



UNIVERSITÀ  
degli STUDI  
di CATANIA

Dipartimento  
di Fisica  
e Astronomia  
*"Ettore Majorana"*



---

## ESERCITAZIONI DI MECCANICA QUANTISTICA AVANZATA

A CURA DI LUCIA OLIVA

---

ANNO ACCADEMICO 2024-2025



## Teoria perturbativa indipendente dal tempo

L'idea è che abbiamo una hamiltoniana  $H$  che è la somma di una hamiltoniana  $H_0$  imperturbata e una perturbazione  $V'$ :

$$H = H_0 + V'$$

Il motivo per cui indichiamo la perturbazione in tal modo è che in generale la hamiltoniana imperturbata potrebbe già avere parte del potenziale, cioè potrebbe essere nella forma  $H_0 = K + V$  con  $K$  termine cinetico e  $V$  termine di potenziale

Si parte dall'idea che noi conosciamo il sistema governato da  $H_0$ , quindi conosciamo sia i livelli di energia imperturbati  $E_n^{(0)}$  che gli autostati  $|n^{(0)}\rangle$ . In altri termini, conosciamo il problema

$$H_0 |n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)} |n^{(0)}\rangle$$

Quello che ci chiediamo è qual è la correzione ai livelli di energia imperturbati e agli autostati imperturbati a causa di  $V'$ . Omettendo i passaggi visti nella teoria, quello che andiamo a guardare negli esercizi in genere è al massimo il secondo ordine. La correzione al primo ordine è data dagli elementi di matrice del potenziale  $V'$ , sugli autostati imperturbati:

$$\delta E_n^{(1)} = E_n^{(1)} - E_n^{(0)} = \langle n^{(0)} | V' | n^{(0)} \rangle$$

Per quanto riguarda la correzione al secondo ordine, essa è data da dall'elemento di matrice di  $V'$  tra lo stato imperturbato  $|n^{(0)}\rangle$  e lo stato corretto al primo ordine  $|n^{(1)}\rangle$

$$\delta E_n^{(2)} = \langle n^{(0)} | V' | n^{(1)} \rangle$$

Da tale espressione deduciamo che per avere una correzione all'ordine  $n$ -esimo ci servono gli autostati corretti fino all'ordine  $n - 1$ . In particolare, per il secondo ordine ci serve lo stato corretto al primo ordine che è dato da

$$|n^{(1)}\rangle = \sum_{k \neq n} |k^{(0)}\rangle \frac{V'_{k,n}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} \quad \text{dove} \quad V'_{k,n} = \langle k^{(0)} | V' | n^{(0)} \rangle$$

Inserendo tale espressione in quella di sopra otteniamo

$$\delta E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{|\langle n^{(0)} | V' | k^{(0)} \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}$$

Ci si può inoltre chiedere quando è valida la teoria perturbativa. Il criterio per stabilirlo è il seguente: il rapporto tra la correzione al primo ordine di un certo livello e la differenza tra l'energia del medesimo livello e quella del consecutivo deve essere molto minore di 1. In formule:

$$\left| \frac{\delta E_n^{(1)}}{E_n^{(0)} - E_{n+1}^{(0)}} \right| \ll 1$$

## Teoria perturbativa dipendente dal tempo

Nella teoria perturbativa dipendente dal tempo consideriamo una hamiltoniana che ha un termine  $H_0$  in cui non compare il tempo in maniera esplicita più un potenziale che dipende dal tempo:

$$H = H_0 + V(t)$$

In questo caso c'è un autostato  $|j\rangle$  inizialmente popolato e la presenza del potenziale  $V(t)$  può portare a delle transizioni verso uno stato  $|n\rangle$  con  $n \neq j$ . Uno degli scopi principali della teoria perturbativa dipendente dal tempo è quindi quello di calcolare qual è la probabilità di tale transizione. L'ampiezza della transizione  $d_{j \rightarrow n}$  è data da

$$d_{j \rightarrow n} = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' e^{i\omega_{n,j}t'} V_{n,j}$$

dove

$$\omega_{n,j} = \frac{E_n - E_j}{\hbar} \quad , \quad V_{n,j} = \langle n | V(t) | j \rangle$$

L'integrale è esteso dal tempo  $t_0$  in cui viene accesa la perturbazione fino al tempo  $t$  in cui viene spenta.

## Approssimazione WKB

Tale approssimazione è molto utile quando vogliamo risolvere l'equazione di Schrödinger unidimensionale (o la parte radiale dell'equazione di Schrödinger nello spazio).

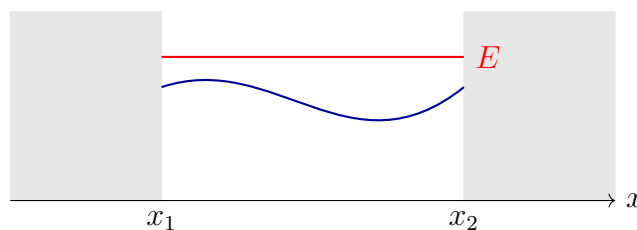
Essa considera il fatto che in generale possiamo avere un potenziale che varia debolmente (*slowly-varying potential*) rispetto alla lunghezza d'onda della particella. Quindi, quando abbiamo tante lunghezze d'onda in questa regione e il potenziale varia poco, allora possiamo applicare la WKB. A differenza della teoria perturbativa che vale soltanto nel caso in cui la perturbazione è piccola, l'approssimazione WKB non necessita di questa richiesta: il potenziale può essere anche grande, ciò che conta è che vari lentamente.

### Livelli di energia

La WKB è utile per trovare i livelli di energia approssimati. Vediamo allora come si trovano. Considereremo principalmente tre casi:

1. Potenziale con due pareti verticali.

Graficamente la situazione è la seguente, dove la regione classicamente permessa è quella compresa tra  $x_1$  e  $x_2$ , mentre le regioni proibite sono rappresentate in grigio



Posto

$$p = \sqrt{2m[E - V(x)]}$$

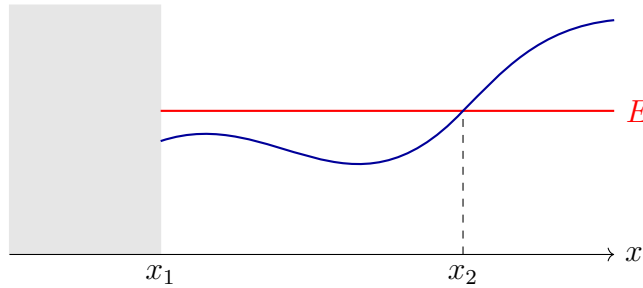
Nel caso in cui  $E > V$ , possiamo trovare i livelli di energia risolvendo l'integrale:

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = n\pi\hbar \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

dove  $x_1$  e  $x_2$  sono i *turning points* classici.

2. Potenziale con una sola parete verticale.

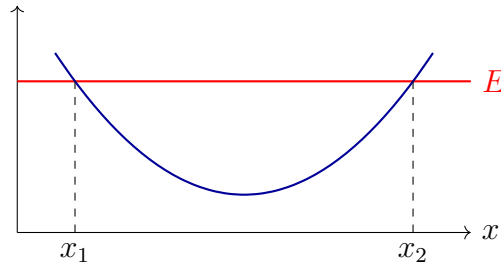
Supponendo di avere la parete verticale in  $x_1$ , dal punto di vista grafico la situazione è la seguente



Il secondo turning point si ha nel punto  $x_2$ , che dipende dal valore  $E$  dell'energia, in quanto per trovarlo si impone la condizione  $V(x_2) = E$ . In questo caso, l'integrale da risolvere è<sup>1</sup>

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = \left(n - \frac{1}{4}\right)\pi\hbar \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

3. Potenziale senza pareti verticali. In questo caso la situazione è la seguente:



Attenzione! potrebbe capitare di avere un potenziale con una parete verticale, ma magari questa non è da considerare perché bisogna guardare dove l'energia eguaglia il potenziale. In altre parole, i turning points sono i punti  $x_1, x_2$  tali che  $V(x_{1,2}) = E$ .

---

<sup>1</sup>Attenzione! Si può utilizzare una formulazione differente in cui  $n$  parte da 0. In tal caso l'integrale da risolvere è

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = \left(n + \frac{3}{4}\right)\pi\hbar \quad , \quad n = 0, 1, \dots$$

Per non confondersi, basta ricordare che per lo stato fondamentale si deve avere  $\frac{3}{4}\pi\hbar$ .

In questo caso, l'integrale da risolvere per ottenere i livelli di energia approssimati è

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi \hbar \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

### Penetrabilità della barriera

Nel caso in cui abbiamo una barriera di potenziale, la WKB può essere utilizzata per valutare la penetrabilità della barriera.

Per parlare di penetrabilità ci dobbiamo trovare nel caso  $E < V$ . Si ottiene che

$$T \simeq e^{-2\gamma} \quad \text{dove} \quad \gamma = \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} |p(x)| dx$$

dove  $x_1$  e  $x_2$  sono i classical turning points.

### Scattering Theory

Nella teoria dello scattering studiamo sistemi in cui c'è una regione dello spazio con un certo potenziale  $V$  avente un certo range  $R_V$  e abbiamo un'onda piana incidente. Il risultato dell'interazione tra questa e il potenziale è un'onda piana uscente più un'onda sferica:

$$\psi(x) = \varphi_k(x) - \frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$$

L'obiettivo della teoria dello scattering è determinare l'ampiezza di scattering  $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ , da cui possiamo ottenere la sezione d'urto differenziale, definita come

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2$$

e da cui a sua volta si può ottenere la sezione d'urto totale integrando su tutto l'angolo solido.

### Approssimazione di Born

Un primo metodo per risolvere il problema dello scattering è quello dell'approssimazione di Born al primo ordine. Con tale metodo si trova che la sezione d'urto di Born è

$$f^{\text{Born}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3\mathbf{x} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x})$$

Spesso si preferisce esprimere tale quantità in termini del momento trasferito  $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ :<sup>2</sup>

$$f^{\text{Born}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3\mathbf{x} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x})$$

e tale espressione risulta essere la trasformata di Fourier del potenziale  $V(\mathbf{x})$ .

Nel caso di potenziali centrali, in cui  $V(\mathbf{x}) \equiv V(r)$ , la ampiezza di scattering si può esprimere come

$$f^{\text{Born}}(\vartheta) = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty dr r V(r) \frac{\sin(qr)}{q}$$

Inoltre si può dimostrare che il modulo del momento trasferito è  $q = 2k \sin(\vartheta/2)$ , dove  $\vartheta$  è l'angolo di scattering tra  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{k}'$ .

---

<sup>2</sup>Attenzione! In alcuni testi si potrebbe trovare la formula con un segno meno nell'esponentiale. Ciò è dovuto al fatto che in essi il momento trasferito è stato definito come  $q = k' - k$ .

## Partial wave expansion

È possibile adoperare la partial wave analysis quando abbiamo un potenziale a simmetria sferica. Infatti, in una situazione del genere si conserva il momento angolare, dunque possiamo scrivere la situazione d'urto in termini di onde parziali (associate ai diversi valori di  $\ell$ ), le quali scatteranno in maniera indipendente.

Bisogna inoltre considerare il fatto che quando abbiamo scattering elastico si deve conservare la probabilità, quindi il modulo quadro della funzione d'onda non può cambiare, ma può cambiare la fase. Quindi l'effetto di uno scattering è quello di creare un phase shift, cioè di modificare la fase dell'onda. La grandezza di tale phase shift dipenderà dall'intensità del potenziale.

Nel caso in cui sia possibile usare lo sviluppo in onde parziale, l'ampiezza di scattering può essere scritta come

$$f_k(\vartheta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{+\infty} (2\ell+1) e^{i\delta_\ell} \sin(\delta_\ell) P_\ell(\cos \vartheta)$$

dove  $P_\ell(\cos \vartheta)$  sono i polinomi di Legendre.

La sezione d'urto può invece essere scritta come

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{+\infty} (2\ell+1) \sin^2(\delta_\ell)$$

In alcuni casi può essere utile adoperare la forma integrale del phase shift, la quale è data da

$$e^{i\delta_\ell} \sin(\delta_\ell) = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^{+\infty} dr r V(r) j_\ell(kr) u_\ell(kr) \quad (1)$$

dove  $j_\ell(kr)$  sono le funzioni sferiche di Bessel e  $u_\ell(kr)$  sono le soluzioni dell'equazione radiale. Spesso oltre a poter applicare l'analisi in onde parziali possiamo applicare anche l'approssimazione di Born perché il potenziale è piccolo rispetto all'energia della particella. In tal caso il phase shift  $\delta_\ell$  sarà piccolo, dunque sono lecite le approssimazioni  $e^{i\delta_\ell} \approx 1$  e  $\sin(\delta_\ell) \approx \delta_\ell$ , dunque è possibile semplificare le formule finora scritte. Non solo: in tal caso la funzione  $u_\ell$  è approssimabile con  $r j_\ell$ , dunque la formula (1) diventa

$$\delta_\ell = -\frac{2mk}{\hbar^2} \int_0^{+\infty} dr r^2 V(r) j_\ell(kr)^2$$

La partial wave analysis è utile soprattutto nel limite delle basse energie, in cui domina il contributo dei termini con  $\ell$  più basso, per cui spesso già con solo il contributo del termine con  $\ell = 0$  otteniamo un'ottima approssimazione del risultato.

# 1 Lezione 1

## Esercizio 1.1

An atom has a nucleus of charge  $Z$  and one electron. The nucleus has radius  $R$  inside which the charge is distributed. Assuming that the effect of the finite size of the nucleus can be described by the following potential:

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{Ze^2}{R} \frac{r}{R} & \text{for } r < R \\ -\frac{Ze^2}{r} & \text{for } r \geq R \end{cases}$$

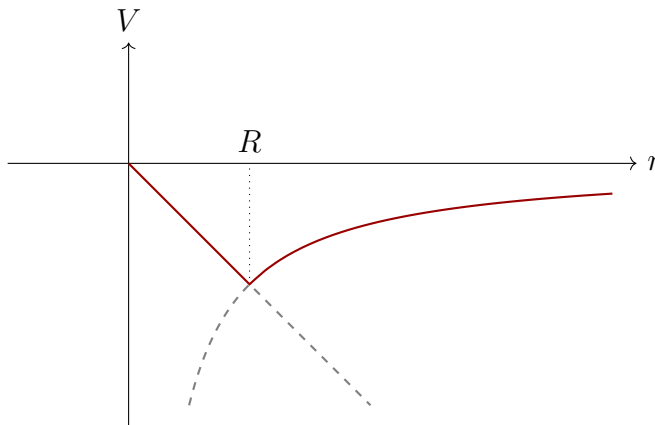
- a) Use perturbation theory to calculate the first order correction to the ground state for  $Z = 8$  and  $A = 16$ . (It is known that  $R = R_0 A^{\frac{1}{3}}$  with  $R_0 = 1.2 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 1.2 \text{ fm}$ )
- b) Do you expect perturbation theory to be more valid for larger  $A$ ?<sup>3</sup> Justify.

Hint:

$$E_1^{(0)} = -\frac{Z^2 e^2}{2a_0} \quad \text{with} \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{mc^2} \quad , \quad \frac{R^2}{2a_0} = 13.6 \text{ eV}$$
$$R_{1,0} = 2 \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{\frac{3}{2}} a^{-Zr/a_0}$$

## Svolgimento

Per prima cosa è conveniente, quando possibile, riportare in un grafico l'andamento del potenziale. In questo caso il potenziale assume la forma di una retta con pendenza negativa fino a  $r = R$  (cioè fino alla *size* del nucleo), dopodiché diventa un'iperbole. Pertanto, graficamente il potenziale apparirà come segue:



Osserviamo adesso che il sistema in esame è un atomo idrogenoide, pertanto il problema si può affrontare nella stessa maniera con cui trattiamo l'atomo di idrogeno avendo però carica  $Z$  diversa da 1.

---

<sup>3</sup>Questa richiesta ci sta implicitamente dicendo di fissare il valore di  $Z$  e far variare soltanto  $A$ .



Osserviamo inoltre che per  $r \geq R$  il potenziale  $V(r)$  assume proprio la forma del potenziale dell'atomo idrogenoide, per cui la hamiltoniana sarà quella dell'atomo idrogenoide, che ricordiamo essere

$$H_{\text{idrogenoide}} = \frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r}$$

Quello che vogliamo è che questa sia la nostra  $H_0$ ,<sup>4</sup> in quanto ne conosciamo autovalori ed autofunzioni. È in quest'ottica che capiamo come impostare il problema: nella regione 'nuova', cioè quella per  $r < R$  in cui è presente il potenziale dovuto alla distribuzione di carica nella finite size del nucleo, tale potenziale deve essere considerato come perturbazione rispetto al potenziale dell'atomo idrogenoide, per cui dobbiamo esprimerlo in modo da ottenere il potenziale di  $H_0$  più un termine perturbativo. Scriviamo dunque la hamiltoniana per la regione  $r < R$ :

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{R} \frac{r}{R} \quad (2)$$

Concentriamoci sul termine di potenziale e riscriviamolo aggiungendo e sottraendo il termine  $\frac{Ze^2}{r}$ :

$$-\frac{Ze^2}{R} \frac{r}{R} = -\frac{Ze^2}{R} \frac{r}{R} + \frac{Ze^2}{r} - \frac{Ze^2}{r}$$

Riordinando i termini e inserendoli in (2) possiamo riscrivere quest'ultima come

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} - \frac{Ze^2}{R} \frac{r}{R} + \frac{Ze^2}{r} = H_0 + V'$$

dove  $H_0$  è la hamiltoniana dell'atomo idrogenoide e  $V'$  è il termine di perturbazione, il quale può essere riscritto come

$$V' = -\frac{Ze^2}{R} \frac{r}{R} + \frac{Ze^2}{r} = -\frac{Ze^2}{R} \left( \frac{r}{R} - \frac{R}{r} \right)$$

Il problema chiede qual è la correzione al ground state al primo ordine. Essa è data dall'elemento di matrice di  $V'$  rispetto al ground state imperturbato, cioè rispetto a  $|1, 0, 0\rangle$ . In formule<sup>5</sup>:

$$\begin{aligned} \delta E_1^{(1)} &= \langle 1, 0, 0 | V' | 1, 0, 0 \rangle = \int_0^R dr r^2 \int d\Omega \psi_{1,0,0}^*(r, \vartheta, \varphi) V'(r) \psi_{1,0,0}(r, \vartheta, \varphi) = \\ &= - \int_0^R dr r^2 \int d\Omega |Y_{0,0}(\vartheta, \varphi)|^2 |R_{1,0}(r)|^2 \frac{Ze^2}{R} \left( \frac{r}{R} - \frac{R}{r} \right) \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo esplicitato il potenziale e la funzione d'onda.

L'espressione della parte radiale è fornita dal testo, mentre per la parte angolare si ha

$$\int d\Omega |Y_{0,0}(\vartheta, \varphi)|^2 = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega = \frac{1}{4\pi} 4\pi = 1$$

---

<sup>4</sup>Osserviamo che tale hamiltoniana ha una parte di potenziale, ma ciò non ci spaventa perché conosciamo esattamente tale problema.

<sup>5</sup>Notiamo che l'integrale radiale è esteso fino a  $r = R$ . Il motivo è che la perturbazione è nulla per  $r \geq R$ .

In definitiva possiamo riscrivere

$$\begin{aligned}\langle 1, 0, 0 | V' | 1, 0, 0 \rangle &= - \int_0^R dr r^2 4 \left( \frac{Z}{a_0} \right)^3 e^{-2Zr/a_0} \frac{Ze^2}{R} \left( \frac{r}{R} - \frac{R}{r} \right) = \\ &= - \frac{Ze^2}{R} \left( \frac{Z}{a_0} \right)^3 4 \int_0^R dr r^2 \left( \frac{r}{R} - \frac{R}{r} \right) e^{2Zr/a_0}\end{aligned}$$

Effettuiamo ora il cambio di variabile

$$x = \frac{2Zr}{a_0} \implies r = \frac{a_0}{2Z}x \implies dr = \frac{a_0}{2Z} dx$$

che modifica l'intervallo di integrazione da  $[0, R]$  in  $[0, \alpha]$ , con  $\alpha = 2ZR/a_0$ . Dopo alcuni passaggi si giunge all'integrale

$$\frac{Ze^2}{2R} \int_0^\alpha dx e^{-x} \left( \alpha x - \frac{x^3}{\alpha} \right) \quad (3)$$

Questi integrali vanno risolti per parti. In particolare si trova che

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha dx e^{-x} x &= -e^{-\alpha}(\alpha + 1) + 1 \\ \int_0^\alpha dx e^{-x} x^3 &= -e^{-\alpha}(\alpha^3 + 3\alpha^2 + 6\alpha + 6) + 6\end{aligned}$$

Da cui, inserendo tali risultati nell'espressione (3), otteniamo

$$\frac{Ze^2}{2R} \int_0^\alpha dx e^{-x} \left( \alpha x - \frac{x^3}{\alpha} \right) = \frac{Ze^2}{2R} \left[ \alpha - \frac{6}{\alpha} + e^{-\alpha} \left( 2\alpha + 6 + \frac{6}{\alpha} \right) \right]$$

Osserviamo adesso che il coefficiente a moltiplicare davanti la parentesi quadra può essere riscritto come

$$\frac{Ze^2}{2R} = \frac{Z^2 e^2}{a_0} \frac{a_0}{2ZR}$$

Il primo fattore è uguale all'opposto del doppio dell'energia del ground state imperturbato, mentre il secondo termine, per come abbiamo definito  $\alpha$ , è uguale proprio ad  $\alpha^{-1}$ . In definitiva possiamo scrivere:

$$\frac{Ze^2}{2R} = -2E_1^{(0)} \frac{1}{\alpha}$$

e quindi avremo

$$\frac{Ze^2}{2R} \left[ \alpha - \frac{6}{\alpha} + e^{-\alpha} \left( 2\alpha + 6 + \frac{6}{\alpha} \right) \right] = -2E_1^{(0)} \left[ 1 - \frac{6}{\alpha^2} + e^{-\alpha} \left( 2 + \frac{6}{\alpha} + \frac{6}{\alpha^2} \right) \right] \quad (4)$$

Arrivati a questo punto possiamo rispondere alla domanda a): abbiamo infatti trovato la correzione al primo ordine allo stato fondamentale, e adesso dobbiamo trovarla in particolare

per  $Z = 8$  ed  $A = 16$ . Cerchiamo quindi di stimare  $\alpha$  per questi valori. Sfruttando il fatto che  $R = R_0 A^{\frac{1}{3}}$  riscriviamo  $\alpha$  come

$$\alpha = \frac{2ZR}{a_0} = \frac{3R_0}{a_0} Z A^{\frac{1}{3}}$$

dove abbiamo lasciato  $A$  e  $Z$  non espressi in modo da avere una formula che vale per qualsiasi atomo. Possiamo riscrivere ancora:

$$\frac{3R_0}{a_0} Z A^{\frac{1}{3}} = \gamma A^{\frac{1}{3}}$$

dove<sup>6</sup>  $\gamma = 3.6 \cdot 10^{-4}$ . Segue che per  $A = 16$  risulta  $\alpha \approx 10^{-3} \ll 1$ .

Possiamo sfruttare il fatto che  $\alpha \ll 1$  per avere un'espressione analitica: sviluppando in serie di Taylor l'esponenziale otteniamo:

$$e^{-\alpha} = 1 - \alpha + \frac{\alpha^2}{2}$$

dove ci siamo fermati al secondo ordine. Prestiamo attenzione a questo fatto: il motivo per cui ci siamo fermati al secondo ordine piuttosto che al primo è che nelle parentesi quadre dell'espressione (4) abbiamo termini fino all'ordine  $\alpha^{-2}$ . Inserendo quindi tale espansione otteniamo

$$\begin{aligned} 1 - \frac{6}{\alpha^2} + e^{-\alpha} \left( 2 + \frac{6}{\alpha} + \frac{6}{\alpha^2} \right) &= 1 - \frac{6}{\alpha^2} + \left( 1 - \alpha + \frac{\alpha^2}{2} \right) \left( 2 + \frac{6}{\alpha} + \frac{6}{\alpha^2} \right) = \\ &= 1 - \frac{6}{\alpha^2} + 2 + \frac{6}{\alpha} + \frac{6}{\alpha^2} - 2\alpha - 6 - \frac{6}{\alpha} + \alpha^2 + 3\alpha + 3 = \alpha^2 + \alpha \approx \alpha \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio trascuriamo il termine  $\alpha^2$  in quanto  $\alpha \ll 1$ .

In definitiva abbiamo trovato un'espressione analitica semplice per la correzione al primo ordine al ground state, che è

$$\delta E_1^{(1)} = -2\alpha E_1^{(0)}$$

da cui si trova, per  $Z = 8$   $A = 16$ ,

$$\delta E_1^{(1)} = 1.6 \text{ eV}$$

A questo punto passiamo al quesito b). Per capire se la teoria perturbativa è valida, dobbiamo verificare che si abbia

$$\left| \frac{\delta E_1^{(1)}}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} \right| \ll 1$$

Abbiamo già calcolato  $\delta E_1^{(1)}$ , passiamo al calcolo di  $E_1^{(0)} - E_2^{(0)}$ : ricordando che per un atomo idrogenoide i livelli energetici sono dati da

$$E_n = -\frac{Z^2 e^2}{2a_0 n^2}$$

---

<sup>6</sup>Questo valore si trova per  $Z = 8$ . Il motivo per cui sostituiamo subito  $Z$  è che il problema chiede dei ragionamenti su  $A$ , per cui possiamo considerare  $Z$  fissato.

avremo

$$E_1^{(0)} - E_2^{(0)} = -\frac{Z^2 e^2}{2a_0} \left(1 - \frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{4} \frac{Z^2 e^2}{2a_0} = -\frac{3}{4} E_1^{(0)}$$

In definitiva:

$$\left| \frac{\delta E_1^{(1)}}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} \right| = \left| \frac{-2\alpha E_1^{(0)}}{-\frac{3}{4} E_1^{(0)}} \right| = \frac{8}{3} \alpha$$

Ricordiamo che abbiamo trovato

$$\alpha = \gamma A^{\frac{1}{3}}$$

da cui sembrerebbe che all'aumentare di  $A$  la teoria perturbativa sia sempre meno valida. Tuttavia, sostituendo il valore di  $\gamma$ , troviamo che

$$\frac{8}{3} \cdot 3.6 \cdot 10^{-4} A^{\frac{1}{3}} \ll 1 \implies A^{\frac{1}{3}} \ll 10^3 \implies A \ll 10^9$$

il che significa che, per i valori che  $A$  assume in natura, la teoria perturbativa è valida.

### Esercizio 1.2

A two-level system is described by the hamiltonian

$$H_0 = \begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & 3\Omega \end{pmatrix} \hbar$$

The system is in the excited state. At time  $t = 0$  the following perturbation turned on for a long time  $T$ :

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & \Omega e^{i\omega t} \\ \Omega e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix} \hbar$$

- a) Find the transition amplitude to the ground state at  $t > T$ .
- b) Is there a value of  $\omega/\Omega$  such that the probability to make transition reaches at most 0.5?

### Svolgimento

In questo problema abbiamo un sistema a due livelli, quindi abbiamo solo il ground state e uno stato eccitato. Il sistema si trova nello stato eccitato, quindi l'unica transizione che può compiere è verso il ground state. Per studiare il sistema dobbiamo studiare il problema agli autovalori

$$H_0 |\varphi_n^{(0)}\rangle = E_n |\varphi_n^{(0)}\rangle \quad \text{con } n = 1, 2$$

In generale per trovare autovalori e autostati dovremmo diagonalizzare la matrice. In questo caso la matrice è già in forma diagonale, per cui possiamo dire subito che gli autostati sono:

$$\text{ground state } \varphi_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{con energia } E_1 = \hbar\Omega$$

$$\text{excited state } \varphi_2^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{con energia } E_2 = 3\hbar\Omega$$

Svolgiamo ora il punto a). L'ampiezza di transizione  $d_{2 \rightarrow 1}$  dallo stato eccitato verso il ground state è data da

$$d_{2 \rightarrow 1} = -\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt e^{i\omega_{1,2}t} V_{1,2} \quad (1)$$

Notiamo che l'integrazione è estesa da 0, tempo in cui si accende la perturbazione, a  $T$ , tempo in cui si spegne. Il motivo è che il testo ci chiede di calcolare la probabilità per un tempo  $t > T$ , dunque l'integrale è non nullo fino a  $t = T$ .

Osserviamo adesso che

$$V_{1,2} = \langle \varphi_1^{(0)} | H_1 | \varphi_2^{(0)} \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \hbar\Omega e^{i\omega t} \\ \hbar\Omega e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hbar\Omega e^{i\omega t} \\ 0 \end{pmatrix} = \hbar\Omega e^{i\omega t}$$

e

$$\omega_{1,2} = \frac{E_1 - E_2}{\hbar} = \frac{\hbar\Omega - 3\hbar\Omega}{\hbar} = -2\Omega$$

Inserendo tali espressioni in (1) possiamo riscrivere quest'ultima come

$$d_{2 \rightarrow 1} = -\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \hbar\Omega e^{i(\omega-2\Omega)t} = -\frac{\Omega}{\omega-2\Omega} [e^{i(\omega-2\Omega)T} - 1] \quad (2)$$

Passiamo alla domanda b). Il testo chiede qual è il valore del rapporto  $\omega/\Omega$  tale che la probabilità di transizione valga al massimo 0.5. Innanzitutto per calcolare la probabilità di transizione è sufficiente considerare il modulo quadro della (2):

$$P_{2 \rightarrow 1} = |d_{2 \rightarrow 1}|^2 = \frac{\Omega^2}{(\omega-2\Omega)^2} |e^{i(\omega-2\Omega)T} - 1|^2$$

Svolgiamo il prodotto ricordando che per un numero complesso si ha  $|z|^2 = z^* z$

$$\begin{aligned} P_{2 \rightarrow 1} &= \frac{\Omega^2}{(\omega-2\Omega)^2} [e^{-i(\omega-2\Omega)T} - 1] [e^{i(\omega-2\Omega)T} - 1] = \\ &= \frac{\Omega^2}{(\omega-2\Omega)^2} [1 - e^{i(\omega-2\Omega)T} - e^{-i(\omega-2\Omega)T} + 1] \end{aligned}$$

Ricordando inoltre che

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

otteniamo

$$P_{2 \rightarrow 1} = \frac{2\Omega^2}{(\omega-2\Omega)^2} \left\{ 1 - \cos [(\omega-2\Omega)T] \right\}$$

Sfruttando ora la formula di bisezione del seno

$$\sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

Possiamo riscrivere ancora

$$P_{2 \rightarrow 1} = \frac{4\Omega^2}{(\omega-2\Omega)^2} \sin^2 \left[ \frac{(\omega-2\Omega)T}{2} \right]$$

Osserviamo che siccome il testo ci chiede delle condizioni sui valori superiori (*at most* 0.5), possiamo considerare la seguente catena di disuguaglianze:

$$\frac{4\Omega^2}{(\omega-2\Omega)^2} \sin^2 \left[ \frac{(\omega-2\Omega)T}{2} \right] \leq \frac{4\Omega^2}{(\omega-2\Omega)^2} \leq \frac{1}{2}$$

e in particolare l'ultima disuguaglianza può essere riscritta come

$$8\Omega^2 \leq \omega^2 + 4\Omega^2 - 4\omega\Omega$$

visto che dobbiamo trovare una condizione in termini del rapporto  $\omega/\Omega$ , dividiamo per  $\Omega^2$ :

$$\left( \frac{\omega}{\Omega} \right)^2 - 4 \left( \frac{\omega}{\Omega} \right) - 4 \geq 0 \implies \frac{\omega}{\Omega} \geq 2(1 + \sqrt{2}) \simeq 4.83$$

### Esercizio 1.3

An electron is under the potential

$$V'(x) = \begin{cases} V_0 \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) & \text{for } 0 < x < L \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

- a) Calculate the energy levels employing first-order perturbation theory.
- b) What is the condition  $V_0$  has to satisfy for perturbation theory to be valid for  $n = 1$  level? Is it valid for  $V_0 = 0.4$  eV and  $L = 0.2$  nm for  $n = 1$  level and/or for all the  $n$  energy levels? (Explain)
- c) At  $t > 0$  the potential becomes

$$V''(x, t) = V_0 \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cos(\omega t)$$

Calculate the transition probability for  $n = 1$  to  $n = 3$  at time  $T$  at the value of  $\omega$  where it is maximal.

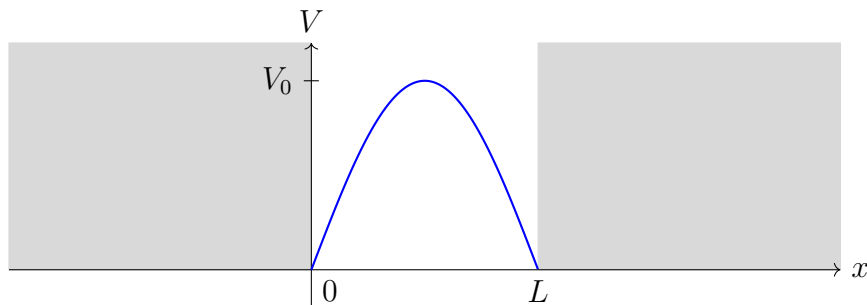
- d) For  $L = 0.2$  nm and  $V_0 = 0.4$  eV is time-dependent perturbation theory expected to be valid if  $T = \frac{15\pi}{\omega_{1,3}}$ ?

Hint:

$$\int_0^L dy \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \sin\left(\frac{\pi}{L}y\right) = \frac{L}{\pi} \frac{4n^2}{4n^2 - 1}$$
$$\int_0^L dy \sin\left(\frac{3\pi}{L}y\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{L}y\right) = -\frac{8L}{30\pi}$$

### Svolgimento

Per prima cosa rappresentiamo il potenziale prima che venga introdotta la dipendenza temporale:



Esso ha l'andamento di una sinusoide per  $x \in [0, L]$ , ed è infinito all'esterno (le regioni grigie in figura).

Svolgiamo il quesito a). Per questo è sufficiente applicare la teoria perturbativa indipendente dal tempo. La hamiltoniana imperturbata di questo sistema è quella di una particella confinata in una buca, cioè

$$H_0 = K + U \quad \text{dove} \quad U = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 < x < L \\ \infty & \text{altrove} \end{cases}$$

Di questo sistema conosciamo le autofunzioni, le quali saranno le autofunzioni imperturbate e che sono date da<sup>7</sup>

$$\psi_n^{(0)}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

e a cui sono associate rispettivamente le energie

$$E_n^{(0)} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2} \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

Il potenziale

$$V' = V_0 \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$$

costituisce la perturbazione per questo sistema. A causa della presenza di questo, la correzione al primo ordine dell'energia dell' $n$ -esimo stato è data da

$$\delta E_n^{(1)} = \langle \psi_n^{(0)} | V' | \psi_n^{(0)} \rangle = \int_0^L dx V'(x) |\psi_n^{(0)}(x)|^2 = \frac{2V_0}{L} \int_0^L dx \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo esplicitato il potenziale e l'autofunzione.

Notiamo che l'integrale che figura è fornito come hint dal testo, per cui possiamo inserire direttamente il risultato:

$$\delta E_n^{(1)} = \frac{2V_0}{L} \frac{L}{\pi} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} = \frac{V_0}{\pi} \frac{8n^2}{4n^2 - 1} \quad (1)$$

Per rispondere infine alla domanda dobbiamo calcolare le energie corrette al primo ordine, le quali sono date da

$$E_n^{(1)} = E_n^{(0)} + \delta E_n^{(1)} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2} + \frac{V_0}{\pi} \frac{8n^2}{4n^2 - 1} \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

Passiamo al punto b). Cerchiamo quindi qual è la condizione che  $V_0$  deve soddisfare affinché la teoria perturbativa sia valida per  $n = 1$ : per essere valida, il rapporto tra la correzione al primo ordine e la differenza tra i livelli vicini deve essere molto minore di uno:

$$\left| \frac{\delta E_1^{(1)}}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} \right| \ll 1$$

Ovvero, ricordando che

$$E_1^{(0)} - E_2^{(0)} = -3 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$$

e sostituendo l'espressione (1) per  $n = 1$ ,

---

<sup>7</sup>Attenzione! Le autofunzioni hanno questa espressione perché la particella si trova in una buca tra 0 e  $L$ . Se la buca fosse stata estesa da  $-L/2$  a  $L/2$  (bucca centrata all'origine), le autofunzioni avrebbero avuto un'altra espressione.



$$\left| \frac{\frac{8V_0}{3\pi}}{-\frac{3\hbar^2\pi^2}{2mL^2}} \right| = \frac{16V_0mL^2}{9\hbar^2\pi^3} \ll 1 \implies V_0 \ll \frac{9\hbar^2\pi^3}{16mL^2}$$

Possiamo esprimere tale condizione in termini di  $E_1^{(0)}$ :

$$V_0 \ll \frac{9\hbar^2\pi^3}{16mL^2} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \frac{9\pi}{8} = \frac{9\pi}{8} E_1^{(0)}$$

Se  $V_0$  soddisfa tale condizione, allora la teoria perturbativa è valida. Verifichiamo ora se è valida in particolare per  $V_0 = 0.4$  eV e  $L = 0.2$  nm. Per fare ciò cerchiamo di esprimere tutte le quantità in elettronVolt e nanometri<sup>8</sup>, inoltre cerchiamo di far apparire la quantità  $\hbar c$  che sappiamo valere  $200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$  o  $200 \text{ eV} \cdot \text{nm}$ . Per fare ciò sfruttiamo il fatto che per la massa dell'elettrone si ha  $m_e c^2 \approx 0.5 \text{ MeV} = 0.5 \cdot 10^6 \text{ eV}$ , fatto che ci suggerisce di moltiplicare e dividere per  $c^2$ :

$$V_0 \ll \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \frac{9\pi}{8} = \frac{(\hbar c)^2\pi^2}{2(mc^2)L^2} \frac{9\pi}{8} = \frac{4 \cdot 10^4 \text{ eV}^2 \cdot \text{nm}^2 \pi^3 9}{8 \cdot 2 \cdot 0.5 \cdot 10^6 \text{ eV} \cdot 4 \cdot 10^{-2} \text{ nm}^2} = \frac{\pi^3 9}{8} \text{ eV} = 35 \text{ eV}$$

Poiché il testo ci chiede di verificare la validità della teoria perturbativa per  $V_0 = 0.4$  eV, troviamo che essa è valida per il livello con  $n = 1$ .

A questo punto dobbiamo controllare la validità anche per gli altri livelli di energia. Per fare ciò consideriamo il generico livello  $n$ -esimo e imponiamo la condizione di validità della teoria perturbativa per questo:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\delta E_n^{(1)}}{E_n^{(0)} - E_{n+1}^{(0)}} \right| &= \left| \frac{\frac{V_0}{\pi} \frac{8n^2}{4n^2-1}}{\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} [n^2 - (n+1)^2]} \right| = \frac{\frac{|V_0|}{\pi} \frac{8n^2}{4n^2-1}}{\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} (2n+1)} \ll 1 \\ \implies V_0 &\ll \frac{\hbar^2\pi^2}{32mL^2} \left( 4 - \frac{1}{n^2} \right) (2n+1) \end{aligned}$$

Sia il termine  $4 - \frac{1}{n^2}$  che il termine  $2n+1$  sono funzioni crescenti di  $n$ , per cui tutto il termine a destra della disuguaglianza cresce all'aumentare di  $n$ . Ne segue che la teoria perturbativa è sempre più valida man mano che consideriamo  $n$  maggiori.

Passiamo alla richiesta c). Qui il potenziale cambia e ottiene una dipendenza dal tempo, quindi passiamo alla teoria perturbativa dipendente dal tempo. Il problema chiede di calcolare la proprietà di transizione dal livello con  $n = 1$  a quello con  $n = 3$  al tempo  $T$  dove è massima. Questa è data da

$$d_{1 \rightarrow 3} = -\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt e^{i\omega_{3,1}t} V_{3,1}'' \quad (2)$$

dove

$$\omega_{3,1} = \frac{E_3 - E_1}{\hbar} = \frac{4\hbar\pi^2}{mL^2}$$

---

<sup>8</sup>In generale negli esercizi si hanno due casi: o le grandezze sono espresse in MeV e fm o eV e nm. In questo caso il testo fornisce le quantità in eV e nm, il che significa che esse sono delle quantità adeguate per il sistema.

e

$$\begin{aligned} V_{3,1}'' &= \langle \psi_3^{(0)} | V''(x, t) | \psi_1^{(0)} \rangle = V_0 \cos(\omega t) \langle \psi_3^{(0)} | \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) | \psi_1^{(0)} \rangle = \\ &= V_0 \cos(\omega t) \int_0^L dx \psi_3^{(0)}(x) \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \psi_1^{(0)}(x) = \frac{2V_0}{L} \cos(\omega t) \int_0^L dx \sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{L}x\right) \end{aligned}$$

Il risultato dell'integrale è fornito dall'hint, per cui possiamo subito scrivere

$$V_{3,1}'' = \frac{2V_0}{L} \cos(\omega t) \left(-\frac{8L}{30\pi}\right) = -\frac{8V_0}{15\pi} \cos(\omega t)$$

Per inciso, notiamo che il problema chiede la probabilità di passare da  $n = 3$  a  $n = 1$  e non quella da  $n = 2$  a  $n = 1$  perché quest'ultima avrebbe dato luogo ad un integrale nullo per ragioni di parità.

Esplicitando l'espressione di  $V_{3,1}''$  in (2) otteniamo

$$d_{1 \rightarrow 3} = \frac{i}{\hbar} \frac{8V_0}{15\pi} \int_0^T dt e^{i\omega_{3,1}t} \cos(\omega t)$$

Esprimendo il coseno come

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2}$$

Possiamo riscrivere<sup>9</sup>

$$d_{1 \rightarrow 3} = \frac{i}{\hbar} \frac{4V_0}{15\pi} \int_0^T dt \left[ e^{i(\omega_{3,1} + \omega)t} + e^{i(\omega_{3,1} - \omega)t} \right] = \frac{1}{\hbar} \frac{4V_0}{15\pi} \left[ \frac{e^{i(\omega_{3,1} + \omega)T} - 1}{\omega_{3,1} + \omega} + \frac{e^{i(\omega_{3,1} - \omega)T} - 1}{\omega_{3,1} - \omega} \right]$$

I due termini che compaiono tra parentesi hanno un nome: il primo è il termine di emissione stimolata, il secondo è il termine di assorbimento<sup>10</sup>. Quando uno domina l'altro è trascurabile, quindi nella maggior parte dei casi (soprattutto quello in cui la probabilità è massima) si deve considerare solo uno dei due termini. Per capire quale termine tenere in considerazione è sufficiente andare a vedere cosa succede alle quantità al denominatore: il denominatore che è prossima a zero ci dirà quale termine tenere. In generale, data una transizione a cui corrisponde una frequenza  $\omega_{f,i}$ , si ha che

- Il termine di emissione stimolata domina quando  $\omega_{f,i} + \omega \simeq 0$ , a cui corrisponde una condizione sull'energia  $E_f = E_i - \hbar\omega$ , che indica il fatto che il sistema passa da un livello energeticamente più alto ad uno energeticamente più basso ( $E_f < E_i$ );
- Il termine di assorbimento domina quando  $\omega_{f,i} - \omega \simeq 0$ , a cui corrisponde una condizione sull'energia  $E_f = E_i + \hbar\omega$ , che indica il fatto che il sistema passa da un livello energeticamente più basso ad uno energeticamente più alto ( $E_f > E_i$ );

<sup>9</sup>Precisiamo che un risultato del genere si ottiene ogni qualvolta abbiamo una perturbazione sinusoidale.

<sup>10</sup>Non è necessario ricordarlo: il ragionamento che segue stabilisce come riconoscerli.

Applichiamo ora tale criterio al sistema in esame. Dato che passiamo dallo stato per  $n = 1$  a quello per  $n = 3$ , e questi sono tali che  $E_3 > E_1$ , il termine che domina è quello di assorbimento. In questo caso il termine di assorbimento non solo domina, ma è l'unico presente, in quanto il testo ci fornisce il verso della transizione, dunque l'altro costituisce un termine non fisico. Ponendo adesso  $\Delta\omega = \omega - \omega_{3,1}$  possiamo riscrivere l'ampiezza di probabilità come

$$d_{1 \rightarrow 3} = -\frac{1}{\hbar} \frac{4V_0}{15\pi} \frac{e^{-i\Delta\omega T} - 1}{\Delta\omega}$$

Sfruttando il fatto che

$$e^{-i\alpha} - 1 = e^{-i\frac{\alpha}{2}} (e^{-i\frac{\alpha}{2}} - e^{+i\frac{\alpha}{2}}) = -2ie^{-i\frac{\alpha}{2}} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

possiamo riscrivere l'ampiezza come (nel nostro caso  $\alpha = \Delta\omega T$ )

$$d_{1 \rightarrow 3} = \frac{i}{\hbar} \frac{4V_0}{15\pi} e^{-i\frac{\Delta\omega}{2}T} 2 \frac{\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}T\right)}{\Delta\omega} = \frac{i}{\hbar} \frac{4V_0 T}{15\pi} e^{-i\frac{\Delta\omega}{2}T} \frac{\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}T\right)}{\frac{\Delta\omega}{2}}$$

Siccome il testo chiede quando la probabilità è massima, allora ci troviamo nella situazione in cui  $\Delta\omega = \omega_{3,1} - \omega \simeq 0$ . In tali condizioni è valida l'approssimazione

$$\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}T\right) \approx \frac{\Delta\omega}{2}T$$

e pertanto il fattore del tipo  $\sin \alpha / \alpha$  è circa 1. Ne segue che la probabilità sarà pari a

$$P_{1 \rightarrow 3} = \frac{16V_0^2 T^2}{\hbar^2 15^2 \pi^2}$$

Passiamo infine al punto d). Per prima cosa sostituiamo il valore di  $T$ :

$$P_{1 \rightarrow 3} = \frac{16V_0^2}{\hbar^2 15^2 \pi^2} \frac{15^2 \pi^2}{\omega_{3,1}^2} = \frac{16V_0^2 m^2 L^4}{\hbar^2 16 \hbar^2 \pi^4} = \frac{V_0^2 m^2 L^4}{\hbar^4 \pi^4}$$

dove nel secondo passaggio abbiamo sostituito il valore di  $\omega_{3,1}$ .

Arrivati a questo punto possiamo sostituire i valori numerici. Moltiplicando e dividendo per  $c^4$  in modo da avere quantità note, avremo:

$$P_{1 \rightarrow 3} = \frac{V_0^2 (mc)^2 L^4}{(\hbar c)^4 \pi^4} = \frac{16 \cdot 10^{-2} \text{ eV} \cdot \frac{1}{4} \cdot 10^{12} \text{ eV}^2 \cdot 2^4 \cdot 10^{-4} \text{ nm}^2}{2^4 \cdot 10^8 \text{ eV}^4 \text{ nm}^4 \pi^4} = \frac{4}{\pi^4} \cdot 10^{-2} \simeq 4 \cdot 10^{-4} \ll 1$$

dunque la teoria perturbativa è valida.

## 2 Lezione 2

### Esercizio 2.1

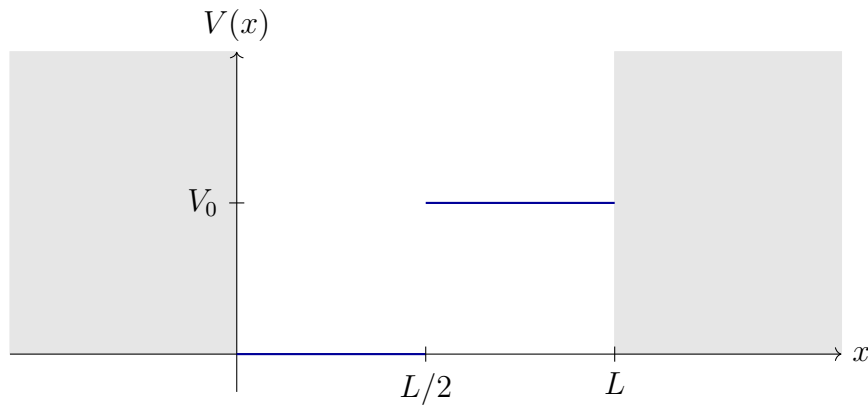
A particle of mass  $m$  is in a potential well given by

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & \text{for } x < 0 \\ 0 & \text{for } 0 < x < \frac{L}{2} \\ V_0 & \text{for } \frac{L}{2} < x < L \\ +\infty & \text{for } x > L \end{cases}$$

- a) Use perturbation theory to calculate the energy of the ground state  $E_1^{(1)}$ .
- b) For  $m = 1$  GeV and  $L = 2$  fm what is the value of  $V_0$  to have  $V_0 = 0.2E_1^{(1)}$ ?
- c) Under the condition in b), ( $V_0 \ll E$ ), calculate the ground state energy with the WKB approximation.
- d) How the result in c) compares to the result in a)? (Explain)

### Svolgimento

Svolgiamo il punto a). Per prima cosa rappresentiamo il potenziale:



Siamo ancora nell'ambito della teoria perturbativa, quindi dobbiamo identificare la correzione al potenziale imperturbato. Quest'ultimo è quello della buca quadra, dato da

$$V_{\text{box}} = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 < x < L \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Le funzioni d'onda degli stati imperturbati sono date da

$$\psi_n^{(0)}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

mentre le energie associate da

$$E_n^{(0)} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2} \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

Riscriviamo quindi il potenziale  $V$  come il potenziale  $V_{\text{box}}$  della buca quadra più un termine perturbativo  $V'$ . In particolare, quest'ultimo può essere scritto come

$$V' = V_0 \vartheta\left(x - \frac{L}{2}\right) \vartheta(L - x)$$

dove le funzioni theta di Heaviside così fatte ci dicono che  $V'$  contribuisce con un termine  $V_0$  soltanto nella regione per  $L/2 < x < L$ .

A questo punto calcoliamo l'energia al primo ordine per il ground state. Per la teoria perturbativa indipendente dal tempo al primo ordine si ha che  $E_1^{(1)} = E_1^{(0)} + \delta E_1^{(1)}$ , dove la correzione al primo ordine  $\delta E_1^{(1)}$  è data dall'elemento di matrice della perturbazione rispetto al ground state imperturbato del sistema:

$$\delta E_1^{(1)} = \langle 1^{(0)} | V'(x) | 1^{(0)} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi_1^*(x) V'(x) \psi_1(x)$$

Una volta che esplicitiamo  $V(x)$ , l'integrale risulta avere contribuito non nullo soltanto nella regione per  $L/2 < x < L$ , per cui

$$\delta E_1^{(1)} = V_0 \int_{L/2}^L dx \frac{2}{L} \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) = \frac{V_0}{L} \int_{L/2}^L dx \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]$$

avendo usato la relazione trigonometrica  $2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos(2\alpha)$  nell'ultimo passaggio.

Se adesso operiamo il cambiamento di variabile

$$z = \frac{2\pi x}{L} \implies x = \frac{Lz}{2\pi} \quad , \quad dx = \frac{L dz}{2\pi}$$

Possiamo riscrivere l'integrale come

$$\frac{V_0}{L} \int_{L/2}^L dx \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right] = \frac{V_0}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} dz (1 - \cos z) = \frac{V_0}{2}$$

Abbiamo quindi trovato che la correzione al primo ordine al ground state imperturbato è pari a metà del potenziale. Il livello di energia corretto risulta dunque essere

$$E_1^{(1)} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} + \frac{V_0}{2}$$

Passiamo al punto b). Cerchiamo, fissati i valori forniti dal testo per la massa e per la larghezza della buca, il valore che deve avere  $V_0$  per essere uguale a  $0.2E_1^{(1)}$ . Tale condizione può essere scritta come

$$E_1^{(1)} = 5V_0 \iff \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} + \frac{V_0}{2} = 5V_0 \implies V_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{9mL^2}$$

Se in tale espressione estrapoliamo l'espressione dell'energia del ground state imperturbato possiamo scrivere ancora:

$$V_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{9mL^2} = \frac{2}{9} E_1^{(0)} \simeq 0.22 E_1^{(0)}$$

Da quest'ultima espressione deduciamo che  $V_0 \sim 20\%E_1^{(0)}$  e che  $\delta E_1^{(1)} \sim 10\%E_1^{(1)}$ .

A questo punto ricaviamo il valore di  $V_0$  sostituendo i valori numerici. Cerchiamo di far spuntare quantità note moltiplicando e dividendo per  $c^2$ , in modo che al denominatore abbiamo la massa della particella che è data dal testo e al numeratore abbiamo la quantità  $\hbar c$ , che in questo caso conviene esprimere come  $0.2 \text{ GeV fm}$ :

$$V_0 = \frac{(\hbar c)^2 \pi^2}{9(mc^2)L^2} = \frac{4 \cdot 10^{-2} \text{ GeV}^2 \text{ fm}^2 \cdot 10}{9 \cdot 1 \text{ GeV} \cdot 4 \text{ fm}^2} = \frac{1}{90} \text{ GeV} \approx 11 \text{ MeV}$$

Passiamo ora al quesito c). Nella condizione  $V_0 \ll E$  (in cui siamo perché  $V_0 \sim 20\%E$ , dobbiamo calcolare l'energia dello stato fondamentale con l'approssimazione WKB.

In questo caso ci troviamo davanti ad una buca con due pareti verticali, quindi la condizione per ottenere i livelli di energie approssimati è

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = n\pi\hbar \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

Nel problema in esame i turning points  $x_1$  e  $x_2$  sono  $x_1 = 0$  e  $x_2 = L$ . Sostituendo poi l'espressione del potenziale otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^L p(x) dx &= \int_0^L \sqrt{2m[E - V(x)]} dx = \int_0^{L/2} \sqrt{2mE} dx + \int_{L/2}^L \sqrt{2m(E - V_0)} dx = \\ &= \sqrt{2mE} \frac{L}{2} + \sqrt{2m(E - V_0)} \frac{L}{2} = \sqrt{2m} \frac{L}{2} (\sqrt{E} + \sqrt{E - V_0}) = n\pi\hbar \end{aligned}$$

In particolare l'ultima uguaglianza può essere riscritta come

$$\sqrt{E} + \sqrt{E - V_0} = \frac{2n\pi\hbar}{\sqrt{2m}L}$$

A questo punto eleviamo entrambi i membri al quadrato:

$$E + E - V_0 + 2\sqrt{E(E - V_0)} = \frac{4n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = 4E_n^{(0)}$$

A partire da tale relazione dobbiamo ricavare  $E$ . Per fare ciò isoliamo la radice al primo membro e poi eleviamo al quadrato:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{E(E - V_0)} &= 4E_n^{(0)} - 2E + V_0 \\ \implies 4E(E - V_0) &= 16(E_n^{(0)})^2 + 4E^2 + V_0^2 - 16EE_n^{(0)} - 4EV_0 + 8V_0E_n^{(0)} \\ \implies 16(E_n^{(0)})^2 + V_0^2 - 16EE_n^{(0)} + 8V_0E_n^{(0)} &= 0 \end{aligned}$$

da cui infine si ottiene

$$E = E_n^{(0)} + \frac{V_0}{2} + \frac{V_0^2}{16E_n^{(0)}}$$

Notiamo che tale espressione è data dal risultato ottenuto con la teoria perturbativa più un termine aggiuntivo  $\frac{V_0^2}{16E_n^{(0)}}$ . Se però ora sfruttiamo la condizione  $V_0 \ll E$  fornita dal testo, tale energia si riduce semplicemente a

$$E_n^{(0)} + \frac{V_0}{2}$$

Che è l'espressione che si ottiene con la teoria perturbativa.

Svolgiamo infine il punto d). Facciamo un confronto utilizzando i valori numerici ottenuti prima. Riscriviamo l'espressione dei livelli energetici ottenuti per la WKB nel caso  $n = 1$  come

$$E = E_1^{(0)} + \frac{V_0}{2} \left( 1 + \frac{V_0}{8E_1^{(0)}} \right)$$

Utilizzando i valori  $V_0 = 1.1 \cdot 10^{-2}$  GeV,  $E_1^{(0)} = 5V_0 = 5 \cdot 10^{-2}$  GeV, si trova che

$$\frac{V_0}{8E_1^{(0)}} \approx 0.03 \ll 1$$

Possiamo allora effettivamente dire che, per i valori trovati nel punto b), siamo nel caso in cui tale termine risulta trascurabile e pertanto il risultato della WKB coincide con quello della teoria perturbativa.

### Esercizio 2.2

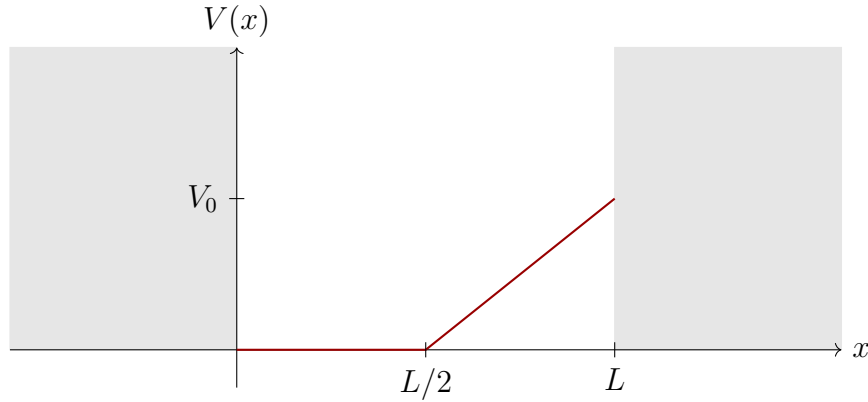
An electron is in a potential given by

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{for } x < 0 \\ 0 & \text{for } 0 < x < \frac{L}{2} \\ V_0 \left( \frac{2x}{L} - 1 \right) & \text{for } \frac{L}{2} < x < L \\ \infty & \text{for } x > L \end{cases}$$

- Use perturbation theory to calculate the energy<sup>11</sup> of the ground state.
- What is the condition on  $V_0$  to have perturbation theory valid?
- Put  $V(x) = 0$  for  $x > L$  and  $E < V_0$ . Use WKB to calculate the penetrability of the barrier for  $V_0 = 4 \text{ MeV}$ ,  $L = 10 \text{ fm}$  and  $E = V_0/2$ .

### Svolgimento

Per prima cosa riportiamo in un grafico l'andamento del potenziale:



Svolgiamo il punto a). La correzione al primo ordine all'energia del ground state è data da

$$\begin{aligned} \delta E_1^{(1)} &= \langle \psi_1^{(0)} | V' | \psi_1^{(0)} \rangle = \int_{L/2}^L dx V_0 \left( \frac{2x}{L} - 1 \right) |\psi_1^{(0)}|^2 = \int_{L/2}^L dx V_0 \left( \frac{2x}{L} - 1 \right) \frac{2}{L} \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) = \\ &= \frac{V_0}{L} \left[ \int_{L/2}^L dx \left( \frac{2x}{L} - 1 \right) - \int_{L/2}^L dx \left( \frac{2x}{L} - 1 \right) \cos \left( \frac{2\pi x}{L} \right) \right] \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato la relazione trigonometrica  $2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos(2\alpha)$  nell'ultimo passaggio.

Calcoliamo adesso ciascun integrale: per il primo si ha banalmente

$$\int_{L/2}^L dx \left( \frac{2x}{L} - 1 \right) = \left[ \frac{x^2}{L} - x \right]_{L/2}^L = L - L - \frac{L}{4} + \frac{L}{2} = \frac{L}{4}$$

<sup>11</sup>Quando nel testo non è specificato, si intende fin al primo ordine.



Per quanto riguarda il secondo integrale, esso si può ulteriormente spezzare in due integrali:

$$\int_{L/2}^L dx \left( \frac{2x}{L} - 1 \right) \cos \left( \frac{2\pi x}{L} \right) = \int_{L/2}^L dx \frac{2x}{L} \cos \left( \frac{2\pi x}{L} \right) - \int_{L/2}^L dx \cos \left( \frac{2\pi x}{L} \right)$$

i quali, ponendo

$$y = \frac{2\pi x}{L} \implies dy = \frac{2\pi dx}{L}$$

Possono esse riscritti come

$$\frac{L}{2\pi^2} \int_{\pi}^{2\pi} dy y \cos y - \frac{L}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} dy \cos y$$

Per il secondo integrale otteniamo subito che

$$\frac{L}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} dy \cos y = \frac{L}{2\pi} [\sin y]_{\pi}^{2\pi} = 0$$

Il primo invece va risolto per parti: ponendo  $f = y$  e  $g = \cos y$ , si ha

$$\frac{L}{2\pi^2} \int_{\pi}^{2\pi} y \cos y dy = \frac{L}{2\pi^2} \left\{ [y \sin y]_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} \sin y dy \right\} = \frac{L}{2\pi^2} [\cos y]_{\pi}^{2\pi} = \frac{L}{\pi^2}$$

Mettendo insieme i vari contributi troviamo che

$$\delta E_1^{(1)} = \frac{V_0}{L} \left( \frac{L}{4} - \frac{L}{\pi^2} \right) = V_0 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \right)$$

e pertanto l'energia del ground state corretta al primo ordine risulta essere

$$E_1^{(1)} = E_1^{(0)} + \delta E_1^{(1)} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} + V_0 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \right)$$

Passiamo al punto b). Ricordiamo che la condizione affinché la teoria perturbativa sia valida è che il rapporto tra la correzione di energia e la differenza di energia tra lo stato imperturbato e quello più vicino deve essere molto minore di 1; in particolare per il ground state si deve avere

$$\left| \frac{\delta E_1^{(1)}}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} \right| \ll 1$$

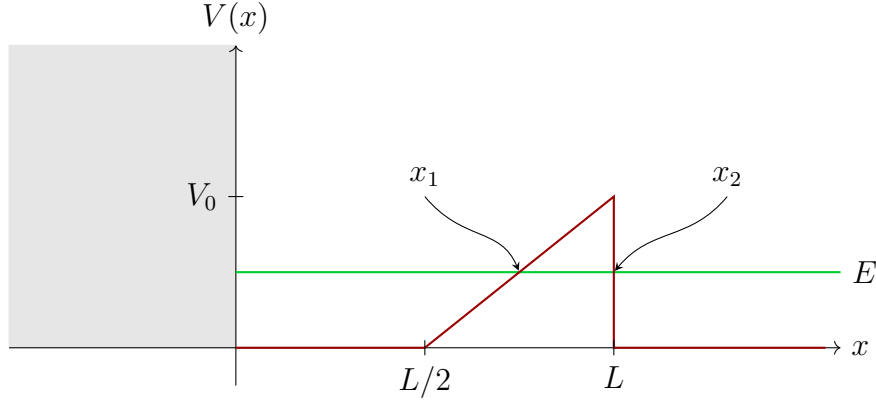
Esplicitando quanto trovato, tale condizione si riscrive come

$$\left| \frac{V_0 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \right)}{-3 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}} \right| = \frac{mL^2 V_0 (\pi^2 - 4)}{6\hbar^2} \ll 1$$

da cui si ricava che la condizione per  $V_0$  è

$$V_0 \ll \frac{6\hbar^2}{mL^2(\pi^2 - 4)}$$

Svolgiamo ora il punto c). Adesso il potenziale cambia e diventa nullo nella regione per  $xL$ , dunque graficamente adesso la situazione è la seguente:



In questo caso dobbiamo usare la WKB per calcolare la penetrabilità della barriera (quindi siamo nel caso in cui  $E < V_0$ ), che è data da

$$T \approx \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{2m[V(x) - E]} \right\}$$

dove  $x_1$  e  $x_2$  sono i turning points. La prima cosa da fare è proprio individuare questi ultimi. Si intuisce facilmente che  $x_2 = L$ , mentre per  $x_1$  dobbiamo uguagliare energia e potenziale:

$$E = V_0 \left( \frac{2x_1}{L} - 1 \right) \implies x_1 = \frac{L}{2} \left( \frac{E}{V_0} + 1 \right)$$

Se adesso applichiamo la condizione fornita dal testo per cui  $E = V_0/2$ , troviamo che

$$x_1 = \frac{L}{2} \left( \frac{V_0}{2V_0} + 1 \right) = \frac{3}{4}L$$

Possiamo quindi calcolare

$$T = \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{2m \left[ V_0 \left( \frac{2x}{L} - 1 \right) - E \right]} \right\}$$

Introduciamo la variabile

$$z = 2m \left[ V_0 \left( \frac{2x}{L} - 1 \right) - E \right] \implies dz = \frac{4mV_0}{L} dx$$

da cui segue che

$$\begin{aligned} z_1 &= 2m \left[ V_0 \left( \frac{2x_1}{L} - 1 \right) - E \right] = 2m \left\{ V_0 \left[ \frac{2}{L} \frac{L}{2} \left( \frac{E}{V_0} + 1 \right) - 1 \right] - E \right\} = 0 \\ z_2 &= 2m \left[ V_0 \left( \frac{2x_2}{L} - 1 \right) - E \right] = 2m(V_0 - E) \end{aligned}$$

Usando tale cambio di variabile, l'integrale si può riscrivere come

$$T \approx \exp \left\{ -\frac{2L}{4mV_0\hbar} \int_0^{2m(V_0-E)} dz \sqrt{z} \right\} = \exp \left\{ -\frac{L}{3m\hbar V_0} [2m(V_0 - E)]^{\frac{3}{2}} \right\}$$

Passiamo infine il punto d). Per prima cosa moltiplichiamo e dividiamo per  $c^3$  in modo da far spuntare quantità note, in particolare  $\hbar c$  e  $mc^2$ . Sostituendo poi i valori numerici forniti dal testo, si ha

$$\begin{aligned}
 T &\approx \exp\left\{-\frac{L}{3mc^2\hbar cV_0}[2mc^2(V_0 - E)]^{\frac{3}{2}}\right\} = \\
 &= \exp\left\{-\frac{10 \text{ fm}}{0.5 \text{ MeV} \cdot 2 \cdot 10^2 \text{ MeV fm} \cdot 3 \cdot 4 \text{ MeV}}[2 \cdot 0.5 \text{ MeV}(4 - 2)\text{MeV}]^{\frac{3}{2}}\right\} = \\
 &= \exp\left\{-\frac{1}{120}2^{\frac{3}{2}}\right\} = \exp\left\{-\frac{\sqrt{2}}{60}\right\} = 0.98
 \end{aligned}$$

### Esercizio 2.3

A biatomic molecule is composed by two identical nuclei. The potential of the system is

$$U_{\text{tot}} = U\left(\left|\mathbf{r} + \frac{\mathbf{a}}{2}\right|\right) + U\left(\left|\mathbf{r} - \frac{\mathbf{a}}{2}\right|\right)$$

The two nuclei have the centres at a distance  $|\mathbf{a}|$  and

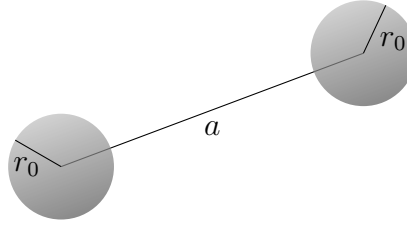
$$U(|\mathbf{r}|) = \begin{cases} -V_0 & \text{for } 0 < r < r_0 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

- a) Calculate the differential cross section in first order Born approximation for a particle of mass  $m$  in terms of the exchanged momentum  $\mathbf{q}$ .
- b) What is the differential cross section in the limit  $|\mathbf{q}| \ll |\mathbf{a}|^{-1}$ ? Justify your answer.

Hint: evaluate first the scattering amplitude for  $U(\mathbf{r}) = -V_0$  and then use an appropriate substitution.

### Svolgimento

Schematizziamo la situazione:



In questo problema abbiamo 2 nuclei distanti  $a$  tra loro, ognuno dei quali ha potenziale che approssimiamo con un potenziale costante entro un range  $r_0$ . Il quesito a) ci chiede di calcolare la sezione d'urto differenziale in approssimazione di Born al primo ordine in funzione del momento scambiato  $\mathbf{q}$ . Per prima cosa allora calcoliamo l'ampiezza di scattering, che nell'approssimazione di Born è data da<sup>12</sup>

$$f^{\text{Born}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}'} V(\mathbf{x}')$$

dove  $V(\mathbf{x}')$  è la somma dei due potenziali. Poiché però se consideriamo insieme i due potenziali tale integrale risulta di difficile risoluzione, analizziamo separatamente ciascuno dei due contributi. Consideriamo prima il nucleo di sinistra: avremo che il suo contributo è<sup>13</sup>

$$\int d^3\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} U\left(\left|\mathbf{r} + \frac{\mathbf{a}}{2}\right|\right)$$

Operiamo adesso il cambio di variabili  $\mathbf{z} = \mathbf{r} + \frac{\mathbf{a}}{2}$ , per cui l'integrale diventa

$$\int d^3\mathbf{z} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{z}} e^{-i\mathbf{q}\cdot\frac{\mathbf{a}}{2}} U(|\mathbf{z}|)$$

<sup>12</sup>Da notare che nel termine  $e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}'}$  compare il segno meno perché abbiamo definito  $\mathbf{q}$  come  $\mathbf{k}' - \mathbf{k}$ .

<sup>13</sup>Per coerenza nella notazione abbiamo ridefinito con  $\mathbf{r}$  la variabile di integrazione.

Sfruttiamo ora il fatto che il potenziale è a simmetria sferica: ponendo  $x = |\mathbf{z}|$ , possiamo scrivere

$$e^{i\mathbf{q} \cdot \frac{\mathbf{a}}{2}} 2\pi \int_0^\infty dx x^2 U(x) \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) e^{-iqx \cos \vartheta}$$

dove il fattore  $2\pi$  è dovuto all'integrazione rispetto a  $\varphi$ . Osserviamo che per la parte angolare si ha

$$\int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) e^{-iqx \cos \vartheta} = \frac{2 \sin(qx)}{qx}$$

e dunque l'integrale diventa

$$\frac{4\pi}{q} e^{i\mathbf{q} \cdot \frac{\mathbf{a}}{2}} \int_0^\infty dx x U(x) \sin(qx)$$

Poiché però il potenziale è nullo al di fuori di  $r_0$ , possiamo estendere l'integrazione fino a  $r_0$  (dove in particolare è uguale a  $-V_0$ ) e ottenere

$$-V_0 \frac{4\pi}{q} e^{i\mathbf{q} \cdot \frac{\mathbf{a}}{2}} \int_0^{r_0} dx x \sin(qx) = -\frac{4\pi V_0}{q^3} e^{i\mathbf{q} \cdot \frac{\mathbf{a}}{2}} [\sin(qr_0) - qr_0 \cos(qr_0)]$$

avendo integrato per parti.

In maniera analoga ma operando stavolta la sostituzione  $\mathbf{z} = \mathbf{r} - \frac{\mathbf{a}}{2}$ , si ottiene

$$\int d^3\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} U\left(\left|\mathbf{r} + \frac{\mathbf{a}}{2}\right|\right) = -\frac{4\pi V_0}{q^3} e^{-i\mathbf{q} \cdot \frac{\mathbf{a}}{2}} [\sin(qr_0) - qr_0 \cos(qr_0)]$$

In definitiva l'ampiezza di scattering risulta essere

$$\begin{aligned} f^{\text{Born}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') &= -\frac{2mV_0}{\hbar^2 q^3} (e^{i\mathbf{q} \cdot \frac{\mathbf{a}}{2}} + e^{-i\mathbf{q} \cdot \frac{\mathbf{a}}{2}}) [\sin(qr_0) - qr_0 \cos(qr_0)] \\ &= -\frac{4mV_0}{\hbar^2 q^3} \cos\left(\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}}{2}\right) [\sin(qr_0) - qr_0 \cos(qr_0)] \end{aligned}$$

e dunque la sezione d'urto differenziale sarà

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f^{\text{Born}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2 = \frac{16m^2 V_0^2}{\hbar^4 q^6} \cos^2\left(\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}}{2}\right) [\sin(qr_0) - qr_0 \cos(qr_0)]^2 \quad (1)$$

Passiamo al quesito b). La condizione  $|\mathbf{q}| \ll |\mathbf{a}|^{-1}$  significa  $|\mathbf{q}||\mathbf{a}| \ll 1$ , per cui è lecito fare l'approssimazione

$$\cos\left(\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}}{2}\right) \simeq 1$$

Osserviamo inoltre che per un potenziale della forma di  $U(\mathbf{r})$  avente profondità  $-V_0$  la sezione d'urto differenziale è data da

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 = \frac{4m^2 V_0^2 r_0^2}{\hbar^4 q^4} \left[ \frac{\sin(qr_0)}{qr_0} - \cos(qr_0) \right]^2$$

Cerchiamo allora di ricondurre la (1) a tale forma. Si trova che

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{16m^2 V_0^2}{\hbar^4 q^6} [\sin(qr_0) - qr_0 \cos(qr_0)]^2 = 4 \frac{4m^2 V_0^2}{\hbar^4 q^6} (qr_0)^2 \left[ \frac{\sin(qr_0)}{qr_0} - \cos(qr_0) \right]^2 \\ &= \frac{4m^2 (2V_0)^2 r_0^2}{\hbar^4 q^4} \left[ \frac{\sin(qr_0)}{qr_0} - \cos(qr_0) \right]^2 \end{aligned}$$

che è la sezione d'urto di un potenziale della forma di  $U(\mathbf{r})$  di profondità  $-2V_0$ . Quest'ultimo risultato ci dice che la sezione d'urto di due buche di profondità  $-V_0$  e distanti  $a$  tra loro è equivalente a quella di un sistema caratterizzato da un'unica buca avente ancora range  $r_0$  ma profondità doppia<sup>14</sup>. Ciò significa che, nella condizione  $|\mathbf{q}| \ll |\mathbf{a}|^{-1}$  la particella non riesce a risolvere la doppia buca, cioè vede il sistema come se fosse un'unica buca di profondità doppia.

---

<sup>14</sup>Un altro modo di vedere il problema è dire che la sezione d'urto del sistema è equivalente a quella di un'unica buca avente profondità  $-V_0$  ma range  $2r_0$ .

### 3 Lezione 3

#### Esercizio 3.1

An electron beam scatters on an electron cloud described by the wave function

$$\psi(r) = \frac{2}{\sqrt{4\pi}} \frac{e^{-r/a}}{a^{3/2}}$$

Given that the Coulomb potential is given by

$$V(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}' \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho_e(\mathbf{r}')$$

where  $\rho_e(\mathbf{r})$  is the electron density of the cloud.

- Calculate in Born approximation the differential cross-section (at the end write it as a Rutherford cross-section for a function  $F(q^2)$ ).
- What do you get for  $qa \rightarrow 0$ ? Explain from a physical point of view.
- If at  $\vartheta = \frac{\pi}{3}$  the differential cross-section decreases by a factor  $3^4/4$  when the beam energy increases from 20 eV to 40 eV, calculate the value of  $a$  in Å .

Hint 1: with the substitution  $\mathbf{y} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ , is given that

$$\int d^3\mathbf{y} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}}}{|\mathbf{y}|} = \frac{4\pi}{q^2}$$

Hint 2:

$$\int_0^{+\infty} dr r e^{-2r/a} \sin(qr) = \frac{4qa^3}{(4 + q^2a^2)^2}$$

### Svolgimento

Svolgiamo il punto a). Dobbiamo scrivere la sezione d'urto differenziale in approssimazione di Born come il prodotto della sezione d'urto di Rutherford per una certa funzione  $F(q^2)$ , cioè dobbiamo giungere alla relazione

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Born}} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Ruth}} F(q^2)$$

Sappiamo che la sezione d'urto differenziale è data da

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f^{\text{Born}}|^2$$

dove  $f^{\text{Born}}$  è l'ampiezza di scattering in approssimazione di Born, la quale è data da

$$f_k = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} V(\mathbf{r})$$

dove  $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ . Sostituiamo quindi l'espressione del potenziale:

$$f_k = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \int d^3\mathbf{r}' \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho_e(\mathbf{r}')$$

A questo punto sfruttiamo il primo suggerimento: usando la sostituzione  $\mathbf{y} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ , da cui  $\mathbf{r} = \mathbf{y} + \mathbf{r}'$ , otteniamo

$$f_k = -\frac{me^2}{2\pi\hbar^2} \int d^3\mathbf{r}' e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} \rho_e(\mathbf{r}') \int d^3\mathbf{y} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}}}{|\mathbf{y}|} = -\frac{me^2}{2\pi\hbar^2} \frac{4\pi}{q^2} \int d^3\mathbf{r}' e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} \rho_e(\mathbf{r}')$$

avendo utilizzato il risultato fornito dal primo suggerimento.

Calcoliamo ora l'altro integrale. Per fare ciò notiamo che  $\rho_e(\mathbf{r}')$  è data da  $|\psi|^2$ , per cui sostituiamo il modulo quadro dell'espressione della funzione d'onda:

$$f_k = -\frac{2me^2}{\hbar^2 q^2} \int d^3\mathbf{r}' e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} |\psi(\mathbf{r}')|^2 = -\frac{2me^2}{\hbar^2 q^2} \int d^3\mathbf{r}' e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} \frac{4}{4\pi} \frac{e^{-2r'/a}}{a^3}$$

Passando ora in coordinate sferiche abbiamo

$$f_k = -\frac{2me^2}{\pi\hbar^2 q^2 a^3} \int_0^{+\infty} dr' r'^2 e^{-2r'/a} 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos\vartheta) e^{iqr' \cos\vartheta}$$

Osserviamo adesso che

$$\int_{-1}^1 d(\cos\vartheta) e^{iqr' \cos\vartheta} = \frac{e^{iqr'} - e^{-iqr'}}{iqr'} = 2 \frac{\sin(qr')}{qr'}$$

per cui inserendo tale risultato nell'espressione di sopra otteniamo

$$f_k = -\frac{4me^2}{\hbar^2 q^3 a^3} \int_0^{+\infty} dr' r' e^{-2r'/a} \sin(qr') = -\frac{4me^2}{\hbar^2 q^3 a^3} \frac{4qa^3}{(4 + q^2 a^2)^2} = -\frac{2m}{\hbar} \frac{e^2}{q^2} \frac{16}{(4 + q^2 a^2)^2}$$

avendo utilizzato il risultato fornito dal secondo suggerimento.

In definitiva, la sezione d'urto differenziale in approssimazione di Born sarà data da

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_k|^2 = \frac{4m^2}{\hbar^4} \frac{e^4}{q^4} \frac{256}{(4 + q^2 a^2)^4} \quad (1)$$

Il testo chiede però di calcolare la sezione d'urto in termini della sezione d'urto di Rutherford. Ricordiamo che quest'ultima si ottiene quando abbiamo scattering di una particella carica con un potenziale coulombiano puntiforme (cioè con range del potenziale nullo), mentre nel problema in esame abbiamo una nuvola elettronica avente una certa estensione data dal range del potenziale. Appare allora chiaro che il fattore  $F(q^2)$  che dobbiamo ottenere altro non è che il fattore di forma, il quale ci dà informazioni sulle caratteristiche del potenziale come forma ed estensione.

Ricordiamo che la sezione d'urto di Rutherford è data da

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Ruth}} = \frac{1}{16} \left(\frac{Z_1 e Z_2 e}{E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)}$$



dove  $Z_1$  e  $Z_2$  sono la carica della particella incidente e della particella su cui scatteriamo. In questo caso stiamo considerando un elettrone che collide con una nuvola elettronica, per cui  $Z_1 = Z_2 = 1$ . Inoltre  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ , dunque possiamo riscrivere

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Ruth}} = \frac{1}{16} \frac{e^4 4m^2}{\hbar^4 k^4} \frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)}$$

Per ricondurci a tale forma, osserviamo che sussiste la relazione

$$q = 2k \sin(\vartheta/2) \quad (2)$$

Per dimostrarla, partiamo dalla definizione di  $\mathbf{q}$  ed eleviamola al quadrato:

$$\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}' \implies q^2 = (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 = k^2 + k'^2 - 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'$$

Poiché ci troviamo nel caso di scattering elastico abbiamo che  $k = k'$ , inoltre tra i due vettori d'onda c'è un angolo  $\vartheta$ , per cui possiamo scrivere

$$q^2 = 2k^2 - 2k^2 \cos \vartheta = 2k^2(1 - \cos \vartheta)$$

e poiché  $(1 - \cos \vartheta) = 2 \sin^2(\vartheta/2)$ , in definitiva abbiamo

$$q^2 = 4k^2 \sin^2(\vartheta/2)$$

da cui la relazione di sopra prendendo la radice di ambo i membri.

Inserendo allora la (2) nella (1) otteniamo

$$\frac{4m^2 e^4}{\hbar^4} \frac{1}{q^4} \frac{256}{(4 + q^2 a^2)^4} = \frac{1}{16} \frac{4m^2}{\hbar^4} \frac{e^4}{\sin^4(\vartheta/2)} \frac{256}{(4 + q^2 a^2)^4} \equiv \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Ruth}} \frac{256}{(4 + q^2 a^2)^4}$$

da cui segue che il fattore di forma è

$$F(q^2) = \frac{256}{(4 + q^2 a^2)^4}$$

Passiamo al quesito b). Osserviamo per  $qa \rightarrow 0$  la sezione d'urto si riduce a quella di Rutherford in quanto  $F(q^2) \rightarrow 1$ . Dal punto di vista fisico, ciò significa che il fascio incidente vede la nube come puntiforme, e ciò accade perché il fascio risulta avere lunghezza d'onda molto grande rispetto ad  $a$ , che è una lunghezza legata alla dimensione della nube e dunque alla portata del potenziale. Infatti, la condizione  $qa \rightarrow 0$  può essere interpretata anche come  $a \ll q^{-1}$ , ma  $q^{-1}$  è a sua volta legato alla lunghezza d'onda di De Broglie del fascio incidente. Passiamo infine al punto c). Considerato un angolo specifico di scattering  $\vartheta = \frac{\pi}{3}$ , si ha che quando l'energia aumenta da 20 eV a 40 eV la sezione d'urto differenziale diminuisce di un fattore  $3^4/4$ . Sapendo ciò, dobbiamo determinare il valore di  $a$  associato alla nube elettronica. Osserviamo innanzitutto che per  $\vartheta = \frac{\pi}{3}$  dalla (2) si ha

$$q^2 = 4k^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4k^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = k^2$$

da cui segue che l'energia può essere riscritta come

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 q^2}{2m}$$

Data quindi tale relazione tra l'energia e  $q^2$ , aumentare l'energia di un fattore 2 equivale ad aumentare  $q$  di un fattore  $\sqrt{2}$ . Più esplicitamente, se  $E = 20$  eV ed  $E' = 40$  eV, dunque  $E' = 2E$ , per i corrispondenti valori dell'impulso trasferito,  $q$  e  $q'$ , vale la relazione  $q' = \sqrt{2}q$ . Per quanto riguarda le sezioni d'urto, abbiamo che

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{E'} = \frac{4}{3^4} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_E$$

che utilizzando la (1) diventa

$$\frac{1}{q'^4} \frac{1}{(4 + q'^2 a^2)^4} = \frac{4}{3^4} \frac{1}{q^4} \frac{1}{(4 + q^2 a^2)^4}$$

Facendo la radice quarta di ambo i membri otteniamo

$$\frac{1}{q'} \frac{1}{4 + q'^2 a^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{1}{q} \frac{1}{4 + q^2 a^2}$$

che, inserendo la relazione tra  $q$  e  $q'$ , diventa

$$\frac{1}{\sqrt{2}q} \frac{1}{4 + 2q^2 a^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{1}{q} \frac{1}{4 + q^2 a^2} \implies 4 + 2q^2 a^2 = 6 + \frac{3}{2}q^2 a^2$$

da cui segue che

$$a = \frac{2}{q}$$

Per calcolare tale quantità, osserviamo che per quanto visto in precedenza si ha

$$q^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{2mc^2 E}{(\hbar c)^2} = \frac{2 \cdot 0.5 \cdot 10^6 \text{ eV} \cdot 20 \text{ eV}}{4 \cdot 10^4 \text{ eV}^2 \text{ nm}^2} = 5 \cdot 10^2 \text{ nm}^{-2}$$

e quindi

$$a = \frac{2}{\sqrt{500}} \text{ nm} \approx 0.09 \text{ nm} = 0.9 \text{ \AA}$$

### Esercizio 3.2

A proton moving along the  $z$  axis scatters on the potential

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} V_0 \delta(z) & \text{for } x^2 + y^2 < R_T^2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

- a) Find the scattering amplitude  $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ .<sup>15</sup>
- b) Consider the low-energy limit and calculate the total cross-section.

### Svolgimento

Osserviamo innanzitutto che il potenziale ha simmetria cilindrica, in quanto esso è non nullo solo su un cerchio di raggio  $R_T$  che giace sul piano  $xy$  ed è dunque quella che dobbiamo adoperare nell'approssimazione di Born. In particolare, passando dalle coordinate cartesiane  $(x, y, z)$  alle coordinate cilindriche  $(r, \varphi, z)$ , il potenziale diventa

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} V_0 \delta(z) & \text{for } r < R_T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

avendo utilizzato le leggi di trasformazione  $(x, y, z) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$ . Sempre mediante tali trasformazioni, possiamo scrivere il prodotto  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}$  come

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} = q_x x + q_y y + q_z z = q_x r \cos \varphi + q_y r \sin \varphi + q_z z$$

Se adesso poniamo  $q_x = q_T \cos \varphi$  e  $q_y = q_T \sin \varphi$  dove  $q_T$  è la proiezione di  $\mathbf{q}$  sul piano  $xy$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} &= q_T r \cos \varphi \cos \varphi + q_T r \sin \varphi \sin \varphi + q_z z \\ &= q_T r \cos^2 \varphi + q_T r \sin^2 \varphi + q_z z \\ &= q_T r + q_z z \end{aligned}$$

In definitiva l'ampiezza di scattering sarà data da

$$\begin{aligned} f_k^{\text{Born}} &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3\mathbf{r} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} dr \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{i(q_T r + q_z z)} V(r, \varphi, z) \\ f_k^{\text{Born}} &= -\frac{mV_0}{2\pi\hbar^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R_T} dr e^{iq_T r} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{iq_z z} \delta(z) \end{aligned}$$

Osserviamo che l'integrazione rispetto a  $\varphi$  dà un fattore  $2\pi$ , mentre l'integrale in  $z$  è pari a 1.<sup>16</sup> In definitiva otteniamo

$$f_k^{\text{Born}} = -\frac{mV_0}{\hbar^2} \int_0^{R_T} dr r e^{iq_T r} = \frac{mV_0}{\hbar^2} \left( \frac{iR_T e^{iq_T R_T}}{q_T} - \frac{e^{iq_T R_T} - 1}{q_T^2} \right)$$

<sup>15</sup>In realtà non troveremo l'ampiezza di scattering in funzione di  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{k}'$  in quanto non ci serve per svolgere il punto b).

<sup>16</sup>Ricordiamo che in generale si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0)$$

Passiamo al quesito b). Ricordiamo che il limite di basse energie corrisponde alla condizione  $kR_V \ll 1$  dove  $R_V$  è il range del potenziale, che nel problema in esame è pari a  $R_T$ . Inoltre nelle espressioni che abbiamo trovato  $k$  è legato a  $q_T$ , dunque in questo caso la condizione diventa  $q_T R_T \ll 1$ . Notiamo che tale quantità figura ad esponenziale, per cui possiamo sviluppare quest'ultimo in serie. Bisogna però stare attenti a quale ordine bisogna troncare lo sviluppo in serie: per capirlo osserviamo che al denominatore abbiamo un termine  $q_T^2$ , per cui dobbiamo approssimare fino al secondo ordine. In definitiva, ricordando che

$$e^{iq_T R_T} \simeq 1 + iq_T R_T - \frac{q_T^2 R_T^2}{2}$$

avremo

$$f^{\text{Born}} \simeq \frac{mV_0}{\hbar^2} \left( i \frac{R_T}{q_T} - R_T^2 - \frac{i}{2} q_T R_T^3 - i \frac{R_T}{q_T} + \frac{1}{2} R_T^2 \right) = -\frac{mV_0}{\hbar^2} \left( \frac{1}{2} R_T^2 + \frac{i}{2} q_T R_T^3 \right)$$

Troviamo quindi che il primo ordine non nullo è quello in  $R_T^2$ . Ne segue, visto che siamo nella condizione  $R_T \ll 1/q_t$ , che possiamo trascurare i termini di ordine superiore. Pertanto possiamo scrivere

$$f^{\text{Born}} \simeq \frac{mV_0}{\hbar^2} \left( i \frac{R_T}{q_T} - R_T^2 - \frac{i}{2} q_T R_T^3 - i \frac{R_T}{q_T} + \frac{1}{2} R_T^2 \right) = -\frac{mV_0}{2\hbar^2} R_T^2$$

Osserviamo che tale ampiezza di scattering non dipende né da  $k$  (dunque dall'energia), né dall'angolo  $\vartheta$  di scattering. Ricordiamo che l'ampiezza di scattering ci dice qual è l'effetto dello scattering al variare dell'angolo  $\vartheta$ , per cui un risultato come questo ci dice che non è importante a quale angolo  $\vartheta$  viene scatterata la particella, in quanto l'ampiezza sarà la stessa. Inoltre il fatto che l'ampiezza non dipenda neanche dall'energia (rimanendo sempre nel limite di basse energie) ci dice che piccole variazioni dell'energia non hanno alcun effetto nel risultato.

Calcoliamo ora la sezione d'urto totale. Per fare ciò dobbiamo prima trovare la sezione d'urto differenziale, la quale è data da

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f^{\text{Born}}|^2 = \frac{m^2 V_0^2 R_T^4}{4\hbar^4}$$

La sezione d'urto totale sarà quindi data da

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \int d\Omega \frac{m^2 V_0^2 R_T^4}{4\hbar^4} = \frac{m^2 V_0^2 R_T^4}{4\hbar^4} 4\pi = \frac{\pi m^2 V_0^2 R_T^4}{\hbar^4}$$

in quanto l'integrale sull'angolo solido dà semplicemente un fattore  $4\pi$  dato che come già notato l'espressione trovata non dipende dall'angolo.

Concludiamo con un commento sull'analisi dimensionale. La sezione d'urto ha le dimensioni di un'area e spesso viene misurata in barn (b), i quali sono tali che  $1 \text{ b} = 100 \text{ fm}^2$ ; pertanto se esplicitassimo i valori delle quantità presenti nell'espressione di sopra dovremmo trovare tale quantità. Per trovare il risultato corretto bisogna notare una cosa:  $V_0$  non ha le dimensioni di un'energia, bensì quelle di un'energia moltiplicata per una lunghezza. Il motivo è che nell'espressione del potenziale esso è accoppiato a  $\delta(z)$ , la quale ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza, dunque per ottenere dimensionalmente un'energia per  $V(r)$  deve valere quanto detto.

### Esercizio 3.3

Given a proton scattering on the potential

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{V_0}{r} & \text{for } r < a \\ 0 & \text{for } r > a \end{cases}$$

- a) Calculate the differential cross section  $d\sigma/d\Omega$  in 1<sup>st</sup>-order Born approximation as a function of the scattering angle  $\vartheta$  and the scattering energy  $E$ .
- b) Calculate the phase shift for  $\ell = 0, 1$  in the low-energy limit.
- c) Given  $V_0 = 36 \text{ MeV fm}$  and  $a = 2 \text{ fm}$ , what is the value in MeV of the proton energy to have  $\delta_1 = \pi/10$ ?

### Svolgimento

Svolgiamo il punto a). Osserviamo che il potenziale è di tipo centrale, dunque per calcolare per calcolare l'ampiezza di scattering possiamo usare l'espressione

$$f^{\text{Born}} = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty dr r V(r) \frac{\sin(qr)}{q}$$

Inseriamo l'espressione del potenziale: poiché il potenziale è nullo per  $r > a$ , si ha

$$f^{\text{Born}} = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^a dr r \left(-\frac{V_0}{r}\right) \frac{\sin(qr)}{q} = \frac{2mV_0}{q\hbar^2} \int_0^a dr \sin(qr) = \frac{2mV_0}{q^2\hbar^2} [1 - \cos(qa)]$$

Riscriviamo tale espressione in termini di  $\vartheta$  ed  $E$ . Ricordiamo innanzitutto che vale la relazione

$$q = 2k \sin(\vartheta/2)$$

che inserita nell'espressione di sopra dà

$$f^{\text{Born}} = \frac{2mV_0}{4\hbar^2 k^2 \sin^2(\vartheta/2)} \left\{ 1 - \cos[2ka \sin(\vartheta/2)] \right\}$$

Ricordiamo che adesso che  $k$  è legata all'energia mediante la relazione

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

e quindi possiamo riscrivere ulteriormente l'ampiezza di scattering come

$$f^{\text{Born}}(\vartheta, E) = \frac{V_0}{4E} \left\{ \frac{1 - \cos\left[2\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} a \sin(\vartheta/2)\right]}{\sin^2(\vartheta/2)} \right\}$$

La sezione d'urto differenziale sarà quindi data da

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f^{\text{Born}}(\vartheta, E)|^2 = \left(\frac{V_0}{4E}\right)^2 \left\{ \frac{1 - \cos\left[2\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} a \sin(\vartheta/2)\right]}{\sin^2(\vartheta/2)} \right\}^2$$

Passiamo al punto b). Supponendo ancora di essere nell'approssimazione di Born, il phase shift sarà dato da

$$\delta_\ell = -\frac{2mk}{\hbar^2} \int_0^{+\infty} dr r^2 V(r) j_\ell(kr)^2$$

Poiché inoltre ci troviamo nel limite di basse energie, le funzioni di Bessel seguono l'andamento

$$j_\ell(kr) \simeq \frac{(kr)^\ell}{(2\ell+1)!!}$$

dove il semi-fattoriale è definito come

$$n!! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, 1 \\ n \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1 & \text{se } n = 2k+1, \quad k \in \mathbb{N} \\ n \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2 & \text{se } n = 2k, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Possiamo quindi scrivere il phase shift come

$$\delta_\ell \simeq -\frac{2mk^{(2\ell+1)}}{[(2\ell+1)!!]^2 \hbar^2} \int_0^{+\infty} dr r^{2\ell+2} V(r)$$

Inserendo l'espressione del potenziale, otteniamo

$$\delta_\ell \simeq \frac{2mk^{(2\ell+1)} V_0}{[(2\ell+1)!!]^2 \hbar^2} \int_0^a dr r^{2\ell+1} = \frac{2mV_0}{\hbar^2} a \frac{(ka)^{(2\ell+1)}}{(2\ell+2)[(2\ell+1)!!]^2}$$

In particolare, per  $\ell = 0$  e  $\ell = 1$  si ha

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \frac{mV_0}{\hbar^2} a(ka) \\ \delta_1 &= \frac{mV_0}{\hbar^2} \frac{a}{18} (ka)^3 \end{aligned}$$

Passiamo infine al punto c). Dobbiamo trovare l'energia del protone tale che  $\delta_1 = \pi/10$ . Imponiamo allora tale condizione in modo da trovare un valore per  $k$ :

$$\frac{mV_0}{\hbar^2} \frac{a}{18} (ka)^3 = \frac{\pi}{10} \implies k^3 = \frac{18\pi\hbar^2}{10mV_0a^4}$$

Sostituendo esplicitamente i valori numerici otteniamo

$$k^3 = \frac{18\pi(\hbar c)^2}{10mc^2V_0a^4} = \frac{18\pi \cdot 4 \cdot 10^4 \text{ MeV}^2 \text{ fm}^2}{10 \cdot 10^3 \text{ MeV} \cdot 36 \text{ MeV fm} \cdot 2^4 \text{ fm}^4} = \frac{\pi}{8} \text{ fm}^{-3}$$

Ricordando che la relazione tra  $E$  e  $k$  è data da

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

il valore di  $E$  sarà dato da

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 (k^3)^{\frac{2}{3}}}{2m} = \frac{(\hbar c)^2 (k^3)^{\frac{2}{3}}}{2mc^2} = \frac{4 \cdot 10^4 \text{ MeV fm} \pi^{\frac{2}{3}}}{2 \cdot 10^3 \text{ MeV} (2^3)^{\frac{2}{3}} \text{ fm}^2} = 5\pi^{\frac{2}{3}} \text{ MeV} \approx 10.7 \text{ MeV}$$

## 4 Lezione 4

### Esercizio 4.1

An electron is under the action of a constant magnetic field  $\mathbf{B} = B_z(0, 0, 1)$ . At  $t = 0$  a magnetic field along the  $\hat{x}$  direction is turned on; its strength increases uniformly from 0 to  $B_x$  at time  $t = T$  and then remains constant. The electron is initially in the spin-up state. Assume  $B_x \ll B_z$ .

- Find the transition amplitude to the spin-down state at  $t = T$  in the first order of perturbation theory.
- Calculate with a good approximation the transition probability for  $B_z = 5 \cdot 10^6$  V/m,  $B_x = 10^5$  V/m and  $T = \frac{mc}{eB_x}$ . Is perturbation theory valid?
- Calculate in eV the first nonzero correction to the energy levels for  $t \gg T$ .

### Svolgimento

Sappiamo che, in generale, l'hamiltoniana di una particella in un campo magnetico è

$$H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$$

dove  $\boldsymbol{\mu}$  è il momento magnetico della particella. Nel caso di un elettrone, il momento magnetico è dato da

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{\hbar e}{2mc} \boldsymbol{\sigma}$$

dove  $\boldsymbol{\sigma}$  sono le matrici di Pauli.

Analizziamo adesso il problema. Inizialmente abbiamo l'azione di un campo magnetico costante diretto lungo  $\hat{z}$ , dunque l'hamiltoniana assume la forma

$$H_0 = -\frac{\hbar e}{2mc} B_z \sigma_z$$

Ricordiamo che la matrice di Pauli  $\sigma_z$  è definita come

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e dunque i livelli energetici sono

$$E_{\uparrow} = \frac{\hbar e B_z}{2mc} \quad \text{e} \quad E_{\downarrow} = -\frac{\hbar e B_z}{2mc}$$

Osserviamo che il ground state è quello con spin down, dunque  $E_0 = E_{\downarrow}$ , mentre il primo stato eccitato è quello con spin up, dunque  $E_1 = E_{\uparrow}$ . Inoltre tra i due stati c'è uno splitting in energia pari a  $\Delta E = \frac{\hbar e B_z}{mc}$ .

Questa è la situazione prima del tempo  $t = 0$ ; una volta raggiunto tale istante viene acceso un campo magnetico che varia linearmente, dunque nella forma  $B(t) = mt + q$ . In particolare, sappiamo che  $B_x(0) = 0 \equiv q$  e  $B_x(T) = B_x$ , per cui il coefficiente angolare è dato da  $m = B_x/T$ . In definitiva l'espressione generale di tale campo è

$$B(t) = \frac{B_x}{T} t$$

Possiamo adesso svolgere il punto a). Poiché tale campo dipende dal tempo, ci troviamo nel caso di teoria perturbativa dipendente dal tempo e dobbiamo calcolare l'ampiezza di transizione dovuta a questo campo magnetico. L'ampiezza di transizione dallo stato iniziale  $|i\rangle = |\uparrow\rangle$  allo stato finale  $|f\rangle = |\downarrow\rangle$  sarà

$$c_{i \rightarrow f}(T) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt e^{i\omega_{f,i}t} V_{f,i} \quad (1)$$

dove

$$\omega_{f,i} = \frac{E_{\downarrow} - E_{\uparrow}}{\hbar} = -\frac{eB_z}{mc} \quad (2)$$

e  $V_{f,i} = \langle \downarrow | V(t) | \uparrow \rangle$ . Calcoliamo tale elemento di matrice: dato che il potenziale che dobbiamo considerare è quello associato al campo magnetico lungo  $x$ , si ha

$$V_{f,i} = \langle \downarrow | \frac{\hbar e}{2mc} \sigma_x B_x \frac{t}{T} | \uparrow \rangle = \frac{\hbar e}{2mc} B_x \frac{t}{T} \langle \downarrow | \sigma_x | \uparrow \rangle$$

Ricordiamo che  $\sigma_x$  è definita come

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

pertanto la sua azione è quella di scambiare gli stati up e down tra loro, per cui si ha che  $\sigma_x |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle$  e quindi

$$V_{f,i} = \frac{\hbar e}{2mc} B_x \frac{t}{T} \quad (3)$$

in quanto  $\langle \downarrow | \downarrow \rangle = 1$ .

Sostituendo la (2) e la (3) nella (1) otteniamo

$$c_{i \rightarrow f}(T) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt e^{-i\frac{eB_z}{mc}t} \frac{\hbar e}{2mc} B_x \frac{t}{T} = -i \frac{eB_x}{2mcT} \int_0^T dt e^{-i\frac{eB_z}{mc}t} t$$

Ricordiamo che in generale si ha

$$\int_0^T dt e^{-at} t = -\frac{1}{a} e^{-at} t \Big|_0^T + \frac{1}{a} \int_0^T dt e^{-at} = -\frac{1}{a} e^{-aT} T - \frac{1}{a^2} (e^{-aT} - 1)$$

Nel nostro caso  $a = -i\frac{eB_z}{mc}$ , per cui

$$\begin{aligned} c_{i \rightarrow f}(T) &= -i \frac{eB_x}{2mcT} \left[ -i \frac{mc}{eB_z} e^{-i\frac{eB_z}{mc}T} T - \left( \frac{mc}{eB_z} \right)^2 (e^{-i\frac{eB_z}{mc}T} - 1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{B_x}{B_z} e^{-i\frac{eB_z}{mc}T} - i \frac{mc}{2eT} \frac{B_x}{B_z^2} (e^{-i\frac{eB_z}{mc}T} - 1) \end{aligned} \quad (4)$$

Passiamo al quesito b). Dobbiamo calcolare, con una buona approssimazione, la probabilità in corrispondenza dei valori forniti dal testo. Osserviamo innanzitutto che, sfruttando l'espressione che ci viene fornita per  $T$ , la (4) diventa

$$c_{i \rightarrow f}(T) = \frac{1}{2} \frac{B_x}{B_z} e^{-i\frac{B_z}{B_x}} - \frac{i}{2} \left( \frac{B_x}{B_z} \right)^2 (e^{-i\frac{B_z}{B_x}} - 1) \quad (5)$$



Notiamo che nella (5) il primo termine dipende linearmente dal rapporto  $B_x/B_z$ , mentre il secondo vi dipende quadraticamente. Poiché il testo ci dice di assumere che  $B_x/B_z \ll 1$ , possiamo trascurare il secondo termine e scrivere semplicemente

$$c_{i \rightarrow f}(T) \approx \frac{1}{2} \frac{B_x}{B_z} e^{-i \frac{B_z}{B_x}}$$

Sostituendo adesso i valori forniti, la probabilità sarà data da

$$P_{i \rightarrow f} = |c_{i \rightarrow f}(T)|^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{B_x}{B_z} \right)^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{10^5}{5 \cdot 10^6} \right)^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{50} \right)^2 = 10^{-4}$$

Poiché abbiamo trovato che  $P_{i \rightarrow f} \ll 1$ , la teoria perturbativa è valida.

Svolgiamo infine in quesito c). Dobbiamo calcolare la prima correzione non nulla sugli stati al tempo  $t \gg T$ . Notiamo che per tempi  $t$  successivi all'istante  $t = T$  il campo magnetico resta costante, dunque il problema può essere trattato come un problema di teoria perturbativa indipendente dal tempo.

Il testo chiede in particolare correzione fino al primo ordine non nullo. Si trova infatti che al primo ordine della teoria perturbativa la correzione è nulla. Mostriamo esplicitamente ciò: ricordiamo innanzitutto che la correzione al primo ordine all'energia del generico livello  $n$ -esimo è data dall'elemento di matrice della perturbazione rispetto all'autostato  $n$ -esimo imperturbato:

$$\delta E_n^{(1)} = \langle \psi_n^{(0)} | V | \psi_n^{(0)} \rangle$$

In particolare, per lo stato  $|\downarrow\rangle$  abbiamo che

$$\delta E_{\downarrow}^{(1)} = \langle \downarrow | V | \downarrow \rangle \propto \langle \downarrow | \sigma_x | \downarrow \rangle = \langle \downarrow | \uparrow \rangle = 0$$

e con passaggi analoghi per lo stato  $|\uparrow\rangle$  si trova che

$$\delta E_{\uparrow}^{(1)} = \langle \uparrow | V | \uparrow \rangle = 0$$

Passiamo allora al secondo ordine, il quale è dato da

$$\delta E_n^{(2)} = \langle \psi_n^{(0)} | V | \psi_n^{(1)} \rangle$$

dove  $|\psi_n^{(1)}\rangle$  è l'autostato corretto fino al primo ordine, il quale a sua volta è dato da

$$|\psi_n^{(1)}\rangle = \sum_{k \neq n} \frac{V_{k,n}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} \quad \text{dove} \quad V_{k,n} = \langle \psi_n^{(0)} | V | \psi_k^{(0)} \rangle$$

In questo caso abbiamo un sistema a due livelli, dunque la sommatoria si riduce ad un solo termine. Se ad esempio calcoliamo la correzione allo stato  $|\uparrow\rangle$ , avremo che  $n = \uparrow$  e  $k = \downarrow$ , dunque

$$V_{\uparrow, \downarrow} = \langle \uparrow | V | \downarrow \rangle = \frac{\hbar e}{2mc} B_x \langle \uparrow | \sigma_x | \downarrow \rangle = \frac{\hbar e}{2mc} B_x$$

Per quanto riguarda la differenza di energie invece si ha:

$$E_{\uparrow}^{(0)} - E_{\downarrow}^{(0)} = \frac{\hbar e}{mc} B_z$$

Per inciso, osserviamo che tale quantità è pari a<sup>17</sup>

$$E_{\uparrow}^{(0)} - E_{\downarrow}^{(0)} = \frac{\hbar c}{mc^2} e B_z = \frac{200 \text{ eV nm} \cdot 5 \cdot 10^6 \text{ eV}}{5 \cdot 10^2 \text{ eV} \cdot 10^9 \text{ nm}} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ eV}$$

Ne segue che la correzione al primo ordine è

$$|\psi_1^{(1)}\rangle = \frac{\langle \uparrow | V | \downarrow \rangle}{E_{\uparrow}^{(0)} - E_{\downarrow}^{(0)}} |\downarrow\rangle = \frac{\frac{e\hbar}{2mc} B_x}{\frac{e\hbar}{mc} B_z} |\downarrow\rangle = \frac{1}{2} \frac{B_x}{B_z} |\downarrow\rangle$$

dove lo abbiamo indicato con  $|\psi_1^{(1)}\rangle$  per enfatizzare il fatto che non si avrà più l'autostato  $|\uparrow\rangle$ . Tale notazione non è ambigua perché quest'ultimo rappresenta il primo stato eccitato del sistema. Ne segue che l'autostato corretto fino al primo sarà dato da

$$|\psi_1\rangle = |\uparrow\rangle + |\psi_1^{(1)}\rangle = |\uparrow\rangle + \frac{1}{2} \frac{B_x}{B_z} |\downarrow\rangle$$

e in tale espressione si evince il mixing tra gli stati.

Con passaggi analoghi, si trova che la correzione al primo ordine per il ground state è

$$|\psi_0^{(1)}\rangle = \frac{\langle \downarrow | V | \uparrow \rangle}{E_{\downarrow}^{(0)} - E_{\uparrow}^{(0)}} |\uparrow\rangle = \frac{\frac{e\hbar}{2mc} B_x}{-\frac{e\hbar}{mc} B_z} |\uparrow\rangle = -\frac{1}{2} \frac{B_x}{B_z} |\uparrow\rangle$$

mentre lo stato corretto fino al primo ordine è

$$|\psi_0\rangle = |\downarrow\rangle + |\psi_0^{(1)}\rangle = |\downarrow\rangle - \frac{1}{2} \frac{B_x}{B_z} |\uparrow\rangle$$

Avendo trovato le correzioni agli stati al primo ordine, possiamo calcolare le correzione all'energia al secondo ordine. In particolare, per lo stato  $|\uparrow\rangle$  si ha

$$\delta E_{\uparrow}^{(2)} = \langle \psi_1^{(0)} | V | \psi_1^{(1)} \rangle = \frac{\hbar e}{2mc} B_x \langle \psi_1^{(0)} | \sigma_x | \psi_1^{(1)} \rangle = \frac{\hbar e}{4mc} \frac{B_x^2}{B_z}$$

mentre per lo stato  $|\downarrow\rangle$  si ha

$$\delta E_{\downarrow}^{(2)} = \langle \psi_0^{(0)} | V | \psi_0^{(1)} \rangle = \frac{\hbar e}{2mc} B_x \langle \psi_0^{(0)} | \sigma_x | \psi_0^{(1)} \rangle = -\frac{\hbar e}{4mc} \frac{B_x^2}{B_z}$$

Calcoliamo tale quantità: si ha

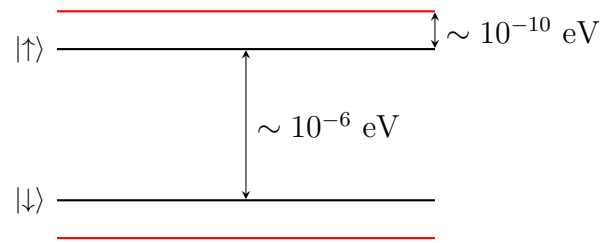
$$\frac{\hbar e}{4mc} \frac{B_x^2}{B_z} = \frac{\hbar c}{4mc^2} e B_x \frac{B_x}{B_z} = \frac{200 \text{ eV nm}}{4 \cdot 5 \cdot 10^2 \text{ eV}} \cdot 10^5 \text{ eV nm}^{-1} \cdot \frac{10^5 \text{ V nm}^{-1}}{5 \cdot 10^6 \text{ V nm}^{-1}} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ eV}$$

Si vede come la correzione è piuttosto piccola rispetto al valore della differenza in energia tra i livelli, come del resto ci aspettavamo.

Riassumiamo graficamente la situazione in termini di livelli energetici:

---

<sup>17</sup>È da notare che stiamo lavorando nel sistema CGS, ecco perché  $B$  ha tali unità di misura. Inoltre il vantaggio di lavorare in tale sistema è che il prodotto  $eB$  avrà lo stesso valore di  $B$ , misurato però in eV/m.



Inizialmente abbiamo due livelli la cui differenza in energia è di circa  $10^{-6} \text{ eV}$ . Dopo l'azione della perturbazione, lo stato fondamentale ha avuto una correzione negativa e lo stato eccitato una correzione positiva, entrambi uguali in modulo e pari a circa  $10^{-10} \text{ eV}$ , per cui il primo si è abbassato e il secondo si è alzato in energia. Tale fatto è generale: ogni volta che agisce una perturbazione, i livelli si allontanano sempre. Ciò è collegato al teorema di incrocio dei livelli, il quale afferma che due livelli non si incrociano mai.

### Esercizio 4.2

Given a proton that scatters on the potential

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{\alpha r}$$

with  $\alpha = 2 \text{ fm}^{-1}$ ,

- Calculate the phase shift for  $\ell = 0$  and  $\ell = 1$  at first order of the Born approximation in the low energy limit and the corresponding total cross section when including both  $\ell = 0$  and  $\ell = 1$ .
- Calculate at what beam energy (in MeV) the cross section associated to  $\ell = 1$  is equal to 1/10 of the one associated to  $\ell = 0$ .
- If  $V_0 = 20 \text{ MeV}$  is the Born Approximation valid in the low energy limit? Explain your answer.

Hint:

$$\int_0^{+\infty} dr r^n e^{-r/r_0} = n! r_0^{n+1}$$

### Svolgimento

Osserviamo innanzitutto che il potenziale del problema in esame è un potenziale di Yukawa avente range  $R_V$  dato da

$$R_V = \frac{1}{\alpha} = 0.5 \text{ fm}$$

Svolgiamo il punto a). Poiché il testo ci fornisce l'espressione per il potenziale, è conveniente usare la formula integrale per il phase shift, la quale è

$$e^{i\delta_\ell} \sin(\delta_\ell) = -\frac{2m}{\hbar^2} k \int_0^{+\infty} dr r j_\ell(kr) V(r) u_\ell(kr)$$

Il testo ci dice inoltre di utilizzare l'approssimazione di Born, la quale viene utilizzata quando il potenziale è debole. In conseguenza a ciò, i phase shifts risultano essere piccoli e dunque è possibile usare le approssimazioni  $e^{i\delta_\ell} \sin(\delta_\ell) \approx \delta_\ell$  e  $u_\ell(kr) = r j_\ell(kr)$ , per cui possiamo scrivere

$$\delta_\ell \simeq -\frac{2m}{\hbar^2} k \int_0^{+\infty} dr r^2 j_\ell^2(kr) V(r)$$

Poiché siamo nel limite di basse energie, cioè nel limite in cui  $kR_V \ll 1$ , le funzioni  $j_\ell$  seguono l'andamento

$$j_\ell(kr) \simeq \frac{(kr)^\ell}{(2\ell+1)!!}$$

e dunque avremo

$$\delta_\ell \simeq -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{k^{2\ell+1}}{[(2\ell+1)!!]^2} \int_0^{+\infty} dr r^{2\ell+2} V(r)$$

e sostituendo il potenziale fornito si ottiene

$$\delta_\ell \simeq -\frac{2mV_0}{\alpha\hbar} \frac{k^{2\ell+1}}{[(2\ell+1)!!]^2} \int_0^{+\infty} dr r^{2\ell+1} e^{-\alpha r}$$

Sfruttando il suggerimento fornito dal testo abbiamo che

$$\int_0^{+\infty} dr r^{2\ell+1} e^{-\alpha r} = \frac{(2\ell+1)!}{\alpha^{2\ell+2}}$$

e dunque

$$\delta_\ell \simeq -\frac{2mV_0}{\hbar^2} \frac{1}{\alpha^2} \frac{(2\ell+1)!}{[(2\ell+1)!!]^2} \left(\frac{k}{\alpha}\right)^{2\ell+1}$$

Osserviamo che in generale l' $\ell$ -esimo phase shift deve dipendere da  $(kR_V)^{2\ell+1}$ . Avendo trovato tale dipendenza, abbiamo conferma che quanto fatto finora è corretto.

Calcoliamo i phase shifts per  $\ell = 0$  e  $\ell = 1$ :

$$\begin{aligned}\delta_0 &= -\frac{2mV_0}{\hbar^2} \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{1} \left(\frac{k}{\alpha}\right)^1 = -\frac{2mV_0}{\hbar^2 \alpha^3} k \\ \delta_1 &= -\frac{2mV_0}{\hbar^2} \frac{1}{\alpha^2} \frac{6}{9} \left(\frac{k}{\alpha}\right)^3 = -\frac{4mV_0}{3\hbar^2 \alpha^5} k^3\end{aligned}$$

A questo punto possiamo calcolare la sezione d'urto. Considerando soltanto questi due contributi, essa sarà data da

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^1 (2\ell+1) \delta_\ell^2 = \frac{4\pi}{k^2} [\delta_0^2 + 3\delta_1^2] = \frac{4\pi}{k^2} \left[ \left( \frac{2mV_0}{\hbar^2 \alpha^3} k \right)^2 + 3 \left( \frac{4mV_0}{3\hbar^2 \alpha^5} k^3 \right)^2 \right]$$

Passiamo al quesito b). Per prima cosa calcoliamo le sezioni d'urto relative ai singoli contributi:

$$\sigma_0 = \frac{4\pi}{k^2} \left( \frac{2mV_0 k}{\hbar^2 \alpha^3} \right)^2, \quad \sigma_1 = \frac{4\pi}{k^2} \left( \frac{4mV_0 k^3}{\sqrt{3}\hbar^2 \alpha^5} \right)^2$$

Imponiamo adesso la condizione

$$\sigma_1 = \frac{1}{10} \sigma_0$$

che esplicitando ci dà, dopo aver semplificato,

$$\frac{4}{3} \frac{k^4}{\alpha^4} = \frac{1}{10}$$

risolvendo rispetto a  $k^2$  si ha

$$k^2 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{10}} \alpha^2 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{10}} 4 \text{ fm}^{-2}$$

a cui corrisponde un'energia

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{(\hbar c)^2 k^2}{2mc^2} = \frac{4 \cdot 10^2 \text{ MeV}^2 \text{ fm}^2 \cdot 4\sqrt{3} \text{ fm}^{-2}}{2 \cdot 10^3 \text{ MeV} \cdot 2\sqrt{10}} = 4\sqrt{10} \text{ MeV} \simeq 22.23 \text{ MeV}$$

Svolgiamo infine il punto c). Verifichiamo innanzitutto di trovarci nel limite delle basse energie. In corrispondenza del valore di  $k$  trovato nel punto b), si ha che

$$kR_V = k \frac{1}{\alpha} = \left( \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{10}} \right)^{\frac{1}{2}} \alpha \frac{1}{\alpha} = \left( \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{10}} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 0.52 < 1$$

Seppur tale quantità non molto minore di 1, possiamo comunque considerarci nel limite di basse energie.

Passiamo a verificare la validità dell'approssimazione di Born. Nel caso di basse energie, la condizione da soddisfare è

$$\frac{2mV_0}{\hbar^2} R_V \ll 1$$

che sostituendo i valori numerici ci dà

$$\frac{2mc^2V_0}{(\hbar c)^2} \frac{1}{\alpha} = \frac{2 \cdot 10^3 \text{ MeV} \cdot 20 \text{ MeV}}{4 \cdot 10^4 \text{ MeV}^2 \text{ fm}^2} \frac{1}{2 \text{ fm}^{-1}} = 0.5 < 1$$

dunque l'approssimazione di Born è valida.

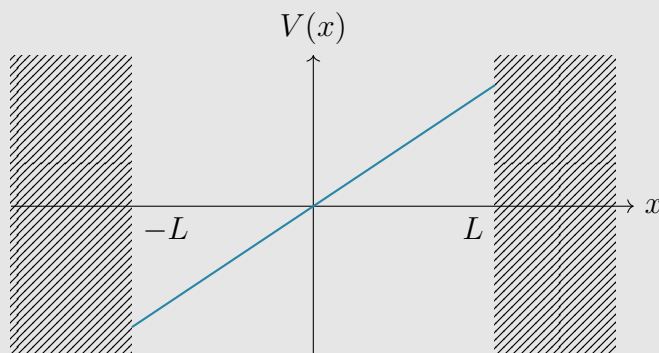
### Esercizio 4.3

An electron moves in a one-dimensional square well potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } |x| < L \\ \infty & \text{if } |x| > L \end{cases}$$

And is perturbed by an electric field.

- a) Consider a weak uniform electric field of strength  $\mathcal{E}_0$  acting on the electron as the figure ( $V(x) = e\mathcal{E}_0 x$ ).



Use WKB approximation to calculate the energy levels, and find the minimum value of  $\mathcal{E}_0$  to have at least one negative energy level for  $L = 3$  nm.

- b) Consider now the case of a time-dependent electric field

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{-t/\tau}$$

for  $t > 0$ . Calculate the transition probability from the ground state to the first excited state in first-order time-dependent perturbation theory for times  $t \gg \tau$  and the value of  $\mathcal{E}_0$  and  $L$  from a) and  $\tau = 10^{-14}$  s.

Hint:

$$\int_{-L}^L dx \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) = \frac{32}{9} \frac{\pi^2}{L^2}$$

### Svolgimento

Svolgiamo il punto a). Il testo ci chiede di trovare un valore di  $\mathcal{E}_0$  tale da avere almeno un livello ad energia negativa, dunque in base all'andamento del potenziale dobbiamo applicare le formule dell'approssimazione WKB nella regione tra  $x = -L$  e  $x = 0$ . In tal caso, la condizione che serve per calcolare i livelli di energia è quella nel caso di una buca con una sola parete, cioè

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{2m[E - V(x)]} = \left(n - \frac{1}{4}\right) \pi \hbar \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

con  $x_1$  e  $x_2$  i classical turning points. In particolare, abbiamo che  $x_1 = -L$ , mentre  $x_2$  sarà un certo punto per cui  $V(x_2) = E$ . Esplicitando anche il potenziale, avremo che

$$\int_{-L}^{x_2} dx \sqrt{2m(E - e\mathcal{E}_0 x)} = \left(n - \frac{1}{4}\right) \pi \hbar \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Per risolvere questo integrale adoperiamo la sostituzione

$$z = 2m(E - e\mathcal{E}_0 x) \implies dz = -2me\mathcal{E}_0 dx$$

e dunque riscriviamo l'integrale come

$$-\frac{1}{2me\mathcal{E}_0} \int_{2m(E+e\mathcal{E}_0 L)}^0 dz \sqrt{z} = -\frac{1}{2me\mathcal{E}_0} \left[ \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} \right]_{2m(E+e\mathcal{E}_0 L)}^0 = \frac{1}{3me\mathcal{E}_0} [2m(E + e\mathcal{E}_0 L)]^{\frac{3}{2}}$$

Inserendo tale risultato nella (1) otteniamo

$$2m(E + e\mathcal{E}_0 L) = \left[ 3me\mathcal{E}_0 \pi \hbar \left( n - \frac{1}{4} \right) \right]^{\frac{2}{3}}$$

da cui segue i livelli energetici sono dati da

$$E_n = -e\mathcal{E}_0 L + \frac{1}{2m} \left[ 3me\mathcal{E}_0 \pi \hbar \left( n - \frac{1}{4} \right) \right]^{\frac{2}{3}} \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

A noi interessa trovare il minimo valore di  $\mathcal{E}_0$  tale che esista almeno un livello ad energia negativa, dunque poniamo  $n = 1$  e risolviamo l'equazione

$$E_1 = -e\mathcal{E}_0 L + \frac{1}{2m} \left( 3me\mathcal{E}_0 \pi \hbar \frac{3}{4} \right)^{\frac{2}{3}} \leq 0$$

da cui

$$\begin{aligned} e\mathcal{E}_0 L &\geq \frac{1}{2m} \left( \frac{9}{4} me\mathcal{E}_0 \pi \hbar \right)^{\frac{2}{3}} \\ \implies e^3 \mathcal{E}_0^3 L^3 &\geq \left( \frac{1}{2m} \right)^3 \left( \frac{9}{4} me\pi \hbar \right)^2 \mathcal{E}_0^2 \\ \implies e\mathcal{E}_0 &\geq \frac{81}{128} \frac{\pi^2 \hbar^2}{mL^3} \end{aligned}$$

ovvero, sostituendo i valori numerici,

$$e\mathcal{E}_0 \geq \frac{81}{128} \frac{\pi^2 (\hbar c)^2}{mc^2 L^3} = \frac{81}{128} \frac{\pi^2 \cdot 4 \cdot 10^4 \text{ eV}^2 \text{ nm}^2}{0.5 \cdot 10^6 \text{ eV} \cdot 27 \text{ nm}^3} = 1.87 \text{ eV/nm}$$

dunque il valore cercato è  $\mathcal{E}_0 \approx 2 \cdot 10^7 \text{ V/m}$ .

Passiamo al punto b). Dobbiamo trovare la probabilità di transizione dal ground state al



primo stato eccitato<sup>18</sup>. In questo caso, visto che la buca si estende da  $-L$  ad  $L$ , le funzioni d'onda sono date da<sup>19</sup>

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) & \text{per } n \text{ dispari} \\ \sqrt{\frac{1}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) & \text{per } n \text{ pari} \end{cases}$$

mentre le energie sono date da<sup>20</sup>

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8mL^2} n^2 \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

Avendo un campo elettrico, il potenziale perturbativo sarà dato da

$$V'(t) = e\mathcal{E}_0 x e^{-t/\tau}$$

pertanto l'ampiezza di transizione dal ground state al primo stato eccitato sarà data da

$$c_{1 \rightarrow 2} = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t e^{i\omega_{21}t'} V_{2,1}(t') dt'$$

dove

$$\omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} = \frac{3\pi^2 \hbar^2}{8mL^2}$$

e

$$\begin{aligned} V_{2,1}(t) &= \langle \psi_2 | V' | \psi_1 \rangle = e\mathcal{E}_0 e^{-t/\tau} \langle \psi_2 | x | \psi_1 \rangle \\ &= e\mathcal{E}_0 e^{-t/\tau} \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx x \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) = e\mathcal{E}_0 e^{-t/\tau} \frac{32L}{9\pi^2} \end{aligned}$$

avendo sfruttato il suggerimento fornito dal testo. Inserendo le espressioni trovate, otteniamo

$$c_{1 \rightarrow 2} = -\frac{i}{\hbar} e\mathcal{E}_0 \frac{32L}{9\pi^2} \int_0^t e^{i(\omega_{21} - \frac{1}{\tau})t'} dt' = -\frac{i}{\hbar} e\mathcal{E}_0 \frac{32L}{9\pi^2} \frac{e^{i(\omega_{21} - \frac{1}{\tau})t} - 1}{i(\omega_{21} - \frac{1}{\tau})}$$

Se adesso imponiamo la condizione  $t \gg \tau$ , otteniamo<sup>21</sup>

$$c_{1 \rightarrow 2} \approx -\frac{i}{\hbar} e\mathcal{E}_0 \frac{32L}{9\pi^2} \frac{e^{i\omega_{21}t} \tau}{i\omega_{21}\tau - 1}$$

e dunque la probabilità sarà

$$P_{1 \rightarrow 2} = |c_{1 \rightarrow 2}|^2 = \left( \frac{32e\mathcal{E}_0 L}{9\pi^2 \hbar} \right)^2 \frac{\tau^2}{\omega_{21}^2 \tau^2 + 1}$$

---

<sup>18</sup>È da notare che i livelli da considerare sono quelli della buca quadra senza la presenza del campo elettrico. Ciò è confermato anche dal fatto che il testo dice di considerare un nuovo caso.

<sup>19</sup>Si presti attenzione al fatto che in questo caso le funzioni d'onda hanno parità rispetto alla buca che è opposta rispetto a quella di  $n$ , per cui saranno dispari per  $n$  pari e pari per  $n$  dispari.

<sup>20</sup>Da notare che il fattore 8 deriva dal fatto che la larghezza della buca è  $2L$ .

<sup>21</sup>In questo modo stiamo ponendo  $e^{i\frac{t}{\tau}} \approx 1$ .

Osserviamo adesso che

$$\omega_{21} = \frac{3\pi^2 \hbar c}{8mc^2 L^2} = \frac{3\pi^2 \cdot 3 \cdot 10^{17} \text{ nm s}^{-1} \cdot 2 \cdot 10^2 \text{ eV}^2 \text{ nm}^2}{8 \cdot 0.5 \cdot 10^6 \text{ eV} \cdot 9 \text{ nm}^2} \simeq 0.5 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

per cui  $\omega_{2,1}\tau = 0.5$ . Inserendo tale risultato nella probabilità e sostituendo gli altri valori, abbiamo

$$P_{1 \rightarrow 2} = \left( \frac{32 \cdot 2 \text{ eV nm}^{-1} \cdot 3 \text{ nm}}{9\pi^2 \cdot 6.6 \cdot 10^{-16} \text{ eV s}} \right)^2 \frac{10^{-28} \text{ s}^{-2}}{0.5^2 + 1} = 0.08 \ll 1$$

## 5 Lezione 5

### Esercizio 5.1

A particle in a one-dimensional harmonic oscillator is subject to the potential

$$V'(t) = \hbar\omega \frac{\alpha^3 x^3 - 1}{1 + (t/\tau)^2} \quad \text{with} \quad \alpha = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Assuming the particle is in the ground state at  $t = -\infty$ :

- Determine all the possible transitions allowed at first order of perturbation theory.
- Calculate the probability<sup>22</sup> of such transitions (excluding  $0 \rightarrow 0$ ) for  $\omega = 10^{15} \text{ s}^{-1}$  and  $\tau = 10^{-15} \text{ s}$ .
- Is perturbation theory applicable for case b)? Briefly explain your answer.

### Svolgimento

Si tratta di un problema di teoria perturbativa dipendente dal tempo.

Svolgiamo il punto a). Per prima cosa dobbiamo determinare le transizioni permesse. Ricordiamo innanzitutto che il potenziale dell'oscillatore armonico è

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

mentre i livelli di energia sono dati da

$$E = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Inoltre possiamo scrivere l'operatore posizione in termini degli operatori di creazione e annichilazione come

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger)$$

Gli operatori di creazione annichilazione agiscono sugli autostati dell'oscillatore armonico nel seguente modo:

$$\begin{aligned} a |n\rangle &= \sqrt{n} |n-1\rangle \quad , \quad a |0\rangle = 0 \\ a^\dagger |n\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle \end{aligned}$$

L'ampiezza di transizione dal ground state  $|0\rangle$  allo stato finale  $|f\rangle$  è data da

$$d_{0 \rightarrow f} = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega_{f,0}t} V'_{f,0}(t)$$

dove

$$\omega_{f,0} = \frac{E_f - E_0}{\hbar} \quad , \quad V'_{f,0} = \langle f | V' | 0 \rangle$$

<sup>22</sup>Il testo non lo dice esplicitamente, ma richiede di calcolare la probabilità di transizione al tempo  $t = +\infty$ .

Per capire quali sono le transizioni permesse dobbiamo andare a vedere quali sono quelle aventi ampiezza di transizione non nulla. Tale condizione implica che deve essere non nullo l'elemento di matrice  $V'_{f,0}$ . Esplicitamente, tale condizione significa che

$$\begin{aligned}\langle f|V'|0\rangle &= \frac{\hbar\omega}{1+(t/\tau)^2} \langle f|\alpha^3 x^3 - 1|0\rangle \neq 0 \\ \implies \langle f|\alpha^3 x^3|0\rangle - \langle f|0\rangle &\neq 0\end{aligned}$$

Il termine  $\langle f|0\rangle$  è diverso da 0 quando  $|f\rangle = |0\rangle$ , ma il testo diceva di escludere le transizioni  $0 \rightarrow 0$ , per cui bisogna soltanto ricavare in che caso si ha  $\langle f|\alpha^3 x^3|0\rangle \neq 0$ .

Se adesso esprimiamo  $x$  in termini degli operatori di creazione e annichilazione ma utilizzando la definizione di  $\alpha$  fornita dal testo, abbiamo

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}(a + a^\dagger)$$

e dunque

$$x^3 = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}\alpha^3}(a + a^\dagger)^3$$

In questo modo la condizione da imporre diventa

$$\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \langle f|(a + a^\dagger)^3|0\rangle \neq 0$$

Osserviamo che possiamo riscrivere l'operatore come

$$(a + a^\dagger)^3 = (a + a^\dagger)(a^2 + a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a)$$

Piuttosto che svolgere questo prodotto e vedere poi che cosa si ottiene dall'applicazione di ciascun termine a  $|0\rangle$ , possiamo già fare una considerazione: ogni volta che applichiamo un prodotto di operatori che ha come ultimo termine  $a$  allo stato  $|0\rangle$ , esso darà 0, dunque possiamo trascurarli. Nel nostro caso operatori del genere sono  $a^2$  e  $a^\dagger a$ , che per quanto detto posso essere omessi. In definitiva, possiamo considerare soltanto l'operatore

$$(a + a^\dagger)(a^{\dagger 2} + aa^\dagger) = aa^{\dagger 2} + a^2 a^\dagger + a^{\dagger 3} + a^\dagger aa^\dagger$$

Osserviamo che è possibile scartare anche il termine  $a^2 a^\dagger$  in quanto applicandolo a  $|0\rangle$  si ha

$$a^2 a^\dagger |0\rangle = a^2 |1\rangle = a |0\rangle = 0$$

Vediamo allora cosa danno gli altri termini:

$$\begin{aligned}aa^{\dagger 2} |0\rangle &= aa^\dagger |1\rangle = \sqrt{2}a |2\rangle = 2 |1\rangle \\ a^{\dagger 3} |0\rangle &= a^{\dagger 2} |1\rangle = \sqrt{2}a^\dagger |2\rangle = \sqrt{6} |3\rangle \\ a^\dagger aa^\dagger |0\rangle &= a^\dagger a |1\rangle = a^\dagger |0\rangle = |1\rangle\end{aligned}$$

In definitiva abbiamo che

$$\langle f|(a + a^\dagger)^3|0\rangle = 3 \langle f|1\rangle + \sqrt{6} \langle f|3\rangle = 3\delta_{f,1} + \sqrt{6}\delta_{f,3}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'ortonormalità degli autostati dell'oscillatore armonico.

Dunque le transizioni permesse sono  $0 \rightarrow 1$  e  $0 \rightarrow 3$ , in quanto sono le uniche per cui tale termine è non nullo. Notiamo che non è permessa la transizione  $0 \rightarrow 2$ , come ci si poteva aspettare per questioni di simmetria. Infatti, l'interazione è dispari, poiché dipende da  $x^3$ , mentre gli stati  $|0\rangle$  e  $|2\rangle$  sono pari, dunque l'elemento di matrice corrispondente sarà nullo. Passiamo al quesito b). Dobbiamo calcolare il valore delle probabilità di tali transizioni in corrispondenza di certi valori di  $\omega$  e  $\tau$ .

In termini delle transizioni permesse,  $V'_{f,0}$  si scrive come

$$V'_{f,0} = \frac{\hbar\omega}{1 + (t/\tau)^2} \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} (3\delta_{f,1} + \sqrt{6}\delta_{f,3})$$

Distinguiamo i due casi:

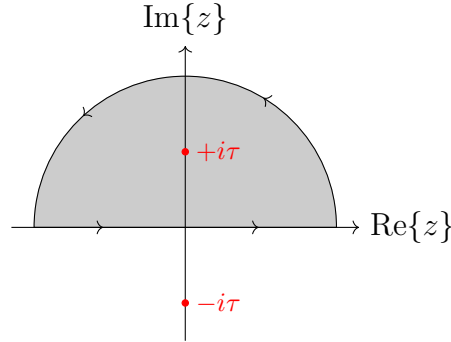
- Transizione  $0 \rightarrow 1$ . In questo caso abbiamo che

$$\omega_{1,0} = \frac{E_1 - E_0}{\hbar} = \frac{(1 + \frac{1}{2})\hbar\omega - \frac{1}{2}\hbar\omega}{\hbar} = \omega$$

quindi l'ampiezza di transizione sarà data da

$$d_{0 \rightarrow 1} = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \frac{3}{2^{\frac{3}{2}}} \frac{\hbar\omega}{1 + (t/\tau)^2} = -i \frac{3}{2^{\frac{3}{2}}} \omega \tau^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{e^{i\omega t}}{t^2 + \tau^2}$$

Per risolvere quest'integrale applichiamo il metodo dei residui.



In particolare, la funzione integranda ha due poli in  $t = \pm i\tau$ , ma poiché dobbiamo prendere il contorno superiore il teorema dei residui ci dà

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{e^{i\omega t}}{t^2 + \tau^2} &= 2\pi i \operatorname{Res}_{t=i\tau} \left[ \frac{e^{i\omega t}}{t^2 + \tau^2} \right] \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i\tau} (z - i\tau) \frac{e^{i\omega z}}{(z + i\tau)(z - i\tau)} = 2\pi i \frac{e^{-\omega\tau}}{2i\tau} = \frac{\pi e^{-\omega\tau}}{\tau} \end{aligned}$$

In definitiva

$$d_{0 \rightarrow 1} = -i \frac{3}{2^{\frac{3}{2}}} \omega \tau^2 \frac{\pi e^{-\omega\tau}}{\tau} = -i \frac{3}{2^{\frac{3}{2}}} \omega \tau \pi e^{-\omega\tau}$$

e quindi la probabilità di transizione da  $|0\rangle$  a  $|1\rangle$  sarà pari a

$$P_{0 \rightarrow 1} = |d_{0 \rightarrow 1}|^2 = \frac{9\pi^2}{8} (\omega\tau)^2 e^{-2\omega\tau}$$

- Transizione  $0 \rightarrow 3$ . In questo caso abbiamo che

$$\omega_{3,0} = \frac{E_3 - E_0}{\hbar} = \frac{(3 + \frac{1}{2})\hbar\omega - \frac{1}{2}\hbar\omega}{\hbar} = 3\omega$$

quindi l'ampiezza di transizione sarà data da

$$d_{0 \rightarrow 3} = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i3\omega t} \frac{\sqrt{6}}{2^{\frac{3}{2}}} \frac{\hbar\omega}{1 + (t/\tau)^2} = -i \frac{\sqrt{6}}{2^{\frac{3}{2}}} \omega \tau^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{e^{i3\omega t}}{t^2 + \tau^2}$$

Procedendo in maniera analoga al caso precedente, il teorema dei residui ci dà

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{e^{i3\omega t}}{t^2 + \tau^2} &= 2\pi i \operatorname{Res}_{t=i\tau} \left[ \frac{e^{i3\omega t}}{t^2 + \tau^2} \right] \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i\tau} (z - i\tau) \frac{e^{i3\omega z}}{(z + i\tau)(z - i\tau)} = 2\pi i \frac{e^{-3\omega\tau}}{2i\tau} = \frac{\pi e^{-3\omega\tau}}{\tau} \end{aligned}$$

In definitiva

$$d_{0 \rightarrow 3} = -i \frac{\sqrt{6}}{2^{\frac{3}{2}}} \omega \tau^2 \frac{\pi e^{-3\omega\tau}}{\tau} = -i \frac{\sqrt{6}}{2^{\frac{3}{2}}} \omega \tau \pi e^{-3\omega\tau}$$

e quindi la probabilità di transizione da  $|0\rangle$  a  $|3\rangle$  sarà pari a

$$P_{0 \rightarrow 3} = |d_{0 \rightarrow 3}|^2 = \frac{3\pi^2}{4} (\omega\tau)^2 e^{-6\omega\tau}$$

Troviamo adesso un valore numerico per tale probabilità con i dati forniti dal testo. Osserviamo che per tali valori si ha  $\omega\tau = 1$ , dunque:

$$\begin{aligned} P_{0 \rightarrow 1} &= \frac{9\pi^2}{8} e^{-2} \approx 1.5 \\ P_{0 \rightarrow 3} &= \frac{3\pi^2}{4} e^{-6} \approx 0.02 \end{aligned}$$

Svolgiamo il punto c). I valori trovati nel quesito b) ci dicono che la teoria perturbativa non è applicabile per la transizione  $0 \rightarrow 1$ , in quanto la probabilità di transizione è addirittura maggiore di 1.<sup>23</sup> Per la transizione  $0 \rightarrow 3$ , invece, si ha che  $P \ll 1$ , dunque la teoria perturbativa è valida.

---

<sup>23</sup>Tale risultato può essere collegato col fatto che l'espansione perturbativa si fa attorno ad uno stato che deve essere stabile, per cui lo stato  $|1\rangle$  potrebbe non essere stabile in quanto subisce continuamente transizioni verso altri stati e in conseguenza a ciò non è valida la teoria perturbativa.

### Esercizio 5.2

Given a proton scattering on the potential

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{for } r \leq a \\ 0 & \text{for } r > a \end{cases}$$

- a) Calculate the differential cross section and the phase shift for  $\ell = 0$  (not in the low-energy limit).
- b) Considering now the low-energy limit for the phase shift, calculate at what energy (in MeV)  $\delta_0 = \pi/6$  if  $V_0 = 40$  MeV and  $a = 1$  fm.
- c) Can it be considered low energy?

Hint 1:

$$\frac{d}{dx} \frac{\sin x}{x} = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$$

Hint 2: Use the approximation  $e^{i\delta_\ell} \sin(\delta_\ell) \simeq \delta_\ell$ .

### Svolgimento

Osserviamo innanzitutto che il potenziale è di tipo centrale ed ha range  $R_V$  pari ad  $a$ . Svolgiamo il quesito a). Per risolverlo usiamo il projection method. Vediamo di cosa si tratta. L'ampiezza di scattering può essere scritta, usando la partial wave analysis, come

$$f_k(\vartheta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) e^{i\delta_\ell} \sin(\delta_\ell) P_\ell(\cos \theta)$$

Il projection method consiste nell'integrare tra  $-1$  e  $1$  rispetto a  $\cos \vartheta$  ambo i membri di tale relazione moltiplicati per  $P_{\ell'}(\cos \vartheta)$  con  $\ell \neq \ell'$ . In formule:

$$\int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) f_k(\vartheta) P_{\ell'}(\cos \vartheta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) e^{i\delta_\ell} \sin(\delta_\ell) \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) P_\ell(\cos \vartheta) P_{\ell'}(\cos \vartheta)$$

Per la relazione di ortogonalità tra i polinomi di Legendre si ha che

$$\int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) P_\ell(\cos \vartheta) P_{\ell'}(\cos \vartheta) = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell,\ell'}$$

dunque possiamo riscrivere il membro di destra come

$$\frac{2}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} e^{i\delta_\ell} \sin(\delta_\ell) \delta_{\ell,\ell'} = \frac{2}{k} e^{i\delta_{\ell'}} \sin(\delta_{\ell'})$$

In definitiva abbiamo

$$\int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) f_k(\vartheta) P_{\ell'}(\cos \vartheta) = \frac{2}{k} e^{i\delta_{\ell'}} \sin(\delta_{\ell'})$$

Se sfruttiamo il suggerimento del testo di approssimare  $i\delta_\ell \sin(\delta_\ell)$  con  $\delta_\ell$ , possiamo scrivere

$$\delta_\ell = \frac{k}{2} \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) f_k(\vartheta) P_\ell(\cos \vartheta) \quad (1)$$

Prima di calcolare i phase shifts dobbiamo calcolare l'ampiezza di scattering. Nel fare ciò osserviamo che l'approssimazione che suggerisce il testo è applicabile quando il potenziale è debole, condizione in cui è applicabile l'approssimazione di Born. Possiamo allora adoperare quest'ultima per calcolare  $f_k(\vartheta)$ , che sarà quindi data da

$$f_k(\vartheta) = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{q} \int_0^\infty dr r V(r) \sin(qr)$$

dove  $q = |\mathbf{k} - \mathbf{k}'| = 2k \sin(\vartheta/2)$ .

Sostituendo adesso l'espressione del potenziale si ha<sup>24</sup>

$$f_k(\vartheta) = \frac{2mV_0}{\hbar^2 q^2} \int_0^a dr r \sin(qr)$$

Svolgendo l'integrale si ottiene

$$f_k(\vartheta) = \frac{2mV_0 a}{\hbar^2 q^2} \left[ \frac{\sin(qa)}{qa} - \cos(qa) \right]$$

Quindi la sezione d'urto differenziale sarà

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_k(\vartheta)|^2 = \left( \frac{2mV_0 a}{\hbar^2 q^2} \right)^2 \left[ \frac{\sin(qa)}{qa} - \cos(qa) \right]^2$$

Per inciso, è possibile scrivere tale sezione d'urto come il prodotto della sezione d'urto di Rutherford per un fattore di forma  $F(q^2)$ :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Ruth}} F(q^2) = \left( \frac{2me}{\hbar^2 q^2} \right)^2 \left( \frac{V_0 a}{e^2} \right)^2 \left[ \frac{\sin(qa)}{qa} - \cos(qa) \right]^2$$

Calcoliamo ora il phase shift per  $\ell = 0$ . Mediante l'equazione (1) si ha ( $P_0(\cos \vartheta) = 1$ )

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \frac{k}{2} \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta f_k(\vartheta) \\ &= \frac{k}{2} \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \frac{2mV_0 a}{\hbar^2 4k^2 \sin^2(\vartheta/2)} \left\{ \frac{\sin[2ka \sin(\vartheta/2)]}{2ka \sin(\vartheta/2)} - \cos[2ka \sin(\vartheta/2)] \right\} \end{aligned}$$

Per risolvere tale integrale è conveniente scrivere

$$\sin \vartheta = 2 \sin(\vartheta/2) \cos(\vartheta/2)$$

in modo da poter operare la sostituzione

$$y = 2ka \sin(\vartheta/2) \implies dy = ka \cos(\vartheta/2) d\vartheta$$

---

<sup>24</sup>Si noti che quando abbiamo a che fare con l'ampiezza di scattering, troviamo sempre il termine  $\frac{2mV_0}{\hbar^2}$ , per cui la sua presenza ci dice che stiamo svolgendo correttamente i calcoli.



e calcolare l'integrale in  $y$  (in cui  $y(0) = 0$  e  $y(\pi) = 2ka$ ):

$$\delta_0 = \frac{mV_0a}{\hbar^2k} \int_0^{2ka} dy \frac{\sin y}{y^2} - \frac{\cos y}{y}$$

Notiamo che abbiamo ottenuto l'espressione che era nel suggerimento, in quanto possiamo riscrivere

$$\delta_0 = -\frac{mV_0a}{\hbar^2k} \int_0^{2ka} dy \frac{\cos y}{y} - \frac{\sin y}{y^2} = -\frac{mV_0a}{\hbar^2k} \int_0^{2ka} dy \frac{d}{dy} \frac{\sin y}{y} = -\frac{mV_0a}{\hbar^2k} \left[ \frac{\sin(2ka)}{2ka} - 1 \right]$$

cioè

$$\delta_0 = -\frac{mV_0a}{\hbar^2k} \left[ \frac{\sin(2ka)}{2ka} - 1 \right] \quad (2)$$

Svolgiamo adesso il punto b). considerando il limite di basse energie, dobbiamo calcolare a quale energia, per certi valori di  $V_0$  ed  $a$ , il phase shift associato a  $\ell = 0$  è pari a  $\pi/6$ . Osserviamo innanzitutto che in questo problema il limite delle basse energie corrisponde alla condizione  $ka \ll 1$ , per cui possiamo sviluppare in serie il termine  $\sin(2ka)$  nell'equazione (2) fino al secondo ordine, ottenendo<sup>25</sup>

$$\delta_0 = -\frac{mV_0a}{\hbar^2k} \left[ \frac{1}{2ka} \left( 2ka - \frac{8k^3a^3}{6} \right) - 1 \right] = \frac{2mV_0a^3}{3\hbar^2}ka$$

ed esplicitando la dipendenza di  $k$  dall'energia otteniamo

$$\delta_0 = \frac{2mV_0a^3}{3\hbar^3} \sqrt{2mE}$$

Elevando adesso entrambi i membri al quadrato si ottiene

$$\delta_0^2 = \frac{8m^3V_0^2a^6E}{9\hbar^6}$$

e quindi l'energia cercata sarà

$$E = \frac{9\hbar^6\delta_0^2}{8m^3V_0^2a^6}$$

ovvero, sostituendo i valori numerici forniti dal testo,

$$E = \frac{9(\hbar c)^6\delta_0^2}{8(mc^2)^3V_0^2a^6} = \frac{9 \cdot 2^6 \cdot 10^{12} \text{ MeV}^6 \text{ fm}^6 \cdot (\pi/6)^2}{8 \cdot 10^9 \text{ MeV}^3 \cdot 16 \cdot 10^2 \text{ MeV}^2 \cdot 1 \text{ fm}^6} \approx 12.3 \text{ MeV}$$

Passiamo infine al punto c). Per verificare se ci si trova nel limite delle basse energie, dobbiamo verificare che il prodotto  $ka$  sia molto minore di 1. Si ha che

$$ka = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}a = \frac{\sqrt{2mc^2E}}{\hbar c}a = \frac{\sqrt{2 \cdot 10^3 \text{ MeV} \cdot 12.3 \text{ MeV}}}{200 \text{ MeV fm}} \cdot 1 \text{ fm} \approx 0.8$$

Il valore trovato non è molto minore di 1, quindi siamo del tutto nel limite di basse energie.

---

<sup>25</sup>Il motivo per cui non ci fermiamo al primo ordine è che otterremmo un phase shift nullo.

### Esercizio 5.3

A proton is scattering on the potential

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{\alpha r}$$

It is known that

$$f_k(\vartheta) = -\frac{2mV_0}{\alpha\hbar^2} \frac{1}{q^2 + \alpha^2}$$

- Calculate the phase shift for  $\ell = 0$  in the low-energy limit (is not said that  $\delta_\ell$  is small).
- Calculate at what energy (in MeV) one has resonant scattering if  $V_0 = 60$  MeV and  $\alpha = 2/3 \text{ fm}^{-1}$ .
- Evaluate the width of the resonance.

Hint 1:

$$\int_{-1}^1 dx \frac{1}{b(1-x) + a^2} = \frac{1}{b} \ln \left( 1 + \frac{2b}{a^2} \right)$$

Hint 2:

$$\ln(1+x) \simeq x \quad \text{for } x \ll 1$$

due to the low-energy limit.

Hint 3:

$$\frac{d \cot x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad \frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

### Svolgimento

Svolgiamo il quesito a). Per calcolare il phase shift è conveniente usare il projection method, dunque usiamo la relazione ( $P_0(\cos \vartheta) = 1$ )

$$e^{i\delta_0} \sin(\delta_0) \simeq \frac{k}{2} \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) \sin \vartheta f_k(\vartheta)$$

La forma dell'ampiezza di scattering è fornita dal testo, per cui possiamo inserirla direttamente ottenendo

$$\begin{aligned} e^{i\delta_0} \sin(\delta_0) &= -\frac{k}{2} \frac{2mV_0}{\alpha\hbar^2} \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) \frac{1}{4k^2 \sin^2(\vartheta/2) + \alpha^2} \\ &= -\frac{k}{2} \frac{2mV_0}{\alpha\hbar^2} \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) \frac{1}{2k^2(1 - \cos \vartheta) + \alpha^2} \end{aligned}$$

dove nel secondo passaggio abbiamo sfruttato la relazione trigonometrica  $2 \sin^2(\vartheta/2) = 1 - \cos \vartheta$ .

In questo modo troviamo un integrale nella forma di quello fornito dal suggerimento, per cui possiamo scrivere

$$e^{i\delta_0} \sin(\delta_0) = -\frac{k}{2} \frac{2mV_0}{\alpha\hbar^2} \frac{1}{2k^2} \ln \left( 1 + \frac{4k^2}{\alpha^2} \right) = -\frac{mV_0}{2k\alpha\hbar^2} \ln \left( 1 + \frac{4k^2}{\alpha^2} \right)$$

Poiché siamo nel limite delle basse energie abbiamo  $kR_V \ll 1$ , che in questo caso diventa  $k/\alpha \ll 1$ . Possiamo allora sfruttare il secondo indizio e approssimare il logaritmo come

$$\ln \left( 1 + \frac{4k^2}{\alpha^2} \right) \simeq \frac{4k^2}{\alpha^2}$$

e quindi

$$e^{i\delta_0} \sin(\delta_0) \simeq -\frac{mV_0}{2k\alpha\hbar^2} \frac{4k^2}{\alpha^2} = -\frac{2mV_0}{\alpha^2\hbar^2} \frac{k}{\alpha}$$

Calcoliamo adesso il phase shift. Per fare ciò consideriamo il modulo della (5) e otteniamo

$$|e^{i\delta_0} \sin(\delta_0)| = |\sin(\delta_0)| = \frac{2mV_0}{\alpha^2\hbar^2} \frac{k}{\alpha}$$

dunque

$$\delta_0 = \arcsin \left( \frac{2mV_0}{\alpha^3\hbar^2} k \right) \quad (1)$$

Passiamo al punto b). Si ha uno scattering risonante quando in corrispondenza di un processo di scattering si vede un picco nella sezione d'urto, quindi dobbiamo trovare per quali valori dell'energia possiamo avere uno scattering risonante. Per fare ciò dobbiamo cercare un picco nella sezione d'urto in funzione dell'energia, il quale si presenta quando il phase shift, in corrispondenza dell'energia di risonanza, assume il valore  $\pi/2$ , cioè

$$\delta_0(E_{\text{ris}}) = \frac{\pi}{2}$$

la condizione che quindi dobbiamo imporre nel nostro caso è

$$\delta_0 = \frac{\pi}{2}$$

a cui corrisponde  $\sin(\delta_0) = 1$ , ovvero

$$\frac{2mV_0}{\alpha^2\hbar^2} \frac{k}{\alpha} = 1$$

da cui ricaviamo un valore per  $k$ :

$$k = \frac{\alpha^3\hbar^2}{2mV_0}$$

e quindi l'energia della risonanza sarà

$$E_{\text{ris}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^6 \alpha^6}{8m^2 V_0^2}$$

Sostituendo i valori numerici troviamo il valore:

$$E_{\text{ris}} = \frac{(\hbar c)^6 \alpha^6}{8(mc^2)^3 V_0^2} = \frac{2^6 \cdot 10^{12} \text{ MeV}^6 \text{ fm}^6 \cdot (2/3)^6 \text{ fm}^{-6}}{8 \cdot 10^9 \text{ MeV}^3 \cdot 36 \cdot 10^2 \text{ MeV}^2} \approx 0.2 \text{ MeV}$$

Se andassimo a guardare un grafico della sezione d'urto in funzione dell'energia, osserveremmo un picco in corrispondenza di tale valore. Inoltre a tale valore corrisponde uno stato quasi-legato avente un tempo di vita  $\tau$  che risulta essere piuttosto lungo e un'ampiezza  $\Gamma$ , che è

quella che ci viene richiesta nel punto c). In particolare, essa può essere calcolata mediante l'espressione

$$\left. \frac{d[\cot(\delta_l)]}{dE} \right|_{E=E_{\text{ris}}} = -\frac{2}{\Gamma}$$

da cui

$$\Gamma = -2 \left( \left. \frac{d[\cot(\delta_l)]}{dE} \right|_{E=E_{\text{ris}}} \right)^{-1}$$

Per calcolare tale espressione è utile ricorrere al suggerimento fornito dal testo, per cui riscriviamo

$$\frac{d[\cot(\delta_l)]}{dE} = \frac{d[\cot(\delta_l)]}{d\delta_\ell} \frac{d\delta_\ell}{dE} = -\frac{1}{\sin^2(\delta_\ell)} \frac{d\delta_\ell}{dE}$$

Tale quantità deve essere valutata in  $E = E_{\text{ris}}$ , in corrispondenza della quale abbiamo visto che si ha  $\sin(\delta_0) = 1$ , per cui

$$\left. \frac{d[\cot(\delta_l)]}{dE} \right|_{E=E_{\text{ris}}} = - \left. \frac{d\delta_\ell}{dE} \right|_{E=E_{\text{ris}}}$$

Dunque possiamo scrivere

$$\Gamma = 2 \left( \left. \frac{d\delta_\ell}{dE} \right|_{E=E_{\text{ris}}} \right)^{-1}$$

A questo punto dobbiamo esprimere  $\delta_0$  in funzione dell'energia. Dalla (1) si ha

$$\delta_0 = \arcsin \left[ \frac{(2m)^{\frac{3}{2}} V_0}{\alpha^3 \hbar^3} \sqrt{E} \right] = \arcsin [\beta \sqrt{E}]$$

dove abbiamo posto

$$\beta = \frac{(2m)^{\frac{3}{2}} V_0}{\alpha^3 \hbar^3}$$

Se a questo punto usiamo il suggerimento, abbiamo

$$\left. \frac{d\delta_\ell}{dE} \right|_{E=E_{\text{ris}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2 E_{\text{ris}}}} \frac{\beta}{2\sqrt{E_{\text{ris}}}}$$

In definitiva

$$\Gamma = 2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2 E_{\text{ris}}}} \frac{\beta}{2\sqrt{E_{\text{ris}}}} \right)^{-1} = \frac{4\sqrt{E_{\text{ris}}} \sqrt{1 - \beta^2 E_{\text{ris}}}}{\beta}$$

Osserviamo che  $\beta\sqrt{E_{\text{ris}}} = 1$ , per cui  $\Gamma = 0$ , cioè l'ampiezza è nulla. Ciò corrisponde a una lunghezza di vita infinita (in quanto  $\tau = 1/\Gamma$ ), dunque abbiamo uno stato legato.