



UNIVERSITÀ
degli STUDI
di CATANIA

Dipartimento
di Fisica
e Astronomia
"Ettore Majorana"



LABORATORIO DI FISICA III

A CURA DI PEPPINO SALUMIERI

ANNO 2024

Indice

1	Arduino	5
2	Sorgenti di radiazione	6
2.1	Tipi di radiazione	6
2.1.1	Radiazioni ionizzanti	6
2.1.2	Sorgenti di radiazioni naturali	7
2.1.3	Sorgenti di radiazioni artificiali	7
2.1.4	Radiazioni cariche	7
2.1.5	Radiazioni neutre	7
2.1.6	Radiazione cosmica secondaria	8
2.2	Energia e potere penetrante	8
2.2.1	Range energia di interesse	8
2.2.2	Capacità penetrazione radiazioni	8
2.3	Nuclei instabili	9
2.4	Legge del decadimento radioattivo	10
2.4.1	Excursus: la datazione al carbonio ^{14}C	12
2.5	Isotopi radioattivi β	12
2.6	Isotopi radioattivi α	15
2.7	Isotopi radioattivi γ	16
2.8	Sorgenti di fissione	18
2.9	Radiazione cosmica	18
2.10	Unità di misura e nomenclatura	19
2.10.1	Attività di una sorgente	19
2.10.2	Concetto di dose	20
2.10.3	Concetto di dose equivalente	20
2.10.4	Dosi tipiche	20
3	Perdita di energia per particelle cariche pesanti	22
3.1	Principali meccanismi	22
3.1.1	Interazione coulombiana (inelastica) con gli elettroni atomici	22
3.1.2	Interazione (elastica) con i nuclei	23
3.2	Relazione di Bethe-Bloch	24
3.2.1	Perdita di energia per composti	27
3.2.2	Picco di Bragg	28
3.3	Fluttuazioni statistiche nella perdita di energia	29
3.3.1	Range di una particella	29
3.3.2	Il channeling	33

3.3.3	Come calcolare il range di una particella	33
3.4	Radiazione Cherenkov	34
3.5	Possibili esercizi	35
4	Perdita di energia per elettroni	37
4.1	Interazione degli elettroni con la materia	37
4.1.1	Contributo collisionale	39
4.1.2	Contributo radiativo	39
4.1.3	Energia critica	40
4.1.4	Riepilogo	42
4.2	Range degli elettroni	42
4.3	Assorbimento degli elettroni	43
4.4	Backscattering	44
4.5	Scattering multiplo	46
4.5.1	Lunghezza di radiazione	49
4.5.2	Distribuzione angolare di scattering	50
4.5.3	Conseguenze dello scattering multiplo	50
4.5.4	Tomografia muonica	51
5	Interazione dei γ con la materia	52
5.1	Meccanismi di interazione dei fotoni	52
5.1.1	Sezione d'urto di interazione	54
5.1.2	Coefficiente di assorbimento	55
5.1.3	Effetto fotoelettrico	57
5.1.4	Effetto Compton	58
5.1.5	Creazione di coppie	60
5.1.6	Sommario	61
5.2	Sciame elettromagnetici	61
5.2.1	Struttura di uno sciame elettromagnetico (toy model)	62
5.2.2	Profondità di uno sciame e.m.	63
5.2.3	Numero di particelle in uno sciame e.m.	65
5.2.4	Sviluppo longitudinale di uno sciame e.m.	66
5.2.5	Sviluppo laterale di uno sciame e.m.	67
5.2.6	Simulazioni di sciame e.m.	69
6	Proprietà generali dei rivelatori	70
6.1	Che cos'è un rivelatore	70
6.2	Modi di operazione	71
6.2.1	Informazioni dai segnali	73
6.3	Analisi delle ampiezze	74
6.3.1	Calibrazione di uno spettro	77

Capitolo 1

Arduino

Carusi non ho tempo poi la faccio sta parte.

Capitolo 2

Sorgenti di radiazione

Gran parte del corso è dedicata allo studio dei diversi tipi di rivelatore, e per capire come funziona un rivelatore bisogna innanzitutto capire come la radiazione che vogliamo andare a rivelare interagisce con la materia, in quanto i rivelatori sfruttano proprio tali meccanismi di interazione per estrarre le informazioni utili per l'utente.

Cominceremo con una breve introduzione sui tipi di radiazione.

2.1 Tipi di radiazione

2.1.1 Radiazioni ionizzanti

Per ionizzante intendiamo qualcosa che riesce a innescare un fenomeno di ionizzazione nella materia, cioè riesce a creare una coppia ione-elettrone, quindi si strappa un elettrone all'atomo inizialmente neutro e si crea tale coppia. Tale fenomeno è detto *ionizzazione*. Quando parliamo di radiazioni ionizzanti, intendiamo delle radiazioni che hanno energia tale da produrre effetto di ionizzazione o di un atomo o di una molecola. Esse possono essere di origine corpuscolare o elettromagnetica. In particolare sono:

- Particelle subatomiche, quali elettroni e protoni. I neutroni sono un po' un caso a parte perché possono produrre effetti di ionizzazione attraverso altri meccanismi, ad esempio a seguito dell'interazione producono particelle cariche. Oltre a queste esiste uno zoo di particelle che, sebbene non esista in natura, può essere prodotto attraverso reazioni o collisioni; tra queste vi è il muone, che rappresenta una radiazione naturale in quanto è una parte della componente secondaria dei raggi cosmici.

In generale quindi tutte le particelle cariche subatomiche, purché abbiano energia sufficiente per farlo, sono in grado di ionizzare la materia;

- Radiazioni elettromagnetiche con energia sufficiente. Infatti, lo spettro delle onde elettromagnetiche è molto vasto e si caratterizza in base alla frequenza dell'onda, da cui dipende l'energia della radiazione e quindi la capacità di ionizzare (ricordiamo che per ionizzare un atomo o una molecola è necessaria un'energia minima di ionizzazione, per cui ad esempio la luce visibile o le onde radio non riescono, mentre X, γ sì).

2.1.2 Sorgenti di radiazioni naturali

- Materiali emettitori naturali (ad esempio il Radon);
- Sorgenti radioattive (ad esempio isotopi radioattivi);
- Radiazione cosmica, che proviene dal cosmo, perché prodotta da sorgenti di origine astrofisica. In particolar modo noi non siamo sottoposti alla radiazione prodotta da tali sorgenti (che prende il nome di radiazione primaria), bensì alla radiazione secondaria, in quanto quella primaria quando incontra le molecole dell'atmosfera terrestre interagisce, producendo degli sciami di particelle secondarie. L'atmosfera dunque agisce da filtro, proteggendoci dalla radiazione primaria

Noi conviviamo con il livello di radiazione proveniente sia dagli isotopi naturali presenti nei materiali da costruzione, negli alimenti ecc. che dalla radiazione cosmica. Il nostro organismo si è quindi sviluppato in maniera tale da poter tollerare un certo livello di radiazione senza sviluppare dei danni di tipo biologico.

2.1.3 Sorgenti di radiazioni artificiali

- Macchine acceleratrici per scopi o diagnostici (TAC, PET) con cui veniamo sottoposti a radiazioni prodotte da tali macchine, o terapeutici come la radioterapia con cui si è soggetti a radiazioni prodotte da isotopi iniettati nell'organismo;
- Acceleratori di particelle, cioè strumenti in grado di generare fasci di particelle che possiedono una determinata energia.

2.1.4 Radiazioni cariche

Si tratta di particelle dotate di carica, che si distinguono in

- Particelle cariche pesanti (protoni, alfa, ioni pesanti);
- Elettroni.

Tale distinzione viene fatta perché i meccanismi con cui le particelle cariche pesanti interagiscono con la materia sono diversi da quelli con cui interagiscono gli elettroni. Ricordiamo che la massa elettrone è pari a 0.511 MeV mentre la massa del protone è dell'ordine del GeV, dunque tra i due c'è un fattore $2 \cdot 10^3$.

2.1.5 Radiazioni neutre

Associate a particelle neutre o a radiazione elettromagnetica:

- Radiazione elettromagnetica (noi ci interesseremo di X e γ);
- Neutroni, ma non ci occuperemo molto di questi perché i loro meccanismi di interazione possono dar luogo a processi nucleari e formazione di particelle cariche, quindi producono ionizzazione attraverso meccanismi secondari.

2.1.6 Radiazione cosmica secondaria

Essa è una radiazione innescata dall'interazione dei cosmici primari con l'atmosfera. Sono costituiti principalmente da:

- Muoni, il "cugino pesante dell'elettrone". È una particella elementare come l'elettrone, ma con una massa di 200 volte circa quella dell'elettrone e può avere carica sia positiva che negativa (μ^+ e μ^-). Sono una particella molto penetrante, cioè riesce ad attraversare i vari strati dell'atmosfera giungendo fino al livello del mare (se ha energia sufficiente), costituendo la maggior parte delle radiazioni cosmiche secondarie. Hanno una vita media di pochi microsecondi, tuttavia riusciamo ad osservarle a terra per effetti relativistici (dilatazione del tempo). È difficile schermarsi dai muoni, per cui bisogna ricordarsi che un qualunque rivelatore li misurerà, quindi per esperimenti in cui essi rappresentano un rumore di fondo (perché interessati ad altri fenomeni) si lavora in caverne (ad esempio il laboratorio nazionale del Gran Sasso).
- Elettroni.

2.2 Energia e potere penetrante

2.2.1 Range energia di interesse

- Sorgenti radioattive: da pochi eV (quindi poco energetiche) a 10^7 eV (= 10MeV);
- Radiazione cosmica secondaria: dal MeV al GeV. In questo caso le energie sono più alte perché in partenza i cosmici primari hanno delle energie notevoli (che non riusciamo a riprodurre con nessun acceleratore di particelle, tant'è che costituiscono l'accelerazione più grande che l'uomo abbia mai osservato) e di conseguenza anche i cosmici secondari.

2.2.2 Capacità penetrazione radiazioni

Indica quanto materiale le radiazioni riescono ad attraversare prima di essere arrestate. Si parla infatti di *potere penetrante*.

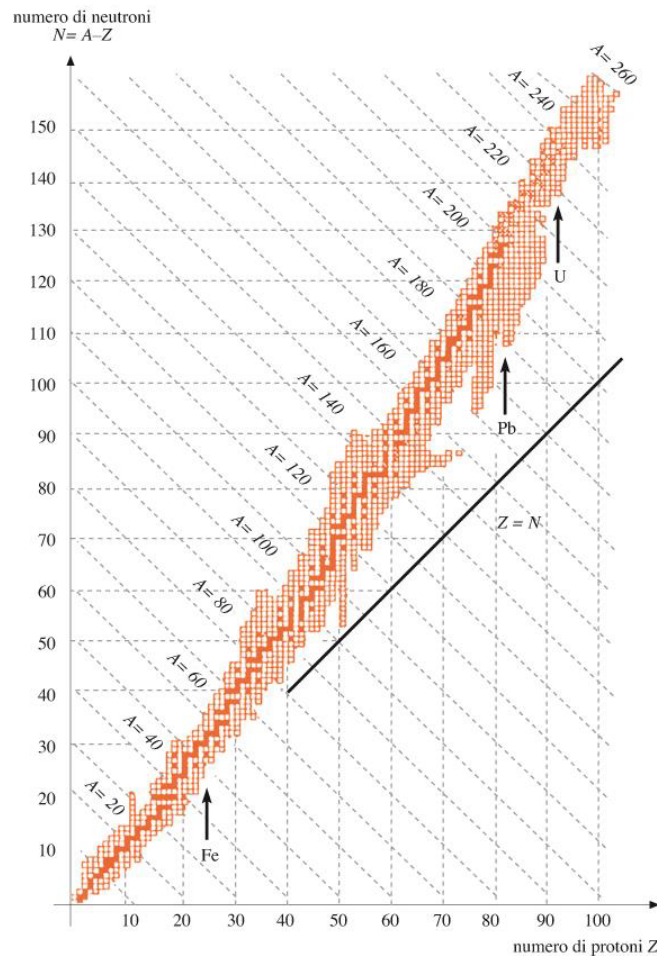
- Elettroni emessi da sorgenti radioattive (β): alcuni millimetri di materiale (hanno pochi MeV);
- Particelle α da sorgenti: qualche centinaio di μm di materiale solido, quindi rispetto alle particelle β hanno meno potere penetrante in quanto, essendo particelle più pesanti (ricordiamo che sono nuclei di elio), nell'attraversamento perdono più facilmente la loro energia, arrestandosi in pochissimo spazio. Ad esempio nell'aria percorrono qualche centimetro.

Sebbene ciò rappresenti un vantaggio dal punto di vista della radio-protezione, da quello della rivelazione delle particelle α rappresenta un problema perché rischiamo che i rivelatori non misurino niente in quanto le particelle vengono arrestate totalmente da pochi centimetri d'aria. Per questo motivo per tali radiazioni si adopera una camera da vuoto;

- Muoni cosmici: sono estremamente penetranti, per cui servono spessori anche di centinaia di metri per poter arrestare i muoni più energetici.

2.3 Nuclei instabili

Quando parliamo di sorgenti radioattive, intendiamo degli isotopi che decadono nel tempo, che sono quindi instabili, cioè cambiano la loro natura.



Nel grafico abbiamo il numero di protoni di un nucleo sulle ascisse ed il numero di neutroni sulle ordinate (rispettivamente Z è il numero di protoni ed $N = A - Z$ il numero di neutroni).

La linea retta rappresenta la bisettrice del grafico. Se un nucleo si trova all'interno di essa allora avrà numero di protoni uguale al numero di neutroni.

In natura gli isotopi tendono a disporsi secondo la distribuzione arancione; in particolare i punti più scuri rappresentano gli isotopi stabili, che non decadono nel tempo e quindi non cambiano natura. Si osserva che la stabilità all'inizio, per i nuclei più leggeri, viene assicurata quando il nucleo possiede ugual numero di protoni e di neutroni (pensiamo ad esempio al C^{12} , che ha 6 protoni e 6 neutroni). Ciò vale fino a $Z = 20$; quando invece il numero di protoni aumenta e quindi il nucleo diventa più pesante, la condizione

di stabilità si può avere solo quando il numero di neutroni è maggiore del numero di protoni. Il motivo è che, a causa della repulsione coulombiana tra i protoni che costituiscono il nucleo, è necessario un maggior numero di neutroni che fungono da "collante" grazie all'interazione forte.

Osservando il grafico notiamo che per ogni nucleo, cioè fissato un valore di Z , abbiamo, oltre al punto scuro, altri punti più chiari lungo la verticale che rappresentano tutti i possibili isotopi di un determinato nucleo al variare del numero di neutroni N . Ad esempio per l'idrogeno abbiamo il deuterio (due neutroni) e il trizio (tre neutroni), per il carbonio esiste il ^{13}C ed il ^{14}C . Il fatto che siano colorati più chiari indica che sono instabili, cioè tendono a cambiare la loro natura nel tempo.

L'ultimo isotopo stabile che si trova in natura è il piombo, che ha $Z = 82$; tutti gli isotopi più pesanti di esso sono instabili.

2.4 Legge del decadimento radioattivo

Tale legge è valida per tutti i decadimenti radioattivi. Essa ci dice che in un campione di N isotopi instabili, il numero medio di nuclei che decade in un intervallo infinitesimo di tempo dt è

$$dN = -\lambda N dt$$

Il numero infinitesimo dn dipenderà quindi

- Dal numero N di isotopi di partenza;
- Dall'intervallo infinitesimo dt considerato;
- Dalla costante λ detta *costante di decadimento*, che è caratteristica di ciascun isotopo. Essa esprime la probabilità che il nucleo decada, quindi più è grande più nuclei decadono.

Il segno meno è dovuto al fatto che se i nuclei decadono il numero N diminuisce.

Tale legge è un'equazione differenziale che ha come soluzione la vera e propria legge di decadimento radioattivo:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

dove N_0 è il numero iniziale di nuclei. Tale legge ci dice che il numero di nuclei ancora presenti nel campione all'istante generico t .

Talvolta anziché λ si adopera una di queste due grandezze:

- *Vita media*: $\tau = \frac{1}{\lambda}$;
- *Tempo di dimezzamento* o *emivita*: $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Entrambe le grandezze hanno le dimensioni di un tempo, dunque si misurano in secondi. In particolare la vita media corrisponde al tempo necessario affinché il numero di nuclei si riduca di un fattore e , cioè il tempo per passare da N_0 a N_0/e , l'emivita invece

corrisponde al tempo necessario affinché il numero di nuclei di partenza si dimezzi, cioè il tempo per passare da N_0 a $N_0/2$. La relazione con la costante di decadimento si ricava tramite semplici passaggi matematici: imponendo $N(t) = N_0/2$ si ha che

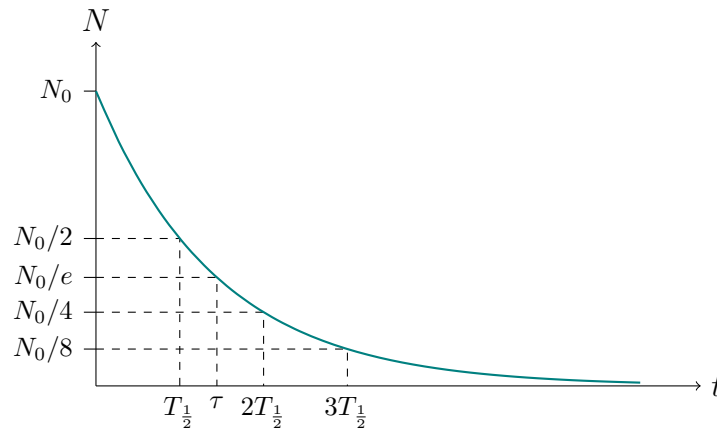
$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda t} \implies -\ln 2 = -\lambda t \implies t = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Le emivite variano da alcuni giorni a diversi miliardi di anni.

$T_{\frac{1}{2}}$ e τ sono legati tramite la relazione

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2$$

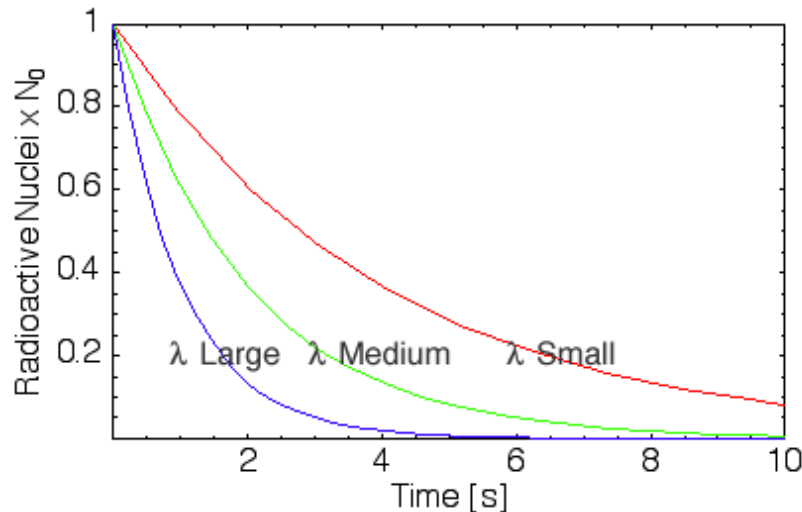
Solitamente come riferimento per il tempo si prendono multipli dell'emivita perché è facile calcolare il corrispondente numero di isotopi restanti.



Notiamo inoltre che il tempo di dimezzamento viene prima della vita media (del resto $\ln 2 < 1$). Infatti per $t = \tau$ si ha

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}} = N_0 \cdot e^{-1} = \frac{N_0}{e} < \frac{N_0}{2}$$

Vediamo ora cosa cambia al variare del valore della costante di decadimento λ :



Se λ è elevata, l'esponenziale è più rapido, cioè la probabilità di decadere è maggiore, per cui si dice che la sorgente ha un'elevata attività; viceversa, ad un valore piccolo di λ corrisponde minore pendenza.

In termini di radioprotezione, λ influisce anche sul tempo che deve trascorrere affinché il livello di radiazione emesso dal materiale non sia più dannoso per le persone.

Facciamo degli esempi con l'emivita (che è più facile da immaginare concettualmente) anziché la costante di decadimento:

Elemento	$T_{1/2}$
Radon 222	3.8 giorni
Piombo 210	22 anni
Radio 226	1600 anni
Carbonio 14	5730 anni
Uranio 238	$4.56 \cdot 10^9$ anni

Notiamo come ci sia un'estrema variabilità nel valore del tempo di dimezzamento, quindi ci sono enormi differenze da isotopo a isotopo.

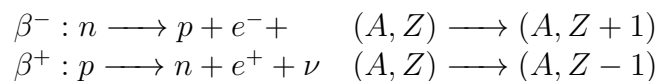
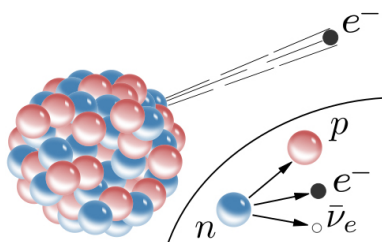
2.4.1 Excursus: la datazione al carbonio ^{14}C

L'isotopo ^{14}C ha un'emivita di 5730 anni. Esso viene usato per tecniche di datazione, cioè per sapere qual è l'età di un reperto di origine organica (ad esempio resti umani). Gli esseri viventi scambiano carbonio con l'atmosfera, ma con la morte dell'organismo tale scambio termina, e il ^{14}C presente nell'individuo (che fino ad ora si è tenuto costante grazie a tale scambio continuo) incomincia a decadere. Andando a vedere il quantitativo residuo di ^{14}C presente nell'organismo si può risalire, grazie alla legge di decadimento, all'età del campione.

Tale metodo non è utilizzabile con reperti eccessivamente antichi: la regola di norma è che al massimo possiamo datare campioni eventi età pari a 10 volte l'emivita del campione considerato, quindi al massimo 60 mila anni. Il motivo è che dopo 10 emivite il quantitativo di ^{14}C residuo è veramente poco, per cui non ci permette, da un punto di vista statistico, di fare una misura precisa dell'età del campione.

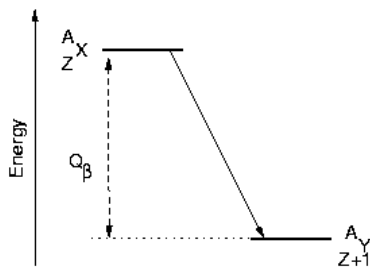
2.5 Isotopi radioattivi β

Il decadimento β corrisponde all'emissione di elettroni o di positroni (rispettivamente decadimento β^- e β^+). Ciò corrisponde rispettivamente alla trasformazione, all'interno del nucleo, di un neutrone in un protone, con l'emissione di un elettrone e di un antineutrino elettronico, oppure viceversa alla trasformazione di un protone in un neutrone, con l'emissione di un positrone e di un neutrino elettronico:



Quando inizialmente si scoprì tale fenomeno, non si capiva se, oltre all'elettrone, venisse emesso un altro tipo di radiazione. Inoltre non si capiva l'origine di questi elettroni, perché le energie che si misuravano per queste particelle erano elevate, arrivavano all'ordine del MeV, cosa che fece capire che non potevano essere elettroni atomici, i quali non possono possedere tali energie. Si capì poi che erano elettroni provenienti dal nucleo.

Un'altra difficoltà che si ebbe riguardava l'energia di tali elettroni, in quanto non erano fisse: potevano variare tra un minimo e un massimo, cosa strana se l'unica particella emessa fosse stata l'elettrone, perché in tal caso allo stato finale avremmo avuto due corpi: il nucleo residuo e l'elettrone emesso, per cui se il nucleo a causa delle sue dimensioni assorbe pochissima energia questa sarebbe andata tutta all'elettrone, ma allora l'energia avrebbe dovuto avere un valore fisso. Ciò non si capiva perché i rivelatori dell'epoca misuravano solo l'emissione di elettroni. La spiegazione fu data dalla scoperta del fatto che viene emesso anche un neutrino, il quale è difficile da essere rivelato a causa della sua bassa sezione d'urto.



Dal punto di vista del nucleo, se esso ha numero di massa A e numero atomico Z , dopo il decadimento avremo un nucleo residuo con stesso numero di massa ma numero atomico aumentato o diminuito di una unità a seconda del tipo di decadimento.

Nella figura accanto possiamo vedere lo schema del decadimento nucleare di un nucleo (A, Z) ad un nucleo $(A, Z + 1)$. In questo caso si avrà l'emissione di un β^- .

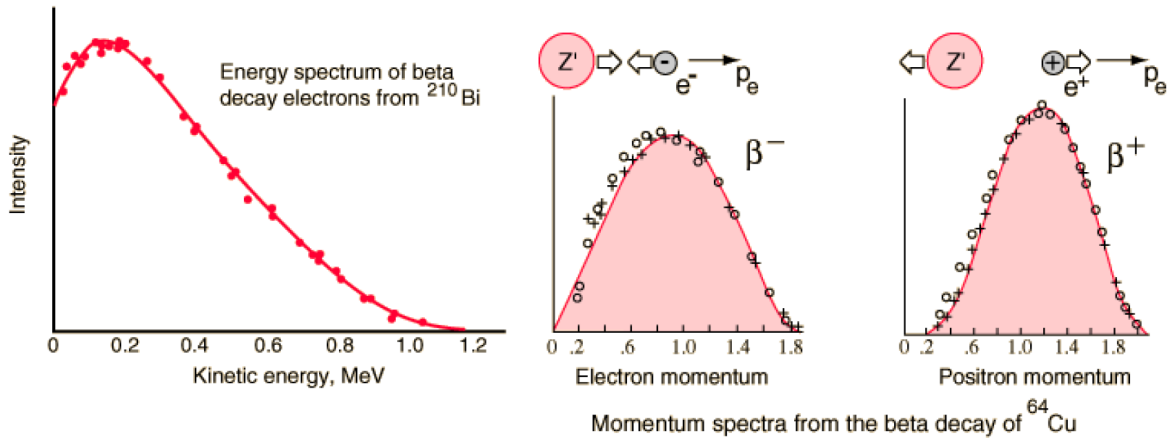
Questo decadimento avviene grazie ad un bilancio energetico che favorisce il nucleo finale.

Vediamo alcuni esempi di isotopi che decadono β :

Isotopo	Vita media	Energia massima (MeV)
^3H	12.26 y	0.0186
^{14}C	5730 y	0.156
$^{90}\text{Sr}/^{90}\text{Y}$	27.7 y/64 h	0.546/2.27
^{99}Tc	$2.12 \cdot 10^5$ y	0.292

In laboratorio adopereremo ^{90}Sr e ^{90}Y come sorgenti di raggi β .

Il decadimento β è a tre corpi (nucleo residuo, elettrone/positrone e neutrino), per cui l'energia si deve suddividere tra questi. Il nucleo residuo, essendo molto massivo, non acquisisce praticamente nulla, per cui il Q -value di questo decadimento (cioè l'energia totale emessa nel decadimento) si ripartisce tra l'elettrone e il neutrino, che sono gli elementi più leggeri; a seconda di come si suddividono l'energia, l'energia dell'elettrone varierà. In generale lo spettro delle energie ha forma come nel grafico: parte da un valore, sale fino a un massimo e poi scende, raggiungendo un massimo di energia detto *endpoint dello spettro*. Nota: il punto iniziale è il valore minimo di energia perché sulle ascisse c'è l'energia.

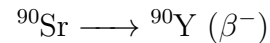
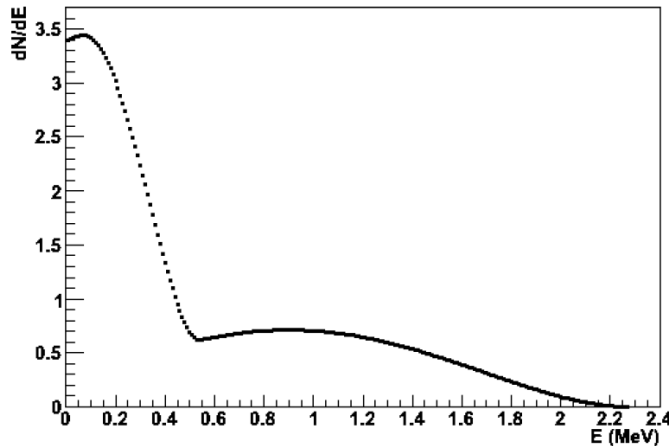


In realtà gli spettri dei decadimenti β^+ e β^- sono leggermente diversi tra di loro a causa della repulsione coulombiana presente tra il nucleo residuo e l'elettrone/positrone. Ne segue che lo spettro del β^+ è shiftato a destra, cioè sono favoriti maggiormente degli impulsi (dunque delle energie) più grandi rispetto al β^- .

Ciò che è importante ricordare è che per questi elettroni ci aspettiamo energie che variano in maniera continua tra zero e un valore massimo.

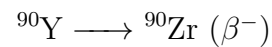
Esempio 2.1: Decadimento doppio $^{90}\text{Sr}/^{90}\text{Y}$

Osserviamo lo spettro energetico del decadimento doppio $^{90}\text{Sr}/^{90}\text{Y}$:



Vita media: 27.7 anni

$$E_{\text{max}} = 0.546 \text{ MeV}$$



Vita media: 64 ore

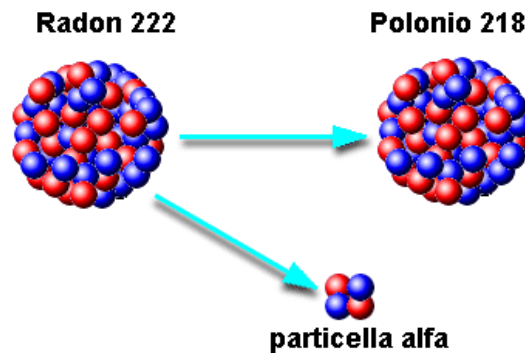
$$E_{\text{max}} = 2.27 \text{ MeV}$$

Essi sono decadimenti consecutivi, cioè lo stronzio-90 decade in ittrio-90 e quest'ultimo a sua volta decade ulteriormente.

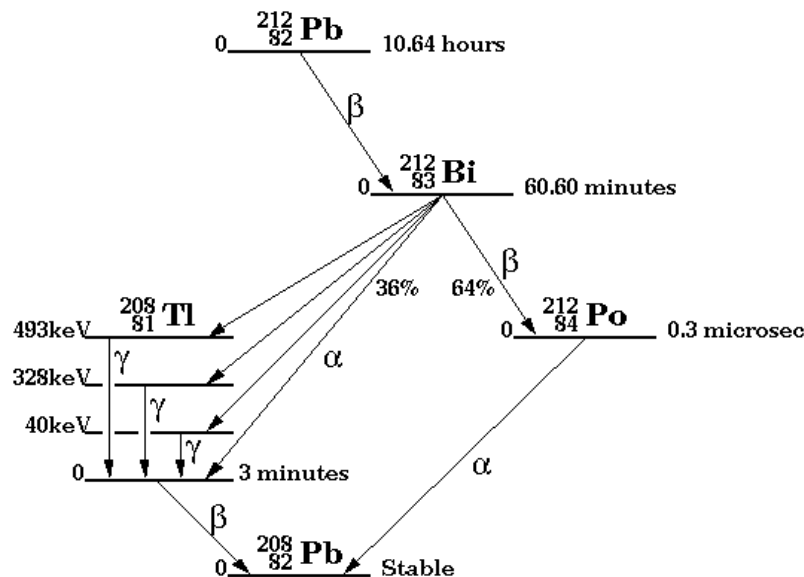
Lo spettro complessivo tiene conto di entrambi i decadimenti. In particolare la parte di basse energie corrisponde al decadimento dello stronzio, quella a più alta energia al decadimento dell'ittrio. Lo spettro finale, ricavabile dalla teoria di Fermi, è dato dalla sovrapposizione dei due spettri dovuti ai due isotopi. Si evince che abbiamo una grossa componente di elettroni a bassa energia ma anche una componente a più alta energia, fino ad un endpoint di circa 2.3 MeV.

Andando a studiare i meccanismi di interazione degli elettroni con la materia, cioè come gli elettroni perdono energia, è possibile stimare lo spessore di materia necessario per fermare tutti gli elettroni emessi da questo tipo di sorgente.

2.6 Isotopi radioattivi α



Il decadimento α corrisponde all'emissione di una particella α , che non è altro che un nucleo di elio ovvero costituito due protoni e due neutroni. Esso avviene nei nuclei pesanti. Osserviamo adesso uno schema di decadimento:

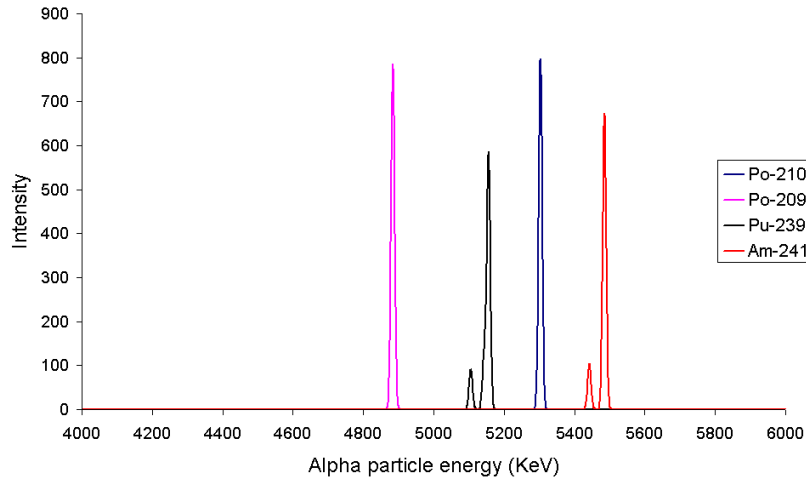


In esso ogni livello rappresenta un livello nucleare di un isotopo a una data energia. Si nota che si possono avere diversi decadimenti α verso lo stesso isotopo figlio, quello che cambia sono i livelli di energia di questo, per cui si può avere un decadimento verso un livello eccitato dell'isotopo figlio. Ognuno dei possibili decadimenti ha una sua probabilità di avvenire, detta *branching ratio* (rapporto di ramificazione), quindi ci saranno decadimenti verso alcuni livelli più probabili rispetto a quelli verso altri livelli. Se il decadimento α avviene verso un livello eccitato, esso sarà inevitabilmente seguito da un decadimento γ , perché il nucleo, che si trova in uno stato eccitato, tenderà a portarsi nello stato fondamentale attraverso un decadimento γ . Va quindi ricordato che le particelle α emesse da un isotopo potrebbero avere energie diverse perché il decadimento può avvenire verso diversi livelli eccitati dell'isotopo figlio.

Cosa ci aspettiamo in questo caso per lo spettro?

Essendo il decadimento α a due corpi (nucleo residuo e particella α), tutta l'energia disponibile viene acquistata dalla particella α sotto forma di energia cinetica, in quanto

è più leggera rispetto al nucleo residuo. Ci aspettiamo quindi che la particella α abbia sempre la stessa energia, ecco perché si parla di sorgenti monoenergetiche:



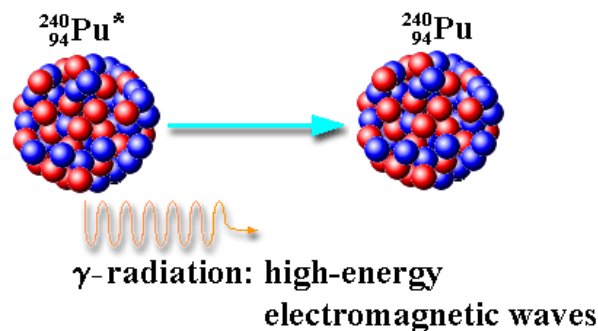
Se misuriamo tale energia e la rappresentiamo in un istogramma otteniamo lo spettro energetico, che ci aspettiamo avere idealmente la struttura di una delta di Dirac, cioè dovremmo misurare sempre la stessa energia, come si vede in figura per vari isotopi. In realtà c'è una certa larghezza nel picco, che non è dovuta alla fisica di partenza (cioè le particelle α hanno veramente la stessa energia), bensì dipende dal modo con cui vengono misurate, dunque dalla precisione dello strumento di misura. L'allargamento del picco è quindi dovuto a questioni di risoluzione del rivelatore.

Vediamo alcuni esempi di isotopi che decadono α :

Isotopo	Vita media	Alpha Energy (MeV)
^{238}U	$4.5 \cdot 10^9 \text{ y}$	4.196/4.149
^{239}Pu	$2.4 \cdot 10^4 \text{ y}$	5.105/5.143/5.155
^{241}Am	433 y	5.443/5.486

Notiamo che le energie delle particelle α , nonostante le vite medie molto differenti, sono tutte molto simili, aggirandosi intorno a pochi MeV. La prima differenza tra radiazioni α e β riguarda quindi lo spettro: le energie in gioco sono simili, ma lo spettro è molto diverso: continuo per le radiazioni β , "a righe" per le α .

2.7 Isotopi radioattivi γ

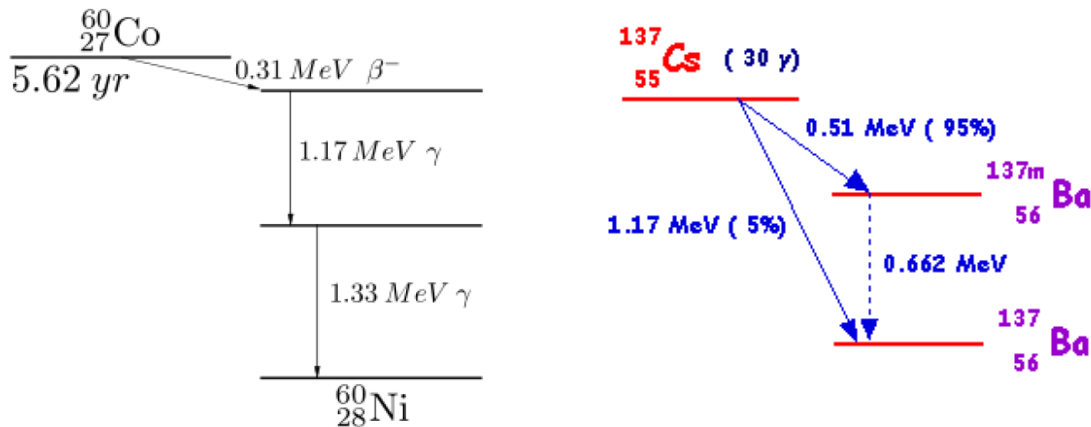


In questo caso il decadimento avviene tra uno stato eccitato e uno stato a energia più bassa dello stesso nucleo, che quindi mantiene numero atomico e di massa invariato, mentre ciò che cambia è il suo livello energetico.

Nota: per indicare che un nucleo si trova nello stesso stato eccitato si usa un asterisco (Es. $^{240}\text{Pu}^*$).

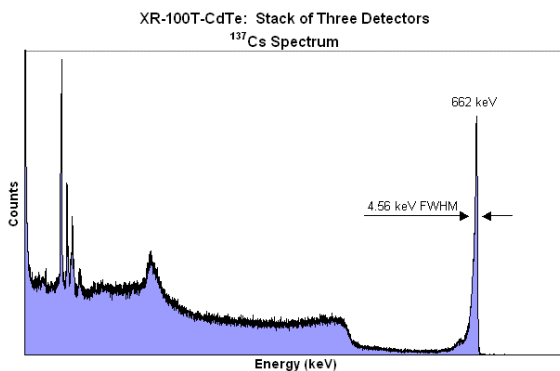
Quando il nucleo passa allo stato fondamentale (cioè allo stato più basso in energia) emette una radiazione elettromagnetica che cade nella zona energetica dei γ .

Vediamo uno schema di livelli delle sorgenti (in laboratorio adopereremo ^{60}Co e ^{137}Cs):



Notiamo come il ^{60}Co emette due γ perché può avere diversi livelli nello stato finale, mentre il ^{137}Cs emette un solo γ .

È interessante notare che il decadimento γ è sempre consequenziale ad un'altra tipologia di decadimento (queste due sorgenti ad esempio decadono β^-).



In termini di spettro energetico, anche in questo caso il gamma dovrebbe portare con sé tutta l'energia disponibile, quindi dovremmo avere uno spettro a righe. In realtà lo spettro misurato con un rivelatore ha una forma molto più complessa, per cui abbiamo un picco in corrispondenza del valore nominale di energia e poi un continuo per valori più bassi di energia (fondo continuo).

Questo continuo lo spiegheremo in seguito, in quanto il γ interagisce con il rivelatore attraverso diversi meccanismi che danno luogo a tale fondo continuo, tuttavia si osserva sempre un picco in corrispondenza dell'energia attesa.

I γ sono quindi monoenergetici, ma anche qui ci possono essere effetti di risoluzione dell'apparato sperimentale che trasformano quella che dovrebbe essere una delta di Dirac in un picco con una data larghezza (tanto più largo è il picco, peggiore è la risoluzione, e se questa è scarsa nel caso del ^{60}Co c'è il rischio che i due picchi delle due emissioni si sovrappongano).

2.8 Sorgenti di fissione

Tra i fenomeni naturali si possono verificare anche delle fissioni. Alcuni nuclei pesanti possono, in maniera spontanea, frammentarsi in due nuclei di massa intermedia. Tale processo è detto di fissione. Ad esempio, l' ^{235}U in maniera spontanea si divide in ^{141}Ba e ^{92}Kr . Oltre a questi due frammenti, si possono produrre anche dei neutroni, i quali a loro volta potrebbero innescare altri fenomeni di fissione (in questo caso si parla di fissione indotta). Tale meccanismo viene adoperato in maniera controllata dalle centrali nucleari, in quanto nel processo oltre ai frammenti di massa intermedia ed i neutroni viene prodotta anche energia; negli ordigni nucleari invece il processo di fissione indotta avviene fuori controllo.

Nella fissione i frammenti che vengono prodotti non sono mai simmetrici: ciò è dovuto a questioni di bilancio energetico nel processo di fissione.

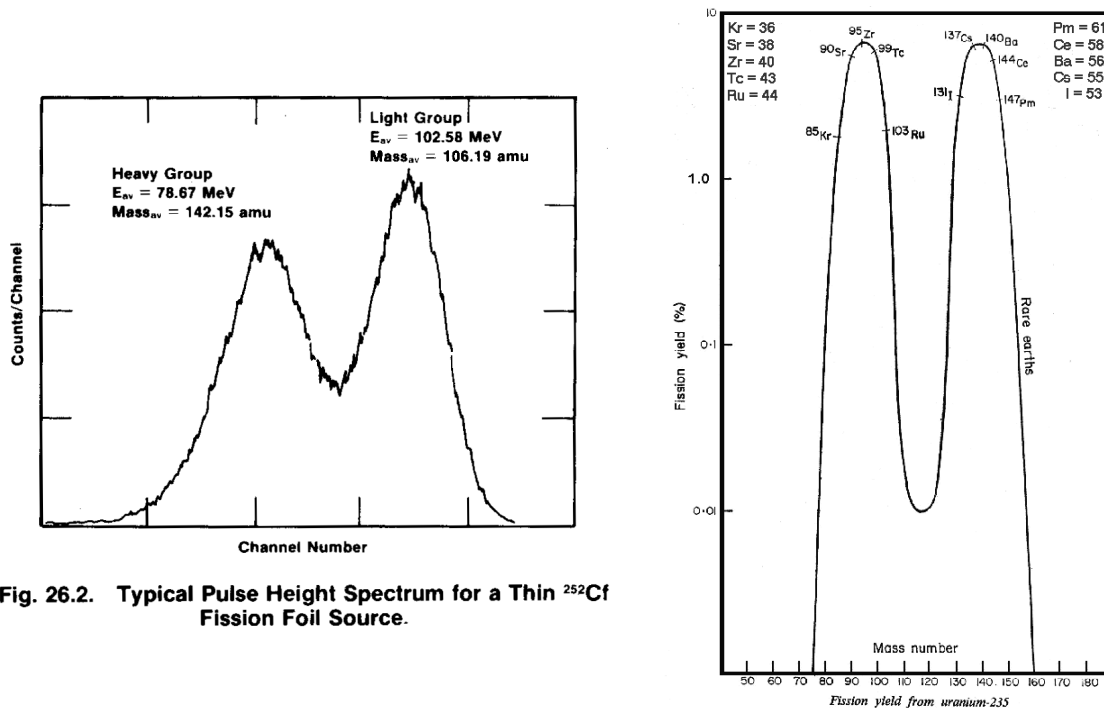


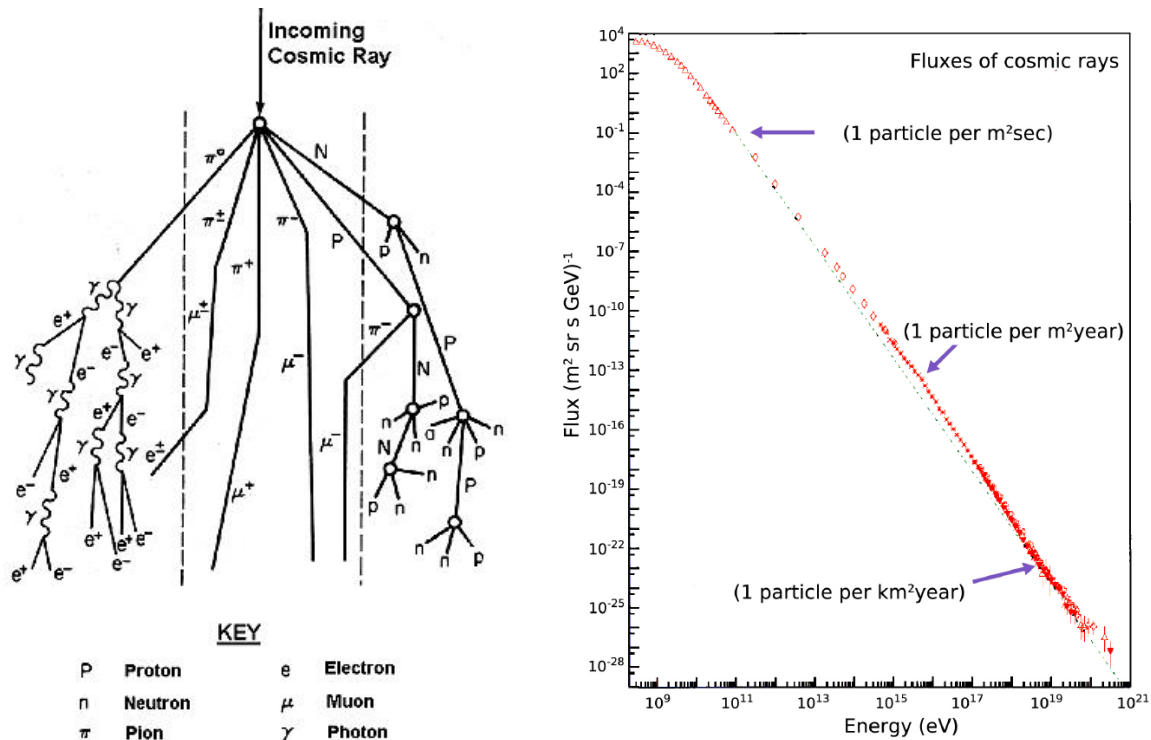
Fig. 26.2. Typical Pulse Height Spectrum for a Thin ^{252}Cf Fission Foil Source.

Nel grafico a destra possiamo vedere la distribuzione del numero di massa dei frammenti. Essa ha una forma a due picchi, che indica il fatto che i frammenti non assumono valori di massa qualsiasi, bensì preferenzialmente assumono valori che si concentrano sui picchi. Tale asimmetria ha come conseguenza che anche le energie dei frammenti non sono esattamente le stesse: il frammento più leggero prenderà più energia e viceversa quello più pesante, come possiamo vedere nel grafico a sinistra raffigurante la distribuzione delle energie dei frammenti.

2.9 Radiazione cosmica

Negli alti strati dell'atmosfera i raggi cosmici primari incidono e interagiscono con gli atomi e le molecole dell'atmosfera, dando origine ai cosmici secondari.

I cosmici primari sono costituiti da protoni (anche nuclei però, perché la composizione di tali raggi rispecchia l'abbondanza dei diversi nuclei presenti nello spazio) aventi energia elevatissima, che interagendo con l'atmosfera generano cascate di particelle il cui numero è proporzionale all'energia del cosmico primario. Alcune di queste particelle compongono la parte elettromagnetica dello sciame (gamma, elettroni, positroni), altre la parte più penetrante, ad esempio i muoni.



Lo spettro di energia dei cosmici primari (rappresentato in scala logaritmica sia in ascisse che in ordinate perché ci sono numeri che variano parecchio) ha in ascisse l'energia, che varia da 10^9 a 10^{21} eV, e in ordinata il flusso, cioè il numero di particelle che arrivano per metro quadro e nell'unità di tempo con una data energia, che varia da 10^{-28} a 10^4 . Tale grafico ci dice che ad esempio per valori di energia intorno a $10^{11}/10^{12}$ eV, avendo a disposizione di un rivelatore della superficie di 1 m^2 misureremo circa una particella al secondo, mentre per i primari più energetici (10^{20} eV) ci servirebbe un rivelatore di 1 km^2 per misurare una particella per anno. Essendo quest'ultime molto rare, di solito si studiano i cosmici secondari e si cerca di ricostruire le energie dei primari (e in questo caso si parla di *rivelazione indiretta*), mentre alle basse energie è possibile effettuare delle misure dirette portando un rivelatore al di fuori dell'atmosfera terrestre e misurando il flusso di raggi cosmici.

2.10 Unità di misura e nomenclatura

2.10.1 Attività di una sorgente

Rappresenta il numero di particelle emesse nell'unità di tempo. Si misura in

- Becquerel (Bq): $1 \text{ Bq} = 1 \text{ disintegrazione/s}$;

- Curie (Ci): $1 \text{ Ci} = 3.7 \cdot 10^{10}$ disintegrazioni/s (attività di 1 g di ^{226}Ra). Esprime una grandezza molto grande, per cui si preferisce lavorare con sottomultipli come il μCi . Si ha che $\mu\text{Ci} = 37 \cdot 10^3 \text{ Bq}$.

2.10.2 Concetto di dose

La dose rappresenta l'energia che viene depositata da una radiazione per unità di massa. Si misura in J/kg, quantità che viene chiamata Gray (Gy). 1 Gy corrisponde a 1 J/1 kg. Alternativamente si può adoperare il rad, unità di misura tale che $1 \text{ Gy} = 100 \text{ rad}$.

2.10.3 Concetto di dose equivalente

Tale concetto viene introdotto perché non è importante soltanto quanta energia viene depositata per unità di massa, ma anche il tipo di radiazione che ha depositato quell'energia, informazione che ci aiuta a capire il danno prodotto da una radiazione ad esempio nell'organismo.

La dose equivalente è pari alla dose moltiplicata per un fattore di qualità, il quale dipende dal tipo di radiazione: esso vale

- ~ 1 per gamma e beta;
- ~ 10 per protoni e neutroni veloci;
- ~ 20 per alfa.

Deduciamo che, a parità di energia depositata per unità di massa, sono più dannose le particelle alfa; a seguire i protoni e ancora dopo i gamma. È chiaro che il danno dipende anche dal tessuto colpito.

La dose equivalente si misura in Sievert (Sv) o rem.

$$1 \text{ Sv} = (\text{Fattore di qualità}) \cdot 1 \text{ Gy} \quad 1 \text{ Sv} = 100 \text{ rem} \quad 1 \text{ mSv} = 100 \text{ mrem}$$

2.10.4 Dosi tipiche

Vediamo a che livello di radiazioni siamo sottoposti quotidianamente.

Sorgenti naturali

- Radiazione cosmica: 28 mrem/anno;
- Fondo naturale (isotopi naturali): 26 mrem/anno;
- Radioattività interna al corpo¹: 26 mrem/anno;

¹Noi emettiamo β a causa del ^{14}C e del ^{40}K .

Sorgenti artificiali

- Radiografia: variabile a seconda del tipo. Ad esempio una RX al torace corrisponde a qualche mrem, una TAC a 10^3 mrem.

È chiaro che ci sono dei limiti che bisogna rispettare affinché si eviti il danno biologico. Tale limite è variabile (a seconda che sia una persona qualunque o un lavoratore esposto). In genere per la popolazione il limite è 200 – 300 mrem/anno.

Ci sono poi delle condizioni in cui siamo esposti, in maniera naturale, ad una maggiore dose di radiazioni. Ad esempio in alta montagna (a quote di 2000 – 3000 m) si è esposti ad una maggiore radiazione perché viene meno il "filtro" dell'atmosfera.

Trivia: il caso della banana

Proviamo a stimare l'attività dovuta a un certo quantitativo di banane, in maniera tale da capire se sono dannose.

In media una banana contiene 0,5 g di ^{40}K , che corrisponde a un'attività di 15 Bq = 15 disintegrazioni/secondo. A causa della loro diffusione, è stata creata la dose dovuta al mangiare una banana: 1 BED (*Banana Equivalent Dose*) $\sim 0,1 \mu\text{Sv}$. Ogni giorno siamo sottoposti a una dose di radiazione naturale di 100 BED; una radiografia corrisponde a $5 \cdot 10^4$ BED. Questi esempi ci fanno capire come una banana non sia affatto dannosa.

Capitolo 3

Perdita di energia per particelle cariche pesanti

In base al tipo di radiazione può cambiare il meccanismo di interazione con la materia. Vedremo quindi i diversi meccanismi con cui le radiazioni interagiscono con la materia, con conseguente perdita di energia. Cercheremo dunque di stimare anche la perdita di energia delle particelle nella materia, cioè di trovare espressioni quantitative che ci permettano di capire quali sono i parametri che influenzano la perdita di energia.

Tale argomento ci interessa perché lo studio dei diversi rivelatori di particelle si basa sui meccanismi di interazione, che usano per misurare le particelle.

Concentriamoci innanzitutto sulle particelle cariche pesanti, cioè dal protone in su. In realtà in questa categoria rientrano anche le particelle di massa intermedia (muoni, pioni), aventi massa minore di quella del protone ma non piccola quanto quella dell'elettrone, per cui hanno un comportamento maggiormente simile a quello delle particelle pesanti.

3.1 Principali meccanismi

Vediamo adesso quali sono i meccanismi con cui le particelle pesanti interagiscono con la materia.

3.1.1 Interazione coulombiana (inelastica) con gli elettroni atomici

È la modalità con cui le particelle perdono maggiormente energia all'interno della materia.

Cerchiamo di quantificare il numero di interazioni con gli elettroni che avvengono durante il tragitto delle particelle all'interno della materia. Vediamo allora quanta energia può essere trasferita al massimo in una singola collisione: se E è l'energia iniziale, al massimo in un urto si perde un'energia pari a

$$E_{\text{urto}}^{\text{max}} = 4E \frac{m_e}{m}$$

dove m_e è la massa dell'elettrone e m la massa della particella incidente. Ne segue che maggiore è la massa della particella, minore sarà l'energia che può essere trasferita in una singola collisione.

Facciamo un esempio: se la particella incidente è un protone, allora l'energia massima trasferita in una collisione sarà

$$E_{\text{urto}}^{\text{max}} = 4E \frac{m_e}{m_p} \sim \frac{1}{500} E$$

Ne segue che se ad ogni urto venisse ceduta la quantità massima di energia, ci vorrebbero 500 collisioni perché si perda tutta l'energia a disposizione. Nella realtà le collisioni sono di più perché abbiamo usato un valore massimo, ma nei fatti avvengono anche trasferimenti di energia minore.

Da tale relazione capiamo che una particella carica pesante, quando attraversa la materia, subisce diverse collisioni con gli elettroni atomici e in ognuna di queste perde una piccola parte della sua energia; pertanto l'energia diminuisce gradualmente, a piccoli passi, fatto che ha un effetto su quello che si misura e sul percorso che può effettuare la particella.

Il risultato del passaggio di una particella all'interno della materia è che, cedendo energia ad ogni collisione agli elettroni atomici, questi ultimi, ricevendo energia, si eccitano oppure possono addirittura, se l'energia è sufficiente, essere strappati dall'atomo, sfuggendo al legame atomico; in quest'ultimo caso può avvenire un processo di ionizzazione. Talvolta gli elettroni che vengono strappati possono produrre delle ionizzazioni secondarie, perché possiedono energie elevate. Se ciò avviene, questi elettroni prendono il nome di *raggi δ* .

Riassumendo: una particella carica pesante, attraversando un materiale, perde energia attraverso multiple collisioni con gli elettroni atomici, i quali possono eccitarsi o addirittura essere strappati dall'atomo e di conseguenza nel tragitto seguito dalla particella si vengono a creare atomi eccitati o addirittura ioni, e la velocità (quindi l'energia) della particella gradualmente diminuirà fino a che questa non si arresta del tutto.

3.1.2 Interazione (elastica) con i nuclei

Può anche avvenire un'interazione elastica con i nuclei che compongono il materiale. Questo processo è meno importante, perciò l'energia persa con tale fenomeno, rispetto a quella persa per interazione coulombiana, è trascurabile. Per capirne il motivo basta pensare alla sezione d'urto, ossia alla probabilità che avvenga un evento di questo tipo: dobbiamo confrontare le dimensioni di un atomo con quelle di un nucleo, per cui c'è un fattore 10^5 tra le due sezioni d'urto.

Tale interazione diventa importante quando le dimensioni della particella incidente sono simili a quelle del nucleo che compongono il materiale (ad esempio particelle α che incidono su idrogeno), ma di solito si trascura.

Altri meccanismi

Avvengono poi altri meccanismi ancora meno rilevanti.

- Può verificarsi emissione di radiazioni di frenamento (bremsstrahlung), il quale è un meccanismo più importante per le particelle leggere, mentre per quelle pesanti è trascurabile in quanto la sezione d'urto per bremsstrahlung dipende all'inverso del quadrato della massa della particella incidente.

- Può avvenire l'emissione di luce Cherenkov, cioè emissione di luce perché la particella ha velocità superiore alla velocità della luce nel mezzo attraversato. Anche questo contributo è trascurabile rispetto all'interazione coulombiana.
- Possono avvenire processi di interazione nucleare.

3.2 Relazione di Bethe-Bloch

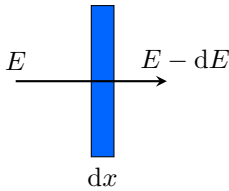
Abbiamo visto che se ci concentriamo sulle particelle cariche pesanti dobbiamo semplicemente andare a valutare quanta energia viene persa attraverso l'interazione coulombiana con gli elettroni atomici. Siamo allora interessati a calcolare l'energia persa per unità di percorso, dunque vogliamo conoscere qual è l'energia dE che perde la particella dopo aver percorso uno spazio infinitesimo dx a seguito dei meccanismi sopracitati.

In altre parole, siamo interessati a calcolare lo *Stopping Power* o *perdita di energia specifica*, che si indica con dE/dx . Essa si esprime in MeV/cm.¹

Il problema dello stopping power fu affrontato per primo da Bohr, producendo una teoria che si basava su argomenti classici. Tale teoria fu successivamente ripresa da Bethe e Bloch i quali, usando la meccanica quantistica, giunsero alla formula di Bethe-Bloch²:

$$\left\langle -\frac{dE}{dx} \right\rangle = K z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 W_{\max}}{I^2} - \beta^2 - \frac{\delta(\beta\gamma)}{2} \right]$$

Tale formula descrive la perdita di energia media per unità di percorso. Rispetto a prima aggiungiamo il termine "media" perché la perdita di energia non è sempre la stessa per questioni di fluttuazioni statistiche. Inoltre il segno meno indica il fatto che è una perdita di energia, cioè dE deve essere negativo perché l'energia sta diminuendo.



In questa formula stiamo supponendo di avere delle particelle cariche pesanti incidenti, con un'energia E , che devono attraversare uno spessore infinitesimo dx di materiale. Una volta attraversato questo spessore sarà stata persa una parte dell'energia, quindi la particella avrà energia residua $E - dE$.

La relazione di Bethe-Bloch ci dice che in media la variazione dE/dx dipende da:

- Una costante $K = 4\pi N_A r_e^2 m_e c^2 = 0.307 \text{ MeV mol}^{-1} \text{ cm}^2$;
- Il quadrato della carica della particella incidente, indicata con z^2 . Tale dipendenza ci permette di identificare la particella incidente: infatti, se ad esempio confrontiamo un protone con una particella α , a parità di energia incidente, essendo una relazione quadratica, il protone perde un quarto di energia di quella persa dall' α ;

¹Il motivo per cui si usano i centimetri anziché i metri è che le particelle cariche pesanti percorrono lunghezze piccole.

²Di questa esistono diverse formulazioni. Noi faremo riferimento a quella del Particle Data Group. <https://pdg.lbl.gov/2022/reviews/rpp2022-rev-passage-particles-matter.pdf>

- $1/\beta^2$, dove β è definito come il rapporto della velocità della particella rispetto alla velocità della luce nel vuoto ($\beta = v/c$). Da un punto di vista classico β^2 è proporzionale all'energia, in quanto

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\beta^2c^2 \implies \frac{1}{\beta^2} \propto \frac{1}{E}$$

Tale dipendenza ci dice che se la particella incidente ha bassa energia, ci aspettiamo un'alta perdita di energia, perché l'andamento è iperbolico ($1/E$);

- Il rapporto Z/A , cioè numero atomico/numero di massa del mezzo. Esso vale 0,5 per i nuclei più leggeri, ma man mano che il nucleo diventa pesante il numero di neutroni diventa maggiore di quello dei protoni, per cui Z/A risulterà minore di 0,5. Deduciamo che le particelle perdono maggiormente energia se incidono su materiali leggeri.

Le prime tre sono dipendenze dalle caratteristiche della particella incidente, l'ultima dalle proprietà del mezzo.

Passiamo adesso ad analizzare i termini tra parentesi.

Il primo termine prende il nome di *risalita relativistica*, il quale ha l'andamento di $\ln E$ (in quanto compare il termine $\beta^2 \propto E$). Figurano poi altri fattori quali

- il fattore di Lorentz γ , definito come $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$;
- W_{\max} , che rappresenta la perdita di energia massima in una singola collisione;
- il potenziale di ionizzazione medio I , ossia l'energia che in media è necessaria per la ionizzazione. Esso è un valore medio perché quando forniamo energia ad un atomo a volte produciamo ionizzazione mentre altre volte l'energia viene persa per eccitazione, quindi tale energia sarà più alta del lavoro di estrazione di un elettrone perché una parte viene persa per eccitazione degli atomi.

Abbiamo poi un termine correttivo δ , detto *correzione di densità*: esso si inserisce perché il campo elettrico della particella carica tende a polarizzare gli atomi lungo la sua traiettoria, e a causa di questo effetto di polarizzazione gli elettroni atomici più lontani con cui la particella incidente avrebbe interagito vengono schermati. Ciò fa sì che l'energia persa per collisione con questi elettroni atomici più lontani risulti essere minore di quella ottenuta senza considerare tale fattore.

Tale termine dipende dall'energia della particella: maggiore è l'energia, maggiore sarà l'incidenza di questo fattore, in quanto gli effetti di polarizzazione saranno più consistenti³.

Di solito compare anche un altro termine correttivo, detto *correzione di shell* e indicato con C , il quale interviene a basse energie. Si introduce perché, a basse energie della particella incidente, viene a mancare una ipotesi del modello di Bohr secondo cui gli elettroni atomici sono praticamente stazionari, fermi rispetto alla particella incidente: se invece questa ha energia bassa, la sua velocità è paragonabile a quella degli elettroni

³Inoltre è chiaro che tale effetto dipende anche dalla densità del materiale (da cui il nome di tale fattore), in quanto la polarizzazione indotta sarà maggiore in materiali più densi rispetto a quella in materiali rarefatti come gas.

orbitali e di conseguenza è necessario apportare una modifica correttiva alla relazione di Bethe-Bloch tramite tale fattore.

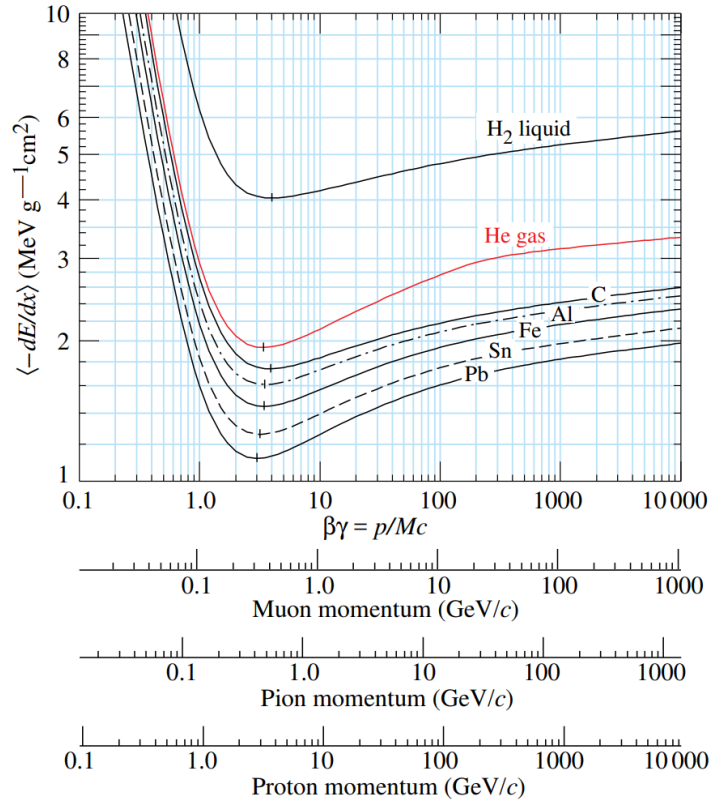
Oltre che come MeV/cm, il dE/dx può essere espresso in un altro modo: gli spessori infatti possono essere espressi anche *in unità di densità superficiale*. Ciò si fa perché, fissato lo spessore di materiale attraversato, l'effetto della radiazione cambia al variare della densità; per liberarci quindi della dipendenza dalla densità del materiale, si moltiplica lo spessore attraversato espresso in centimetri per la densità⁴: lo spessore allora si esprimerà in g/cm². In questo modo ci rendiamo indipendenti dalla densità e diventa più facile fare un confronto tra materiali.

Se esprimiamo il dx in unità di densità superficiale, il dE/dx si esprimerà in MeV cm²/g:

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} \right] = \frac{\text{MeV cm}^2}{\text{g}}$$

Con tale unità di misura si trovano valori molto simili della perdita di energia per diversi tipi di materiali. In particolare si trova che il MIP (Minimum Ionizing Particles) cioè la minore perdita energia che può avere una particella⁵, corrisponde più o meno per tutte le particelle e per tutti i materiali a 1 – 2 MeV cm²/g.

Vediamo adesso graficamente la relazione di Bethe-Bloch in funzione dell'impulso della particella incidente:



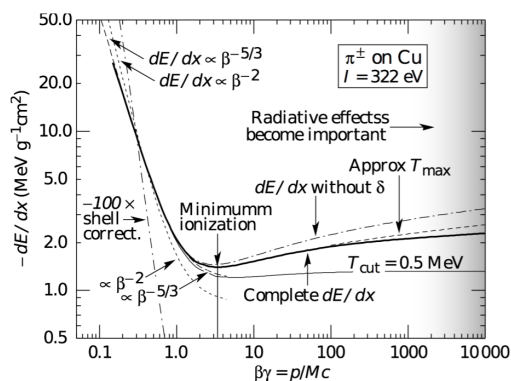
⁴Il Leo chiama questa grandezza *surface density* o *mass thickness* e la definisce come $\varepsilon = \rho \cdot t$ dove ρ è la densità e t lo spessore.

⁵Questa definizione fornita dalla professoressa è concettualmente sbagliata: le MIP sono delle particelle che si muovono ad una velocità $v \simeq 0.96 c$ in corrispondenza della quale si trova il valore minimo per la perdita di energia.

In ascisse è riportato il valore $\beta\gamma = p/Mc$ della particella incidente, ovvero l'impulso scalato rispetto alla massa, in modo da rendendoci indipendenti da quest'ultima. Ovviamente potremmo riportare semplicemente l'impulso, ma ciò significherebbe che i valori delle ascisse differirebbero in base al tipo di particella (come possiamo vedere in figura); sulle ordinate è riportata la perdita di energia in unità di densità superficiale. Per entrambi gli assi la scala è logaritmica; inoltre le varie curve sono relative a diversi materiali attraversati.

Consideriamo ad esempio un protone che incide su piombo Pb. La perdita di energia dipenderà dall'impulso del protone: per impulsi bassi la perdita di energia ha valori elevati, intorno a $10 \text{ MeV cm}^2/\text{g}$, man mano che consideriamo protoni con impulso maggiore la perdita di energia diventa sempre più bassa, fino a raggiungere un valore minimo leggermente maggiore di $1 \text{ MeV cm}^2/\text{g}$. Una volta superato il minimo abbiamo una risalita, dovuta alla risalita relativistica della formula di Bethe-Bloch. Se allora dobbiamo individuare quali sono le zone del grafico influenzate dai diversi fattori della formula, possiamo dire che

- la regione a sinistra del minimo è influenzata dall'andamento grosso modo iperbolico di $1/\beta^2$;
- la regione a destra del minimo è influenzata dalla risalita relativistica, che ha un andamento logaritmico di E .



Ricordiamo inoltre che nella regione all'estrema sinistra ad impulsi più bassi interviene il fattore correttivo di shell, mentre quella all'estrema destra ad impulsi più alti è influenzata dal fattore correttivo di densità.

In figura possiamo vedere il grafico relativo ai pioni che incidono su rame Cu. Le linee tratteggiate mostrano come sarebbe il grafico se non considerassimo i fattori correttivi.

3.2.1 Perdita di energia per composti

Consideriamo il caso in cui il materiale su cui incide la particella non è formato da un solo elemento bensì è un composto, cioè è costituito da atomi di diversi elementi. In tal caso, per calcolare la perdita di energia si fa una sorta di media pesata, data da

$$\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} = \sum_i \frac{n_i A_i}{\rho_i A} \left(\frac{dE}{dx} \right)_i$$

dove n_i , A_i , ρ_i e $(dE/dx)_i$ sono rispettivamente il numero di atomi, il peso atomico, la densità e la perdita di energia specifica della specie i -esima del composto.

Consideriamo ad esempio la molecola CH_2 : per essa abbiamo che

$$\begin{array}{ll} n_{\text{C}} = 1 & A_{\text{C}} = 12 \\ n_{\text{H}} = 1 & A_{\text{H}} = 1 \end{array}$$

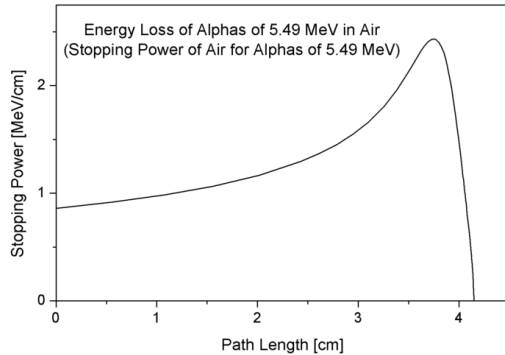
quindi la perdita di energia sarà data da

$$\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} = \frac{2 \cdot 12}{\rho_C A} \left(\frac{dE}{dx} \right)_C + \frac{1 \cdot 1}{\rho_H A} \left(\frac{dE}{dx} \right)_H$$

3.2.2 Picco di Bragg

Finora abbiamo parlato di stime medie della perdita di energia, ma abbiamo accennato al fatto che potrebbero esserci delle fluttuazioni rispetto a tale valore medio. Concentriamoci adesso su questo aspetto.

Consideriamo il seguente grafico, chiamato picco di Bragg:



In tale grafico la perdita di energia specifica è rappresentata in funzione dello spessore attraversato. In particolare il grafico mostrato è ottenuto da particelle α che attraversano l'aria, avendo un'energia di 5.49 MeV.

La perdita di energia si calcolerà tramite Bethe-Bloch, in cui i valori di β e γ si ricavano da questo valore di energia iniziale.

Man mano che la particella attraversa il materiale avvengono multiple collisioni con gli elettroni atomici e l'energia diminuisce. Di conseguenza dE/dx aumenta⁶, come osserviamo anche nel grafico, fino a raggiungere un valore massimo per poi diminuire bruscamente. Attenzione! Questa rapida discesa non è evidenziata nei precedenti grafici, in cui manca una parte ad energie ancora più basse, dove intervengono diversi fattori che fanno sì che la curva torni a zero. La parte finale del picco di Bragg è quindi dovuta al fatto che la particella si sta arrestando, avendo velocità e impulsi quasi nulli, per cui la perdita di energia va a zero⁷. Da ciò capiamo che tale grafico è una diretta conseguenza del grafico visto precedentemente.

Il picco di Bragg è alla base dell'utilizzo delle radiazioni per la cura dei tumori, perché ci dice che ad esempio un protone che attraversa un determinato spessore di materiale non rilascia la sua energia in maniera costante lungo il percorso, bensì deposita la maggior parte della sua energia in corrispondenza del picco, poco prima di arrestarsi. Ciò costituisce un vantaggio perché può essere usato per fare un rilascio mirato di energia in alcune zone del corpo. Il limite di questa tecnica sta nella profondità che si può raggiungere, perché per arrivare più in profondità serve maggiore energia e quindi acceleratori più potenti, che non sempre sono disponibili; inoltre quando si raggiungono energie

⁶Si può intuire che sia così leggendo da destra verso sinistra il grafico avente in ascisse l'impulso: man mano che la velocità diminuisce arriviamo nella regione in cui l'andamento è iperbolico, per cui la perdita di energia aumenta bruscamente. Un'altra maniera di visualizzare il fenomeno è che la particella, essendo più lenta, interagirà maggiormente con la materia.

⁷Come riportato dal Knoll, "[...] la formula di Bethe-Bloch inizia ad essere fallace ad energie basse, dove lo scambio di carica tra particella e assorbitore diventa rilevante. La particella carica positivamente tenderà a strappare elettroni dall'assorbitore, riducendo così la sua carica e di conseguenza il dE/dx . Alla fine della sua traiettoria, la particella avrà accumulato z elettroni diventando così un atomo neutro."

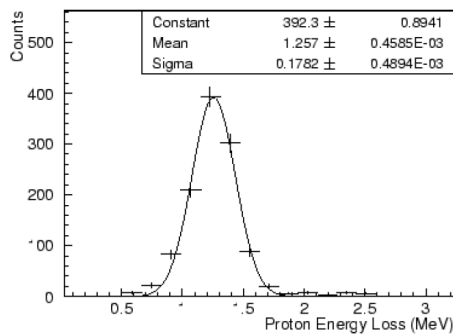
molto elevate si possono indurre altri fenomeni di origine nucleare con produzione di altre particelle con il conseguente rischio di arrecare dei danni.

3.3 Fluttuazioni statistiche nella perdita di energia

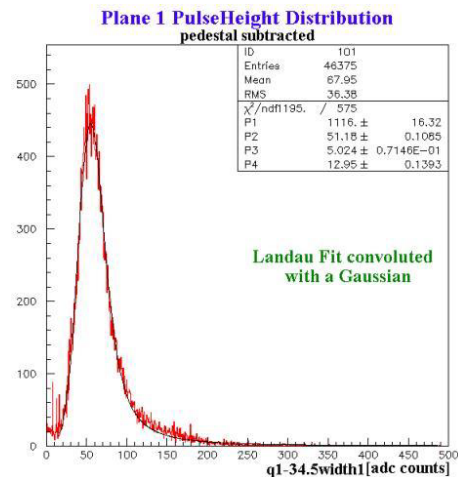
Analizziamo ora le fluttuazioni statistiche.

Se inviamo sul materiale particelle identiche (stessa massa, stessa energia e stesso angolo di incidenza quindi stessa direzione di incidenza), esse non perderanno la stessa energia, in quanto ogni particella seguirà un percorso diverso, subendo un numero di collisioni diverso e perdendo di conseguenza un'energia diversa.

Le fluttuazioni statistiche che si presentano nella perdita di energia possono avere distribuzioni diverse, in particolare due:



Se consideriamo spessori grandi, ci si aspetta che il numero di collisioni sia elevato. Ciò fa sì che la distribuzione della perdita di energia in uno spessore grande abbia un andamento abbastanza simmetrico che segue la distribuzione di Gauss;



Se invece consideriamo spessori piccoli, il numero di collisioni è minore, e la perdita di energia segue una distribuzione che può essere descritta dalla teoria di Landau-Vavilov. È una distribuzione asimmetrica che presenta un picco e poi una lunga coda a valore elevati. Essa ci dice che, quando una particella attraversa uno spessore sottile, in media perde un certo quantitativo di energia, ma ci sono dei casi in cui può perdere anche valori notevoli di energia, magari perché la particella segue altre percorsi.

Per valutare se uno spessore è grande o piccolo esiste un parametro che dipende dal valore dell'energia massima che si può perdere per singolo urto, il quale ci permette di individuare il regime in cui ci troviamo.

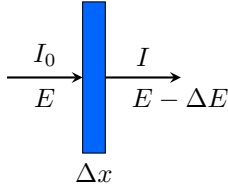
3.3.1 Range di una particella

Come abbiamo appena detto, anche se le condizioni sono uguali (stessa tipo di particella incidente, stessa energia ecc.), l'energia persa non è sempre la stessa. Ciò deriva dai processi di fluttuazioni statistiche dovuti alle diverse collisioni che una particella può subire all'interno del materiale: essendo le collisioni parecchie, ogni particella avrà un

suo percorso e dunque una sua perdita di energia. Vediamo che effetto hanno tali fluttuazioni sul range di una particella.

Per range di una particella si intende il percorso effettuato da questa all'interno di un mezzo prima di arrestarsi.

Prima di andare a fare un confronto tra cosa ci aspetteremmo idealmente e cosa realmente osserviamo, dobbiamo definire il *coefficiente di trasmissione*. Per capire cos'è quest'ultimo immaginiamo di inviare delle particelle con una data energia iniziale E su uno spessore di materiale Δx . Immaginiamo poi che il flusso di particelle incidenti (che si misura in particelle per unità di superficie al secondo) sia pari ad un valore I_0 .



Supponiamo di misurare un flusso in uscita pari I , che corrisponde a quante particelle sopravvivono all'attraversamento del materiale. In base allo spessore verrà persa una certa quantità di energia ΔE , per cui le particelle che riescono a fuoriuscire avranno energia $E - \Delta E$.

Numericamente il ΔE può essere valutato mediante la relazione

$$\Delta E = \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \Delta x$$

Tuttavia in questo mondo stiamo compiendo un'inesattezza: stiamo supponendo che il dE/dx sia costante, ma esso è funzione dell'energia, per cui come vedremo il modo corretto per valutarlo è mediante un integrale.

Sotto l'ipotesi di $dE/dx = \text{cost.}$, ci aspettiamo che all'aumentare di Δx aumenti anche ΔE . Se non ci fossero fluttuazioni statistiche, ci aspetteremo che finché Δx è piccolo le particelle perdono una certa energia ΔE ma riescono comunque a passare, per cui si avrebbe che $I = I_0$, cioè si misura un numero di particelle per unità di tempo e superficie in uscita pari a quelle in entrata; man mano che si aumenta Δx si arriverebbe ad un punto in corrispondenza del quale la perdita di energia ΔE coinciderà con l'energia totale E della particella, che quindi viene persa completamente. Pertanto, superato questo spessore, ci aspetteremmo che nessuna particella dovrebbe riuscire ad attraversare lo spessore. Allora il coefficiente di trasmissione T , definito come

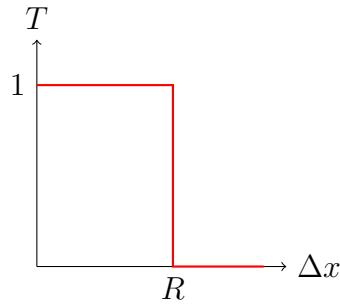
$$T = \frac{I}{I_0} \left[\frac{\text{n° particelle uscenti}}{\text{n° particelle incidenti}} \right]$$

al variare di Δx dovrebbe avere un andamento piatto pari a 1 fino ad un certo valore R , raggiunto il quale diventa nullo in quanto in tale punto la perdita di energia diventa pari proprio a E .⁸ Lo spessore R prende il nome di range della particella perché è proprio lo spessore attraversato dalla particella finché non si arresta.

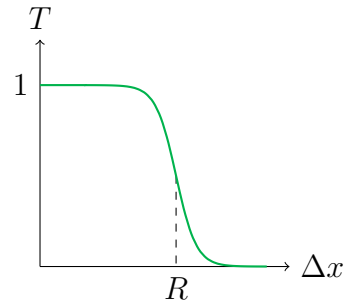
Nella realtà intervengono le fluttuazioni statistiche, che rendono il percorso di ciascuna particella peculiare. Ne segue che di volta in volta si può perdere più o meno energia e di conseguenza la particella si fermerà rispettivamente prima o dopo rispetto a R . Ciò fa sì che la curva ottenuta è una sorta di sigmoide, che parte da 1 ma poi si smussa,

⁸In altre parole, nel caso ideale in assenza di fluttuazioni statistiche (il che significherebbe che le particelle seguirebbero tutte lo stesso percorso, subendo un uguale numero di collisioni e quindi perdendo la stessa energia), ci aspettiamo un andamento a gradino.

per cui non c'è un passaggio netto dalla situazione in cui la particella passa a quella in cui non passa. Questa è la curva che osserviamo sperimentalmente⁹.



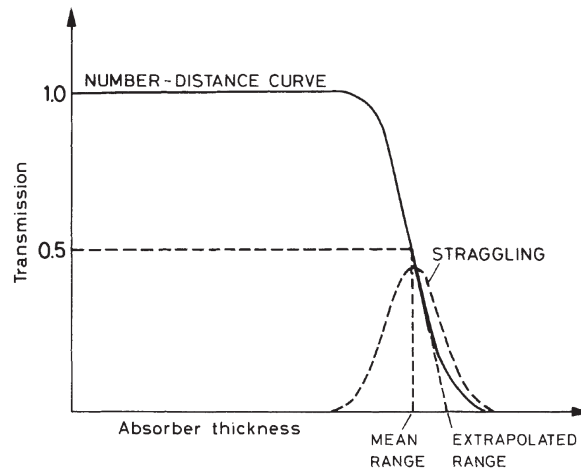
Caso ideale.



Caso reale.

Il grafico così realizzato prende il nome di *grafico di trasmissione*. Sulle ascisse riportiamo lo spessore attraversato, che può essere espresso sia in unità lineari (ad esempio cm) che in unità superficiali, mentre in ordinate il coefficiente di trasmissione. Esso si può definire per qualsiasi radiazione e può essere utile per determinare che spessore di materiale adoperare per essere schermati da un tipo di radiazione.

Analizziamo adesso in maniera più dettagliata la curva di trasmissione:



La dispersione dell'energia depositata e del range della particella prendono il nome di *effetti di straggling*, cioè di allargamento: mentre idealmente R è un valore definito, nei fatti è difficile da definire in quanto ogni particella ha un suo range, nel senso che si può fermare prima o dopo rispetto al valore nominale. È comunque possibile definire il range di una particella: dal grafico possiamo ricavare il range medio, spessore in corrispondenza del quale il fascio viene dimezzato (cioè riescono a passare solo il 50% delle particelle). In alternativa, si può ricavare il range estrapolato, definito come l'intersezione della tangente alla sigmoide nel punto del range medio con l'asse delle ascisse.

Nel grafico figura anche una gaussiana: essa rappresenta lo spessore percorso da un certo numero di particelle prima di fermarsi, che non sempre è lo stesso, per cui abbiamo una

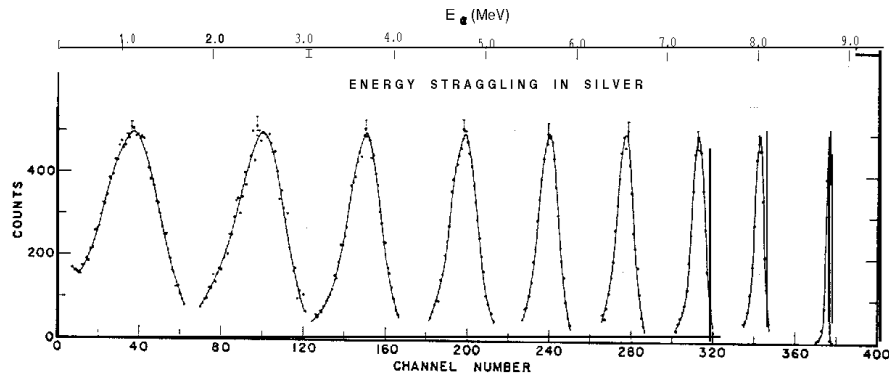
⁹Per misurare sperimentalmente il range di una particella dovremmo avere una sorgente che emette le particelle a una data energia, un rivelatore posizionato a una certa distanza e a quel punto effettuiamo delle misure interponendo spessori di un dato materiale via via crescenti, andando a misurare il numero di particelle osservate rispetto al numero di particelle senza nessuno spessore.

distribuzione di valori centrata intorno al valor medio e con una certa larghezza che dipende dalle caratteristiche della particella e del materiale.

È chiaro che maggiori sono le fluttuazioni nel range, più la sigmoide sarà smussata, se invece le fluttuazioni sono piccole la curva tenderà sempre più ad una curva a gradino. Nel caso particolare di particelle cariche pesanti la sigmoide è molto vicina ad una curva a gradino.

Oltre che per la funzione di schermaggio, il range può essere usato per valutare lo spessore che deve avere un rivelatore per arrestare totalmente una particella e quindi misurarne tutta l'energia.

Oltre che in termini di range, gli effetti di straggling si manifestano anche in termini energetici.



Nel grafico possiamo vedere degli spettri di energia ottenuti da un rivelatore che misura l'energia di particelle provenienti da una sorgente ad energia fissata E al variare dello spessore di materiale assorbitore interposto.

Senza interporre alcun materiale tra sorgente e rivelatore, quello che si dovrebbe misurare dovrebbe essere una delta di Dirac, cioè idealmente dovremmo misurare sempre lo stesso valore di energia con cui vengono emesse dalla sorgente, ed è ciò che si osserva nel picco più a destra, il quale ha una sua larghezza per motivi di risoluzione dell'apparato sperimentale. Il fatto che sia un picco molto stretto ci dice che l'energia delle particelle che stanno arrivando assume quasi sempre lo stesso valore, con delle fluttuazioni molto piccole.

Se adesso interpretiamo un materiale tra sorgente e rivelatore, le particelle incideranno su di esso, e se questo è sufficientemente sottile riusciranno ad attraversarlo perdendo una parte della loro energia, per cui giungeranno al rivelatore con un'energia degradata pari a $E - \Delta E$; ne segue che andando a misurare l'energia delle particelle adesso vedremo il picco spostato a sinistra, a valori un po' più piccoli; inoltre esso si allarga. Questo effetto di allargamento diventa sempre più evidente man mano che aumenta lo spessore, infatti i picchi che vediamo in figura andando verso sinistra sono stati ottenuti interponendo spessori via via crescenti. È chiaro che se stiamo misurando qualcosa significa che gli spessori sono inferiori al range della particella, altrimenti non misureremo nulla perché le particelle verrebbero arrestate.

Il fatto che le distribuzioni si allargano ci dice che è come se ci fosse una indeterminazione maggiore nell'energia residua della particella, che equivale a delle fluttuazioni nell'energia depositata nel materiale, che sono tanto più grandi quanto maggiore è lo spessore di materiale interposto.

In sintesi, un altro modo di mettere in evidenza gli effetti di straggling è quello di interporre materiale con spessore via via maggiore: quello che si osserva è non solo una maggiore perdita di energia, ma anche che quest'ultima ha delle fluttuazioni via via più grandi.

3.3.2 Il channeling

Per quanto riguarda la perdita di energia per collisioni, si deve fare un discorso leggermente diverso quando si parla di materiali cristallini.

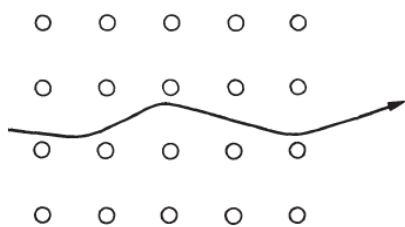


Fig. 2.6. Schematic diagram of channeling in crystalline materials. The particle suffers a series of correlated scatterings which guides it down an open channel of the lattice

In questi infatti si può verificare un altro effetto che prende il nome di channeling, cioè la particella, entrando con un opportuno angolo di incidenza, potrebbe seguire un percorso tra i piani del cristallo, quindi subirà meno collisioni di quante ne avrebbe avute con un angolo di incidenza diverso o attraversando un materiale amorfo. Nei casi di channeling la formula di Bethe-Bloch sovrastima la perdita di energia, nel senso che nei fatti si perde meno energia del valore teorico in virtù del fatto che le particelle seguono un percorso particolare.

Per verificarsi tale effetto il materiale deve essere cristallino, cioè dotato di una struttura ordinata di atomi e la particella deve entrare nel cristallo con un angolo di incidenza molto piccolo rispetto all'asse di simmetria del cristallo.

3.3.3 Come calcolare il range di una particella

Da un punto di vista teorico, il range medio di una particella che incide su un materiale con energia E_{inc} si può calcolare mediante l'integrale

$$R(E_{\text{inc}}) = \int_0^{E_{\text{inc}}} \left(\frac{dE}{dx} \right)^{-1} dE$$

il quale può essere valutato mediante integrazione numerica.

Approfondimento 3.1: C'è range... e range!

Il calcolo del range mediante la formula appena vista fornisce una stima della lunghezza del percorso effettuato dalle particelle nel materiale. Tuttavia essa ignora gli effetti dello scattering multiplo dovuto alle interazioni Coulombiane, che porta la particella a compiere un percorso a zigzag attraverso il materiale. Ne segue che il range, definito come un percorso in linea retta dentro l'assorbitore, sarà in generale più piccolo del percorso reale. Nei fatti però, per le particelle pesanti gli effetti dello scattering multiplo sono piccoli, per cui la traiettoria percorsa risulta essere molto simile ad un percorso lineare e quindi le due definizioni di range coincidono; nel caso degli elettroni ciò non sarà più vero.

3.4 Radiazione Cherenkov

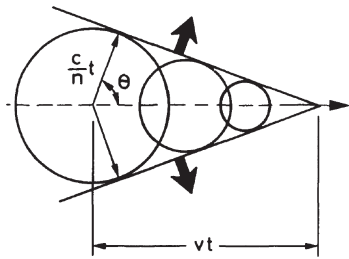
È uno dei possibili meccanismi di perdita di energia. L'emissione di tale radiazione avviene quando la velocità della particella nel mezzo supera la velocità della luce nello stesso mezzo. Quest'ultima è data da

$$\beta c = v = \frac{c}{n}$$

dove n è l'indice di rifrazione del mezzo e c la velocità della luce nel vuoto. Ne segue che la condizione affinché una particella emetta radiazione Cherenkov è

$$v_{\text{part}} > \frac{c}{n}$$

È un po' lo stesso effetto che avviene per il suono con il cosiddetto "cono di Mach", che si presenta quando si supera la velocità del suono in quel mezzo. In questo caso viene generata un'onda d'urto elettromagnetica con fronte d'onda conico.



Tale radiazione è direzionata: viene messa all'interno di un cono con una certa apertura, la quale dipende da n e dalla velocità della particella: maggiore è la velocità, minore sarà l'apertura del cono

$$\vartheta_{\text{Ch}} = \arccos \left(\frac{1}{\beta n} \right)$$

La radiazione emessa ha uno spettro continuo, nel senso che non ci sono dei valori di frequenza privilegiati; tuttavia, concentrandoci nel visibile, questo spettro è proporzionale alla frequenza, per cui si ha una maggiore emissione nel blu.

È una luce polarizzata linearmente e la perdita di energia dE/dx dovuta a questo effetto (che è già inclusa nella formula di Bethe-Bloch, sebbene trascurabile) è un contributo piccolo, che vale $10^{-3} \text{ MeV cm}^2/\text{g}$ per i solidi e $10^{-1}-10^{-2} \text{ MeV cm}^2/\text{g}$ per i gas, mentre nei grafici precedenti il minimo di ionizzazione si trova a $1-2 \text{ MeV cm}^2/\text{g}$. Tuttavia essa è da menzionare per l'uso che se ne fa in fisica. Ad esempio viene adoperata per rivelare particelle: un esempio si ha in astronomia, dove TeV di radiazioni gamma incidono sulla atmosfera, producendo coppie elettrone-positrone e queste particelle producono radiazione Cherenkov nell'atmosfera. Se abbiamo un rivelatore in grado di misurare tale radiazione (telescopio Cherenkov), possiamo andare effettuare misure dei gamma di partenza, ed essendo una luce direzionata possiamo anche ricostruire la direzione di arrivo dei gamma.

Un'applicazione simile si ha nella fisica dei neutrini, i quali interagiscono pochissimo con la materia, per cui per rivelarli sono necessari rivelatori di grandi volumi in modo da aumentare la probabilità di interazione. A causa di ciò, negli ultimi anni si è pensato che anziché usare oggetti creati dall'uomo si possono usare risorse naturali come l'acqua del mare e il ghiaccio, ponendo in essi dei rivelatori e usandoli come materiale attivo di rivelazione. L'idea è che ad esempio un neutrino attraversi km di acqua, interagisca e produca un muone, il quale produce effetto Cherenkov. Se siamo in grado di misurare tale luce, abbiamo indirettamente misurato l'arrivo di un neutrino. Ne è un esempio

il Km3net: torri di rivelatori di luce (fotomoltiplicatori) calate in mare per andare a misurare la radiazione Cherenkov con lo scopo di misurare i neutrini.

Nel campo della fisica delle particelle e della fisica nucleare esistono i rivelatori Cherenkov, i quali servono a identificare le particelle, perché attraverso la rivelazione del cono Cherenkov cioè di questa luce abbiamo informazioni sulle particelle: dalla velocità possiamo ricavare l'impulso e quindi la massa, la quale ci permette di identificare le particelle. Esistono poi i contatori Cherenkov, che permettono di misurare particelle davanti velocità al di sopra di una certa soglia.

Tale radiazione viene usata nei reattori a fissione per andare a misurare l'attività presente, in quanto nei processi di fissione si generano sempre particelle cariche che producono radiazione Cherenkov.

3.5 Possibili esercizi

Esercizio 3.1

Valutare la perdita di energia di particelle α da 5 MeV in un foglio di carta alluminio da cucina. Dati:

- Spessore fogli della carta da cucina: 0.016 mm;
- Densità alluminio: 2.7 g/cm³;
- Densità superficiale: $2.7 \cdot 0.0016 \text{ g/cm}^2 = 0.004 \text{ g/cm}^2$.

Per tale attività serve la formula di Bethe-Bloch e poi bisogna costruire un grafico dei valori di perdita di energia specifica al variare dello spessore del foglio. La perdita di energia si calcolerà come

$$\Delta E = \left(\frac{dE}{dx} \right) \Delta x$$

con dE/dx calcolato con Bethe-Bloch.

Attenzione! Questa formula è un'approssimazione: sarebbe valida se dE/dx fosse costante al variare di x . Nella realtà sappiamo che man mano che la particella penetra nel materiale perde energia e di conseguenza dE/dx cambia. Essa è comunque valida per valori piccoli di Δx .

Esercizio 3.2

Valutare la perdita di energia di muoni cosmici verticali (al minimo di ionizzazione) in

- a. una lastra di ferro di 10 cm di spessore;
- b. un solaio di cemento di 30 cm di spessore.

Stavolta non viene fornito l'impulso della particella, viene detto che incidono verticalmente sulla lastra e si trovano al minimo di ionizzazione, pertanto dobbiamo

ricavare graficamente tale valore. Un'altra difficoltà è il fatto che il cemento non è una sostanza pura, per cui dobbiamo capirne la composizione e fare una stima della perdita di energia usando la formula della perdita di energia per i composti. Da tale esperienza deduciamo che con tali spessori i muoni perdono energia ma riescono ad attraversare il materiale.

Esercizio 3.3

Valutare lo spessore necessario per degradare in energia un fascio di protoni da 600 MeV fino a portarli a 500 MeV mediante uno spessore di Rame (vedi Esempio 2.2 nel Leo).

Il potenziale di ionizzazione medio

Alcuni termini della formula di Bethe-Bloch possono essere definiti in diverso modo. Ne è un esempio il potenziale di ionizzazione medio, che abbiamo indicato con I e può essere definito come:

- Un valore proporzionale a Z ;
- Un valore costante valido per tutti gli atomi, sebbene in realtà esso vari in base al numero atomico: varia molto negli elementi leggeri, per poi stabilizzarsi per elementi pesanti. Si può allora pensare di farne un valor medio;
- Una formula per parametrizzare se siamo in regime di nuclei leggeri o pesanti;
- Un valore preso da tabelle.

Come tenere conto di uno spessore finito

Per valutare la perdita di energia in uno spessore finito inizialmente abbiamo usato l'approssimazione con cui valutavamo il dE/dx in corrispondenza dell'energia incidente iniziale e moltiplicavamo questo per lo spessore attraversato Δx . Ciò che in realtà è corretto fare è dividere il Δx in tanti piccoli spessori dx , valutare lo stopping power all'inizio di ciascun intervallino, cioè cerchiamo di capire quant'è l'energia in ingresso, calcoliamo il dE/dx e poi la perdita di energia in tale spessore. Dopodiché passiamo allo spessore successivo in cui le energie in ingresso sarà data alla differenza dell'energia di prima meno la perdita di energia dE . Si procede per passi di dx fin quando valutiamo la perdita di energia complessiva in tutto lo spessore. Con tale metodo teniamo conto del fatto che la perdita di energia assume via via un valore diverso, la quale aumenta man mano che la particella penetra nel materiale.

Capitolo 4

Perdita di energia per elettroni

Come le particelle cariche pesanti, anche gli elettroni e i positroni subiscono una perdita di energia quando attraversano la materia; tuttavia, il fatto che la loro massa sia molto più piccola (basti pensare che la massa di un elettrone è $511keV$ mentre quella del protone è di circa 1 GeV), fa sì che alcune interazioni non siano più trascurabili. In conseguenza a ciò gli elettroni all'interno della materia seguono percorsi molto più irregolari di quelli delle particelle pesanti, quindi il percorso non può più essere considerato pressoché rettilineo, bensì l'elettrone può cambiare direzione ad ogni interazione importante.

4.1 Interazione degli elettroni con la materia

Cerchiamo allora di capire quali sono i meccanismi mediante i quali gli elettroni perdono energia nella materia.

Mentre per le particelle cariche pesanti il contributo principale è dovuto alle interazioni con gli elettroni atomici e gli altri termini si possono trascurare, per gli elettroni intervengono diversi meccanismi non sempre trascurabili, pertanto la perdita di energia degli elettroni in un mezzo è complessa da calcolare (di solito si stima con programmi/codici, ad esempio GEANT).

I meccanismi attraverso cui gli elettroni perdono energia sono:

- Collisioni con elettroni atomici;
- Radiazione di frenamento (*bremsstrahlung*): una radiazione elettromagnetica della regione dei raggi X che viene emessa a seguito di un'accelerazione della particella nel campo elettrico nucleare.

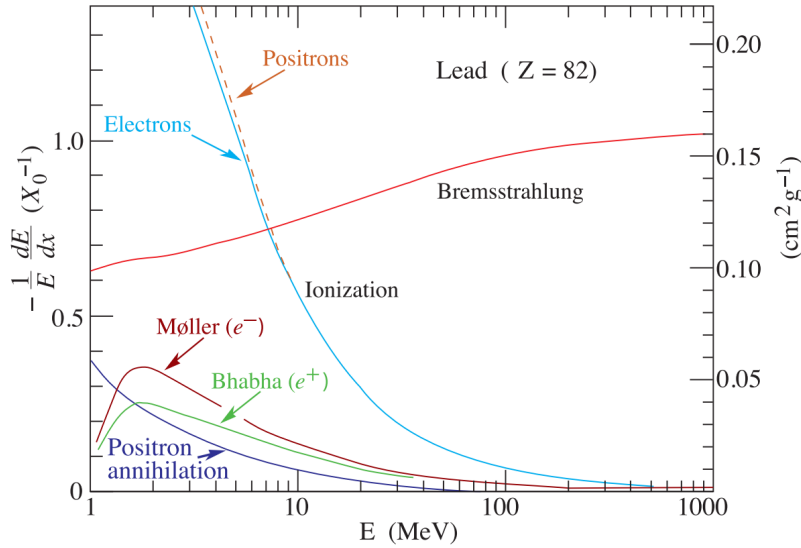
Quando dobbiamo tenere in considerazione questo ulteriore termine?

Per particelle incidenti aventi basse energie prevale il processo collisionale, similmente alle particelle cariche pesanti, mentre ad alte energie invece prevale il processo radiativo, cioè di *bremsstrahlung* (viene detto radiativo perché viene emessa radiazione), quindi l'energia viene persa attraverso l'emissione di fotoni X .

Osserviamo il seguente grafico: in esso è riportata la perdita di energia specifica in funzione dell'energia della particella, e in particolare troviamo gli andamenti di ciascun termine singolarmente: in blu è riportato l'andamento della perdita di energia per

processo collisionale (da notare che ci sono due curve: una per gli elettroni e una per i positroni, che si differenziano leggermente a bassa energia ma poi si unificano), il quale diminuisce rapidamente con l'energia stessa; in rosso è riportato l'andamento dovuto al processo radiativo, il quale va a crescere con l'energia.

La scala è logaritmica rispetto alle ascisse e lineare rispetto alle ordinate; in particolare su quest'ultime è riportata la perdita di energia specifica divisa per l'energia, la quale è espressa in unità di lunghezza di radiazione, che è una grandezza che esprime una quantità proporzionale alla perdita di energia per un dato processo:



I due andamenti si incontrano in un punto, in corrispondenza del quale andiamo a valutare la cosiddetta *energia critica* E_c , che è l'energia per la quale i due processi hanno lo stesso contributo, cioè provocano la stessa perdita di energia per unità di percorso:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{coll}} = \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{rad}} \quad \text{per } E = E_c$$

Il valore di tale energia dipende dal materiale adoperato (ad esempio nel grafico che è relativo ad elettroni che incidono su piombo si trova a circa 10 MeV).

Da quanto visto deduciamo che se vogliamo calcolare la perdita di energia di un elettrone in un dato spessore di materiale dobbiamo considerare l'energia dell'elettrone, così da capire se è più incisivo il contributo collisionale (basse energie), quello radiativo (alte energie) o se sono confrontabili (intorno al punto critico). Ci potremmo poi chiedere cosa succede quando, per alta energia, vengono emessi fotoni X , cioè a cosa danno luogo questi nel materiale, oppure ci potremmo chiedere se a bassa energia intervengono altri fenomeni. Tutto ciò rende il calcolo della perdita di energia difficile da calcolare.

Andiamo a vedere i diversi contributi. Si può innanzitutto dire che la perdita di energia specifica per unità di percorso è data dalla somma del contributo collisionale più quello radiativo:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{tot}} = \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{coll}} + \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{rad}}$$

4.1.1 Contributo collisionale

Il contributo di collisione è dato da

$$-\frac{dE}{dx}\Big|_{\text{coll}} = 2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\ln \left(\frac{\tau^2(\tau+2)}{2(I^2/m_e c^2)} + F(\tau) - \delta - 2\frac{C}{Z} \right) \right]$$

È simile alla formula di Bethe-Bloch, ma ci sono alcune differenze. Esse sono dovute al fatto che gli elettroni non percorrono un percorso rettilineo, bensì molto irregolare; inoltre le particelle che incidono sono uguali a quelle con cui vanno a collidere ovvero gli elettroni atomici, per cui c'è una sorta di indistinguibilità tra questi e gli elettroni proiettili.

Compare il termine τ , che rappresenta l'energia incidente in unità della massa dell'elettrone, dato da

$$\tau = \frac{E_{ke}}{m_e c^2} = \gamma - 1$$

Inoltre il figura il termine $F(\tau)$, che vale

$$F(\tau) = 1 - \beta^2 + \frac{\tau^2/8 - (2\tau + 1) \ln 2}{(\tau + 1)^2} \quad \text{per } e^-$$

$$F(\tau) = 2 \ln 2 - \frac{\beta^2}{12} \left[23 + \frac{14}{(\tau + 2)} + \frac{10}{(\tau + 2)^2} + \frac{4}{(\tau + 2)^3} \right] \quad \text{per } e^+$$

4.1.2 Contributo radiativo

Prima di affrontare il contributo dovuto alla radiazione, cerchiamo di capire perché non abbiamo preso in considerazione tale termine nel caso di particelle cariche pesanti. Infatti l'emissione di radiazione per bremsstrahlung riguarda un'interazione elettrica tra oggetti carichi, che sono il nucleo e la particella incidente, per cui teoricamente dovremmo considerarla anche nel caso di particelle cariche pesanti. Tuttavia, se guardiamo in dettaglio la forma della sezione d'urto per tale processo si trova la seguente proporzionalità:

$$\frac{d\sigma}{dE} \propto \frac{Z^2 \ln E}{m_i^2 E}$$

dove Z è relativo al materiale. Tale proporzionalità è dovuta al fatto che, trattandosi di un processo di interazione tra la particella e il nucleo, se quest'ultimo ha una nuvola di elettroni questa darà un effetto di schermaggio.

Ciò che è più importante però è la dipendenza dall'inverso del quadrato della massa della particella incidente, che è il motivo per cui non consideriamo tale contributo per le particelle cariche pesanti: la sezione d'urto diminuisce all'aumentare della massa.

Per quantificare facciamo un confronto tra la sezione d'urto dovuta a tale processo per elettroni e muoni, i quali hanno una massa di 207 volte quella degli elettroni. A parità di energia e se consideriamo lo stesso materiale tale rapporto si riduce al rapporto tra i quadrati delle masse, che risulta valere

$$\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2 = \frac{1}{37000}$$

Tale esempio ci mostra perché tale contributo sia normalmente trascurabile¹.

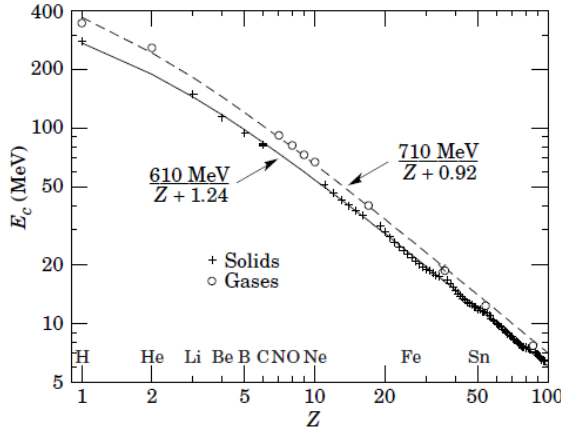
La perdita di energia specifica dovuta alla radiazione di frenamento è data da

$$-\frac{dE}{dx}\Big|_{\text{rad}} = 4Z^2 r^2 \alpha \left[\ln \left(183 Z^{-\frac{1}{3}} \right) + \frac{1}{18} - f(Z) \right] NE$$

il fatto che ci sia il termine Z^2 ci dice che la perdita di energia dipende dal materiale attraversato.

4.1.3 Energia critica

Concentriamoci ora sull'energia critica.



Siccome la sezione d'urto è complessa, non è facile avere una formula teorica per calcolare l'energia critica, per cui si fanno diverse parametrizzazioni.

Nel grafico è riportato il valore di energia critica espresso in MeV e in funzione di Z , quindi man mano passiamo da elementi più leggeri a elementi più pesanti. Ci sono due parametrizzazioni: una per i solidi e una per il gas.

In base al valore di energia critica possiamo capire se bisogna tenere conto del contributo radiativo oppure no. Ad esempio, in laboratorio, per studiare la perdita di energia degli elettroni attraverso spessori di vari materiali come ad esempio l'alluminio, adoperiamo delle sorgenti β di stronzio e ittrio poco energetiche, che hanno un endpoint dello spettro intorno a 2.3 MeV; dal grafico però si evince che l'energia critica per l'alluminio ($Z = 13$) è di circa 40 MeV, per cui la perdita di energia è imputabile totalmente al processo collisionale.

Vediamo altri esempi di curve di perdita di energia sia complessiva che dovuta singolarmente ai due processi:

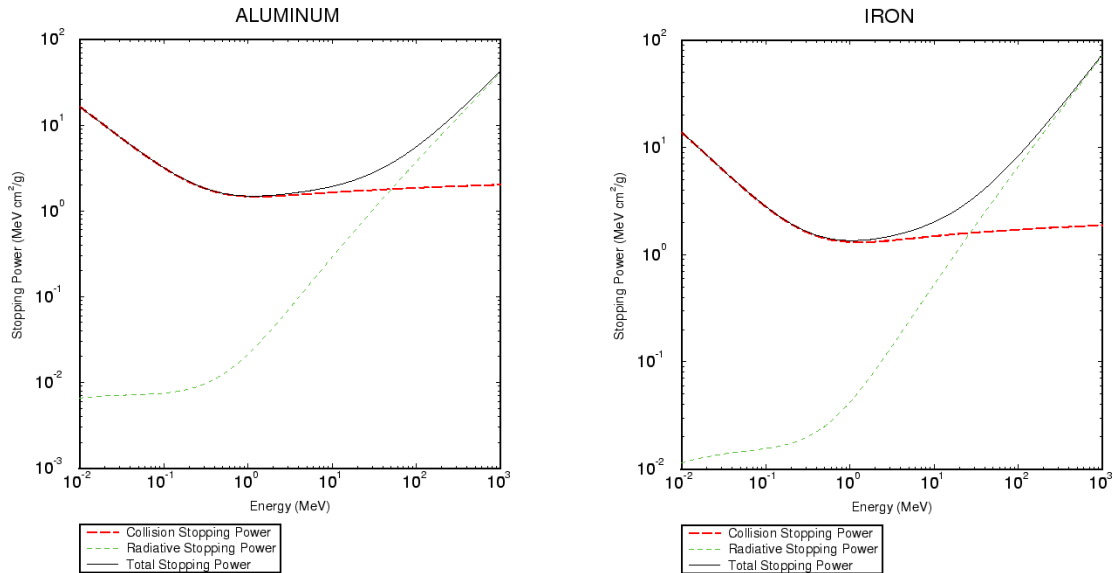
Esempio 4.1

In figura è riportata in nero la perdita di energia complessiva degli elettroni per due materiali diversi (alluminio a sinistra e ferro a destra).

Notiamo come gli elettroni inizialmente, per basse energie, hanno una perdita di energia abbastanza elevata che va diminuendo fino ad un minimo, ed il motivo di tale andamento è che in tale regione interviene principalmente il meccanismo di perdita di energia collisionale, che ha appunto un andamento discendente. Dopo il minimo si risale soprattutto a causa del termine radiativo, ed infatti fino a energie

¹Ad energie molto elevate, ad esempio nel caso di acceleratori di particelle, va considerato.

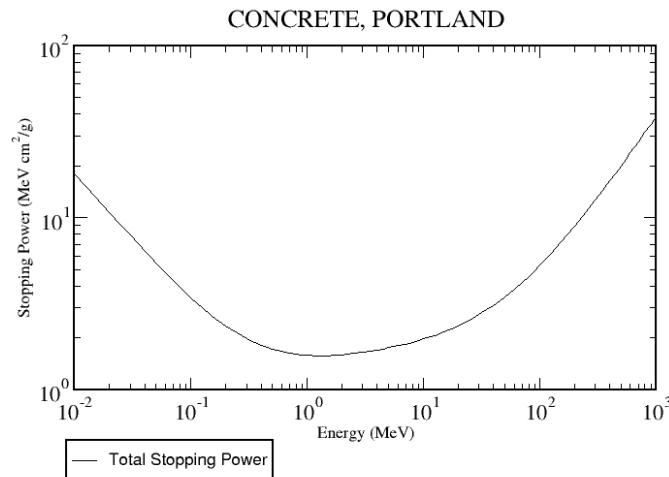
dell'ordine del MeV la curva complessiva e quella del contributo collisionale coincidono. Il contributo radiativo invece assume inizialmente dei valori molto bassi per poi diventare preponderante al di sopra della decina di MeV.



Dai due grafici evinciamo come il punto critico cambi in base al tipo di materiale.

Esempio 4.2

In figura è riportata la perdita di energia di elettroni nel caso del cemento.



Se ad esempio volessimo studiare l'effetto di schermaggio che produce un solaio di un qualsiasi edificio relativo agli elettroni della radiazione cosmica, un grafico di questo tipo permette di stimare qual è il minimo valore di energia che deve avere un elettrone cosmico per poter attraversare un determinato spessore di cemento.

4.1.4 Riepilogo

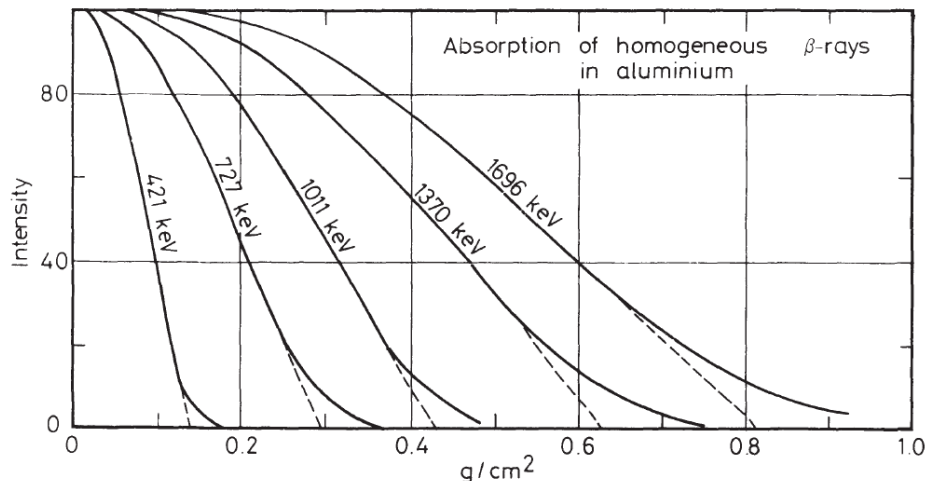
Processo collisionale	Bremsstrahlung
$\frac{dE}{dx}$ varia linearmente con Z ; ²	$\frac{dE}{dx}$ varia quadraticamente con Z ;
Domina a energie minori di quella critica;	Domina a energie maggiori di quella critica;
L'energia è ceduta al materiale assorbente (agli elettroni atomici);	L'energia è ceduta ai fotoni;
Avvengono molte collisioni, quindi la perdita di energia è graduale.	Pochi fotoni emessi.

4.2 Range degli elettroni

A causa della maggiore suscettibilità dell'elettrone allo scattering multiplo da parte dei nuclei, il range degli elettroni è generalmente molto diverso dalla lunghezza del percorso calcolata mediante integrazione della formula del dE/dx :

$$\text{range} \neq \int \left(\frac{dE}{dx} \right)^{-1} dE$$

Spesso si riscontrano differenze che vanno dal 20% al 400% a seconda dell'energia e del materiale. Inoltre, la perdita di energia da parte degli elettroni oscilla molto di più che per le particelle pesanti. Ciò è dovuto al trasferimento di energia molto maggiore per collisione consentito per gli elettroni e all'emissione di bremsstrahlung. In entrambi i casi è possibile che poche singole collisioni (o fotoni) assorbano la maggior parte dell'energia dell'elettrone. Ciò ovviamente si manifesta in effetti ancora maggiori di straggling e quindi il concetto di range diventa ancora meno definito di quanto non lo fosse per le particelle cariche pesanti.



²Tale dipendenza ci dice che la scelta del materiale è più incisiva sul contributo radiativo.

In tale grafico è rappresentato il coefficiente di trasmissione³ in funzione del percorso effettuato in un materiale espresso in unità di densità superficiale⁴. Le varie curve sono ottenute per fasci di elettroni mono-energetici ad energie diverse.

Notiamo come gli elettroni meno energetici percorrono meno spazio nella materia e la curva scende rapidamente ed è molto smussata, per cui non si può identificare un gradino come per le particelle cariche pesanti. Tuttavia anche qui possiamo ricavare il range o considerando il range medio (ovvero la distanza percorsa da almeno metà delle particelle incidenti) o il range estrapolato (l'intersezione della tangente alla curva nel punto medio con l'asse delle ascisse, in figura rappresentata dalla linea tratteggiata). All'aumentare dell'energia degli elettroni la curva si sposta verso valori più elevati, l'andamento smussato persiste ed il range diventa ancora meno definito.

In realtà in natura i raggi β non sono monocromatici, cioè non vengono emessi a precisi valori di energia, in quanto lo spettro del decadimento β è continuo. È quindi chiaro che queste curve sono state ottenute selezionando mediante campi magnetici elettroni con date energie. Infatti gli elettroni vengono deviati con un raggio di curvatura che dipende dall'energia, per cui posizionando il rivelatore ad un certo angolo di deviazione andiamo a selezionare elettroni di una certa energia. L'energia con cui possiamo sceglierli diventa sempre più precisa al restringersi dell'angolo solido, per cui spesso si usano dei collimatori, strumenti che vanno a selezionare una porzione del fascio (come un ostacolo con un foro, per cui misuriamo solo quello che passa dal foro).

Nella realtà quindi non troveremo elettroni monocromatici (mono-energetici), bensì ad energie diverse, per cui sperimentalmente, effettuando un esperimento di trasmissione, avremo a disposizione elettroni con energie molto piccole, anche prossime allo zero, e altri con energie di alcuni MeV, con una proporzione che dipende dallo spettro di emissione. Nel caso di stronzio-90 e ittrio-90 prevalgono le energie più basse, per cui ci aspettiamo una curva tendenzialmente a sinistra. Ne segue che quando effettuiamo un esperimento di trasmissione si deve fare una convoluzione, nel senso che ci saranno più curve, ciascuna per una certa energia, pesate rispetto al numero di particelle aventi tale energia.

4.3 Assorbimento degli elettroni

Poiché gli elettroni assumono valori continui di energia, quello che poi andiamo a misurare in laboratorio è un andamento più simile ad un esponenziale decrescente. I fattori che determinano tale andamento sono lo spettro continuo dei β e lo straggling (il quale rende la curva smussata).

Una rappresentazione semi-empirica dell'assorbimento degli elettroni si ha tramite la legge

$$I = I_0 e^{-\mu x}$$

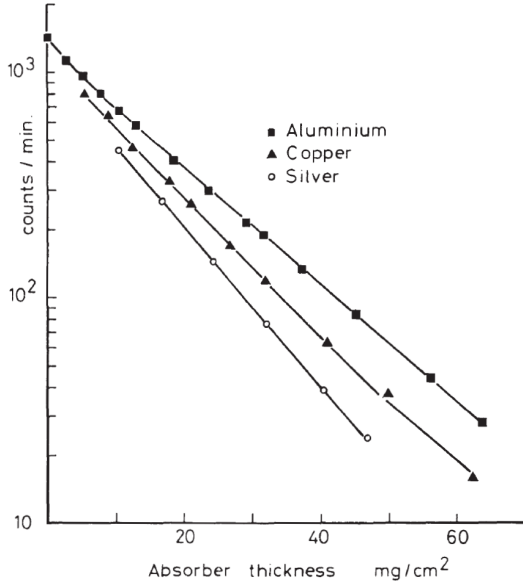
³Se guardiamo attentamente il grafico notiamo che in realtà in ordinate è riportata l'intensità del fascio, ciò però non è rilevante in quanto per ottenere il coefficiente di trasmissione basta dividere per I_0 , che è un valore costante.

⁴Il fatto che esprimiamo lo spessore in termini di densità superficiale rimuove la dipendenza dalla densità del materiale. In conseguenza a ciò, cambiando materiale il grafico cambierà di poco, mentre se esprimessimo lo spessore in unità di lunghezza si osserverebbero notevoli variazioni.

da cui segue immediatamente che il coefficiente di trasmissione avrà il seguente andamento:

$$T = \frac{I}{I_0} = e^{-\mu x}$$

dove x è lo spessore attraversato e μ è il *coefficiente di assorbimento degli elettroni*, un parametro che dipende dal tipo di materiale e che rappresenta la pendenza della curva in figura, che ha la forma di un relazione lineare perché le ordinate sono riportate in scala logaritmica.



Nel grafico è riportato il numero di elettroni che attraversano un determinato spessore di materiale (espresso in unità di densità superficiale) per diversi materiali.

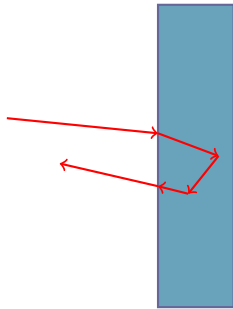
μ rappresenta quindi la capacità di assorbimento di un dato materiale: tanto più è grande, tanto più il materiale riesce ad assorbire gli elettroni. Si esprime in cm^{-1} o in cm^2/g (perché deve dare un numero puro). In particolare il termine $1/\mu$ rappresenta lo spessore necessario a ridurre il flusso iniziale di un fattore $1/e$:

$$x = \frac{1}{\mu} \implies I = I_0 e^{-\frac{\mu}{e}} = \frac{I_0}{e}$$

Lo scopo dell'esperienza è quindi trovare i vari punti e realizzare un best-fit lineare per valutare μ . I vari punti corrispondono a diversi spessori in corrispondenza dei quali calcoliamo I/I_0 . Per linearizzare la formula si fa un passaggio ai logaritmi:

$$\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = \log(e^{-\mu x}) = -\mu x$$

4.4 Backscattering



Nella materia gli elettroni, durante il loro percorso, variano di molto la loro direzione. Tale effetto è tanto più evidente quanto più bassa è l'energia dell'elettrone; nel caso di elettroni a bassissima energia si può anche verificare il fenomeno del *backscattering*, cioè scattering all'indietro: l'elettrone, a seguito delle diverse collisioni, ritorna indietro. Sperimentalmente esso rappresenta un rischio perché potremmo perdere segnale in quanto tali elettroni non vengono rivelati né depositano tutta la loro energia.

Il motivo per cui subiscono tale processo è che gli elettroni sono particelle di massa molto piccola, il che le rende particolarmente suscettibili a deflessioni di un grande angolo a seguito dello scattering coi nuclei; il perché tale fenomeno sia più evidente a basse energie è una conseguenza dei calcoli (aumenta la probabilità di avere scattering

ad angoli più grandi), ma classicamente ce lo possiamo spiegare immaginando di trovarci in una stanza in cui sono presenti tante persone e di voler passare da una parte all'altra: se passiamo lentamente (quindi bassa energia cinetica) collidiamo e abbiamo difficoltà a muoverci in maniera rettilinea, mentre se passiamo correndo (quindi alta energia cinetica) scansiamo alcune persone e riusciamo a muoverci in linea dritta.

Approfondimento 4.1: Perché il fenomeno del backscattering per gli elettroni è più evidente a basse energie?

Questa risposta me l'ha data chatgpt, ma mi sembra interessante riportarla.

Il fenomeno del backscattering per gli elettroni è più evidente a basse energie principalmente a causa delle interazioni tra gli elettroni e il materiale target, che dipendono fortemente dall'energia degli elettroni incidenti. Vediamo alcuni punti chiave che spiegano questo comportamento:

1. Interazioni elastiche e inelastiche:

- **Interazioni elastiche:** A basse energie, le interazioni elastiche tra gli elettroni incidenti e gli atomi del materiale sono più frequenti. In queste interazioni, gli elettroni possono essere deviati indietro (backscattered) con una probabilità maggiore.
- **Interazioni inelastiche:** Quando l'energia degli elettroni incidenti è alta, le interazioni inelastiche, in cui gli elettroni perdono energia attraverso l'eccitazione o la ionizzazione degli atomi del materiale, diventano più dominanti. Questo riduce la probabilità che gli elettroni vengano retro-diffusi, poiché tendono a penetrare più profondamente nel materiale e perdere energia piuttosto che essere riflessi indietro.

2. Penetrazione nel materiale:

- A basse energie, gli elettroni penetrano meno nel materiale a causa della loro minore energia cinetica. Questo significa che hanno maggiori probabilità di interagire con gli atomi superficiali del materiale e di essere riflessi indietro.
- A energie più alte, gli elettroni possono penetrare più in profondità nel materiale, riducendo la probabilità di backscattering poiché le loro traiettorie sono meno influenzate dalle interazioni con gli atomi superficiali.

3. Scattering angolare:

- A basse energie, l'angolo di scattering degli elettroni a seguito di interazioni elastiche è più grande. Questo significa che gli elettroni sono più facilmente deviati verso angoli maggiori, inclusi angoli prossimi a 180 gradi (backscattering).
- A energie più alte, l'angolo di scattering tende a essere più piccolo, e quindi gli elettroni sono meno probabilmente retro-diffusi.

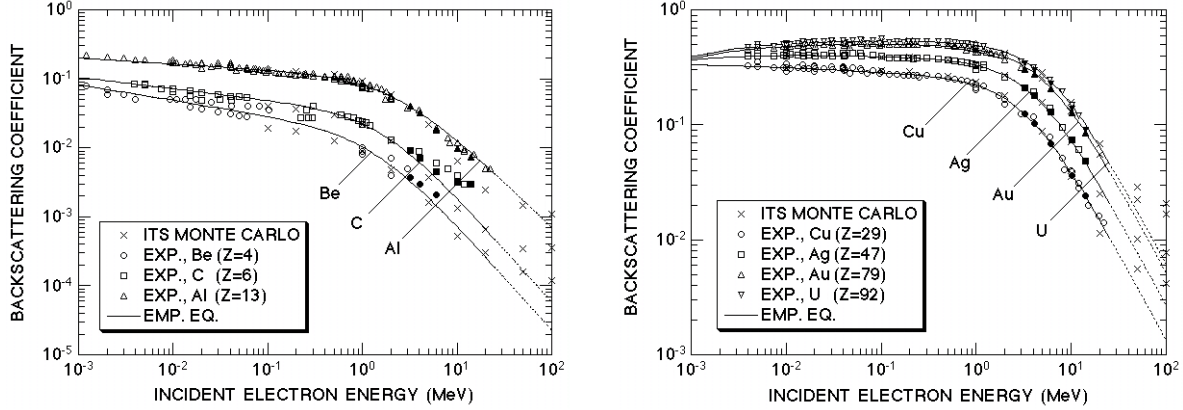
4. Effetto del potenziale nucleare:

- Gli elettroni a basse energie sono più influenzati dal potenziale coulombiano del nucleo degli atomi del materiale. Questo può causare una maggiore deflessione indietro degli elettroni incidenti.
- A energie più alte, gli elettroni hanno meno probabilità di essere significativamente deviati dal potenziale nucleare a causa della loro maggiore velocità e momento.

In sintesi, il backscattering degli elettroni è più evidente a basse energie perché le interazioni elastiche sono più frequenti e dominanti, gli elettroni penetrano meno nel materiale e sono più facilmente deviati verso angoli maggiori.

Oltre che dall'energia, il processo di backscattering dipende anche dal numero atomico Z del materiale.

Il backscattering si quantifica tramite il *coefficiente di backscattering*, che rappresenta il rapporto tra il numero di elettroni che vengono backscatterati rispetto al numero di elettroni incidenti. Talvolta viene chiamato anche *albedo*⁵. Per come è definito segue che esso può valere al massimo 1 (o 100%).



I grafici riportano i valori del coefficiente di backscattering in funzione dell'energia dell'elettrone. Come detto prima è elevato ad energie basse e diminuisce all'aumentare dell'energia in modo drastico (da notare che le scale adoperate sono logaritmiche), per cui ad alte energie è un effetto trascurabile. Il fatto che ci siano curve diverse per materiali diversi ci dice che c'è una dipendenza anche dal tipo di materiale. In particolare il backscattering è meno evidente per materiali più leggeri, per cui il coefficiente è più piccolo. Nei materiali più pesanti (grafico a destra) invece questo effetto prevale anche per energie dell'ordine del MeV e non si può trascurare.

4.5 Scattering multiplo

Il percorso seguito da una particella può essere più o meno frastagliato, cioè con più o meno deviazioni. Studiamo ora nel dettaglio i motivi per cui si devia dal percorso rettilineo.

Il maggiore contributo al processo di deflessione è dato dai processi coulombiani di scattering elastico (in misura minore anche dalla interazione nucleare). Ciò che si fa è distinguere tre casi principali:

1. Se lo spessore adoperato è particolarmente sottile siamo nel caso in cui è molto probabile che si verifichi un singolo scattering all'interno dello spessore (*single scattering*). Esso può essere affrontato con lo scattering Rutherford, in cui la sezione d'urto è funzione dell'angolo di scattering

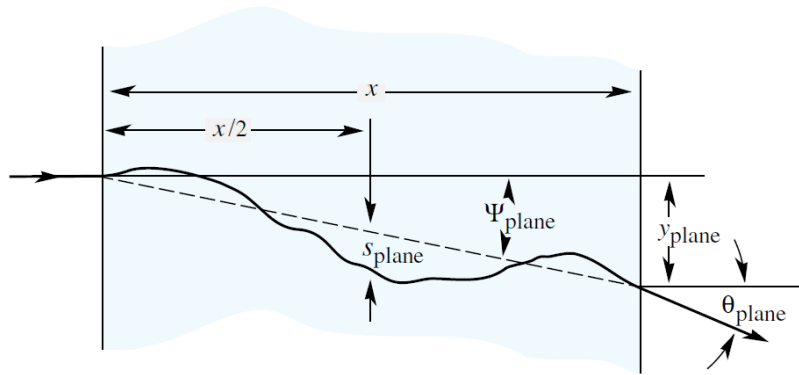
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = z_2^2 z_1^2 r_e^2 \frac{(m_e c / \beta p)^2}{4 \sin^4(\vartheta/2)}$$

⁵Termine preso in prestito dall'astrofisica e che rappresenta la luce riflessa da un corpo opaco, in quanto in questo caso abbiamo degli elettroni che incidono su una superficie e in parte vengono riflessi all'indietro.

2. Se lo spessore adoperato è considerevole il numero di scattering è elevato (*multiple scattering*), come avviene nella maggior parte dei casi reali. La particella quindi, nell'attraversare il materiale, subisce delle deflessioni dovute a diverse collisioni. Essendo il numero di queste elevato, tale processo si studia da un punto di vista statistico;
3. Il caso intermedio è quello del *plural scattering*, ed è il caso in cui il numero di collisioni è minore di 20. Poiché tale numero non è levato, il fenomeno non può essere studiato dal punto di vista statistico ed è difficile farne una trattazione.

Concentriamoci sul secondo caso. La teoria statistica che ci permette di studiare l'angolo di fuoriuscita di una particella dopo aver attraversato un dato spessore è la teoria di Molière.

Immaginiamo di avere un percorso all'interno di un materiale di lunghezza x e una particella che incide perpendicolarmente alla superficie:



Una volta che la particella entra nello spessore subisce una serie di scattering multipli che fanno deviare continuamente la particella dal suo percorso rettilineo. Se quindi andiamo a vedere la fuoriuscita dal materiale, la particella potrebbe essere spostata rispetto all'altezza in ingresso e potrebbe aver cambiato direzione incidente, formando un angolo ϑ_{plane} rispetto a quello di partenza.

L'effetto dello scattering multiplo può essere studiato attraverso questa deviazione, cioè possiamo fare delle considerazioni statistiche sull'angolo di uscita. In particolare la distribuzione dell'angolo di scattering è di tipo gaussiano per piccoli angoli, mentre per grandi angoli ha una coda a valori più alti di quelli previsti da una gaussiana. Ciò vuol dire che in media, se inviamo delle particelle su un materiale e studiamo l'angolo di deflessione in uscita, ci aspettiamo che nella maggior parte dei casi si mantenga la direzione di partenza e via via diventi sempre più improbabile che l'angolo di deflessione sia elevato.

È da notare che la figura di sopra affronta il problema nel caso planare, ma in realtà si tratta di un problema tridimensionale, cioè dovremmo studiare l'angolo tra direzione di entrata e quella di uscita nello spazio; spesso infatti la trattazione di Molière viene riportata sia in termini di angolo nello spazio che in termini di angolo nel piano (si va a considerare la proiezione su un piano).

Una prima conclusione è quindi che la deviazione media nel piano è zero⁶, ma ciò che maggiormente ci interessa è la larghezza della distribuzione, cioè di quanto varia da evento a evento l'angolo di deviazione, ossia la dispersione di questi angoli di deviazione. Se indichiamo con ϑ_0 la larghezza della distribuzione, essa può essere definita andando a valutare lo scarto quadratico medio dei vari ϑ_{plane} . Inoltre, tramite considerazioni geometriche si mostra che c'è una relazione tra lo scarto quadratico medio nel piano e quello nello spazio:

$$\vartheta_0 = \vartheta_{\text{plane}}^{\text{rms}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \vartheta_{\text{space}}^{\text{rms}}$$

Approfondimento 4.2: Ma che significa rms?

Questo approfondimento sarebbe più appropriato come nota a margine, ma vista la lunghezza ho preferito procedere così.

Nella teoria dello scattering multiplo, la sigla "rms" sta per *root mean square* (radice quadrata della media dei quadrati). Questo termine è usato per descrivere una misura statistica della dispersione o della variabilità di una serie di valori.

Nello specifico, in contesti di scattering multiplo, l'rms può essere riferito a diversi parametri, come ad esempio l'rms della deviazione angolare, il quale misura la dispersione delle angolazioni dei raggi dopo lo scattering multiplo.

L'uso del valore rms è comune perché fornisce una misura della "magnitudine media" della variabile in questione, indipendentemente dal segno. Nel caso delle fluttuazioni o delle deviazioni, questo aiuta a comprendere l'entità delle variazioni rispetto al valore medio, contribuendo a caratterizzare meglio il comportamento del sistema di scattering.

Il valore rms di un insieme di N valori x_i (dove i va da 1 a N) è dato dalla loro media quadratica:

$$\text{rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2}$$

Nel contesto dello scattering multiplo, se il valore medio μ delle deviazioni è zero, il root mean square (rms) coincide effettivamente con lo scarto quadratico medio (standard deviation, σ). Questo avviene perché lo scarto quadratico medio è definito come la radice quadrata della media dei quadrati delle deviazioni dalla media:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}$$

da cui si vede subito che se $\mu = 0$ tale espressione coincide con quella dell'rms.

Nello scattering multiplo è comune che la distribuzione delle deviazioni angolari o delle altre grandezze rilevanti (come la posizione o il cammino ottico) abbia una media nulla, specialmente se si considerano grandi quantità di eventi di scattering in cui le deviazioni in direzioni opposte si bilanciano. In tali casi, il valore rms rappresenta direttamente la dispersione delle deviazioni senza la necessità di distinguere tra rms e scarto quadratico medio.

Maggiore è l'rms, più si evidenziano effetti di scattering multiplo. L'rms dipenderà da:

- Il tipo di particelle incidente;
- L'energia o l'impulso della particella incidente;
- Le proprietà del materiale.

⁶Ciò è ovvio: se consideriamo una serie di particelle inviate tutte con la stessa direzione di incidenza, in uscita avremo tanti angoli di deviazione sia verso l'alto che verso il basso ed in media si trova un valore nullo.

Dalla teoria di Molière si ricava che, assumendo una distribuzione Gaussiana per l'angolo di scattering nel piano, la sua larghezza è data da:

$$\vartheta_0 = \frac{13.6 \text{ MeV}}{\beta c p} z \sqrt{x/X_0} [1 + 0.038 \ln(x/X_0)]$$

dove x è lo spessore di materiale attraversato (più grande è lo spessore più gli effetti di scattering sono evidenti), p l'impulso particella (più grande è l'impulso meno gli effetti di scattering sono evidenti), z il numero atomico della particella e X_0 la lunghezza di radiazione del materiale. Concentriamoci un attimo su quest'ultima grandezza

4.5.1 Lunghezza di radiazione

È un parametro caratteristico del materiale, legato all'interazione degli elettroni o dei fotoni di alta energia, ma utilizzato in diversi contesti.

La lunghezza di radiazione di un materiale si può definire come:

- la distanza media entro cui un elettrone ad alta energia riduce la sua energia ad $1/e$ del valore iniziale mediante processi di radiazione (bremsstrahlung). Da tale definizione capiamo che più il materiale assorbe l'energia dell'elettrone, più la lunghezza di radiazione è piccola;
- $7/9$ del libero cammino medio per produzione di coppie da parte di un fotone di alta energia. Ricordiamo che i fotoni interagiscono con la materia attraverso tre meccanismi principali: effetto fotoelettrico, effetto Compton e la produzione di coppie elettrone-positrone. In particolare quest'ultimo effetto avviene ad alte energie.

Tale grandezza esprime quindi quali sono le capacità di elettroni e fotoni ad alta energia di interagire con la materia. Essa è particolarmente importante per lo studio dei processi elettromagnetici in un materiale

Essa si può valutare con formule semi empiriche che dipendono da A e Z del materiale:

$$L_r = \frac{716.4 A}{Z(Z+1) \ln(287/\sqrt{Z})}$$

Essendo una lunghezza, si esprimerà in metri o, in termini di unità di densità superficiale, come g/cm^2 .

Vediamo dei valori tipici per alcuni materiali:

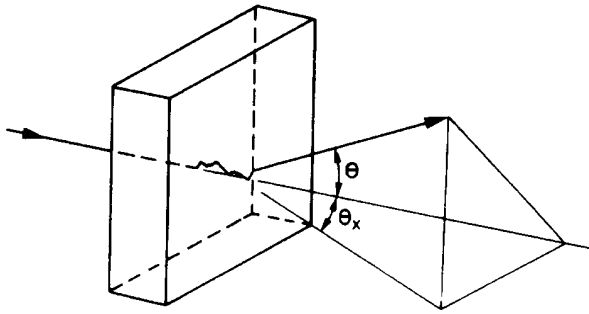
Materiale	Energia critica E_c (MeV)	Lunghezza di radiazione L_r (m)	Densità \times lunghezza di radiazione ρL_r ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$)
Aria	102	300	362
Acqua	92	0.36	361
Alluminio	51	0.089	240
Ferro	27	0.018	140
Piombo	9.5	0.0056	64

Notiamo come nel caso di materiali molto pesanti la lunghezza di radiazione è particolarmente piccola perché questi frenano parecchio sia elettroni che fotoni, quindi secondo le definizioni appena viste un fotone percorrerà pochissimo spazio prima di interagire e produrre una coppia oppure un elettrone percorrerà pochissimo spazio prima di ridurre la sua energia di un fattore $1/e$. I valori di L_r variano drasticamente quando passiamo da un mezzo solido/liquido ad uno gassoso, ad esempio nel piombo vale 5 mm mentre nell'aria vale 300 m.

Tale lunghezza di radiazione in particolare fu fondamentale quando furono scoperti i raggi cosmici: infatti ciò che si osservava era che elettroscopi carichi si scaricavano da soli entro un certo; ciò indicava il fatto che evidentemente c'era una radiazione ionizzante che ionizzava l'aria ed in conseguenza faceva scaricare l'elettroscopio nel tempo. Bisognava quindi capire l'origine di questa radiazione. Inizialmente si pensò alla radioattività ambientale, per cui si pensò di effettuare misure allontanandosi dal suolo per evitare il contributo della radiazione emessa dal suolo: per fare ciò si portò un elettroscopio sulla cima della Torre Eiffel (a 300 m)⁷. Ciò che si misurò fu di fatto una diminuzione della radiazione, ma questa non era consistente con quanto atteso dall'emissione del suolo. Si cercò quindi di capire tramite dei calcoli, conoscendo la lunghezza di radiazione dei gamma in aria (perché certamente elettroni o alpha messi dal suolo non riescono ad arrivare a 300 m di altezza), se si fosse interamente schermati. Poiché i calcoli diedero conferma di ciò, si capì che c'era un ulteriore contributo, proveniente dallo spazio, che erano i raggi cosmici. In seguito con palloni aerostatici si arrivò ad altezze superiori in cui il contributo del suolo era trascurabile e si osservò un aumento di radiazioni nella componente cosmica.

4.5.2 Distribuzione angolare di scattering

La distribuzione degli angoli in uscita può essere approssimata con una distribuzione gaussiana centrata in zero e con una larghezza ϑ_0 che dipende dalle caratteristiche del materiale.



Nello spazio la distribuzione è

$$\frac{1}{2\pi\vartheta_0^2} \exp\left(-\frac{\vartheta_{\text{space}}^2}{2\vartheta_0^2}\right) d\Omega$$

mentre nel piano

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\vartheta_0} \exp\left(-\frac{\vartheta_{\text{plane}}^2}{2\vartheta_0^2}\right) d\vartheta_{\text{plane}}$$

4.5.3 Conseguenze dello scattering multiplo

In generale lo scattering multiplo comporta una deviazione rispetto alla direzione di partenza. Da un punto di vista sperimentale, in alcuni casi è importante dover stimare tale scattering, ad esempio nel caso in cui vogliamo tracciare una particella: immaginiamo di avere una collisione tra nuclei o protoni da cui emergono tantissime particelle

⁷Non era tanto una questione di altitudine, il problema era distanziarsi dal suolo.

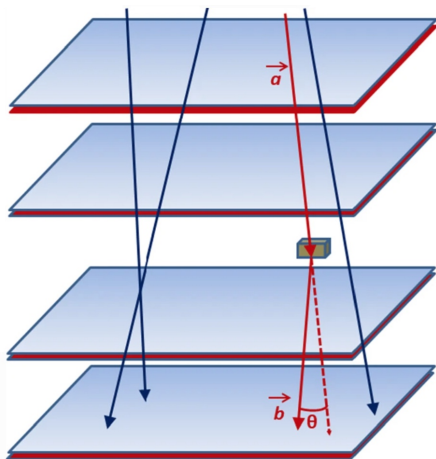
(è quello che viene negli acceleratori LHC) e vogliamo non solo capire che tipo di particelle vengono emesse, ma anche il percorso. Per fare ciò si usano dei *rivelatori di tracciamento* che vanno a individuare, attraverso dei punti, il percorso seguito da una particella. Essendo fatto di materia, ogni volta che una particella colpisce un rivelatore subisce scattering multiplo, quindi tutto ciò che misurano i rivelatori successivi risentirà dello scattering multiplo provocato dai rivelatori precedenti. Ne segue che quando si va a ricostruire la traccia di una particella (ad esempio rettilinea), non ci aspetteremo dei punti allineati, bensì dovremo considerare dei margini che tengano conto del fatto che la particella non segue un percorso rettilineo, ma nell'attraversare un materiale ha subito una leggera deviazione (scattering multiplo). Per questa ragione, dato che i rivelatori non devono fermare la particella e devono deviare la sua traiettoria il meno possibile, parte dello sviluppo di un rivelatore consiste nel cercare di ridurre il "material budget", cioè la quantità di materia che si introduce attraverso l'inserimento di un rivelatore (nel caso ideale tale budget è nullo e si parla di rivelatore trasparente).

Un altro caso in cui è importante stimarlo è per misurare la direzione di arrivo dei raggi cosmici, i quali vengono deviati attraversando l'aria.

Va ricordato che questo effetto è importante per particelle di basso impulso e per materiali ad alto Z .

4.5.4 Tomografia muonica

Talvolta lo scattering multiplo è utile per valutare le caratteristiche del materiale attraversato. Ne è un esempio la tomografia muonica, la quale consiste nello sfruttare i raggi cosmici (in particolare i muoni), per andare a realizzare una tomografia, cioè un'immagine tridimensionale, del contenuto di un container per, ad esempio, la ricerca di materiale fissile di contrabbando, che normalmente ha uno Z elevato.



Se è presente provocherà sui muoni uno scattering multiplo considerevole, mentre dove non è presente le tracce passano quasi in deflesse. Andando quindi a ricostruire le direzioni in arrivo e quelle in uscita possiamo realizzare la tomografia. Si usano degli scintillatori per realizzare dei piani di tracciamento, in modo da ricostruire il punto di passaggio dei muoni così da trovare la direzione incidente e quella uscente (saranno date dalle rette passanti dai due punti) e quindi l'angolo di scattering. Le dimensioni sono considerevoli: per un container di 3×6 m l'altezza è di 7 m.

Il limite di questa tecnica è il tempo, perché tale metodo usa solo il flusso naturale dei muoni e l'efficienza dei rivelatori non è il 100% (non sempre riesce a misurare il passaggio di una particella), per cui serve più tempo di acquisizione.

Capitolo 5

Interazione dei γ con la materia

A differenza dei casi precedenti, per i γ i meccanismi sono totalmente differenti. Ciò perché i γ , essendo fotoni, sono privi di carica, per cui interagiscono con la materia in maniera diversa.

Nello spettro delle onde elettromagnetiche i raggi γ sono le radiazioni più energetiche: corrispondono a energie che vanno da qualche centinaio di keV in su. Poiché nello spettro non c'è una vera e propria distinzione tra la zona dei γ e le altre, oltre ai valori di energia bisogna ricordarsi che i fotoni γ sono associati a processi legati al nucleo (ad esempio decadimenti γ che riguardano le transizioni tra i livelli nucleari, mentre le transizioni tra livelli atomici comportano le emissioni di radiazioni ricadenti nella zona dei raggi X). Va ricordato che quanto diciamo riguardo l'interazione dei γ è applicabile anche a quella dei raggi X .

Oltre le transizioni nucleari, altre sorgenti di raggi γ (che peraltro portano a valori di energia più elevati) sono i γ presenti nella radiazione cosmica e i γ prodotti da collisioni tra fasci di particelle accelerate mediante acceleratori.

5.1 Meccanismi di interazione dei fotoni

I γ sono delle radiazioni neutre ed i meccanismi di interazione che caratterizzano questi sono tipicamente catastrofici, nel senso che sono dei processi in cui il γ perde una frazione consistente della propria energia, modificando profondamente lo stato iniziale, a differenza delle particelle cariche sia leggere che pesanti in cui l'interazione con la materia avviene gradualmente, attraverso processi multipli di interazione.

I meccanismi attraverso cui i γ interagiscono con la materia sono essenzialmente tre:

- Effetto fotoelettrico;
- Effetto Compton;
- Produzione di coppie $e^+ - e^-$.

Questa differenza nella modalità di interazione comporta due conseguenze: una prima conseguenza è che i raggi X e γ sono radiazioni molto più penetranti rispetto alle particelle cariche; la seconda è che fasci di questi raggi non si degradano in energia quando attraversano la materia, ma solo in intensità. Quindi se un γ attraversa la materia ci sono solo due possibilità: o interagisce o non interagisce, per cui non accade, come nel

caso delle particelle cariche, che attraversando uno spessore la particella perda parte della sua energia e poi fuoriesca dal materiale, bensì in questo caso o il γ interagisce e scompare (perché cambia il suo stato e al suo posto si formano altri prodotti) oppure attraversa il materiale indisturbato; pertanto quando andiamo a studiare l'assorbimento dei γ attraverso la materia osserviamo una diminuzione dell'intensità del fascio attraversante lo spessore, ma l'energia dei γ fuoriuscenti sarà uguale a quella iniziale. Possiamo dunque dire che i fotoni che conservano il loro stato iniziale sono quelli che non hanno interagito.

A questo punto dobbiamo capire la probabilità con cui avviene ciascuno di questi processi di interazione. In generale si può dire che le sezioni d'urto d'interazione sono molto minori rispetto a quelle relative ai processi con particelle cariche. In altre parole, i fotoni interagiscono molto meno con la materia (ed è per questo che riescono ad attraversare grandi spessori di materiale, cioè hanno un potere penetrante molto più elevato) rispetto alle particelle cariche.

L'attenuazione dei fotoni incidenti in un dato materiale segue una legge di tipo esponenziale decrescente, simile a quella relativa alle particelle cariche leggere (elettroni e positroni), solo che in questo caso è una legge esatta mentre in quel caso era una legge semi-empirica derivante da vari fattori (le particelle non sono monocromatiche, si considera la convoluzione di tante curve di trasmissione ecc.).

L'intensità I del fascio dopo aver attraversato uno spessore x di materiale è data da

$$I = I_0 e^{-\mu x}$$

dove I_0 è l'intensità iniziale del fascio e μ è un coefficiente di assorbimento, che esprime la probabilità di interazione dei γ per unità di percorso. Si può immaginare come una sorta di inverso del libero cammino medio del fotone all'interno della materia e dipende dal materiale, per cui si misura in cm^{-1} oppure in cm^2/g .

Anche in questo caso è possibile realizzare una curva di trasmissione, che ha in ascisse lo spessore attraversato e in ordinate il coefficiente di trasmissione $T = I/I_0$. Quello che otterremmo in questo caso sarebbe un esponenziale decrescente.

Ne approfittiamo per ricordare i vari andamenti:

- Per particelle cariche pesanti abbiamo una curva a gradino smussato a causa degli effetti di straggling;
- Per particelle cariche leggere, se queste sono mono-energetiche la curva è a gradino ma molto smussato a causa dei percorsi molto frastagliati della particella nel materiale (straggling maggiore), se invece sono β emessi da una sorgente, quindi con uno spettro di energia continuo, la curva è approssimabile con una legge esponenziale decrescente;
- Per i γ la curva è esattamente una legge esponenziale decrescente.

Il coefficiente di assorbimento μ si può esprimere anche nella forma

$$\mu = N\sigma_{\text{tot}} = \frac{N_A \rho}{A} \sigma_{\text{tot}}$$

dove si va moltiplicare la sezione d'urto di interazione totale (con cui includiamo tutti i possibili processi di interazione, dunque rappresenta la probabilità di interazione di un

fotone con la materia indipendentemente dal tipo di processo) per la densità di atomi N . La stessa relazione può essere riscritta con il numero di Avogadro N_A , la densità ρ e l' A del materiale. Si evince che maggiore è la probabilità di interazione, maggiore sarà μ , perché significa che il γ interagisce di più con la materia e quindi viene più facilmente assorbito.

5.1.1 Sezione d'urto di interazione

La sezione d'urto totale è data dalla somma di quelle relative ai tre processi principali:

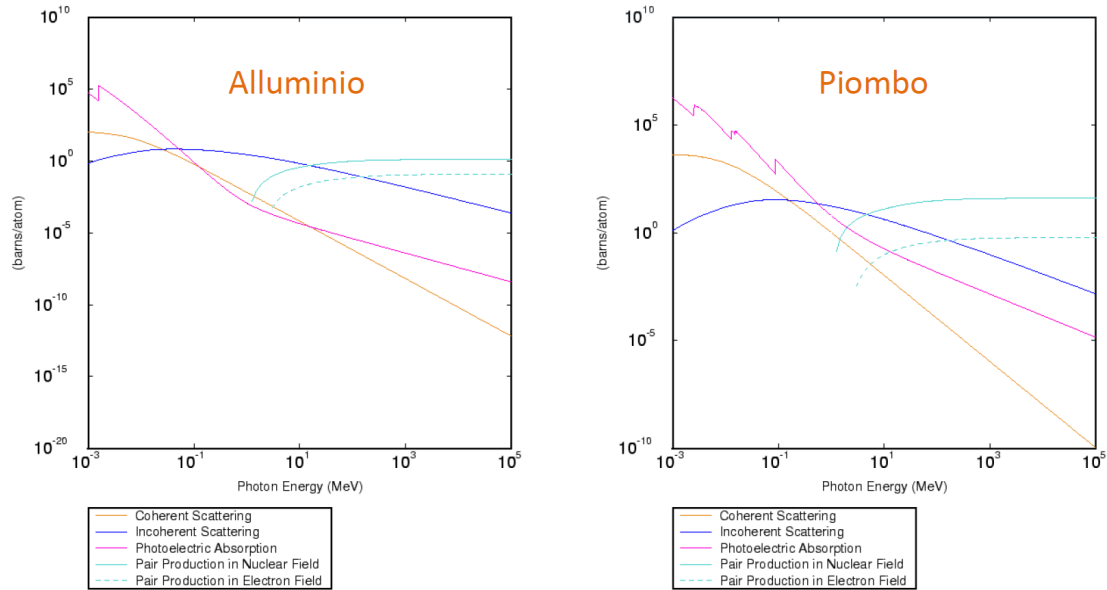
$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{phot}} + Z\sigma_{\text{Comp}} + \sigma_{\text{coppie}}$$

dove la σ_{comp} viene moltiplicata per la Z del materiale perché normalmente questa sezione d'urto viene espressa in unità di carica.

Poiché ciascuna di queste componenti è legata ad un processo diverso, esse avranno espressioni dipendenti dalle caratteristiche del materiale e dall'energia del fotone in maniere differenti.

Esempio 5.1

In figura sono riportate le sezioni d'urto dei singoli processi al variare dell'energia del fotone, la quale va da 10^{-3} MeV (= 1 keV) a 10^5 MeV (= 100 GeV).¹ La scala di entrambi gli assi è logaritmica, in modo da poter rappresentare numeri che variano in un intervallo molto ampio, in particolare per la sezione d'urto abbiamo un intervallo di 30 ordini di grandezza.



Il contributo dell'effetto fotoelettrico è dato dalla linea fucsia, la quale ci dice che la probabilità che un fotone interagisca per effetto fotoelettrico diminuisce notevolmente all'aumentare dell'energia, per cui per energie più basse domina mentre per quelle più alte (dal GeV in su) è praticamente nulla.

La linea blu rappresenta lo scattering Compton incoerente, quella arancione quello coerente. Lo scattering coerente si ha quando l'elettrone non fuoriesce dall'atomo, cioè non viene strappato da questo, quello incoerente quando l'elettrone con cui il γ interagisce fuoriesce. La curva blu sale per poi scendere, quella arancione non ha salite e diminuisce molto di più. La somma di questi due contributi dà la sezione d'urto dello scattering Compton, che dà una curva che tende leggermente a salire per poi diminuire a più elevate energie ed è una curva che prevale ad energie intermedie.

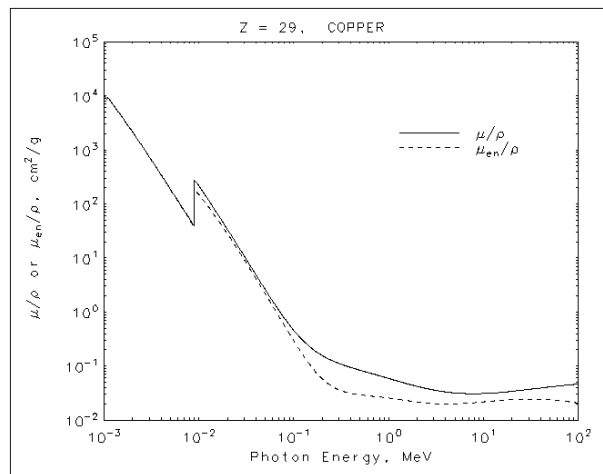
Infine le linee azzurre, una continua e una tratteggiata, sono relative al contributo della produzione di coppie. Ce ne sono due perché la produzione di coppie si verifica sempre in presenza di un terzo corpo, che può essere un nucleo o un elettrone, per cui si hanno due casi diversi (la sezione d'urto maggiore è relativa al caso del nucleo). Tale contributo è nullo al di sotto del valore di soglia di 1.022 MeV, dopodiché aumenta fino a diventare il contributo più importante per le energie più elevate.

Il grafico a sinistra è relativo all'alluminio. Se andiamo a materiali più pesanti come il piombo (grafico a destra) i valori cambiano, ma persistono le considerazioni appena fatte; ciò che invece è più evidente sono le strutture, nella sezione d'urto dell'effetto fotoelettrico, legate alle transizioni atomiche, quindi il valore di energia del fotone che sta incidendo sugli atomi di quel materiale corrisponde esattamente all'energia di una transizione atomica, per cui si vanno a vedere dei picchi.

5.1.2 Coefficiente di assorbimento

Esempio 5.2

In figura è riportato il coefficiente di assorbimento totale per il rame in funzione dell'energia. Esso è riportato in unità di densità superficiale, di modo che le curve ottenute al variare del materiale siano tra loro confrontabili.



Per come è definito σ_{tot} (ricordiamo che μ è proporzionale a quest'ultimo), esso avrà un andamento che rispecchia l'andamento della somma delle tre sezioni d'urto. All'aumentare dell'energia μ diminuisce, per cui se abbiamo dei fotoni di

¹Per valori che vanno da 10^{-3} a 10^{-2} MeV si parla di raggi X, oltre sono γ .

energia molto elevata la probabilità che essi interagiscono con la materia diventa estremamente rara.

Notiamo che nel grafico figurano due linee: la linea continua rappresenta il coefficiente di assorbimento, mentre quella tratteggiata rappresenta il "coefficiente di assorbimento massa-energia", il quale rappresenta la frazione media di particelle cariche prodotte dall'interazione dei gamma con la materia. Infatti tutti e tre i meccanismi di interazione portano alla produzione, nello stato finale, di particelle cariche, e andando a valutare quante ne vengono prodotte si può rappresentare il numero di queste in funzione dell'energia. Ciò che ci aspettiamo è che se i γ interagiscono parecchio vengono prodotte tante particelle cariche, dunque anche questo numero è particolarmente elevato; man mano che l'energia aumenta questo numero tende a diminuire perché i γ interagiscono di meno. La differenza tra le due curve sta nel fatto che intervengono tutti e tre i processi e ognuno di questi produce un numero di particelle cariche diverso, quindi dipende da qual è l'effetto dominante nella zona di energia in cui ci troviamo.

Approfondimento 5.1: Coefficiente di attenuazione e coefficiente di assorbimento

Attenzione! Questa nota è stata realizzata unendo quanto detto da chatgpt e quanto trovato in "Introduction to Health Physics" di Herman Cember e Thomas E. Johnson. Il lettore attento noterà la discrepanza con quanto affermato dalla professoressa, per cui non garantisco la correttezza delle informazioni riportate.

Approfondiamo il concetto di coefficiente di assorbimento. Diciamo innanzitutto che talvolta nei testi viene chiamato coefficiente di attenuazione, che può essere distinto tra linear attenuation coefficient (μ_l) se espresso in cm^{-1} e mass attenuation coefficient (μ_m) se diviso per la massa e dunque espresso in cm^2/g :

$$\mu_m = \frac{\mu_l}{\rho}$$

Come abbiamo già detto, esso è l'inverso del libero cammino medio. Quest'ultimo il Knoll lo chiama λ e lo definisce come

$$\lambda = \frac{\int_0^{+\infty} x e^{-\mu x} dx}{\int_0^{+\infty} e^{-\mu x} dx} = \frac{1}{\mu}$$

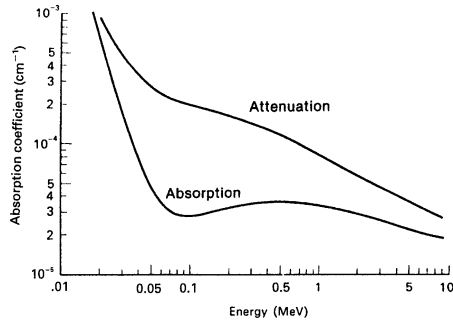
Il coefficiente di attenuazione dà la probabilità di rimozione di un fotone dal fascio ad opera di uno dei possibili meccanismi di interazione. Il coefficiente di attenuazione totale, dunque, è dato dalla somma dei coefficienti per ciascuno dei tre processi:

$$\mu = \mu_{\text{phot}} + \mu_{\text{Comp}} + \mu_{\text{coppie}}$$

Tale equazione dà la frazione di energia rimossa dal fascio per unità di spessore attraversato. La frazione di energia del fascio che viene depositata nell'assorbitore considera però soltanto l'energia trasferita al materiale dai fotoelettroni, dagli elettroni Compton e dalle coppie $e^+ - e^-$, mentre l'energia trasportata via dal fotone scatterato per effetto Compton e quella portata via dalla radiazione ottenuta per annichilazione di coppie non vengono tenute in conto. Il coefficiente di assorbimento energia, detto anche vero coefficiente di assorbimento, è dato da

$$\mu_{\text{en}} = \mu_{\text{phot}} + \mu_{\text{Comp}} + \mu_{\text{coppie}} \left(\frac{h\nu - 1.02}{h\nu} \right)$$

Ovviamente, il coefficiente di assorbimento massa energia si otterrà semplicemente dividendo questo per la densità del materiale.



In sintesi, mentre il coefficiente di assorbimento (μ) riguarda la probabilità di qualsiasi tipo di interazione del fotone gamma con la materia, il coefficiente di assorbimento massa energia (μ_{en}) si focalizza sull'energia effettivamente assorbita e trasferita alla materia, un aspetto cruciale per determinare gli effetti biologici delle radiazioni. In figura a lato possiamo vedere l'andamento dei due termini.

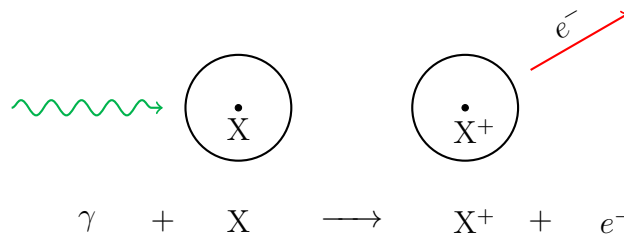
In altri termini ancora, il coefficiente di attenuazione quantifica la riduzione dell'intensità del fascio, mentre il (vero) coefficiente di assorbimento quantifica la frazione di energia assorbita dal fascio, entrambi per unità di spessore di materiale attraversato. Entrambi dipendono dall'energia del fotone e dal materiale.

Richiamiamo adesso brevemente i tre processi presi in esame.

5.1.3 Effetto fotoelettrico

Esso si verifica solo nel caso di elettroni legati, in quanto un elettrone libero non potrebbe mai assorbire un fotone e assicurare la conservazione dell'impulso, quindi è necessaria la presenza di un nucleo che assorba l'impulso di rinculo.

L'effetto fotoelettrico consiste nel fatto che un fotone (cioè un γ) venga assorbito totalmente e un elettrone venga emesso dall'atomo, per cui alla fine si ha un elettrone più uno ione:



Affinché ciò avvenga, è necessario che l'energia del fotone incidente superi un certo valore di soglia W_0 , che è il lavoro di estrazione. In altre parole, il fotone incidente di energia $h\nu$ deve avere un'energia tale da strappare l'elettrone all'atomo, il quale verrà emesso con un'energia cinetica data dalla relazione:

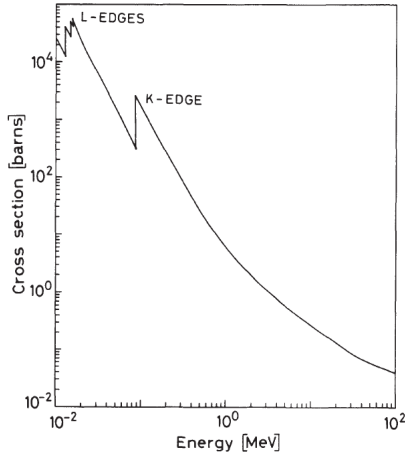
$$K_{\max} = h\nu - W_0$$

W_0 è dell'ordine di pochi eV ma dipende dal materiale.

Essendo i γ fotoni ad altissima energia siamo certamente al di sopra del lavoro di estrazione degli elettroni di un qualsiasi materiale, inoltre in questo caso possiamo dire che l'energia cinetica K_{\max} dell'elettrone espulso dall'atomo può essere approssimata all'energia del fotone incidente². Di conseguenza, nel caso delle sorgenti γ che adopereremo

²Infatti per dare un'idea delle quantità in gioco possiamo immaginare di avere un γ di energia 1 MeV che incide su un materiale avente lavoro di estrazione pari a 2 eV: il fotoelettrone emesso avrà energia pari a $(10^6 - 2)$ eV, che è praticamente una differenza irrisoria.

in laboratorio varrà questa approssimazione, cioè potremo dire che gli elettroni emessi per effetto fotoelettrico hanno energia praticamente identica a quella del γ incidente. Ribadiamo che non sempre è così: se andiamo verso radiazioni a più basse energie la differenza non è più trascurabile, seppur si riesca comunque a produrre effetto fotoelettrico (ad esempio la luce visibile può produrre effetto fotoelettrico su alcuni materiali, così come vedremo utilizzando dei led per misurare la costante di Planck).



La sezione d'urto per effetto fotoelettrico dipende dal materiale e dall'energia della radiazione γ incidente mediante una relazione del tipo

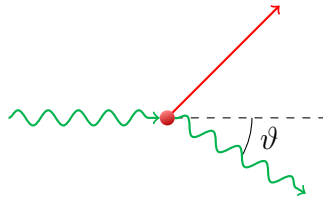
$$\sigma_{\text{phot}} \approx \frac{Z^5}{E_\gamma^{7/2}}$$

Ne segue che per agevolare l'effetto fotoelettrico conviene considerare materiali via via più pesanti, a Z maggiore, mentre la dipendenza dall'energia del γ spiega la brusca diminuzione di σ vista nei grafici.

In realtà tale dipendenza da Z è valida solo per un certo intervallo di energie. Ad esempio a basse energie viene modificata. Il motivo è che valutare la sezione d'urto di questo processo non è semplice a causa della complessità delle funzioni d'onda degli elettroni negli atomi. Questa dipendenza dunque si presenta per energie al di sopra della shell K (livello 1s), a circa 10^{-1} MeV, per valori più bassi cambia forma³. Nella figura sopra possiamo vedere l'andamento della sezione d'urto per effetto fotoelettrico nel caso del piombo. Notiamo come la parte iniziale è caratterizzata dalle transizioni atomiche. Ricordiamo che esso governa l'interazione a basse energie.

5.1.4 Effetto Compton

È un effetto di scattering di un fotone su un elettrone.



In questo caso si considera l'effetto su un elettrone libero. In realtà gli elettroni sono quelli atomici, però si può considerare un elettrone atomico come libero per il fatto che le energie di legame degli elettroni sono normalmente molto più piccole rispetto alle energie dei γ considerati, quindi è un'approssimazione lecita.

A seguito dello scattering, nello stato finale avremo un fotone diffuso, con energia $h\nu'$ inferiore rispetto all'energia $h\nu$ del fotone incidente, e un elettrone.

³Ti aspettavi un approfondimento a questo punto? Non stavolta! Servono concetti di AQM e qui siamo solo alla triennale, non bruciamo le tappe.

Indicando con ϑ l'angolo di diffusione del fotone uscente, applicando la conservazione dell'energia e dell'impulso è possibile individuare una relazione che lega l'energia del fotone diffuso con l'angolo:

$$h\nu' = \frac{h\nu}{[1 + \gamma(1 - \cos \vartheta)]} \quad \text{dove} \quad \gamma = \frac{h\nu}{m_e c^2}$$

Quindi in base al valore di ϑ , che varia da evento a evento, le energie ripartite tra l'elettrone e il fotone diffuso possono essere differenti. Per la conservazione dell'energia, l'energia cinetica dell'elettrone sarà data dalla differenza tra l'energia del fotone incidente e quello diffuso:

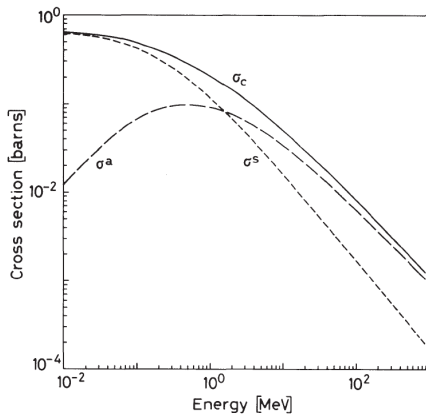
$$T_e = h\nu - h\nu'$$

Tale processo domina a energie intermedie.

Lo scattering Compton si definisce coerente quando l'elettrone, che consideriamo libero ma in realtà non lo è, rimane legato all'atomo; se invece l'elettrone acquisisce un'energia tale da poter essere strappato dall'atomo si parla di scattering incoerente. Più precisamente:

- Lo scattering coerente (anche noto come scattering di Rayleigh) si verifica quando il fotone è deviato dalla sua traiettoria originale senza perdita di energia. In questo caso, l'interazione è elastica e avviene principalmente con l'intero atomo piuttosto che con singoli elettroni. Anche se lo scattering coerente non modifica l'energia del fotone, può comunque contribuire alla diffusione della radiazione;
- Lo scattering incoerente, che si riferisce specificamente allo scattering Compton, si verifica quando il fotone cede parte della sua energia a un elettrone e viene diffuso con una lunghezza d'onda maggiore. Questa interazione è inelastica e comporta un cambiamento nella lunghezza d'onda del fotone.

La sezione d'urto Compton è data da due termini che corrispondono a quello coerente e a quello incoerente⁴. Si osserva una dipendenza lineare da Z , e una diminuzione che ad alte energie può essere parametrizzata con una dipendenza del tipo $(\ln E)/E$.



Due quantità utili che possono essere calcolate tramite la formulazione di Klein-Nishina sono le sezioni d'urto di scattering Compton e di assorbimento Compton. La sezione d'urto di scattering Compton, σ_s , è definita come la frazione media dell'energia totale contenuta nel fotone diffuso, mentre la sezione d'urto di assorbimento, σ_a , è l'energia media trasferita all'elettrone di rinculo. Poiché l'elettrone è fermato dal materiale, questa è la frazione media di energia assorbita dal materiale nello scattering Compton. Ovviamente si ha

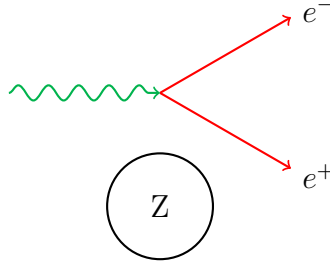
$$\sigma_{\text{Comp}} = \sigma_a + \sigma_s$$

⁴Questa affermazione è parzialmente in contrasto con quanto detto subito dopo. Non è sbagliato dire che i due contributi sono questi, ma quelli mostrati nel grafico sono altri due.

Attenzione! Rispetto ai grafici precedenti in questo sembra che tale contributo decresca più velocemente, ma ciò è dovuto semplicemente al fatto che stiamo considerando un intervallo più ristretto di energie.

5.1.5 Creazione di coppie

Con questo processo si ha una creazione di una coppia elettrone-positrone a partire da un γ . Ciò può avvenire solo in presenza di un terzo corpo per questioni di conservazione dell'impulso.

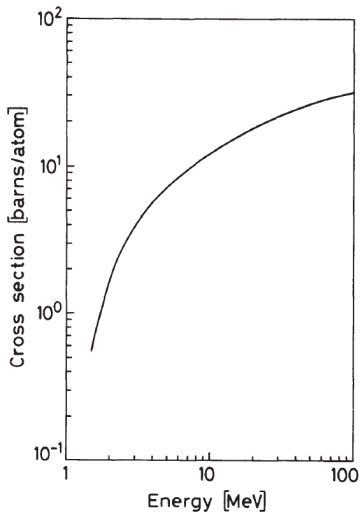


Questo terzo corpo tipicamente è il nucleo atomico, ma alcune volte tale processo può avvenire anche nel campo degli elettroni, infatti nel grafico della sezione d'urto c'erano due termini relativi alla produzione di coppie, ma quello relativo al caso dell'elettrone è trascurabile rispetto all'altro.

La coppia prodotta deve rispettare la conservazione dell'energia, per cui l'energia cinetica delle due particelle uscenti corrisponde all'energia del fotone incidente meno due volte la massa a riposo dell'elettrone:

$$T(e^+) + T(e^-) = h\nu - 2mc^2$$

Ciò ha senso, perché parte dell'energia del fotone deve essere usata per la produzione delle due masse.



Da tale relazione segue che ci sia una soglia di produzione al di sotto della quale è impossibile che si verifichi il processo di produzione di coppie. Quindi, se il fotone incidente non ha un'energia sufficiente almeno a creare questa coppia (cioè almeno $2mc^2 = 1.022$ MeV), non avviene nessun processo; se ha un'energia superiore alla soglia, quella in eccesso viene poi suddivisa tra i prodotti, cioè tra elettrone e positrone.

La sezione d'urto è proporzionale a Z^2 e cresce con l'energia, infatti è il processo che domina ad energie elevate.

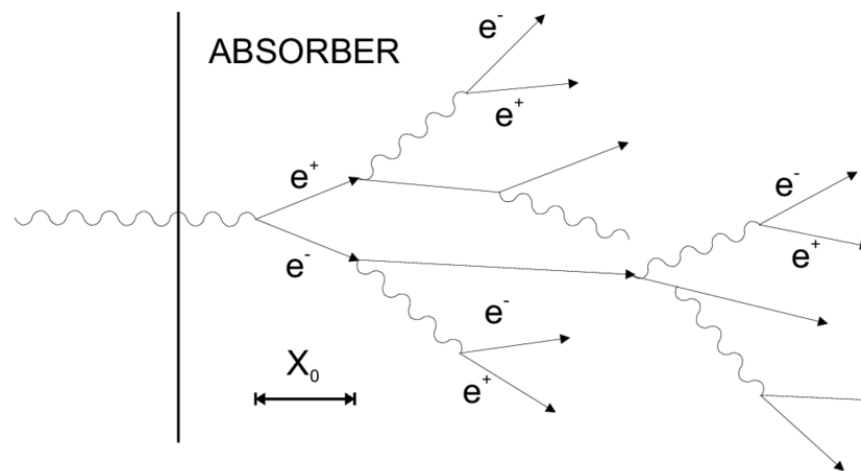
In figura possiamo vedere l'andamento della sezione d'urto per produzione di coppie in funzione dell'energia nel caso del piombo. Notiamo come essa sia nulla al di sotto del valore di soglia.

5.1.6 Sommario

- A basse energie (ordine del MeV) i fotoni interagiscono prevalentemente mediante effetto fotoelettrico, che produce un elettrone avente pressoché la stessa energia del γ ;
- Per energie tra 1 e 10 MeV prevale l'effetto Compton, che produce un elettrone ed un fotone diffuso che si dividono l'energia del fotone iniziale;
- Ad alte energie (sopra i 10 MeV) prevale il processo di produzione di coppie, che nello stato finale produce una coppia $e^+ - e^-$.

5.2 Sciami elettromagnetici

Ci chiediamo adesso come interagiscono questi prodotti secondari (elettroni, positroni, fotoni) con la materia. Infatti, se in partenza abbiamo elettroni o fotoni di energia particolarmente elevata, si innesca un meccanismo di produzione a valanga, nel senso che si produce una *cascata elettromagnetica* (o sciame e.m.), che è una sequenza di processi di bremsstrahlung e di produzione di coppie che porta alla produzione di un insieme di particelle (e^+ , e^- , fotoni) che man mano si propagano nella materia.



Immaginiamo ad esempio di avere inizialmente un fotone particolarmente energetico che incide su un materiale assorbitore. Avendo energia elevata, ad un certo punto darà luogo ad un processo di produzione di coppie $e^+ - e^-$. Ciascuna di queste sarà ad alta energia, per cui perderà una parte della propria energia attraverso bremsstrahlung, quindi la sequenza continua con un fotone di bremsstrahlung e il positrone/elettrone di partenza che a loro volta daranno luogo ad altri processi che saranno produzioni di coppie o ulteriori processi di bremsstrahlung. Da un singolo fotone incidente di alta energia si produce quindi uno sciame elettromagnetico, composto da un numero di particelle via via crescente.

Uno sciame elettromagnetico può essere indotto, oltre che da un fotone ad alta energia, anche da un elettrone o un positrone ad alta energia, solo che in questo caso il primo processo sarà di bremsstrahlung e non di produzione di copie. Essi vengono detti elettromagnetici perché sono sciami in cui vengono coinvolti solo processi elettromagnetici.

Sono composti da e^+ , e^- e γ (fotoni) e si differenziano dagli sciame adronici, che sono indotti da adroni ad alta energia (ad esempio un protone ad alta energia prodotto in una collisione nucleare) e in cui vi sono processi che coinvolgono l'interazione forte. Tuttavia tali sciame potrebbero avere al loro interno anche una componente elettromagnetica, legata alla possibile produzione di pioni neutri π^0 , i quali decadono in due γ che poi daranno luogo a processi elettromagnetici e dunque a questa componente.

Man mano che lo sciame si propaga all'interno del materiale continuano a verificarsi in successione processi di bremsstrahlung e produzione di coppie; questo meccanismo però non procede all'infinito, perché man mano le energie dei prodotti secondari diminuiscono, in quanto l'energia iniziale si suddividerà tra un numero di particelle via via crescente, fin quando l'energia degli elettroni/positroni arriverà al di sotto del valore di energia critica (energia in corrispondenza della quale la sezione d'urto per perdita di energia collisionale è uguale a quella per perdita di energia radiativa, dunque la probabilità dei due processi è la stessa). Quando gli elettroni raggiungono tale valore, non interagiscono con la materia soltanto attraverso fenomeni di bremsstrahlung ma possono subire anche fenomeni collisionali, in cui non vengono prodotte nuove particelle. Per quanto riguarda i fotoni, man mano che la loro energia diminuisce non daranno luogo a produzioni di coppie, ma cominceranno a prevalere altri effetti che non aumentano il numero di particelle, come quello fotoelettrico (che da un fotone ci dà un elettrone) e quello Compton⁵ (che dà un fotone diffuso). In conseguenza a ciò, sebbene non possiamo dire che lo sciame si arresti perché le particelle continueranno a propagarsi all'interno del materiale finché non perdono tutta la loro energia, possiamo dire che il numero di particelle dello sciame non aumenterà superato il punto critico.

Al di sotto dell'energia critica possiamo quindi immaginare che lo sciame che man mano è cresciuto (sia in dimensioni che nel numero di particelle), incomincia a degradarsi, pertanto il numero di particelle comincia a diminuire perché esse continuano a interagire, perdendo energia e venendo assorbite totalmente dal materiale.

5.2.1 Struttura di uno sciame elettromagnetico (toy model)

Proviamo ora a immaginare un modello semplificato per descrivere la struttura di uno sciame elettromagnetico.

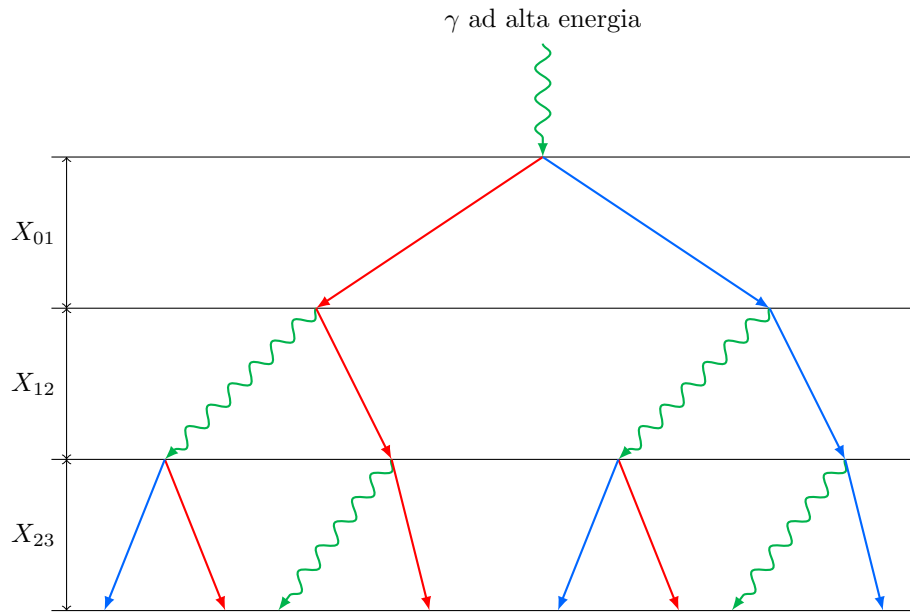
Esso si basa sul concetto di lunghezza di radiazione, in quanto la distanza percorsa viene espressa in multipli di questa. Immaginiamo infatti che in corrispondenza di ogni lunghezza di radiazione si verifichi in media un nuovo processo che può essere di produzione di coppie o di bremsstrahlung. Si definisce quindi il *numero di generazione* t , dato al rapporto tra lo spazio percorso e la lunghezza di radiazione:

$$t = \frac{x}{x_0}$$

Banalmente, esso ci darà il numero di lunghezze di radiazione percorse.

⁵Il lettore attento ricorderà che parlando dello scattering Compton incoerente abbiamo detto che con questo viene strappato un elettrone dall'atomo, quindi in linea teorica con tale fenomeno il numero di particelle dovrebbe comunque aumentare. Bisogna però considerare che quello che stiamo presentando è un modello molto semplificato, mentre stime più esatte si fanno attraverso delle simulazioni numeriche; inoltre man mano si va ad energie sempre più basse, dove prevale l'effetto fotoelettrico. Sebbene quindi non sia del tutto corretto dire che non vengano prodotte nuove particelle proprio dall'energia critica in poi, questa approssimazione ci permette di ottenere delle relazioni che sono abbastanza realistiche.

Guardiamo adesso il seguente schema:



In questo esempio abbiamo in partenza un γ di alta energia che interagisce, producendo quindi una coppia $e^+ - e^-$; questa coppia percorre uno spazio pari all'incirca ad una lunghezza di radiazione e poi dà luogo a bremsstrahlung, con cui viene prodotto un fotone e un elettrone/positrone come stato finale. Dopo un'altra lunghezza di radiazione il fotone produrrà una coppia mentre l'elettrone e il positrone produrranno bremsstrahlung.

5.2.2 Profondità di uno sciame e.m.

Notiamo come, indipendentemente dal tipo di particella che consideriamo, ogni volta che si percorre uno spazio pari ad una lunghezza di radiazione quello che succede è che ogni particella si raddoppia. Possiamo generalizzare questo meccanismo affermando che il numero n di particelle prodotte dopo t lunghezze di radiazione sarà pari a

$$n(t) = 2^t$$

Ad esempio, per $t = 3$ dovremmo avere 8 particelle, come vediamo effettivamente in figura.

Quale sarà l'energia di queste particelle? Come abbiamo detto, man mano l'energia si degrada perché l'energia del fotone incidente viene via via suddivisa nei prodotti di questa cascata; possiamo allora dire che le particelle della t -esima generazione avranno in media energia $E(t)$ pari all'energia E_0 del fotone incidente divisa per $n(t)$. In formule:

$$E(t) = \frac{E_0}{2^t}$$

A partire da questa relazione possiamo andare a valutare quante particelle vengono prodotte in corrispondenza dell'energia critica, che possiamo immaginare come il valore per cui si ha il massimo dello sciame, inteso come il massimo numero delle particelle

dello sciame. In particolare, quando l'energia media delle particelle diviene uguale all'energia critica E_c , cioè quando

$$\frac{E}{2^t} = E_c$$

non verranno più prodotte nuove particelle e lo sciame non si sviluppa ulteriormente. Per determinare lo spazio che ha percorso lo sciame fino a raggiungere questa condizione basterà valutare quante lunghezze di radiazione sono state percorse, e per fare ciò basta ricavare da questa equazione il valore di t con semplici passaggi:

$$\frac{E_0}{2^t} = E_c \implies \frac{E_0}{E_c} = 2^t \implies t = \frac{\ln(E_0/E_c)}{\ln 2}$$

Da ciò si evince come il punto in cui si raggiunge il numero massimo di particelle dipende con una relazione logaritmica dall'energia incidente E_0 , ovvero dall'energia del fotone o dell'elettrone iniziale.

Esempio 5.3: Le dimensioni di un calorimetro

La relazione appena vista ci permette di determinare lo spessore di un dato materiale necessario per poter contenere o addirittura arrestare lo sciame di una data energia. Ciò è importante dal punto di vista della rivelazione, perché esistono dei rivelatori che prendono il nome di calorimetri, i quali sono dei rivelatori progettati per misurare tutta l'energia di una particella incidente; se quindi ad esempio volessimo misurare l'energia di γ o elettroni molto energetici mediante calorimetri, siccome quello che succederà quando questo γ o questo elettrone entra nel rivelatore sarà la produzione di uno sciame (perché questo è quello che avviene in qualsiasi materiale), allora per misurare tutta l'energia dello sciame dobbiamo assicurarci che tutte le particelle prodotte nello sciame rimangano all'interno del rivelatore, pertanto il rivelatore non può essere troppo corto perché quello che altrimenti potrebbe succedere è che lo sciame comincia a propagarsi ma poi fuoriesce dal materiale e dunque perdiamo parte dello sciame e di conseguenza parte dell'energia. È quindi fondamentale che la dimensione del rivelatore sia adeguata a quella dello sciame che può formarsi. Vediamo allora degli esempi numerici.

Ci chiediamo che spessore debba avere un calorimetro per poter misurare tutta l'energia di un γ avente inizialmente un'energia $E_0 = 10E_c$. Dalla relazione appena vista possiamo calcolare il numero di lunghezze di radiazione:

$$t = \frac{\ln(10E_c/E_c)}{\ln 2} = \frac{\ln 10}{\ln 2} = 3.3$$

Dunque operando un rivelatore di dimensioni pari a $3,3X_0$ siamo sicuri che catturiamo almeno il massimo sviluppo dello sciame, quindi lo sciame arriva a propagarsi fino al suo massimo sviluppo⁶.

Se invece l'energia del fotone o dell'elettrone incidente è pari a $100E_c$, il massimo si raggiungerà per

$$t = \frac{\ln(100E_c/E_c)}{\ln 2} = \frac{\ln 100}{\ln 2} = 6.6$$

Notiamo come, a causa della dipendenza logaritmica dall'energia, nonostante l'energia iniziale sia aumentata di un fattore 10 rispetto al caso precedente lo spessore

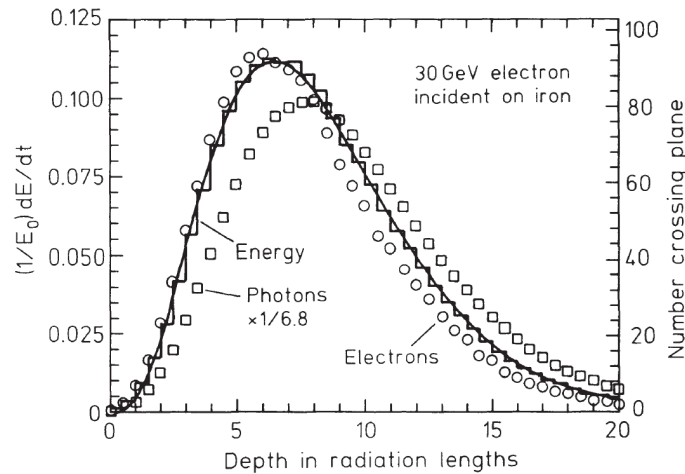
necessario è soltanto raddoppiato. Ciò costituisce un vantaggio dal punto di vista pratico, perché è possibile realizzare dei calorimetri tutto sommato compatti in grado comunque di misurare buona parte dello sciame anche per γ o elettroni di elevata energia.

Bisogna inoltre considerare che siccome il risultato è espresso in multipli di lunghezza di radiazione, la lunghezza vera e propria dipenderà dal tipo di materiale attraversato, in quanto la lunghezza di radiazione dipende dallo Z del materiale; ad esempio, in base ai valori della tabella vista in §4.5.1, affinché venga contenuto fino al massimo uno sciame avente energia iniziale pari $E_0 = 10E_c$ un rivelatore costruito in piombo dovrà essere lungo 1,8 cm, mentre se come materiale assorbitore considerassimo l'acqua sarebbero necessari 1,18 m.

5.2.3 Numero di particelle in uno sciame e.m.

Guardiamo adesso un altro aspetto dello sciame elettromagnetico, in particolare andiamo a vedere il numero di fotoni e elettroni prodotti in uno sciame in funzione della profondità. Abbiamo infatti intuito che effettivamente si arriva a un massimo nel numero di particelle prodotte, però ancora non abbiamo visto cosa succede dopo questo perché il modello che abbiamo considerato prima era un modello semplificato che non dice nulla su ciò che avviene dopo, in quanto assume che una volta raggiunto il massimo del numero di particelle è come se lo sciame si bloccasse bruscamente, ma in realtà non è così: sappiamo che sono state formate un numero di particelle (elettroni e γ) che proseguiranno attraverso altri meccanismi, venendo man mano assorbite.

Se allora vogliamo vedere l'evoluzione nel numero di fotoni e elettroni in funzione della distanza percorsa non basta quel modello semplificato, ma in realtà sono necessari delle simulazioni numeriche un po' più complesse. Guardiamo il seguente grafico:



In tale grafico, realizzato mediante simulazioni Monte Carlo, sull'asse delle ascisse è riportata la distanza percorsa in multipli di lunghezze di radiazione e sull'asse delle ordinate vediamo da un lato la perdita di energia (quindi quanta energia viene persa

⁶In realtà vedremo in seguito che sarà necessario considerare spessori maggiori, perché lo sciame una volta raggiunta l'energia critica non si arresta bensì continua a proseguire.

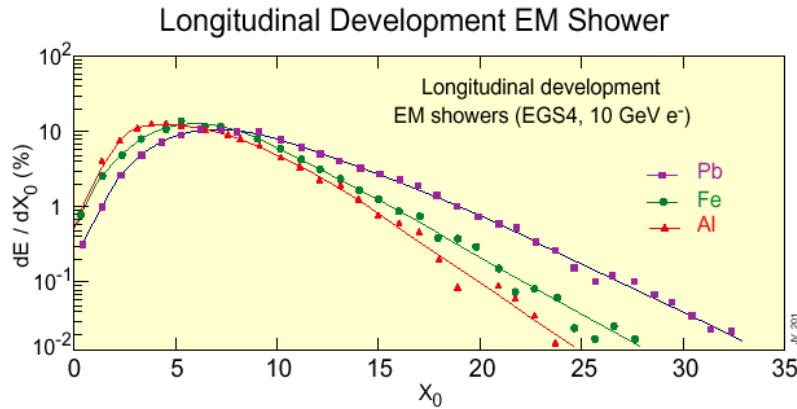
dallo sciame man mano che si propaga), rappresentata dall'istogramma, e dall'altro il numero di elettroni e fotoni⁷, rappresentati dai pallini e i quadretti.

Guardando l'andamento di questi punti ci rendiamo conto che l'andamento iniziale coincide con quello che ci aspettavamo, ovvero che man mano che lo sciame si propaga all'interno del materiale si ha una crescita praticamente esponenziale nel numero di particelle dettata dalla relazione vista prima; man mano si raggiungerà un massimo, in corrispondenza del quale cominciano a intervenire gli altri meccanismi di interazione. Lo sciame però non si arresta qui: continuerà a propagarsi anche per uno spazio notevole (ad esempio nel grafico per 20 lunghezze di radiazione) e via via il numero di elettroni e di fotoni diminuirà fino ad arrivare ad un punto in cui tutti gli elettroni e tutti i fotoni saranno totalmente assorbiti dal materiale.

Capiamo quindi che è necessario adoperare un materiale sufficientemente lungo per poter contenere tutto lo sciame, in quanto se in termini di lunghezza ci fermassimo semplicemente al massimo andremmo a perdere tutte le altre particelle che continuano a proseguire nel materiale e che perdono energia. In altre parole, se volessimo ricostruire l'energia del γ o dell'elettrone incidente e ci limitassimo a utilizzare un materiale che contiene solamente una parte dello sciame, ad esempio fino al suo sviluppo massimo, perderemmo tutto il contributo delle particelle che proseguono nel loro percorso.

5.2.4 Sviluppo longitudinale di uno sciame e.m.

Quando si analizza uno sciame, lo si può analizzare andando a guardare le sue dimensioni in termini di sviluppo longitudinale, quindi lungo la stessa direzione di incidenza della particella che ha generato lo sciame, ovvero la direzione che nello schema semplificato dello sciame abbiamo valutato in termini di multipli di lunghezza di radiazione.



Guardando lo sviluppo dello sciame da un punto di vista longitudinale abbiamo un grafico come quello che vediamo in figura sopra, in cui possiamo vedere delle simulazioni effettuate nel caso di sciame elettromagnetici prodotti da elettroni di 10 GeV. Se andiamo a vedere la perdita di energia per unità di lunghezza di radiazione (espressa qui in percentuale) ci rendiamo conto che l'energia non viene persa tutta quanta fino a quando non si raggiunge un massimo, ma in realtà ci sono delle perdite di energia anche a distanze notevoli, quindi le particelle che compongono lo sciame continuano

⁷In realtà i fotoni sono stati scalati per un fattore $1/6,8$ in modo da rappresentarli in unico grafico assieme agli elettroni, quindi in realtà il numero di questi è molto più grande.

a depositare energia nel materiale anche parecchio oltre il massimo. Notiamo come il fatto di esprimere la perdita di energia in unità di lunghezza di radiazione ci permette di confrontare facilmente materiali con densità molto diverse.

Andando a guardare le percentuali, si può dire che grosso modo il 95% di uno sciame è contenuto longitudinalmente entro venti lunghezze di radiazione, quindi spesso quando si progettano dei calorimetri la scelta che si fa per stabilirne lo spessore è quella di scegliere una lunghezza pari a $20X_0$, in modo da essere sicuri che praticamente il 95% dello sciame e quindi della sua energia sia stata depositata nel rivelatore.

5.2.5 Sviluppo laterale di uno sciame e.m.

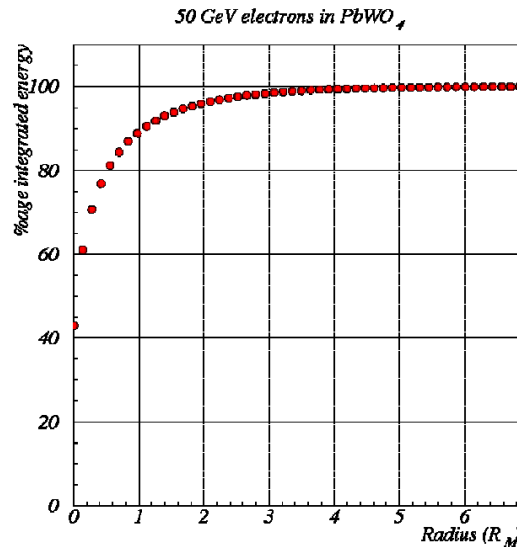
Lo sciame non si sviluppa solo longitudinalmente ma ha anche una sua dimensione trasversale o laterale. Infatti, tornando di nuovo allo schema semplificato, vediamo come, a causa di diversi meccanismi (ad esempio l'angolo di apertura nella coppia $e^+ - e^-$ oppure l'angolo a cui sono emessi i fotoni di frenamento), le particelle man mano non seguiranno più la stessa direzione della particella incidente ma incominceranno ad avere direzioni diverse. La conseguenza è che lo sciame avrà una sua larghezza lateralmente, cioè nella direzione trasversale alla direzione longitudinale.

Possiamo andare a valutare le dimensioni laterali di uno sciame. Stavolta però non lavoreremo più in termini di lunghezza di radiazione, bensì l'allargamento trasversale è descritto dal cosiddetto *raggio di Molière*, che è un altro parametro legato alle proprietà del materiale utilizzato. Esso può essere approssimato dalla legge

$$R_M = 0.0265X_0(Z + 1.2)$$

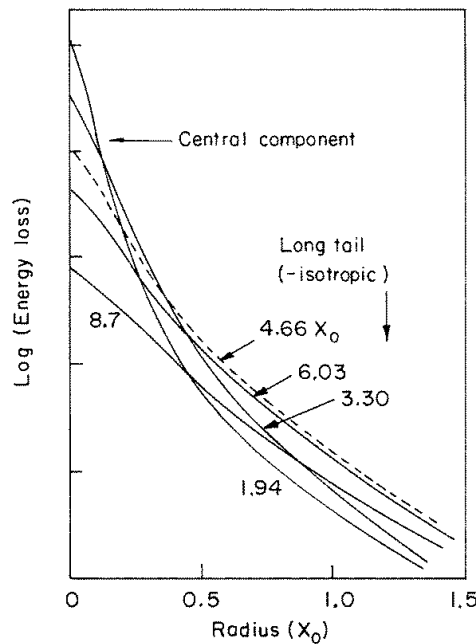
e quindi dipende dalla lunghezza di radiazione ma anche dallo Z del materiale.

Ci chiediamo ora che dimensioni debba avere un cilindro in grado di contenere il 95% dello sciame. Abbiamo visto che questo cilindro avrà altezza pari all'incirca a 20 lunghezze di radiazione, mentre in termini laterali o trasversali possiamo andare a vedere quanti raggi di Molière sono necessari per andare a contenere il 95% dello sciame. In questo caso basta andare a considerare una dimensione pari a $2R_M$.



Infatti se andiamo a vedere quant'è la percentuale di energia che viene depositata all'interno di un materiale in funzione di R_M , se ci manteniamo a valori di frazioni del raggio di Molière, l'energia che possiamo ricostruire dunque l'energia che viene effettivamente depositata nel materiale sarà soltanto una frazione, intorno a 40% – 60%. Chiaramente, man mano che allarghiamo la base di questo cilindro andiamo a includere sempre più particelle dello sciame, quindi andiamo a considerare la quasi totalità dell'energia dello sciame. Infatti nel grafico vediamo che questa percentuale cumulativa tende a salire fino a raggiungere il 100%. Ad esempio se ci fermiamo a $2R_M$ arriviamo appunto ad una percentuale del 95%.

Se guardiamo un po' più nel dettaglio lo sviluppo laterale dello sciame ci accorgo anche di un'altra proprietà. Guardiamo la figura seguente, in cui è rappresentata ancora la perdita di energia in funzione di multipli di R_M , ma stavolta le diverse curve sono ottenute per lunghezze di radiazioni diverse, nel senso che sono riportate le distribuzioni trasversali dello sciame fissato il valore di profondità, ovvero la distanza longitudinale fino a cui lo sciame è penetrato.



Notiamo come, nei casi in cui si è percorso poco spazio all'interno del materiale, la maggior parte delle particelle si concentra attorno all'asse dello sciame, cioè attorno alla direzione della particella incidente. Possiamo vedere come ad esempio la curva corrispondente a $1.94X_0$ è molto ripida ed ha un valore elevato all'inizio, il che indica che gran parte delle particelle si trova ad una pari a una frazione piccola del raggio di Molière dall'asse dello sciame e ovviamente man mano diminuisce, quindi ne troviamo sempre di meno a distanze maggiori dall'asse.

Man mano che lo sciame si sviluppa tende ad allargarsi, per cui se ad esempio osserviamo la curva relativa a $8.7X_0$ ci rendiamo conto che questa curva è molto diversa, infatti si ha una sorta di alone⁸, quindi le particelle non si distribuiscono più in quanto hanno perso un po' l'informazione originaria della direzione della particelle incidente, per cui

⁸Credo che la professoressa intenda il fatto che la curva è sostanzialmente lineare.

le ritroviamo spalmate a diverse distanze dall'asse e quindi la curva diventa nettamente meno rigida.

Quindi oltre a valutare complessivamente qual è la dimensione del raggio del cilindro che contiene il 95% dello sciame possiamo andare a studiare un po' più nel dettaglio come sono distribuite le particelle e abbiamo visto che questo aspetto dipende dalla distanza percorsa considerata: se lo sciame è stato appena originato allora le particelle prodotte ancora mantengono un'informazione della direzione della particella incidente e dunque sono molto concentrate attorno all'asse, man mano che lo sciame si propaga nel materiale queste particelle tendono via via a cambiare direzione e quindi sono più sparpagliate, tant'è che le ritroviamo anche a distanze notevoli rispetto all'asse

5.2.6 Simulazioni di sciami e.m.

Questa section non so se metterla, alla fine sono solo esempi

Capitolo 6

Proprietà generali dei rivelatori

Una volta discussa l'interazione della radiazione con la materia, siamo pronti per discutere i rivelatori. Prima di andare a discutere nel dettaglio le diverse tipologie di rivelatore, andiamo a presentare alcune proprietà generali. Infatti, nonostante nel corso degli anni siano state sviluppate diverse tipologie di rivelatori che sfruttano meccanismi diversi, hanno elettronica differente ecc., ci sono dei concetti di base che sono validi per tutti i rivelatori.

6.1 Che cos'è un rivelatore

Un rivelatore si può definire come uno strumento che viene usato per rivelare il passaggio di una particella o di una radiazione.

I rivelatori non sono tutti gli stessi, ce ne sono di diverse tipologie aventi diverse funzionalità ulteriori a quella di rivelare il passaggio di una particella: alcuni sono in grado di misurare l'energia della particella oppure tracciarla, quindi andare ad individuare il percorso seguito della particella o addirittura in alcuni casi identificarla, quindi capire che tipo di particella è passata attraverso di esso. Tuttavia, indipendentemente dalle diverse tipologie di rivelatori, è essenziale che un principio di base sia rispettato: affinché un rivelatore possa rivelare una particella o una radiazione, è fondamentale che queste interagiscano con il rivelatore stesso attraverso uno dei meccanismi che abbiamo discusso in base al tipo di particella o di radiazione che stiamo andando a considerare. Come abbiamo studiato, l'interazione tra particelle e materiali dipende dalla sezione d'urto dei vari processi, che a sua volta è influenzata dalle caratteristiche della particella incidente e del materiale assorbitore. Per questo motivo, è essenziale comprendere come variano le sezioni d'urto nei diversi processi per capire le scelte progettuali dei rivelatori, come la geometria, i materiali utilizzati e le prestazioni ottenibili. Quando si progetta un rivelatore, bisogna considerare che, sebbene possa essere ottimizzato per rivelare certi tipi di particelle, ciò comporterà inevitabilmente delle limitazioni. Ad esempio, un rivelatore concepito per particelle cariche potrebbe non essere adatto per la radiazione elettromagnetica. Inoltre, il materiale con cui è costruito determinerà l'efficienza del rivelatore in relazione al tipo di particelle e alla loro energia.

Un aspetto fondamentale nella rivelazione è il *tempo di interazione*. Questo rappresenta il tempo necessario per arrestare una particella o per lo sviluppo di uno sciame. I tempi di interazione sono estremamente brevi, dell'ordine dei nanosecondi nel caso di

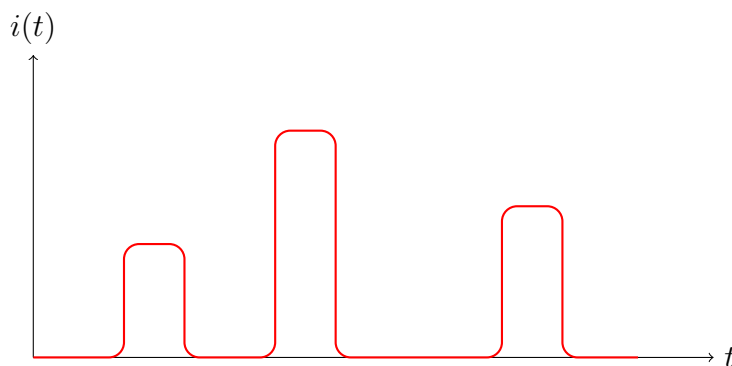
un materiale gassoso e dei picosecondi nel caso di un materiale solido. Oltre a questi, bisogna considerare anche il tempo che impiega il rivelatore per raccogliere il risultato dell'interazione, che chiaramente varia a seconda del meccanismo di interazione.

Il risultato netto dell'interazione delle radiazioni in un'ampia categoria di rivelatori è la comparsa di una determinata quantità di carica elettrica di ionizzazione Q all'interno del volume attivo del rivelatore¹. Successivamente, questa carica deve essere raccolta per formare il segnale elettrico di base. Tipicamente, la raccolta della carica viene realizzata attraverso l'imposizione di un campo elettrico all'interno del rivelatore, che provoca lo spostamento delle cariche positive e negative create dalla radiazione in direzioni opposte, producendo così un segnale in uscita. Il tempo necessario per raccogliere completamente la carica varia notevolmente da un rivelatore all'altro; in generale, questi tempi di rivelazione sono leggermente più lunghi rispetto ai tempi di interazione: vanno dai nanosecondi ai microsecondi, ma possono arrivare anche all'ordine del millisecondo nel caso di rivelatori molto lenti. Man mano che affronteremo i diversi tipi di rivelatore, esamineremo anche questi tempi di risposta, ovvero i tempi di rivelazione.

6.2 Modi di operazione

Il modo in cui operano la maggior parte dei rivelatori è quello di dare luogo a un segnale² ogni qualvolta vengono attraversati da una particella o da una radiazione. Fanno eccezione una classe di rivelatori che potremmo definire come rivelatori visualizzanti o traccianti, i quali funzionano semplicemente visualizzando il passaggio delle particelle, cioè permettono di visualizzare il passaggio di una particella senza però avere un segnale in uscita in corrispondenza del passaggio della particella o della radiazione. Degli esempi sono le emulsioni nucleari, che possiamo immaginarle come delle lastre fotografiche che visualizzano la traccia di una particella, oppure le camere a bolle e le camere a nebbia.

Concentriamoci sui rivelatori che segnalano il passaggio di una particella attraverso la formazione di un segnale elettrico.



¹Il volume attivo di un rivelatore è quella parte del rivelatore stesso in cui avviene l'effettiva rivelazione delle radiazioni, ovvero dove le particelle interagiscono con il materiale del rivelatore producendo segnali rilevabili, come la creazione di cariche elettriche, scintillazioni, o altri fenomeni misurabili.

²Questo segnale nella pratica è un impulso di corrente. Nel seguito la professoressa parla di questi segnali come segnali di tensione, ma credo siano equivalenti data la legge di Ohm. In ogni caso, il Knoll ne parla in §4.2.C.

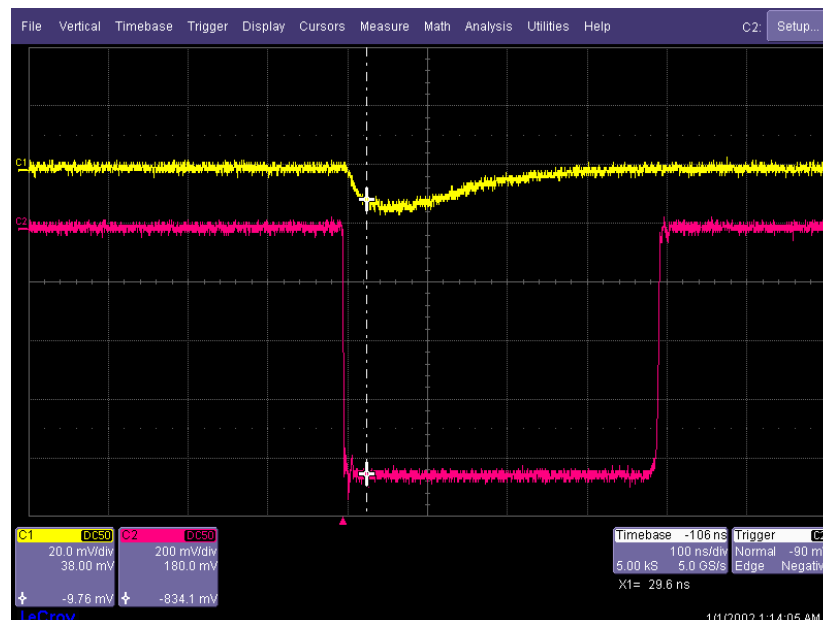
Ogni segnale avrà caratteristiche specifiche. Innanzitutto, si manifesteranno a intervalli temporali variabili, cioè, a meno che non si tratti di un fenomeno periodico, i tempi tra un evento e il successivo saranno casuali. Ciò è dovuto al fatto che l'arrivo e la rilevazione di particelle emesse da una sorgente radioattiva sono fenomeni casuali governati dalla statistica di Poisson, il che implica che l'intervallo temporale tra due eventi consecutivi non è fisso, ma cambia di volta in volta. Ciononostante, questa variazione segue una distribuzione che ha un andamento esponenziale decrescente.

La distanza tra due eventi consecutivi può variare notevolmente a seconda del fenomeno che si sta studiando e del tipo di radiazione rivelata. Ad esempio, se si dispone di una sorgente quasi esaurita con un'attività molto bassa, i segnali potrebbero verificarsi con una frequenza molto bassa; al contrario, in altri tipi di fenomeni, la frequenza di conteggio potrebbe essere molto più elevata. Per questo motivo i modi in cui un rivelatore può operare sono principalmente due:

- *Pulsed mode*: il rivelatore rivela singoli impulsi in quanto questi arrivano in tempi abbastanza distanziati l'uno dall'altro, per cui è possibile studiare l'arrivo della singola particella/radiazione. Un esempio di fenomeno che si studia utilizzando un rivelatore in pulsed mode è la misura dell'arrivo di particelle della radiazione cosmica mediante un contatore Geiger: ogni volta che arriva una particella, questo emette un bip e viene prodotto un segnale, quindi è possibile contare singolarmente i diversi impulsi.
- *Current mode*: quando gli impulsi sono molto ravvicinati in tempo, quindi abbiamo un'alta frequenza di conteggi, il rivelatore non riesce più a distinguere tra i singoli impulsi e lavorerà nella cosiddetta current mode, cioè nella modalità corrente. Quello che si va a misurare in questa modalità è sostanzialmente una corrente media.

In laboratorio lavoreremo principalmente in pulsed mode.

Chiariamo meglio che cos'è un segnale. Per segnale si intende una differenza di tensione, che quindi può essere visualizzato grazie a uno oscilloscopio.



Nella figura è mostrata la schermata di un oscilloscopio digitale, che consente di visualizzare più segnali contemporaneamente. Sull'asse orizzontale viene rappresentato il tempo, in quello verticale la tensione.

In questo caso, sono rappresentati due segnali distinti: uno in giallo e uno in rosa. Questi segnali, pur essendo molto diversi tra loro, hanno in comune la caratteristica di essere impulsi. Si nota infatti come, a partire da un valore di tensione costante (detto baseline), si verifichi una variazione nella tensione che persiste per una certa durata. Successivamente, il valore della tensione ritorna al livello iniziale.

Pur essendo questa caratteristica comunque ad entrambi i segnali, essi sono molto differenti. Il segnale giallo è un segnale analogico, la cui ampiezza può variare in modo continuo. Attualmente stiamo osservando un impulso specifico, ma un futuro impulso, causato da una nuova particella o radiazione, potrebbe avere un'ampiezza leggermente diversa, mantenendo però la stessa forma generale. Ciò che cambia è l'ampiezza del segnale, ossia la distanza tra la baseline e il valore massimo raggiunto. Questa ampiezza può quindi assumere valori differenti in modo continuo.

Al contrario, il segnale rosa ha una forma completamente diversa: è squadrato (onda quadra) e ha una durata che, in questo caso, viene spesso determinata dall'utente o dall'elettronica utilizzata. In questo contesto, non ci concentriamo sulla durata del segnale, ma piuttosto sul fatto che esso passa dalla baseline a un livello di tensione diverso, per poi ritornare alla baseline. Ad esempio, osservando la scala verticale, ogni divisione corrisponde a 200 mV, quindi questo segnale ha un'ampiezza di poco più di 800 mV. Si tratta di un segnale logico, che trasmette un'informazione limitata: indica semplicemente il passaggio dallo stato logico 0 allo logico 1, ma non fornisce altre informazioni. Se un nuovo impulso dovesse arrivare, avrebbe le stesse caratteristiche, con la stessa durata e ampiezza. Questo tipo di segnale è utile solo per contare il numero di impulsi ricevuti, senza poter estrarre ulteriori informazioni.

6.2.1 Informazioni dai segnali

Esistono diversi tipi di rivelatori che generano segnali differenti. Alcuni producono segnali logici, mentre altri emettono segnali analogici che trasportano informazioni aggiuntive sulla particella che possiamo dedurre dalle sue caratteristiche. Vediamo cosa possiamo dedurre.

Ampiezza

Per ampiezza dei segnali intendiamo il valore massimo di tensione raggiunto dal segnale rispetto alla baseline. Essa può essere diversa a seconda dell'energia della particella incidente. Esistono infatti rivelatori che generano segnali la cui ampiezza è proporzionale all'energia depositata nel rivelatore stesso, risultando in un segnale più ampio quanto maggiore è l'energia depositata all'interno del rivelatore.

È da notare che l'ampiezza del segnale può variare anche per effetto delle fluttuazioni statistiche derivanti da altri fenomeni o a causa del rumore, per cui si ottiene un segnale di ampiezza leggermente diversa per motivi non fisici, nel senso che non è stata realmente depositata un'energia di valore diverso.

Tempo di arrivo

Esso è il tempo associato al segnale e che fornisce informazioni sul tempo di arrivo della particella. Per capire quando il segnale è effettivamente arrivato è sufficiente andare a

vedere l'istante in cui il segnale si discosta dalla baseline. Nel caso riportato in figura, notiamo come per le prime quattro suddivisioni della scala dei tempi (corrispondenti ciascuna a 100 ns) non c'è un segnale, in quanto abbiamo una tensione che è costante. Dopodiché all'improvviso parte un segnale dovuto appunto ad un impulso. Quand'è che parte l'impulso? Non è facile determinare l'inizio di questo segnale perché ci sono delle leggere fluttuazioni dovute al rumore elettrico, infatti la linea della tensione non è esattamente costante, bensì fluttua anche quando non c'è nessun impulso. In casi come questi si deve scegliere una sorta di soglia, cioè un livello di tensione superato il quale si può ritenere abbastanza ragionevole che effettivamente si stia presentando un segnale e non si tratti semplicemente di una fluttuazione. In tal caso, il tempo di inizio del segnale sarà dato dall'istante in cui si supera tale livello di soglia.

Forma e durata

Oltre all'ampiezza, ci può interessare anche quanto dura il segnale. Ad esempio il segnale giallo raggiunge il suo valore massimo all'incirca a 50 ns dal suo inizio, ma in realtà si esaurisce in 300 ns.

Ci può interessare anche la forma del segnale, ad esempio la discesa o la risalita. Infatti ci sono dei rivelatori che producono dei segnali che hanno forme diverse a seconda del tipo di particella che ha inciso, per cui a seconda che sia una particella carica o una radiazione elettromagnetica il segnale prodotto cambia forma e quindi se si è in grado di analizzare la forma del singolo segnale si può capire se il rivelatore ha misurato ad esempio una particella α o un γ e quindi attraverso l'analisi della forma del segnale si può procedere a una sorta di identificazione, cioè capire effettivamente che particella è arrivata.

6.3 Analisi delle ampiezze

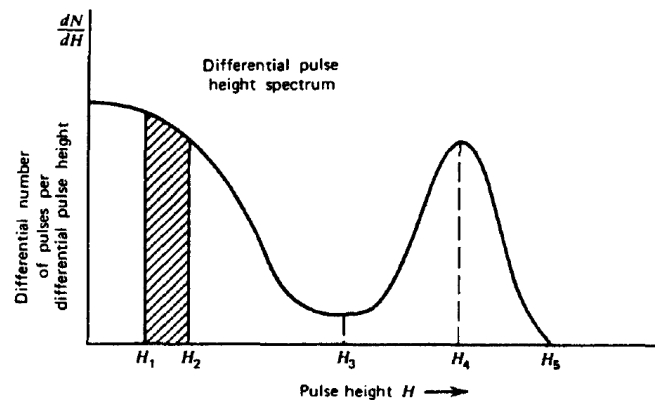
Nella maggior parte dei rivelatori che tratteremo, l'ampiezza ci darà informazioni sull'energia che sarà depositata dalla particella incidente sul rivelatore. Infatti, come abbiamo già detto, l'ampiezza del segnale dipenderà dall'energia depositata dalla particella/radiazione; nella maggior parte dei casi esiste una relazione lineare tra energia depositata e ampiezza del segnale prodotto, quindi se andiamo ad analizzare l'ampiezza del segnale in automatico sapremo quanta energia è stata depositata nel rivelatore. Questo processo equivale a fare un'analisi delle ampiezze, che tipicamente si fa rappresentando la distribuzione delle ampiezze degli eventi misurati. Solitamente tale distribuzione viene rappresentata mediante una distribuzione differenziale dN/dH , che è sostanzialmente un istogramma degli impulsi misurati, detto *spettro delle ampiezze*.

Approfondimento 6.1: Lo spettro degli impulsi

Questo approfondimento è dovuto al fatto che secondo me è spiegato molto male il concetto di distribuzione delle ampiezze, per cui riporto quanto detto dal Knoll in §4.2 "Pulse height spectra".

La distribuzione delle ampiezze degli impulsi è una caratteristica del segnale in uscita di un rivelatore che viene comunemente utilizzata per dedurre informazioni sulla radiazione incidente o sul funzionamento del rivelatore stesso.

Il modo più comune di rappresentare le informazioni sulle ampiezze degli impulsi è attraverso la distribuzione differenziale delle altezze degli impulsi. Una distribuzione ipotetica a scopo di esempio è mostrata nel seguente grafico:



Sulle ascisse sono riportate le ampiezze degli impulsi con scala lineare, che va da zero a un valore più alto dell'ampiezza di qualsiasi impulso osservato dalla sorgente; l'ordinata rappresenta il numero differenziale dN di impulsi osservati con un'ampiezza all'interno dell'incremento differenziale di ampiezza dH , diviso per tale incremento, o dN/dH . La scala orizzontale ha quindi unità di ampiezza degli impulsi (Volt), mentre la scala verticale ha unità di ampiezza inversa (Volt^{-1}). Il numero di impulsi la cui ampiezza si trova tra due valori specifici, H_1 e H_2 , può essere ottenuto integrando l'area sotto la distribuzione tra questi due limiti, come mostrato nell'area tratteggiata in figura.

$$\text{Numero di impulsi con ampiezza tra } H_1 \text{ e } H_2 = \int_{H_1}^{H_2} \frac{dN}{dH} dH$$

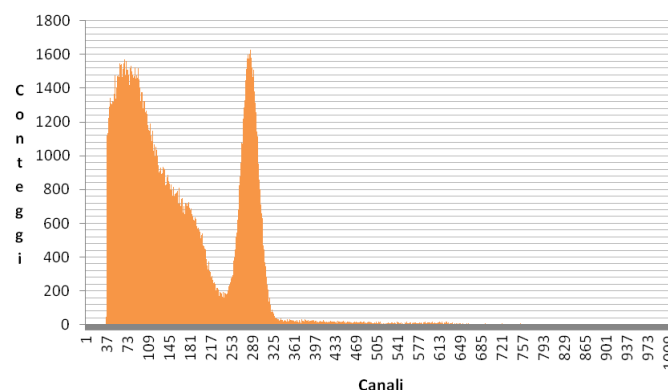
Il numero totale di impulsi N_0 rappresentato dalla distribuzione può essere ottenuto integrando l'area sotto l'intero spettro:

$$N_0 = \int_0^{+\infty} \frac{dN}{dH} dH$$

La maggior parte degli utenti degli strumenti di rivelazione è abituata a osservare la forma della distribuzione differenziale delle altezze degli impulsi per identificare caratteristiche significative della sorgente degli impulsi. L'ampiezza massima degli impulsi osservata (nel nostro esempio pari ad H_5) è semplicemente il punto lungo l'ascissa in cui la distribuzione arriva a zero. I picchi nella distribuzione, come quello per H_2 , indicano ampiezze di impulsi intorno a cui si trovano molti impulsi; viceversa, le valli o i punti bassi nello spettro, come H_3 , indicano valori dell'ampiezza degli impulsi intorno ai quali si verificano relativamente pochi impulsi.

Esempio 6.1: Distribuzione delle ampiezze per il ^{137}Ce

In figura possiamo vedere un istogramma delle ampiezze, ottenuto utilizzando uno scintillatore con una sorgente di ^{137}Ce che emette γ monoenergetici a 662 keV.



Quello che succede ad ogni interazione è che un γ interagisce con il rivelatore, deposita una certa quantità della sua energia (che può essere tutta o anche solo una parte) e quindi in corrispondenza di ogni gamma si ottiene un segnale con una data ampiezza. Analizziamo allora questa distribuzione di ampiezze.

Se il γ lasciasse ogni volta nel rivelatore tutta la sua energia, ci aspetteremmo di trovare sempre la stessa ampiezza, corrispondente nell'esempio a 662 keV. In realtà otteniamo uno spettro con una forma abbastanza complessa che ci dice che oltre a un valore di energia molto probabile e rappresentato dal picco in corrispondenza del canale 289, si presentano anche tanti eventi, quindi tanti γ , che rilasciano parte della loro energia, perché corrispondono a segnali di ampiezza più bassa. Il picco che vediamo è il cosiddetto picco fotoelettrico, cioè il picco che si ottiene quando il γ interagisce per effetto fotoelettrico con lo scintillatore. Infatti in quel caso come prodotto dell'effetto fotoelettrico si ha un elettrone che ha assorbito tutta l'energia del fotone, il quale può percorrere pochi millimetri all'interno dell'elettrone prima di perdere tutta la sua energia. Quindi essenzialmente questi sono degli eventi in cui il gamma ha perso la sua energia per effetto fotoelettrico e l'ha trasferita all'elettrone e l'elettrone a sua volta rimane intrappolato all'interno del rivelatore perdendo tutta la sua energia attraverso i processi collisionali che abbiamo descritto in precedenza. In conclusione sono eventi in cui viene ricostruita tutta l'energia del γ incidente. Ovviamente teoricamente dovremmo avere un delta di Dirac³, ma nella realtà abbiamo un picco un po' più largo dovuto a effetti del rivelatore, che non è in grado esattamente di ricostruire l'energia con una precisione infinita, quindi abbiamo una sorta di risoluzione dettata dal rivelatore.

Tutti gli altri eventi che troviamo alla sinistra del picco, che prendono il nome di spalla Compton, corrispondono a dei casi in cui l'energia che viene rilasciata e depositata nello scintillatore è solamente una parte dell'energia del γ incidente perché evidentemente sono avvenuti altri meccanismi⁴. Si tratta infatti di effetti di scattering Compton, dove come prodotto finale si produce non solo un elettrone che chiaramente perderà la sua energia nello scintillatore, ma anche un fotone diffuso. Questo fotone ha una probabilità più bassa di interagire, quindi potrebbe fuggire dal rivelatore e non depositare la sua energia, ecco perché in questi eventi viene ricostruita solamente parte dell'energia che è quella dovuta all'elettrone scatterato durante l'effetto Compton. Abbiamo tanti valori di energia perché l'energia che viene assegnata al fotone diffuso e all'elettrone cambia a seconda dell'angolo di diffusione, quindi abbiamo uno spettro continuo di valori.

Chiaramente, se siamo interessati a sapere qual è l'energia del gamma, ci concentreremo sul picco fotoelettrico, in quanto corrisponde meglio all'energia del γ di partenza.

L'esempio appena visto ci mostra come il segnale che viene tradotto dal rivelatore possa fornire informazioni sull'energia depositata nel rivelatore. Ribadiamo che quest'ultima non corrisponde sempre all'energia della particella emessa, ma potrebbe essere soltanto una parte, a seconda dei meccanismi che si sono verificati all'interno del rivelatore.

³I γ corrispondono a transizioni tra livelli nucleari, per cui non possono assumere qualsiasi valore di energia bensì hanno dei valori per precisi, corrispondenti alla differenza energetica dei livelli tra cui avviene la transizione.

⁴Certamente non avvengono meccanismi di produzione di coppie perché stiamo parlando di gamma di 662 keV, quindi siamo al di sotto dell'energia di soglia

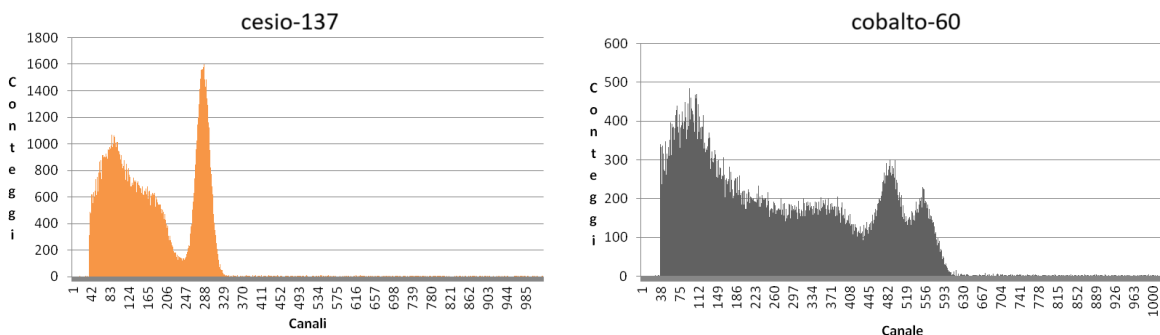
Vediamo che tipo di informazioni si possono estrarre da uno spettro:

- Potremmo essere interessati a sapere quanti segnali sono arrivati complessivamente nel tempo di misura, in modo da valutare quante particelle siamo riusciti a misurare. Ovviamente questo numero è legato all'attività della sorgente, quindi più questa è attiva, maggiore sarà il numero di eventi che riusciamo ad accumulare in un dato intervallo di tempo, e questo si può valutare realizzando l'integrale dello spettro, quindi sommando sostanzialmente quanti eventi si trovano in ciascuno dei bin dell'istogramma;
- Potremmo essere interessati solamente a una porzione dello spettro, ad esempio potremmo voler analizzare soltanto gli eventi fotoelettrici, in modo da capire qual è la percentuale di eventi associati a tale fenomeno. Per fare ciò scegliamo degli estremi dello spettro e calcoliamo l'integrale dello spettro esteso solamente a tale regione;
- In base alla forma dello spettro possiamo individuare diverse regioni relative a particolari fenomeni, come nel caso della spalla Compton o del picco fotoelettrico. Inoltre possiamo andare a guardare il valore massimo delle ampiezze, quindi qual è la massima energia che viene misurata in questa tipologia di eventi.

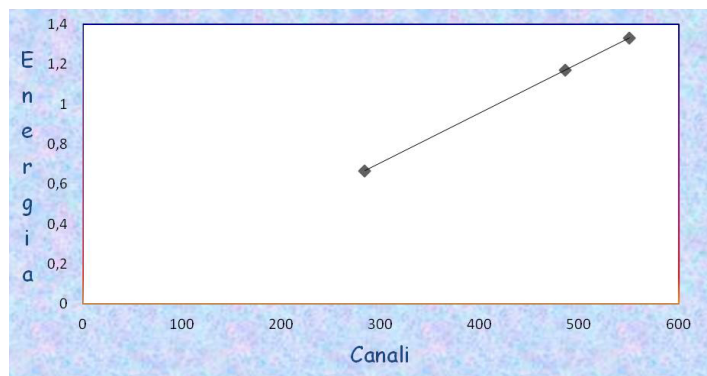
6.3.1 Calibrazione di uno spettro

In laboratorio, un grafico del genere viene realizzato tramite un ADC, il quale traduce l'ampiezza del segnale in un numero che varia in un intervallo che dipende dal numero di bit a disposizione. Notiamo infatti come la distribuzione dell'Es. 6.1 sia espressa in termini di canali, ossia in termini del numero prodotto dall'ADC. In particolare, nell'esperienza di laboratorio in cui adoperiamo uno scintillatore per misurare i γ avremo a disposizione un ADC a 11 bit, il che vuol dire 2048 numeri (da 0 a 2047). Nasce quindi la necessità di capire a che valore di energia corrisponde ciascun canale, e per fare ciò bisogna effettuare una calibrazione.

Per fare una calibrazione bisogna saper associare ciascun canale ad un valore di energia, quindi si utilizzano delle sorgenti note, di cui conosciamo i valori di energia adoperando delle sorgenti. Utilizzandone anche solamente due, come il cesio-137 che emette a 662 keV e il cobalto-60 che invece emette due γ a due energie diverse, uno a 1117 keV e l'altro 1332 keV. La vicinanza di questi due valori fa sì che i due picchi fotoelettrici siano parzialmente sovrapposti, ma ciò è irrilevante in quanto ci interessa la possibilità di individuare il centroide del picco e di associarlo alla corretta energia.



Adoperando queste due sorgenti avremo tre coppie di punti (canale, energia) relativi ai picchi fotoelettrici, per cui è possibile realizzare una procedura di best-fit per andare a individuare una retta di calibrazione come quella mostrata nella figura seguente:



Il motivo per cui la relazione che andiamo a cercare per ottenere la calibrazione è che nella maggior parte dei casi la relazione tra la grandezza misurata e il canale è lineare. Attraverso questa retta di calibrazione è possibile fare qualsiasi tipo di associazione; ad esempio, se abbiamo una sorgente che emette γ con una data energia, attraverso la retta sappiamo a quale canale aspettarci il picco fotoelettrico. Viceversa, se abbiamo una sorgente incognita e vogliamo capire di che isotopo si tratta, andiamo a vedere i picchi e in base alla posizione di questi rispetto ai canali possiamo, mediante la retta di calibrazione, conoscere le energie e quindi capire qual è l'isotopo.

Purtroppo non sempre la corrispondenza è lineare: a volte può essere lineare in una buona porzione dello spettro ma magari si presentano degli effetti di non linearità nelle regioni estreme (cioè nella regione a bassa ampiezza e in quella ad alta ampiezza), per cui è preferibile cercare di lavorare nella regione centrale dello spettro, dove la linearità è abbastanza assicurata.