

Indice

Indice	i
Prefazione	iii
1 Introduzione	1
1.1 Le difficoltà dell'Astrofisica	1
1.2 Scopi dell'astrofisica	2
1.3 La misura delle grandezze astronomiche	2
2 Telescopi	3
2.1 Acquisizione dei dati	3
2.2 Storia dei telescopi	4
2.3 Proprietà geometriche del telescopio	4
2.3.1 La distribuzione di Poisson	4
2.4 Telescopi rifrattori e riflettori	4
2.5 Metodi costruttivi e montature	4
2.6 Ottica adattiva	4
2.6.1 Seeing	4
3 Fotometria	5
3.1 Spettro stellare e radiazione di corpo nero	5
3.2 Intensità, flusso, magnitudini	5
3.2.1 Magnitudine apparente	7
3.2.2 Magnitudine assoluta	8
3.2.3 Magnitudine fotografica e bolometrica	9
3.3 Sistema UBVRI e indice di colore	10
3.3.1 Bande spettrali	10
3.3.2 Filtri	11
3.3.3 Indice di colore	11
3.4 Diagramma di Hertzsprung–Russel	13
3.4.1 Sequenze e colori	13
3.4.2 Utilità del diagramma H–R	14
3.5 Estinzione e profondità ottica	14

3.5.1	Estinzione atmosferica	15
3.5.2	Estinzione interstellare	17
3.6	Altri sistemi fotometrici	19
3.6.1	UBVY	19
3.6.2	Galassia, galassie	19
4	Spettroscopia	21
4.1	Spettrografi	21
4.2	Assorbimento ed emissione	23
4.2.1	Vero assorbimento	23
4.2.2	Vera emissione	24
4.2.3	Scattering e transizioni	24
4.3	Equazione del trasporto radiativo	24
4.3.1	Estinzione e opacità	25
4.3.2	Emissività e sorgente	25
4.4	Soluzione dell'equazione del trasporto	26
4.5	Spettri stellari	29
4.6	Equazione di Saha??	29
	Bibliografia	31

Prefazione



RA I COLLEGHI circolano diversi blocchi di appunti del corso di Istituzioni di Astrofisica, più o meno ordinati e più o meno completi, prevalentemente divisi in lezioni anziché per argomento. L'intento di questa nuova trascrizione in \LaTeX è quello di avere degli appunti più ordinati e organici e meglio impaginati, forza napoli.

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Le difficoltà dell'Astrofisica

L'Astrofisica è il ramo della Fisica che studia le proprietà fisiche dei corpi celesti. Essa si deve frequentemente confrontare con distanze di molti ordini di grandezza superiori a quelle della vita di tutti i giorni e per questo deve affrontare alcuni problemi che le altre branche della fisica non hanno.

Mentre un fisico può andare in laboratorio e cambiare le condizioni a contorno del proprio esperimento, l'astrofisico non ha questa possibilità: egli deve dedurre le proprietà dell'oggetto di studio solo tramite osservazioni. Questa differenza richiede che vengano fatte delle ipotesi preliminari senza le quali lo studio dei corpi celesti potrebbe risultare illegittimato.

L'ipotesi su cui si fonda tutta l'Astrofisica è quella che le leggi della fisica siano le stesse ovunque nell'universo—anche ad anni luce di distanza—, cosa che naturalmente non è possibile verificare a meno di, per esempio, di inviare tanti piccoli esploratori in tutti i punti dell'universo per verificare che ciò sia vero.

Una delle principali difficoltà di questa ipotesi è il fatto che le stesse leggi che applichiamo sulla Terra sono solo modelli che in prima approssimazione descrivono e prevedono sufficientemente bene il mondo che ci circonda e non sono necessariamente corrette. Basti pensare alla Teoria della Gravitazione di Newton che spiega bene l'orbita della Luna intorno alla Terra, ma basta allontanarsi di poco da noi per scoprire che l'orbita di Mercurio ha un comportamento inspiegabile secondo la teoria di Newton ma meglio descritto dalla Relatività Generale.

L'Astrofisica di conseguenza non può che partire da ipotesi simili—ad esempio assumendo che la Relatività Generale sia vera anche nella galassia di Andromeda—per poi eventualmente confrontarsi con i risultati osservativi e proporre correzioni ai modelli.

In modo del tutto simile, anche le scale temporali sono enormemente

più grandi rispetto a quelle della vita dell'uomo. Immaginiamo di guardare diverse foto di una famiglia scattate a distanza di dieci anni l'una dall'altra: in una singola foto saremmo in grado di distinguere le persone anziane da quelle giovani, quelle di sesso maschile da quelle di sesso femminile *et cetera*, così come confrontando due foto consecutive siamo in grado di riconoscere i cambiamenti nella fisionomia degli individui. Invece immaginiamo di scattare una foto al cielo oggi e un'altra tra dieci anni. Quante differenze saremmo in grado di riconoscere? Quanto cambia una stella nel corso di dieci anni se la sua vita media è dell'ordine di grandezza di miliardi di anni? Si tratta di fenomeni che avvengono su tempi scala troppo lunghi rispetto alla vita umana.

Il problema dell'Astrofisica è proprio questo: è come tentare di comprendere tutto quello che sappiamo sulla razza umana da una sola foto, di decidere come funzionano le cose semplicemente con uno sguardo attento a un'istantanea, ma non finisce qui! L'informazione infatti si trasferisce con una velocità finita, quindi il segnale proveniente da un oggetto lontano impiegherà più tempo ad arrivare e l'oggetto ci apparirà più giovane. È un po' come se ci venisse chiesto di riconoscere la nonna nella foto di famiglia nonostante appaia come la persona più giovane nella foto.

Quello che quindi si tenta di fare in Astrofisica è proprio cercare di osservare gli oggetti nel modo più dettagliato possibile per poi cercare di risalire al quadro più generale e estrapolare un modello dell'evoluzione dei corpi celesti.

1.2 Scopi dell'astrofisica

1.3 La misura delle grandezze astronomiche


L'Astrofisica trova la sua

Capitolo 2

Telescopi

C'è una forchetta conficcata nel terreno.

F. Pinguino

OME SAPPIAMO, la radiazione elettromagnetica è una delle principali fonti di informazioni sugli eventi astronomici e dallo studio della radiazione che giunge sulla Terra dallo spazio è possibile a volte risalire ad alcune proprietà degli eventi astronomici che l'hanno generata.

Ad esempio, la luce che nel suo tragitto viene riflessa può risultare polarizzata, quella che attraversa gas e polveri può partecipare a fenomeni di scattering e cambiare la propria lunghezza d'onda, così come anche le particelle cariche possono produrre ulteriore radiazione tramite effetto Cherenkov o radiazione di sincrotrone.

Studiando la radiazione che incide sui nostri strumenti tentiamo quindi di ricostruire il processo fisico che l'ha generata per dedurre le condizioni al contorno che hanno permesso a quel processo di verificarsi.

Naturalmente questa tecnica ha delle difficoltà legate al fatto che diversi fenomeni possono generare radiazione elettromagnetica simile, e alla limitatezza degli strumenti utilizzati.

2.1 Acquisizione dei dati

Per studiare un oggetto nel cielo, la prassi è quella di puntare gli strumenti nella sua direzione e ad un certo istante di tempo misurare l'intensità specifica¹. Per un attimo, immaginiamo di trascurare tutti i fenomeni che alterano

¹Densità di energia al variare di tutto, vedi Sez xx?

la radiazione nel percorso dalla sorgente al rivelatore e concentriamoci sul solo processo di misura.

Per cominciare, il modo in cui l'osservatore usa lo strumento—che sia consapevole o no delle conseguenze delle proprie scelte—può falsare la misura o causare la perdita di informazioni: se misuro la luminosità di una stella tutti i giorni alla stessa ora e leggo sempre lo stesso valore, potrei essere indotto a pensare che la stella abbia luminosità costante, ma che succede nelle 24 ore di tempo in cui non effettuo misure? La luminosità potrebbe cambiare periodicamente e io potrei aver avuto la “(s)fortuna” di aver effettuato le misure in momenti in cui la luminosità assume lo stesso valore, senza pensare che a un orario diverso la luminosità possa essere diversa.

Assumendo che l'osservatore prenda le misure in modo impeccabile, dovrà comunque scontrarsi con i limiti tecnici dell'apparecchio che ha davanti: il potere risolutivo dell'apparato utilizzato potrebbe non essere sufficiente a risolvere due stelle vicine, inoltre non è detto che esso sia sensibile a tutte le lunghezze d'onda allo stesso modo, così come potrebbe non distinguere lunghezze d'onda vicine. Dovrebbe inoltre essere in grado di misurare la polarizzazione della luce incidente e l'esatto numero di fotoni che incidono sul rivelatore *et cetera*. Purtroppo uno strumento così versatile ed efficiente non esiste.

2.2 Storia dei telescopi

2.3 Proprietà geometriche del telescopio

2.3.1 La distribuzione di Poisson

2.4 Telescopi rifrattori e riflettori

2.5 Metodi costruttivi e montature

2.6 Ottica adattiva


2.6.1 Seeing

Capitolo 3

Fotometria

*La fotometria è come voler
indovinare due numeri
conoscendone la somma.*

F. Pinguino

OME GIÀ DETTO, per l'astronomo è importante conoscere le proprietà della radiazione proveniente dai corpi celesti che osserva. I nostri strumenti di osservazione come telescopi e sensori ci consentono di misurare la radiazione incidente, ma questo non basta. Il nostro obiettivo è quello di interpretare le quantità che misuriamo e costruire dei modelli fisici che le spieghino.

3.1 Spettro stellare e radiazione di corpo nero

Se prendiamo un sensore—quanto più ideale possibile—e lo puntiamo verso il Sole, l'intensità della radiazione incidente in funzione della lunghezza d'onda avrà un'andamento come quello in Fig. 3.1.^[2] Come è evidente, la distribuzione non solo è fortemente asimmetrica ma presenta diverse irregolarità che variano in base alla quota: lo spettro misurato fuori dall'atmosfera ha un andamento molto meno frastagliato che al livello del mare

3.2 Intensità, flusso, magnitudini

Introduciamo le grandezze più importanti della fotometria. Come sappiamo, la radiazione elettromagnetica trasporta un'energia; supponiamo di avere quindi della radiazione che attraversa una superficie dA il cui vettore normale forma un angolo ϑ con la direzione di propagazione. Essa, lasciando la superficie “alle sue spalle”, si manterrà all'interno di un angolo solido $d\Omega$ che stacca dalla normale alla superficie lo stesso angolo $d\vartheta$.

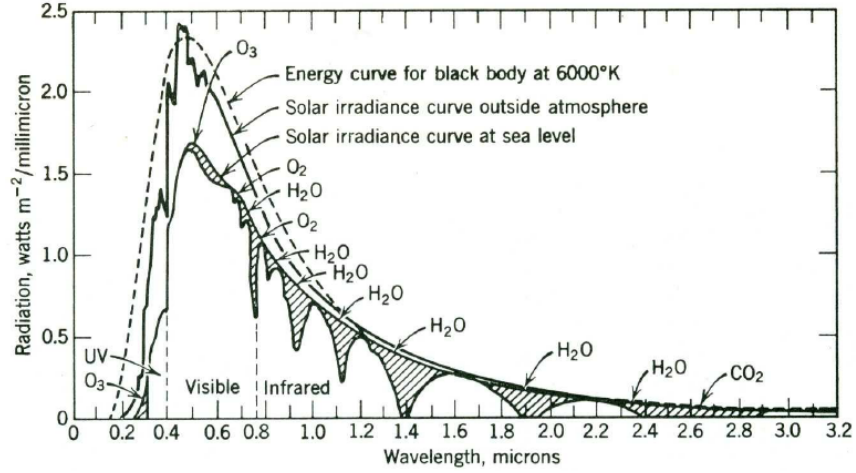


Figura 3.1: Spettro del Sole misurato al livello del mare e fuori dall'atmosfera. La linea tratteggiata è la radiazione di corpo nero a 6000 K

In generale la radiazione può contenere qualsiasi lunghezza d'onda: consideriamo inizialmente la radiazione nelle frequenze comprese nell'intervallo $[\nu, \nu + d\nu]$. L'energia infinitesima che la radiazione trasporta nella regione $d\Omega$ sarà quindi $dE_\nu \propto dt d\nu \cos \vartheta dA$. Chiamiamo *intensità specifica* la costante di proporzionalità, I_ν , e scriviamo:

$$(3.1) \quad d^4 E_\nu = I_\nu d\nu dt \cos \vartheta dA d\Omega .$$

In modo del tutto analogo possiamo fare lo stesso ragionamento decomponendo lo spettro in lunghezza d'onda anziché in frequenza e avremo:

$$(3.2) \quad d^4 E_\lambda = I_\lambda d\lambda dt \cos \vartheta dA d\Omega .$$

Integrando su tutte le frequenze otteniamo l'*intensità totale* denotata dalla lettera I e data da

$$d^3 E = \int_0^\infty I_\nu d\nu dt \cos \vartheta dA d\Omega = I dt \cos \vartheta dA d\Omega .$$

Invertendo queste relazioni si trova subito:

$$(3.3) \quad I_\nu = \frac{1}{\cos \vartheta} \frac{d^4 E_\nu}{d\nu dt dA d\Omega} ,$$

$$(3.4) \quad I_\lambda = \frac{1}{\cos \vartheta} \frac{d^4 E_\lambda}{d\lambda dt dA d\Omega} ,$$

$$(3.5) \quad I = \frac{1}{\cos \vartheta} \frac{d^3 E}{dt dA d\Omega} = \int_0^\infty I_\nu d\nu = \int_0^\infty I_\lambda d\lambda .$$

Un'altra grandezza utile nell'Astrofisica è il *flusso di energia*, detto altrimenti *flusso* o *luminosità* che coincide con la potenza. Risulta utile inoltre introdurre la *densità di flusso*—che, purtroppo, viene spesso detta *flusso* creando non poca confusione—ovvero la grandezza che integrata su una superficie restituisce il flusso. In questo modo si ha:

$$(3.6) \quad L = \frac{dE}{dt} = \oint_S F dS ,$$

$$(3.7) \quad L = 4\pi r^2 F \quad \implies \quad F = \frac{L}{4\pi r^2} ,$$

dove l'ultima uguaglianza è ottenuta integrando su una superficie sferica S di raggio r e supponendo F ivi costante.

Possiamo dedurre che, se la luminosità è una proprietà intrinseca del corpo che emette radiazione—si pensi alla conservazione della potenza nel vuoto, la densità di flusso allora è una grandezza che decresce con r^2 . Volendo fare un'analogia con l'elettrostatica, L gioca il ruolo della carica¹ netta di una distribuzione contenuta all'interno di una superficie chiusa ed F quello del campo elettrico da essa generata.

Se un corpo è esteso e non approssimabile come puntiforme, la luminosità e la densità di flusso saranno funzione delle coordinate di ciascun punto del corpo esteso che le genera. Si definisce *brillanza superficiale* la somma (l'integrale) di tutti i contributi di densità di flusso al variare delle sorgenti elementari.

3.2.1 Magnitudine apparente

Un primo tentativo di classificazione delle stelle fu fatto da un astronomo di nome Ipparco nel 129 a.C. Egli divise le stelle in sei classi a seconda di quanto apparissero “brillanti” a occhio nudo e chiamò queste classi *magnitudini*. Secondo la sua classificazione le stelle più brillanti andavano collocate nella *prima magnitudine*, seguite da quelle di *seconda magnitudine et cetera*, fino a quelle appena visibili che appartenevano alla *sesta magnitudine*.

Nel 1956, l'astronomo britannico Norman Pogson formalizzò ed estese questa classificazione matematicamente. Pogson si rese conto che il legame tra la densità di flusso di una stella e la sua appartenenza a una certa classe di magnitudine di Ipparco era tutt'altro che lineare. Supponendo infatti di avere tre stelle i cui *flussi*² siano in rapporto 1 : 10 : 100, la differenza di magnitudine tra la prima e la seconda e tra la seconda e la stessa appare la stessa: se la prima stella è di prima magnitudine e la seconda

¹A rigore, la carica divisa per ϵ_0 .

²Qui si fa riferimento alla *densità di flusso*. Per brevità anche in questo testo in alcuni punti si userà l'espressione abbreviata. Per non fare confusione, l'usuale *flusso* verrà chiamato sempre *luminosità*.

è di terza magnitudine, la terza apparirà di quinta magnitudine. Pogson in particolare notò che a due stelle i cui i flussi sono in un rapporto di 1 : 100 corrisponde una differenza di magnitudine pari a 5; questo vuol dire che a due classi consecutive di magnitudine deve corrispondere un incremento—o decremento—del flusso un fattore $\sqrt[5]{100} \approx 2.512$. Pogson stabilì quindi che la differenza di magnitudine tra due stelle dovesse essere data dalla relazione

$$(3.8) \quad m_2 - m_1 = -2.5 \operatorname{Log} \left(\frac{F_2}{F_1} \right),$$

dove il -2.5 al posto del -2.512 è intenzionale e $\operatorname{Log} \equiv \log_{10}$. Naturalmente la (3.8) non permette di definire univocamente la magnitudine apparente di una stella ma solo di valutare la differenza di magnitudine tra due di esse.³ Si usa quindi scegliere una certa stella che abbia un certo flusso F_0 noto a cui viene imposta una magnitudine $m_0 = 0$; per convenzione questa scelta ricade sulla stella Vega. In questo modo la (3.8) diventa

$$(3.9) \quad m = -2.5 \operatorname{Log} \left(\frac{F}{F_0} \right).$$

La magnitudine apparente del Sole, avendo posto Vega a 0, risulta negativa e pari a -26 . Questo significa che il flusso del sole è circa 10^{10} volte quello di Vega. L'oggetto meno luminoso mai misurato possiede invece una magnitudine apparente di 30. Per rendere un'idea di quanta luce provenga effettivamente da Vega, basti pensare che, in 1 s, 1 cm^2 di superficie è attraversato da circa 900 fotoni in un range di lunghezze d'onda di 1 \AA . Da una lampada invece ne provengono circa 10^{20} .

È evidente che a magnitudini più basse—o addirittura a valori negativi—corrispondono oggetti più apparentemente luminosi.

3.2.2 Magnitudine assoluta

Il fatto che il Sole abbia una magnitudine così “bassa” rispetto a tutte le altre stelle non deve indurci a credere che il sole sia effettivamente 10^{10} o più volte più luminoso di esse. Il Sole risulta così fuori scala per via della sua distanza.

Se teniamo conto del fatto che la magnitudine apparente è definita attraverso il rapporto delle *densità di flusso*, è facile convincersi del fatto che essa non dia alcuna informazione sulla luminosità intrinseca dei corpi celesti considerati. Infatti il flusso decresce col quadrato della distanza e, se immaginiamo di avere stelle identiche a distanze diverse, queste appariranno con magnitudini diverse nonostante la luminosità sia la stessa. Al

³Un po' come il potenziale di una forza che è definito a meno di una costante ma la d.d.p. è univocamente determinata.

fine di introdurre un modo più sistematico di valutare la luminosità delle stelle, immaginiamo di prendere tutte le stelle dell’Universo e metterle alla stessa distanza dal nostro punto di osservazione. A questo punto la differenza di magnitudine tra due stelle sarà coerente con la differenza delle loro luminosità—e anche del loro flusso, vista la (3.7): una stella più luminosa avrà un flusso maggiore e una magnitudine “più negativa” e, viceversa, a stelle meno luminose corrisponderanno magnitudini più alte.

Se decidiamo di scegliere questa distanza pari a 10 pc, otteniamo quella che viene detta *magnitudine assoluta*. La magnitudine assoluta si indica con la lettera M e lega la magnitudine apparente di una stella alla sua distanza da noi. Infatti se indichiamo con F_r il flusso di una stella a distanza r e con F_{10} il suo flusso a distanza 10 pc, si ha dalla (3.7)

$$\frac{F_r}{F_{10}} = \frac{4\pi(10\text{ pc})^2}{4\pi r^2} = \left(\frac{10\text{ pc}}{r}\right)^2$$

che, inserito nella (3.8) dà

$$m - M = -2.5 \text{Log} \left(\frac{10\text{ pc}}{r} \right)^2.$$

Portando un -2 fuori dal logaritmo si ottiene quello che viene detto *modulo della distanza*:

$$(3.10) \quad m - M = 5 \text{Log} \left(\frac{r}{10\text{ pc}} \right)$$

3.2.3 Magnitudine fotografica e bolometrica

Fin’ora nel parlare di magnitudini abbiamo completamente trascurato un’informazione importante. Il flusso di una stella dovrebbe essere calcolato tenendo conto di tutti i fotoni ricevuti a tutte le lunghezze d’onda, cosa che di certo l’occhio umano non può fare.

Potremmo provare a migliorare la nostra classificazione con l’aiuto di un sensore CCD, che ha un’efficienza quantica superiore a quella dell’occhio umano e permette di fare anche esposizioni più lunghe migliorando il rapporto segnale–rumore. Il primo a fare un tentativo simile fu l’astronomo G. P. Bond nel XIX Secolo che ebbe l’intuizione di porre una lastra fotografica sul piano focale di un telescopio. Fotografando diversi oggetti notò che quelli più luminosi lasciavano sulla lastra delle “macchie” più grandi e questo permetteva di assegnare loro una magnitudine in modo più sistematico. Una magnitudine definita in questo modo può risultare sufficientemente utile da avere un nome suo, quello di *magnitudine fotografica*.

Se provassimo a fare la stessa cosa, con una CCD—ma anche con una lastra fotografica—dopo poche misurazioni inizieremmo a notare delle discrepanze tra le magnitudini fotografiche e quelle *visuali*:⁴ due stelle con magnitudine visuale uguale potrebbero avere magnitudine fotografica differente e viceversa, oppure nella foto potrebbero comparire stelle invisibili a occhio nudo. Questo è dovuto al fatto che l'efficienza quantica dei sensori CCD non solo è in generale più elevata, ma lo è in un intervallo più esteso di quello dell'occhio umano, con un picco leggermente spostato verso il blu rispetto a quello dell'occhio che ricade nel verde.

Si definisce invece *magnitudine bolometrica* la magnitudine teorica ottenuta integrando segnale su tutte le lunghezze d'onda alla massima efficienza. Si tratta di una idealizzazione impossibile da ottenere con le misure a causa dei limiti pratici dovuti al mezzo interstellare, l'atmosfera, l'inefficienza degli strumenti *et cetera*.

3.3 Sistema UBVRI e indice di colore

Un primo modo di risalire alla forma dello spettro di una stella è quello di misurare il flusso di fotoni in alcuni range di lunghezze d'onda—in un modo simile a come costruiremmo un istogramma—per poi “unire i punti” e capire in prima approssimazione l'andamento del flusso con la lunghezza d'onda.

3.3.1 Bande spettrali

Si potrebbe pensare che una suddivisione più fine⁵ degli intervalli sia utile a migliorare la precisione delle misure, ma purtroppo non è esattamente vero. Ricordiamo che in un intervallo di 1 \AA una stella di magnitudine $m = 0$ ha un flusso di circa 900 fotoni al secondo per centimetro quadrato. Il valore corrispondente per una stella di magnitudine $m = 5$ è di 9 fotoni! Se ricordiamo che la ricezione dei fotoni è una misura di conteggio, governata quindi dalla statistica di Poisson, a questi 9 fotoni corrisponde un'incertezza del 33 %, che rende la misura statisticamente poco significativa.

Per migliorare la statistica sarebbe necessario aumentare il tempo di esposizione o la superficie del sensore ma questo è reso difficile dai limiti tecnologici e non è facilmente o sistematicamente estendibile a tutte le lunghezze d'onda. Quello che si sceglie di fare è piuttosto estendere l'intervallo di lunghezze d'onda da misurare “contemporaneamente” suddividendole in *bande spettrali* più o meno ampie.

⁴Dall'osservazione a occhio nudo.

⁵Più intervalli, più stretti.

3.3.2 Filtri

La standardizzazione di questa tecnica è stata introdotta definendo il sistema *sistema UBVRI* per la suddivisione delle varie bande.

Il modo più intuitivo di selezionare questi intervalli è quello di utilizzare dei materiali come il vetro colorato: quando guardiamo attraverso un vetro rosso, quello che succede è che il vetro blocca le lunghezze d'onda fuori da un certo range e lascia passare quelle in prossimità del rosso. Un oggetto con questo comportamento viene detto *filtro* e ad esso viene assegnata un'importante caratteristica che prende il nome di *trasmissività*, definita come la percentuale di fotoni incidenti che vengono trasmessi. In generale è funzione della lunghezza d'onda (o della frequenza).

È importante tenere conto della trasmissività quando si eseguono delle osservazioni. Ad esempio se una sorgente emette 100 fotoni a una data lunghezza d'onda e questi attraversano un filtro con una trasmissività del 60 % per poi incidere su un sensore con una efficienza quantica del 50 %, il sensore rivelerà 30 fotoni, meno della metà.

Il criterio di suddivisione delle bande spettrali fu affinato nel 1935 da H. L. Johnson che introdusse i primi tre filtri standard indicati dalle lettere U, B e V. Queste stanno per:

U: Ultravioletto. Il valor medio delle lunghezze d'onda che questo filtro lascia passare è pari a 3650 \AA (UV).

B: Blu. Il corrispettivo valor medio è di 4440 \AA (violetto–blu).

V: Visibile. La sua banda spettrale si colloca verso il centro dello spettro visibile con un valor medio di 5500 \AA (verde).

Questi primi tre filtri sono molto spostati verso il blu perché le lastre fotografiche dell'epoca erano più sensibili a quegli intervalli di lunghezze d'onda. Negli anni successivi si sono introdotti filtri nella direzione dell'infrarosso:

R: Rosso, con una lunghezza d'onda media di 6400 \AA (arancione–rosso).

I: Infrarosso, con una lunghezza d'onda media di 7900 \AA (vicino infrarosso).

È evidente che il nome del sistema, *UBVRI*, discende proprio da questi cinque filtri.

3.3.3 Indice di colore

L'uso dei filtri del sistema UBVRI permette all'osservatore di misurare la magnitudine che un oggetto ha se ci si restringe alla sola banda spettrale selezionata. Questo studio fornisce informazioni importanti sullo spettro di

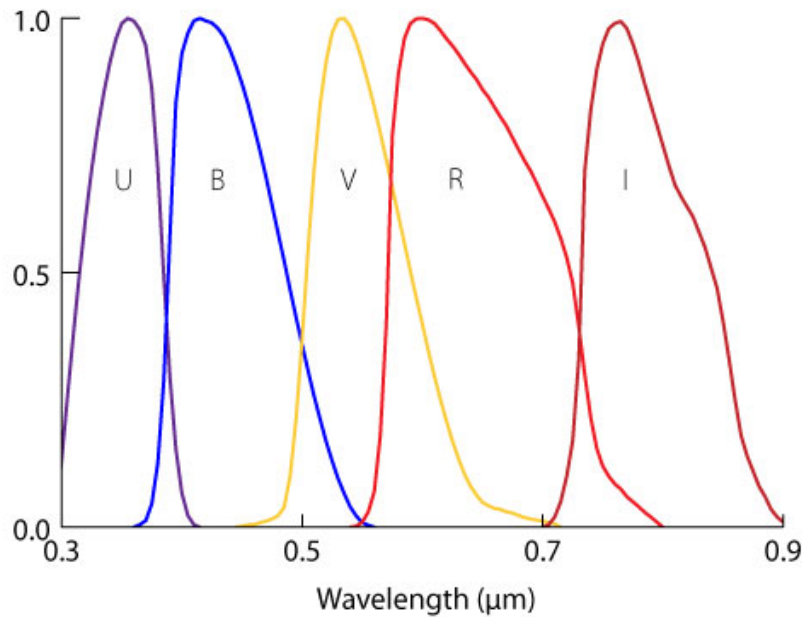


Figura 3.2: Le distribuzioni associate ai filtri dello standard UBVRI.

una stella. Esso, come vedremo più avanti, può essere ben approssimato da una planckiana sebbene presenti alcune “irregolarità” come la *discontinuità di Balmer*. Applicare un filtro alla radiazione incidente corrisponde a fare il prodotto tra il flusso $F(\lambda)$ e la trasmittività $T(\lambda)$ di quel particolare filtro, che assume valori prossimi a 1 in un intorno della lunghezza d’onda scelta e si annulla altrove come si vede in Fig. 3.2.

L’integrale di questo prodotto esteso a tutte le lunghezze d’onda prende il nome di *convoluzione spettrale* e, ad esempio per il filtro U, si scrive

$$F_U = \int_0^{\infty} F(\lambda) T_U(\lambda) d\lambda .$$

Allo stesso modo si definiscono i flussi per gli altri colori B, V *et cetera*.

Se vogliamo quindi calcolare la differenza tra le magnitudini di una stessa stella osservata attraverso filtri diversi non dobbiamo fare altro che applicare la definizione (3.8). Questa differenza prende il nome di *indice di colore* e per convenzione si scrive come differenza delle due lettere, ponendo per primo il filtro con lunghezza d’onda più corta:

$$(3.11) \quad B - V \equiv m_B - m_V = -2.5 \text{Log} \left(\frac{F_B}{F_V} \right) .$$

Questa quantità contiene importanti informazioni sulla pendenza dello spettro della stella. L’indice di colore ci dice la pendenza dello spettro nell’inter-

vallo di lunghezze d'onda delimitato dai due filtri. Se decidiamo di approssimare lo spettro con una planckiana allora possiamo costruire la planckiana la cui pendenza corrisponde a quella data dall'indice di colore e da essa ricavare la temperatura efficace della stella.

3.4 Diagramma di Hertzsprung–Russel

Uno dei più grandi contributi all'Astrofisica della fotometria è il diagramma realizzato indipendentemente da Hertzsprung e Russell agli inizi del XX Secolo. Dopo aver fatto studi fotometrici su moltissime stelle, i due tentarono di inserirle in un diagramma in funzione dei loro parametri come luminosità, temperatura, indice di colore *et cetera*, per capire se questi fossero correlati tra loro. In questo grafico, che oggi prende il nome di *diagramma H-R*, posero l'indice di colore $B - V$ sull'asse delle ascisse e la luminosità L sull'asse delle ordinate (Fig. 3.3).^[1]

3.4.1 Sequenze e colori

Osservando il diagramma notiamo subito che le stelle non assumono posizioni casuali ma tendono a raggrupparsi in alcune regioni che prendono il nome di *sequenze*, la più affollata delle quali È detta *sequenza principale*. Inoltre allo stesso indice di colore, che abbiamo detto essere legato alla temperatura T_{eff} , corrispondono stelle con luminosità molto diverse tra loro. In particolare dalla *Legge di Stefan–Boltzmann*, $F = \sigma T^4$, sappiamo che la temperatura di un corpo nero è legata alla luminosità da

$$(3.12) \quad L = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\text{eff}}^4,$$

essendo R_{\odot} il raggio del corpo nero—in questo caso la stella. Di conseguenza le stelle che hanno lo stesso indice di colore ma appartengono a sequenze diverse devono differire tra di loro in dimensione. Le sequenze nel diagramma prendono quindi nomi che ricalcano le differenti dimensioni delle stelle che le popolano, dall'alto verso il basso: I. supergiganti, II. giganti brillanti, III. giganti, IV. subgiganti, V. sequenza principale, VI. subnane e VII nane. Le stelle vengono inoltre suddivise per colore in base alla temperatura. Dalle più calde, a sinistra, alle meno calde, a destra, si hanno stelle: blu, azzurre, bianche, gialle, arancioni, rosse e brune. Le stelle all'estremo inferiore destro della sequenza principale prendono il nome di *nane brune*.

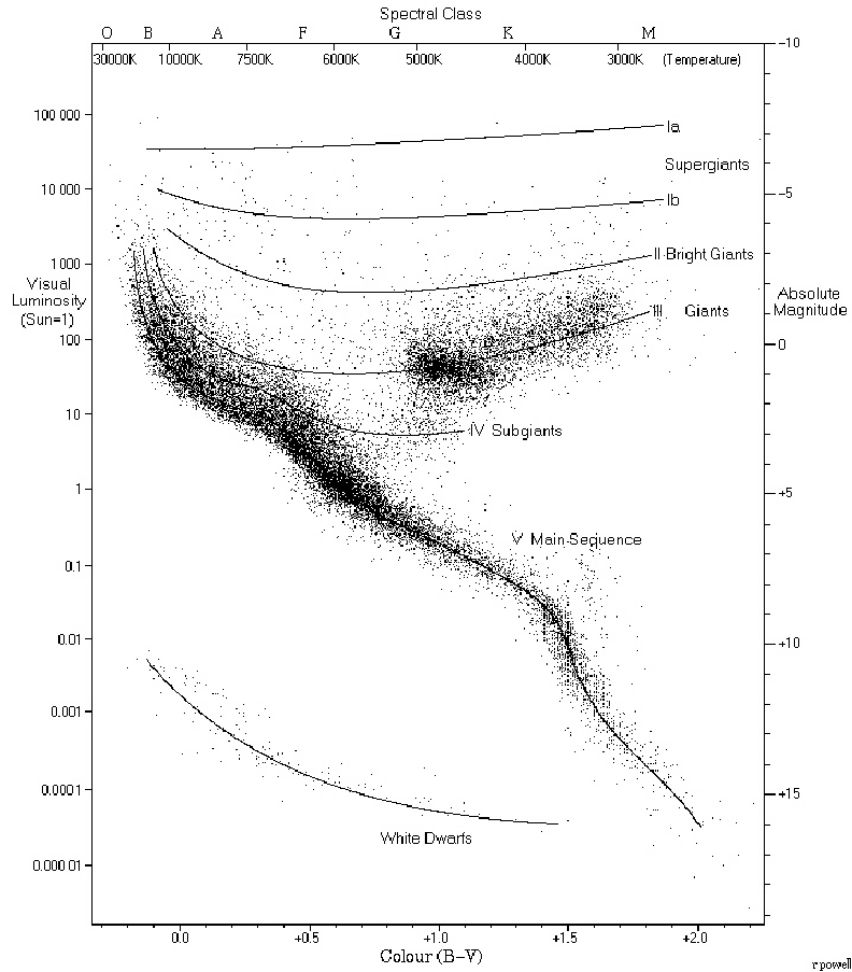


Figura 3.3: Diagramma H-R su una popolazione di 22 000 stelle.

3.4.2 Utilità del diagramma H-R

3.5 Estinzione e profondità ottica

Quanto detto fin'ora è tecnicamente vero solo se supponiamo di metterci in un contesto ideale dove tra il rivelatore e la stella c'è il vuoto perfetto, cosa naturalmente non vera. La radiazione che parte da una stella viaggia per distanze molto lunghe prima di arrivare a terra e lo spazio tra sorgente e rivelatore è tutt'altro che vuoto. I due principali ostacoli sono l'atmosfera terrestre—per le misure fatte da terra—e il mezzo interstellare, ovvero l'insieme di gas e polveri che permeano in modo non uniforme lo spazio tra i corpi celesti.

Come si può intuire, i fenomeni che impediscono a tutta la radiazione

di giungere al suolo sono vari. Tra i principali ci sono:

- ◆ diffusione Thomson;
- ◆ diffusione Compton;
- ◆ assorbimento e riemissione a lunghezze d'onda diverse da quelle osservate.

Il tipo di interazione radiazione-materia dipende dal rapporto tra la lunghezza d'onda λ del fotone e la dimensione d delle particelle che costituiscono il materiale:

- ◆ se $\lambda \ll d$ prevale lo scattering Compton;
- ◆ se $\lambda \sim d$ prevale lo scattering Thomson;
- ◆ se $\lambda \gg d$ prevale la trasmissione indisturbata del fotone.

Cerchiamo di capire quantitativamente come questi fenomeni alterino la radiazione partendo dal caso in atmosfera.

3.5.1 Estinzione atmosferica

L'atmosfera, per quanto sia sottile rispetto alle distanze interstellari, costituisce un ostacolo non indifferente alla propagazione della luce se consideriamo che circa la metà dei fotoni incidenti viene riflessa. Tuttavia l'interazione dipende evidentemente dalla lunghezza d'onda: quando guardiamo il sole al tramonto esso risulterà più rosso e possiamo dunque dedurre che la luce blu interagisce più facilmente con l'atmosfera rispetto a quella rosso-arancione.⁶

Cerchiamo adesso di scrivere una relazione che espliciti come l'intensità specifica si trasformi in funzione delle proprietà del materiale che attraversa. Considerato un volumetto di area unitaria e spessore dx ; la radiazione di frequenza ν che incide perpendicolarmente avrà intensità specifica I_ν e quella che lascia il volumetto sarà, approssimando al primo ordine, $I_\nu + dI_\nu$.

Sperimentalmente si osserva che il dI_ν è proporzionale sia all'intensità I_ν incidente che allo spessore dx del materiale attraversato: se si raddoppia l'intensità verranno "persi" il doppio dei fotoni e lo stesso avviene se si raddoppia lo spessore del materiale attraversato. Naturalmente questa quantità deve dipendere anche dalle proprietà intrinseche del materiale come la densità o la sua composizione molecolare quindi introduciamo il coefficiente di

⁶È proprio per questo che il cielo appare azzurro: i fotoni con la lunghezza d'onda del blu sono diffusi e giungono ai nostri occhi da tutte le direzioni, mentre quelli arancioni-rossi proguono in modo più coerente e fanno apparire il sole più rosso. Questo effetto è particolarmente accentuato al tramonto, dovendo la luce attraversare una porzione più spessa di atmosfera.



Figura 3.4: Cubetto

proporzionalità κ_ν che esprime questa dipendenza insieme a quella dalla lunghezza d'onda. Si avrà quindi:

$$(3.13) \quad dI_\nu = -\kappa_\nu I_\nu dx .$$

In alcuni casi può essere utile esplicitare la dipendenza dalla densità ρ “estraendola” da κ_ν e scrivendo quindi $\kappa_\nu \rightarrow \kappa_\nu \rho$; il coefficiente κ_ν definito esplicitando ρ viene detto coefficiente *di assorbimento* o *di estinzione*.

Dal momento che in generale in Astrofisica non è possibile sondare tutti i punti del percorso seguito dalla radiazione, la dipendenza da x nella (3.13) è relativamente inutile. All'estinzione della radiazione che giunge ai nostri strumenti infatti contribuisce la totalità del materiale attraversato e a noi tocca lavorare con questa radiazione “a conti fatti”. Risulta quindi utile introdurre la *profondità ottica* τ_ν ottenuta integrando $\kappa_\nu \rho$, funzioni di x , lungo tutto lo spessore di materiale attraversato L :

$$(3.14) \quad \tau_\nu = \int_0^L \kappa_\nu(x) \rho(x) dx ,$$

essendo $x = 0$ l'ascissa—eventualmente curvilinea—del punto di partenza e $x = L$ quella del punto arrivo.

Fatte queste considerazioni, la (3.13) si scrive

$$(3.15) \quad dI_\nu = -I_\nu d\tau_\nu ,$$

che può essere facilmente integrata ponendo in particolare $I_\nu(0) = I_\nu^0$:

$$(3.16) \quad I_\nu = I_\nu^0 e^{-\tau_\nu} ,$$

dove la dipendenza da x può essere esplicitata scrivendo

$$I_\nu(x) = I_\nu^0 \exp \left[- \int_0^x \kappa_\nu(x') \rho(x') dx' \right] .$$

Osserviamo quindi che gli oggetti con una profondità ottica τ_ν molto piccola sono sostanzialmente trasparenti alla luce di frequenza ν ; viceversa gli oggetti con una profondità ottica elevata appaiono più opachi.

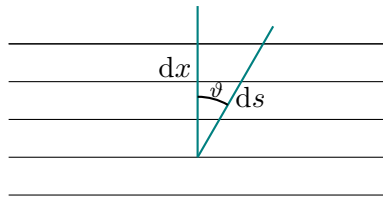


Figura 3.5: Ogni strato è considerato uniforme, il τ_ν è ottenuto integrando lungo dx .

Quanto detto fin'ora è valido solo nell'ipotesi in cui la radiazione incide perpendicolarmente alla superficie del materiale considerato. Naturalmente non è sempre possibile osservare una stella allo zenit, quindi è necessario fare delle considerazioni ulteriori.

Approssimiamo l'atmosfera come fatta da strati orizzontali omogenei, ciascuno con profondità ottica $d\tau_\nu$ e indichiamo con ϑ l'angolo zenitale della stella osservata. Se la luce incide proprio all'angolo ϑ , allo spessore di atmosfera dx corrisponderà il tragitto reale $ds = \cos \vartheta dx$ che può essere invertito ottenendo $dx = \sec \vartheta ds$. Fissato ϑ , la profondità ottica che si ottiene integrando lungo la direzione ds sarà quindi $\sec \vartheta d\tau_\nu$ e l'intensità specifica misurata a terra sarà data da:

$$I_\nu = I_\nu^0 e^{-\sec \vartheta \tau_\nu}.$$

Dal momento che τ_ν è una costante legata all'atmosfera, se fissiamo una stella e facciamo misurazioni a diverse ore del giorno—facendo quindi variare ϑ —possiamo ottenere l'intensità specifica I_ν^0 che la radiazione ha al momento dell'ingresso in atmosfera. Questo lavoro è semplificato dal fatto che, al posto di misurare l'intensità, l'astronomo è solito misurare la magnitudine della stella: essendo quest'ultima legata logarithmicamente alla prima, sarà possibile fare un fit lineare dei dati fin da subito.

3.5.2 Estinzione interstellare

Come è facile immaginare, la perdita di fotoni non può essere risolta del tutto semplicemente spostando gli strumenti al di sopra dell'atmosfera. Lo spazio infatti è tutt'altro che vuoto e le nubi di gas e polveri presenti lungo il cammino della radiazione, che vanno sotto il nome di *mezzo interstellare*, contribuiscono agli effetti di estinzione. [Inserire foto nubi scure].

Una trattazione simile a quella atmosferica può essere fatta per il mezzo interstellare, con alcuni opportuni aggiustamenti. Per cominciare la densità della materia che compone le nubi è di diversi ordini di grandezza più bassa di quella che compone l'atmosfera, di conseguenza anziché usare la densità di massa, misurata in kg m^{-3} o in g cm^{-3} , si preferisce usare la densità di *grani*—ovvero particelle, granelli microscopici di polvere o ciò che di volta

in volta appare opportuno—data dal numero di grani per ogni m^3 o in cm^3 , indicata dalla lettera $n(x)$.

In modo del tutto analogo a prima, in ogni strato infinitesimo di mezzo interstellare inciderà una radiazione con intensità specifica I_ν e verrà trasmessa una $I_\nu + dI_\nu$ data da:

$$(3.17) \quad dI_\nu = -n\kappa_\nu I_\nu dx .$$

Possiamo anche in questo caso definire una profondità ottica τ_ν , supponendo che il coefficiente di assorbimento κ_ν sia lo stesso per tutta la nube:

$$\tau_\nu(x) = \kappa_\nu \int_0^x n(x') dx' = \kappa_\nu N(x) .$$

In questo caso scegliendo di integrare da 0 a un certo punto x all'interno della nube possiamo definire la funzione $N(x)$ che dà la densità “superficiale” di grani che si otterrebbe se si immaginasse di comprimere in uno strato infinitamente sottile tutta la materia contenuta nell'intervallo $[0, x]$. Anche in questo caso si ottiene una relazione del tipo

$$(3.18) \quad I_\nu = I_\nu^0 e^{-\tau_\nu} ,$$

e tramite il rapporto delle intensità I_ν e I_ν^0 —uguale al rapporto di F_ν e F_ν^0 —si può conoscere il “calo” di magnitudine dovuto alla presenza del mezzo interstellare:

$$(3.19) \quad A_\nu \equiv m_\nu - m_\nu^0 = -2.5 \text{Log} \left(\frac{I_\nu}{I_\nu^0} \right) .$$

La quantità A_ν così definita prende il nome di *tasso di assorbimento specifico* o *absorption rate* associato alla frequenza ν .

Sostituendo la (3.18) nella (3.19) possiamo vedere che il tasso di assorbimento è strettamente legato alla profondità ottica:

$$A_\nu = -2.5 \text{Log} e^{-\tau_\nu} = 2.5 \tau_\nu \text{Log} e \simeq 1.086 \tau_\nu .$$

Dalla dipendenza di τ_ν dalla frequenza ν deduciamo che il tasso di assorbimento dipende dalla lunghezza d'onda. In particolare si osserva che le lunghezze d'onda minori sono estinte più facilmente di quelle maggiori, di conseguenza per osservare stelle più lontane è opportuno osservare nelle lunghezze d'onda tra infrarosso e radio. In questo modo appariranno stelle che non si vedono nel visibile perché le frequenze di quell'intervallo vengono completamente assorbite dal mezzo interstellare.

3.6 Altri sistemi fotometrici

3.6.1 UBVY

3.6.2 Galassia, galassie

Capitolo 4

Spettroscopia

Tramite la fotometria abbiamo appreso come misurare la radiazione elettromagnetica in bande larghe di 1500 \AA o strette di 150 \AA . Questo ci permette di risalire alle proprietà generali della sorgente che la emette, come la temperatura e la distanza. Tuttavia, come abbiamo visto, tra le sorgenti e i nostri strumenti si trovano oggetti materiali che la luce deve attraversare per raggiungerci.

Proviamo per un attimo a fare un ragionamento al contrario: immaginiamo di avere una sorgente di cui conosciamo tutte le caratteristiche principali—ad esempio proprio un corpo nero—e interponiamo, tra noi e la sorgente, della materia non completamente opaca e non completamente ionizzata. Possiamo ad esempio confrontare la luce che arriva ai nostri strumenti con la distribuzione nota prodotta dal corpo nero, al fine capire come la radiazione interagisce con la materia e dedurre da ciò le sue proprietà.

4.1 Spettrografi

Per cominciare, per poter misurare la radiazione in modo più dettagliato servono strumenti appositi. Per gli studi di fotometria infatti possiamo “accontentarci” di fotografare una stella con un sensore che sia sensibile, più o meno allo stesso modo, a tutte le lunghezze d’onda cambiando di volta in volta i filtri a banda larga o stretta per scegliere quali fotoni far passare. Se invece vogliamo fare uno studio più dettagliato a banda “strettissima” dovremmo cambiare uno alla volta decine di migliaia di filtri—uno per ciascun intervallo di ampiezza $d\nu$ o $d\lambda$ —a meno che non decidiamo di ricorrere a metodi più specializzati.

Gli strumenti utilizzati in spettroscopia si chiamano *spettrografi* e si basano sulla capacità di alcuni apparati di *disperdere* la luce, ovvero separarla nei colori che la compongono, come prismi e reticoli di diffrazione. I primi deviano la luce incidente di un angolo che dipende dalla lunghezza d’onda,

permettendo di separare spazialmente fasci di luce di colori diversi; i reticoli invece sfruttano i fenomeni di interferenza tra fasci di luce che incidono sul reticolo formando picchi di interferenza costruttiva ad angoli che dipendono dalla lunghezza d'onda.

Dopo aver separato i colori di un fascio di luce tramite un *dispersore*, possiamo intercettare i fasci con uno schermo o un sensore e fare una “foto”: quello che si vedrà sarà una collezione di righe più o meno large e separate tra loro. Introduciamo quindi dei parametri che ci permettano di qualificare le proprietà di uno spettrografo: il *potere dispersivo* e il *potere risolutivo*.

Il potere dispersivo è la capacità dello spettrografo di disperdere, ovvero separare spazialmente, le lunghezze d'onda. Maggiore è il potere dispersivo più sarà facile distinguere righe vicine nello spettro in quanto vengono separate maggiormente sullo schermo. Il potere risolutivo invece è, come per i telescopi, la capacità dello strumento di risolvere due picchi distinti vicini tra loro. Infatti per la diffrazione dovuta alle dimensioni finite degli strumenti¹ le bande di emissione hanno uno spessore finito e la risoluzione di due picchi vicini è un problema del tutto analogo alla risoluzione dei dischi di Airy di due stelle. Possiamo quindi adottare il criterio di Rayleigh e affermare che due picchi sono distinguibili se la loro FWHM è minore della distanza tra le due righe. Definiamo il potere risolutivo R numericamente come

$$(4.1) \quad R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda},$$

che in ambito di spettroscopia astronomica assume valori di 10^5 – 10^6 .

Avere un potere risolutivo e dispersivo elevato non è importante solo per distinguere picchi vicini: spesso può essere utile usare uno spettrografo per determinare lo spostamento di una riga a causa dell'effetto doppler. Tuttavia tale spostamento può risultare troppo piccolo per essere rivelato consistentemente, come nei casi in cui la lunghezza d'onda originale λ e quella spostata $\lambda + d\lambda$ ricadono nello stesso pixel del sensore.

Per aumentare il potere dispersivo dello strumento, la fortuna—o meglio l'ottica—è apparentemente dalla nostra parte se usiamo un reticolo di diffrazione. I reticoli infatti producono diverse figure di interferenza a *ordini* diversi e le figure di ordine maggiore risultano più disperse. Tuttavia a un aumento di separazione spaziale in questo caso corrisponde una diminuzione della luminosità delle righe e una minore nitidezza dell'immagine, dal momento che la maggior parte della luce convoglia nella figura al primo ordine.

¹Questa è una caratteristica legata puramente alla geometria degli strumenti che non c'entra con l'allargamento di riga dovuto alle relazioni di indeterminazione [VEDI par giusto].

Figura 4.1: Dispersore in riflessione di uno spettrografo.

Per risolvere questo problema è stato inventato un nuovo tipo di reticolo di diffrazione in riflessione, costituito da un blocco di vetro plasmato a gradini con precisione micrometrica e rivestito con uno strato riflettente come esemplificato in Fig. 4.1. In questo tipo di spettrografo l'ordine più luminoso è anche quello con la maggiore dispersione, risultando molto più efficiente e preciso del reticolo in trasmissione.

4.2 Assorbimento ed emissione

La materia che la radiazione elettromagnetica attraversa dopo aver lasciato la stella è di vario tipo: polveri e grani, gas ionizzati, plasmi, e le stesse atmosfere della stella e del nostro pianeta, ammesso che i nostri strumenti non si trovino nello spazio.

I fenomeni di interazione che possono verificarsi sono prevalentemente di tre tipi:

- ◆ *Vero assorbimento*, quando il fotone di energia $E = h\nu$ viene completamente assorbito da un atomo che si ionizza. L'energia del fotone si trasforma in energia cinetica dell'elettrone, ovvero energia termodinamica;
- ◆ *Vera emissione*, quando un atomo eccitato da urti anelastici—detti anche *collisioni*—con altri atomi emette radiazione diseccitandosi. L'energia termodinamica viene quindi trasformata in luce;
- ◆ *Diffusione e transizioni*, fenomeni elastici o anelastici in cui un fotone interagisce con un elettrone libero o legato, cede ad esso energia e viene diffuso cambiando lunghezza d'onda.

Questi sono fenomeni che possono alterare in aspetto e in intensità lo spettro incidente in uno strato di materiale. Vediamoli più nel dettaglio.

4.2.1 Vero assorbimento

Il vero assorbimento si ha quando un fotone ha un'energia $E = h\nu$ maggiore dell'energia di (prima) ionizzazione E_0 dell'atomo colpito. In tal caso il quanto di luce sarà del tutto assorbito dall'elettrone, che sarà a sua volta sbalzato fuori dall'atomo con un'energia cinetica K_e pari alla differenza tra energia del fotone ed energia di ionizzazione:

$$K_e = \frac{1}{2}m_e v^2 = h\nu - E_0 > 0.$$

Come è noto dalla termodinamica, l'energia cinetica totale del gas di elettroni ionizzati è legata alla velocità quadratica media $\langle v^2 \rangle$ da

$$(4.2) \quad K = \frac{1}{2} m_e \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} N k_B T,$$

essendo N il numero di elettroni e $k_B = 1.380 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ la costante di Boltzmann. Possiamo quindi immaginare di trattare il gas di elettroni a temperatura T come un corpo nero che emette un nuovo campo di radiazione che ha l'andamento di una planckiana corrispondente alla temperatura T , in generale diversa dallo spettro incidente che potrebbe avere una forma qualsiasi.²

4.2.2 Vera emissione

A volte può succedere che due atomi collidano anelasticamente, ma l'energia non conservata dall'urto³ non può certo sparire nel nulla: in questi casi essa viene “presa in prestito” da un elettrone esterno di uno dei due atomi che passa a uno stato eccitato. Tuttavia l'elettrone non può rimanere indefinitamente in uno stato a energia superiore al minimo consentito e decadrà spontaneamente al suo *ground state* emettendo un fotone che ha energia $E = h\nu$ esattamente pari alla differenza di energia ΔE tra i due livelli energetici occupati dall'elettrone.

Questo tipo di emissione viene rivelata come una *riga* a una o più lunghezze d'onda ben precise corrispondenti proprio alle frequenze ν , che sono determinate dal materiale: le differenze tra i vari livelli energetici cambiano da atomo ad atomo e da molecola a molecola, quindi le righe emesse da materiali diversi saranno in generale diverse. Se allora osserviamo una nube che emette per collisioni, possiamo confrontare le righe che riveliamo con gli spettri realizzati in laboratorio fino a trovare una corrispondenza e “indovinare” la composizione chimica della nube.

4.2.3 Scattering e transizioni

I fenomeni di scattering

4.3 Equazione del trasporto radiativo

Come abbiamo visto, esistono molteplici fenomeni che possono alterare in contemporanea lo spettro della radiazione che attraversa un materiale. e

²Ovviamente la distribuzione non può essere effettivamente *qualsiasi*: lo spettro deve contenere fotoni di energia sufficiente a ionizzare il materiale.

³È importante ricordare che NON si tratta di urti classici ma di fenomeni di meccanica quantistica ben più complicati. Nel nostro caso una trattazione semi-classica è sufficiente a comprendere il fenomeno a grandi linee.

in Astrofisica si tende a raggruppare tutti questi fenomeni per lunghezza d'onda piuttosto che per tipo. Se nel nostro spettro è presente una riga in assorbimento non siamo in grado di sapere a priori quale fenomeno ha fatto sparire tale riga, quindi piuttosto andiamo a vedere come l'intensità della radiazione varia al variare della lunghezza d'onda. Costruiamo adesso un'equazione che ci permetta di formalizzare quanto detto fin'ora.

4.3.1 Estinzione e opacità

Come per la fotometria, introduciamo anche in questo caso il *coefficiente di estinzione* κ_ν tale che $dI_\nu = -\rho\kappa_\nu I_\nu dx$. Si definisce inoltre il *coefficiente di opacità* come

$$(4.3) \quad \chi_\nu = \rho\kappa_\nu,$$

dove la densità di massa ρ del mezzo può essere sostituita dalla densità di grani n . Una proprietà importante del coefficiente di estinzione è che esso rappresenta una sorta di probabilità di interazione del fotone con la materia, per cui il suo reciproco rappresenta il libero cammino medio del fotone.

Questa proprietà è strettamente legata al concetto di *sezione d'urto*, ovvero la probabilità che due particelle interagiscono. Per la nostra trattazione assumeremo che la sezione d'urto σ_ν —che è analoga a una superficie e quindi si misura in m^2 —sia sempre molto piccola rispetto alla distanza media tra le particelle:

$$\sqrt{\sigma} \ll d \sim \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Di conseguenza se κ_ν rappresenta una probabilità di interazione, come σ , possiamo scrivere il coefficiente di opacità come $\chi_\nu = n\kappa_\nu \approx n\sigma_\nu$. Se rimuovessimo l'ipotesi di sezioni d'urto piccole sarebbe impossibile fare questa considerazione perché una particella con sezione d'urto molto grande metterebbe in ombra tutte quelle che la seguono lungo il tragitto del fotone e bisognerebbe tenere conto di questo effetto. La possibilità di mettere in relazione κ_ν , σ_ν ed n ci permette di determinare la numerosità delle particelle, che in Astrofisica prende il nome di *abbondanza*.

Un'altra ipotesi importante che stiamo facendo implicitamente è che il mezzo sia isotropo, ovvero che si comporti allo stesso modo in tutte le direzioni, cosa che naturalmente non è in generale vera dal momento che i grani non hanno forma sferica e il mezzo interstellare potrebbe interagire coi campi elettromagnetici polarizzandosi e cambiando le sue proprietà.

4.3.2 Emissività e sorgente

Abbiamo visto che alcuni fenomeni come la vera emissione possono portare il materiale a introdurre nuovi fotoni nel campo di radiazione comportandosi

a sua volta come sorgente. Introduciamo quindi un coefficiente macroscopico η_ν che prende il nome di *coefficiente di emissività* e in modo analogo all'estinzione dà un contributo

$$(4.4) \quad dI_\nu = \eta_\nu dx$$

che però è indipendente dall'intensità specifica I_ν incidente. Se sommiamo il contributo dell'estinzione a quello dell'emissione otteniamo quindi

$$dI_\nu = (\eta_\nu - \chi_\nu I_\nu) dx ,$$

che, introducendo la funzione *sorgente* S_ν tale che $S_\nu \chi_\nu = \eta_\nu$, può essere riscritta come:

$$(4.5) \quad \frac{dI_\nu}{dx} = \chi_\nu (S_\nu - I_\nu) .$$

Questa equazione prende il nome di *equazione completa del trasferimento* e gioca un ruolo essenziale nello studio degli astri. L'equazione (4.5) è più spesso detta *equazione del trasporto radiativo* anche se non vi è alcun effettivo movimento di materia; quest'ultimo nome è utilizzato solo in Astrofisica.

4.4 Soluzione dell'equazione del trasporto

L'equazione (4.5) è in via di massima impossibile da risolvere analiticamente ma può essere risolta numericamente. Mettiamoci quindi in un contesto di nostro interesse ed effettuiamo alcune ulteriori semplificazioni.

Naturalmente, volendo prevalentemente applicare questa equazione allo studio delle stelle, in tutti casi dovremo tenere conto del fatto che la radiazione prodotta nel nucleo di una stella deve attraversare l'atmosfera stellare prima di giungere nel mezzo interstellare. È quindi di nostro interesse trovare una soluzione “generale” per l'equazione (4.5) in un contesto accessibile, come l'atmosfera del nostro Sole, per poi applicare il risultato alle stelle simili.

Come abbiamo fatto per l'estinzione atmosferica (*cfr.* § 3.5.1), supponiamo che l'atmosfera stellare, molto sottile rispetto al diametro della stella, sia suddivisibile in tanti gusci sferici sovrapposti di spessore dr . Se consideriamo un elemento di superficie sferica, la luce che lo attraversa viaggia in tutte le direzioni, quindi in particolare viaggia nella nostra direzione ds che forma un angolo ϑ con la normale all'elemento superficiale. Lungo questa direzione, la (4.5) si scrive

$$(4.6) \quad \frac{dI_\nu}{ds} = \chi_\nu (S_\nu - I_\nu) .$$

Lo spostamento elementare dr in questo caso è pari a $dr = -\cos\vartheta ds$. Il segno meno è dovuto al fatto che mentre la luce va dall'interno della stella verso l'esterno, noi effettuiamo la nostra misura a partire dall'esterno e integrando verso l'interno, allontanandoci dal nostro punto di vista; il verso di percorrenza della traiettoria è quindi opposto. Sostituendo questa relazione nella (4.6), invertendo e ponendo $\mu = \cos\vartheta$, otteniamo al primo membro:

$$\frac{dI_\nu}{dr} = -\frac{1}{\cos\vartheta} \frac{dI_\nu}{ds} \implies \frac{dI_\nu}{ds} = -\mu \frac{dI_\nu}{dr},$$

che, inserito nella (4.6), diventa:

$$(4.7) \quad -\mu \frac{dI_\nu}{dr} = \chi_\nu (S_\nu - I_\nu).$$

Se adesso riprendiamo la profondità ottica dalla definizione (3.14) si ha $d\tau_\nu = \kappa_\nu \rho dr = \chi_\nu dr$. Se dividiamo la (4.7) per χ_ν otteniamo

$$-\mu \frac{1}{\chi_\nu} \frac{dI_\nu}{dr} = -\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = S_\nu - I_\nu,$$

e cambiando di segno

$$(4.8) \quad \mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu.$$

Quest'ultima equazione può essere facilmente risolta nel caso $\mu = 1$, ovvero quando la superficie stellare è perpendicolare alla linea di vista. Moltiplicando la (4.8) per $e^{-\tau_\nu}$ abbiamo

$$e^{-\tau_\nu} \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = e^{-\tau_\nu} (I_\nu - S_\nu) \iff e^{-\tau_\nu} \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} - e^{-\tau_\nu} I_\nu = -e^{-\tau_\nu} S_\nu$$

e, applicando la regola di derivazione del prodotto,

$$\frac{d}{d\tau_\nu} (e^{-\tau_\nu} I_\nu) = -e^{-\tau_\nu} S_\nu.$$

A questo punto possiamo integrare nella variabile τ_ν da un valore τ_ν^2 a τ_ν^1 , ponendo $I_\nu^2 = I_\nu(\tau_\nu^2)$ e $I_\nu^1 = I_\nu(\tau_\nu^1)$:

$$e^{-\tau_\nu^1} I_\nu^1 - e^{-\tau_\nu^2} I_\nu^2 = - \int_{\tau_\nu^2}^{\tau_\nu^1} e^{-\tau_\nu} S_\nu(\tau_\nu) d\tau_\nu = \int_{\tau_\nu^1}^{\tau_\nu^2} e^{-\tau_\nu} S_\nu(\tau_\nu) d\tau_\nu.$$

Nel caso particolare $\tau_\nu^1 = 0$ e $\tau_\nu^2 = \tau_\nu$, possiamo scrivere:

$$(4.9) \quad I_\nu(0) = e^{-\tau_\nu} I_\nu(\tau_\nu) + \int_0^{\tau_\nu} e^{-\tau'_\nu} S_\nu(\tau'_\nu) d\tau'_\nu,$$

dove $I_\nu(0)$ è l'intensità specifica totale emergente dalla somma dei contributi di tutti gli strati: i fotoni che partono dallo strato di profondità ottica τ_ν incidono sullo strato successivo, essi vengono attenuati esponenzialmente e ad essi si aggiungono i fotoni introdotti dall'emissione negli strati precedenti. Si prosegue così fino ad arrivare fuori dall'atmosfera, il punto $\tau_\nu = 0$, da cui noi facciamo invece cominciare l'integrazione.

L'integrale che compare nella (4.9) può essere risolto numericamente tenendo conto del fatto che se la profondità ottica del mezzo è particolarmente elevata possiamo fermarci quando i contributi sono pressoché nulli.

Un'utile approssimazione che viene fatta in Astrofisica è quella di supporre che la sorgente della radiazione abbia spessore infinito, coerentemente col fatto che lo spessore delle atmosfere stellari è estremamente ridotto se confrontato al diametro della stella: ciò equivale matematicamente a fare il limite della (4.9) per $\tau_\nu \rightarrow +\infty$. Se supponiamo che

$$\lim_{\tau_\nu \rightarrow +\infty} e^{-\tau_\nu} I_\nu(\tau_\nu) = 0,$$

che è lecito in quanto una sorgente reale non può emettere radiazione infinita, la (4.9) diventa

$$(4.10) \quad I_\nu(0) = \int_0^{+\infty} e^{-\tau'_\nu} S_\nu(\tau'_\nu) d\tau'_\nu.$$

Il significato fisico di questo risultato è che la radiazione che incide sul primo strato di atmosfera sostanzialmente non dà nessun contributo alla radiazione che osserviamo al di fuori di essa: all'esterno dell'atmosfera, dove al solito $\tau_\nu = 0$, giungono solo i contributi in emissione dovuti all'atmosfera stessa. Questo modello descrive sufficientemente bene i casi reali in cui si ha $\tau_\nu \gg 1$, ovvero quando la materia è particolarmente densa e la probabilità di interazione fotone-materia è circa uguale a 1. In questi casi si dice che il plasma è *otticamente spesso* e quindi opaco alla frequenza ν .

Nel caso opposto in cui si ha $\tau_\nu \ll 1$ l'approssimazione non vale più. Per $\tau_\nu \rightarrow 0$, l'esponenziale tende a 1 e la (4.9) si semplifica in

$$I_\nu(0) = I_\nu(\tau_\nu) + \int_0^{\tau_\nu} e^{-\tau'_\nu} S_\nu(\tau'_\nu) d\tau'_\nu.$$

Questo significa che la radiazione incidente non viene estinta e ad essa si aggiungono i contributi in emissione di ogni strato. In questi casi si parla di plasma *otticamente sottile*.

Se ci soffermiamo un attimo a osservare la (4.10) notiamo che formalmente ricorda una trasformata integrale, in particolare la trasformata di Laplace. Data una funzione f della variabile t , la sua trasformata di Laplace unilatera⁴ si scrive:

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt .$$

Quindi l'intensità I_ν calcolata nel punto $\tau_\nu = 0$ corrisponde alla trasformata di Laplace della funzione sorgente S_ν ,

$$[I_\nu(0)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-s\tau_\nu} S_\nu(\tau_\nu) d\tau_\nu ,$$

calcolata per $s = 1$.

4.5 Spettri stellari

Un problema non indifferente dell'equazione del trasporto è che per poterla effettivamente risolvere sarebbe necessario conoscere le quantità S_ν , τ_ν , χ_ν *et cetera*, conoscenza che all'astronomo manca. Come già detto altre volte, noi possiamo misurare solo il “risultato finale” dell'integrazione e non gli andamenti delle funzioni punto per punto. Quello che possiamo fare quindi è osservare gli spettri misurati e invertire “a tentativi” le relazioni per trovare delle funzioni che spieghino i dati.

Osserviamo alcuni spettri [inserire foto fantasmini paurosi]

4.6 Equazione di Saha??

⁴Ovvero integrando su $[0, +\infty[$ piuttosto che su $]-\infty, +\infty[$.

Bibliografia

- [1] İbrahim Semiz e Salim Oğur. «Dyson Spheres around White Dwarfs». In: (mar. 2015).
- [2] Xiaolei Zhang et al. «Design Considerations for the Second-Generation NPOI Fringe Tracker and Science Beam Combiner». In: (dic. 2006).