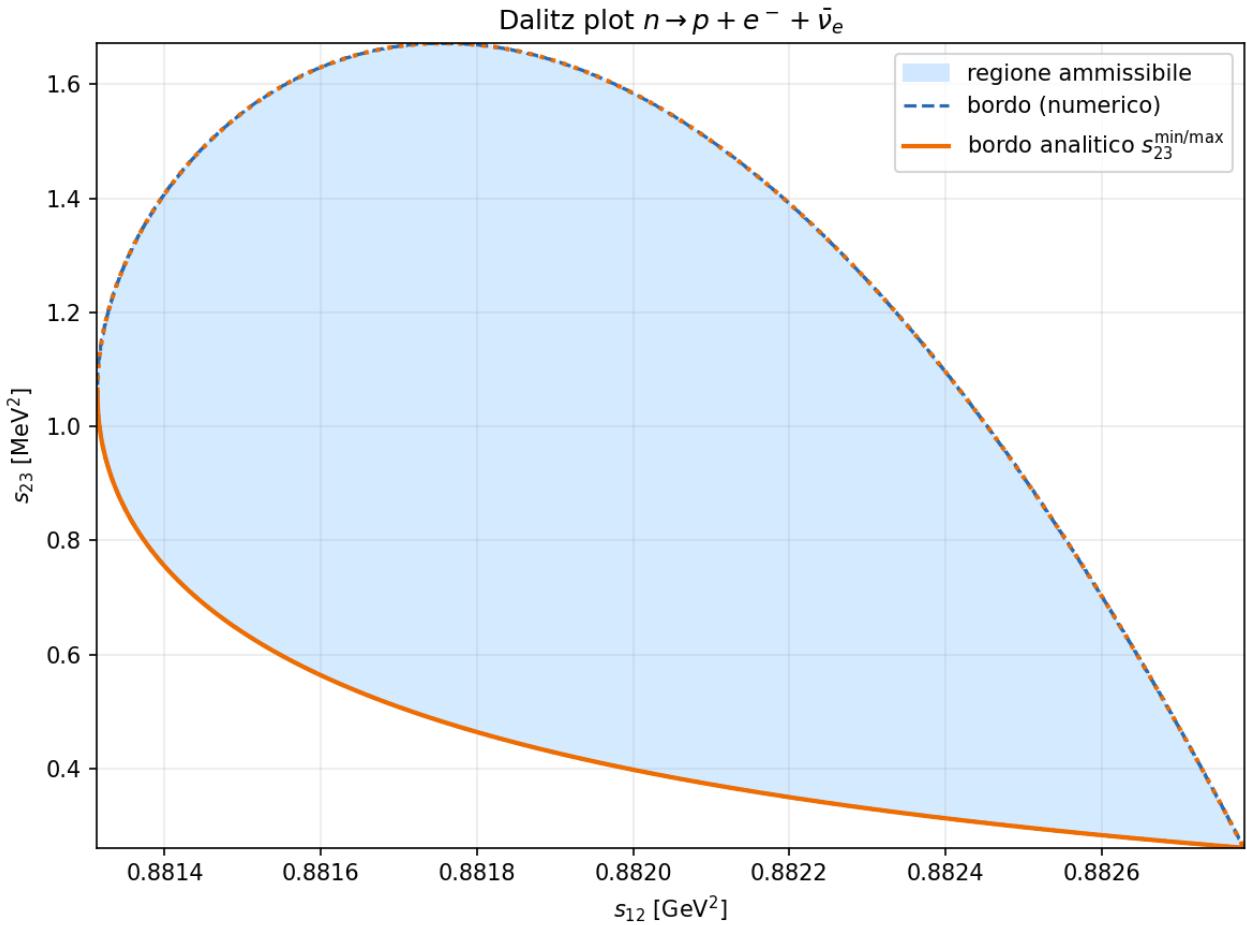


Figura 1: Dalitz plot del decadimento beta del neutrone nel sistema di centro di massa. L'area azzurra indica la regione cinematicamente ammessa. Il bordo tratteggiato blu è il contorno ricavato numericamente dalla maschera su griglia; le curve arancioni sono i limiti analitici previsti dalla cinematica a tre corpi. La buona sovrapposizione tra i due bordi conferma la coerenza tra calcolo numerico e previsione teorica.