



Università  
di Catania

Dipartimento  
di Fisica  
e Astronomia  
*"Ettore Majorana"*



CORSO DI LAUREA IN FISICA

---

# MESOSCOPIC AND TOPOLOGICAL MATERIALS

---

CORSO TENUTO DAL PROF. PELLEGRINO NELL'A.A. 2024/2025



# Indice

<b>Prefazione</b>	<b>1</b>
<b>CAPITOLO 0 Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>CAPITOLO 1 Teoria semiclassica</b>	<b>5</b>
1.1 Equazione semiclassica di Boltzmann . . . . .	5
1.2 Osservabili . . . . .	11
1.3 Approssimazione di tempo di rilassamento . . . . .	12
<b>Bibliografia</b>	<b>13</b>



# Prefazione



# Introduzione

Ciao

CAPITOLO

0





# Teoria semiclassica

## CAPITOLO

# 1

## 1.1 Equazione semiclassica di Boltzmann

Nello studio di una qualsiasi nanostruttura, è necessario mettere a contatto questa struttura con i dispositivi di misura macroscopici. Tipicamente, ciò viene fatto strutturando elettrodi molto più grandi dei sistemi studiati e mettendoli in contatto con questi ultimi. Un tale elettrodo funge da serbatoio ideale (sia termico che di particelle) per gli elettroni. Consideriamo quindi un sistema mesoscopico<sup>(1)</sup> composto da un conduttore (ad esempio un metallo, un semiconduttore o un isolante topologico) in contatto con due serbatoi  $L$  ed  $R$ , di dimensioni macroscopiche che possono fornire sia cariche (più precisamente elettroni) che energia, come in figura:



Per serbatoio ideale intendiamo che il numero di elettroni al suo interno è talmente elevato che la sua temperatura e il suo potenziale chimico restano invariati anche se un elettrone abbandona o entra nel reservoir, in quanto  $N \approx N + 1$  per  $N$  grande.

Tale assunzione implica che quando il numero di elettroni del reservoir varia, questo ritorni istantaneamente ad uno stato di equilibrio, rendendo possibile descrivere gli elettroni dei reservoir mediante la distribuzione di Fermi-Dirac:

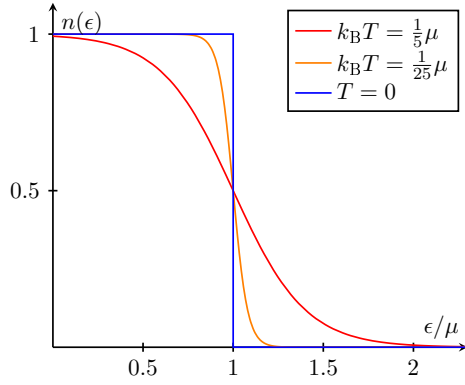
$$f_D(E, \mu, T) = \frac{1}{\exp[(E - \mu)/(k_B T)] + 1} \quad (1.1)$$

Essa ci dà la frazione di elettroni aventi energia  $E$  a temperatura  $T$  e potenziale chimico  $\mu$  fissati.

Ricordiamo che tale distribuzione segue l'andamento riportato in figura:

1.1	Equazione semiclassica di Boltzmann . . . . .	5
1.2	Osservabili . . . . .	11
1.3	Approssimazione di tempo di rilassamento . . . . .	12

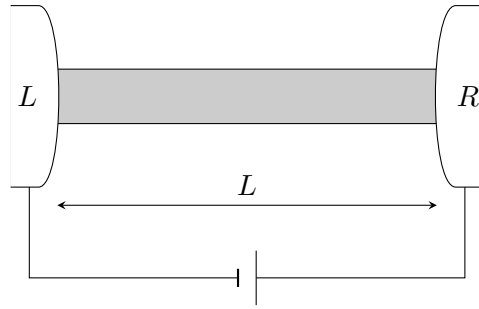
(1) Per mesoscopico si intende un sistema di dimensioni intermedie tra quelle microscopiche e quelle macroscopiche. Possiamo quindi dire più semplicemente che tale sistema ha dimensioni piccole.



### DISEGNO PROVVISORIO

Quando  $T \rightarrow 0$ , essa tende a una funzione a gradino, mentre a temperatura finita ha un andamento più smussato.

In generale, i due serbatoi possono avere temperature  $T_L$  e  $T_R$  o potenziali chimici  $\mu_L$  e  $\mu_R$  diversi. Il modo più semplice per avere, ad esempio, due potenziali chimici diversi è quello di applicare una differenza di potenziale tra i due serbatoi<sup>(2)</sup> collegandoli ad un generatore di tensione, il quale permetterà di modulare  $\mu_L$  e  $\mu_R$ :



In conseguenza a tale differenza di potenziale chimico, si verificherà un flusso di elettroni tra i due reservoir, facendo comunque restare questi ultimi in equilibrio per le precedenti assunzioni.

(Di questo paragrafo lascerei solo la prima nota, forse mettendola nella discussione sopra sui serbatoi ideali) Supponiamo che nei due serbatoi il sistema elettronico rimanga in equilibrio anche in presenza di una caduta di tensione o di una differenza di temperatura e, se vi è un flusso di corrente, assumiamo che nei due serbatoi avvenga un rilassamento istantaneo degli elettroni<sup>(3)</sup>, i quali rimangono in equilibrio. Ciò significa che gli elettroni nei serbatoi possono essere sempre descritti dalla distribuzione di Fermi-Dirac, la quale rimane invariata<sup>(4)</sup>.

Studiamo il problema con una teoria semiclassica, dove con tale espressione intendiamo che nell'equazione che descrive il sistema figurano sia termini di tipo classico che altri di tipo quantistico. Più precisamente, descriviamo gli elettroni come particelle classiche e riteniamo la loro posizione e il loro impulso conoscibili contemporaneamente con precisione sufficientemente grande, figurando questi come variabili classiche in alcuni termini, mentre convenientemente come operatori quantistici in altri. Quantitativamente, ciò è ragionevole quando la lunghezza d'onda di Fermi, che rappresenta la larghezza del pacchetto d'onda e quindi l'incertezza sulla posizione della particella data dal principio di indeterminazione di Heisenberg, data da<sup>(5)</sup>

(2) Se invece volessimo realizzare una differenza di temperatura è sufficiente applicare un gradiente termico.

(3) Per rilassamento istantaneo si intende un processo in cui un sistema passa da uno stato di non equilibrio a uno stato di equilibrio in un tempo trascurabilmente breve, praticamente istantaneo rispetto alle scale temporali del fenomeno in esame.

(4) Dubbio mio: ma visto che applichiamo il voltage drop non cambia il potenziale chimico? e quindi la distribuzione di Fermi-Dirac? probabilmente intende che la funzione di distribuzione è sempre una FD, come forma funzionale, ad un opportuno  $\mu$

(5) io ho trovato come def  $\frac{2\pi}{k_F} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m^* E_F}}$

$$\lambda_F = \frac{\pi \hbar}{E_F},$$

essendo  $E_F$  l'energia di Fermi, è molto più piccola di tutte le scale di lunghezza del sistema. Ciò significa che  $\lambda_F$  deve essere molto più piccola delle dimensioni tipiche del sistema e dei diversi liberi cammini medi, cioè delle distanze percorse mediamente da un elettrone tra due eventi consecutivi di scattering della medesima tipologia. In particolare, nella nostra trattazione siamo interessati a tre tipi di liberi cammini medi:

- la lunghezza di scattering elastico  $\ell_{el}$ , associata allo scattering degli elettroni con le impurità del sistema;
- la lunghezza di scattering elettrone-elettrone  $\ell_{e,e}$ , legata allo scattering di elettroni con altri elettroni e dunque dovuta all'interazione coulombiana;
- la lunghezza di scattering elettrone-fonone  $\ell_{e,ph}$ , associata allo scattering degli elettroni con i fononi del sistema.

Precisiamo i seguenti fatti:

- lo scattering tra elettroni e impurità è elastico, per cui l'energia dell'elettrone si conserva;
- lo scattering elettrone-elettrone non conserva l'energia del singolo elettrone ma l'energia totale dei due elettroni. Ciò è dovuto al fatto che nello scattering i due elettroni possono scambiare energia, come possiamo vedere nel seguente diagramma:

### Mettere disegno diagramma di Feynman

Per quanto detto avremo che, se  $E_1$  ed  $E_2$  sono le energie prima dello scattering e  $E'_1$  ed  $E'_2$  le energie dopo lo scattering, allora avremo che in generale  $E_1 \neq E'_1$  e  $E_2 \neq E'_2$  ma  $E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2$ ;

- nello scattering elettrone-fonone, in cui si ha l'assorbimento o l'emissione di un fonone di energia  $\hbar\omega$ , l'energia non si conserva, in quanto dopo lo scattering l'elettrone inizialmente avente energia  $E$  avrà energia  $E \pm \hbar\omega$ , come possiamo vedere nei seguenti diagrammi:

### Mettere disegno diagramma di Feynman

(Questo paragrafo potrebbe essere da rivedere) A seguito di questi processi di scattering, se essi sono abbastanza efficienti, si ha un "dephasing", ossia una randomizzazione della fase della funzione d'onda. In conseguenza a ciò vengono meno tutti i processi coerenti come i processi di interferenza. Nel momento in cui vengono meno questi ultimi, la particella, a meno di correzioni di cui terremo conto, si comporta come una particella classica. Questo tipo di descrizione è tipico della fisica dei semiconduttori. Bisogna però stare attenti a che processo si sta studiando: ad esempio, tale approccio non funziona per studiare l'assorbimento inter-banda in cui vogliamo studiare il passaggio di un elettrone dalla banda di valenza alla banda di conduzione, in quanto il concetto di banda non esiste classicamente; al contrario, tale approccio funziona quando

studiamo trasporto in corrente continua o modulato debolmente.

Ritornando al nostro sistema mesoscopico collegato ai due serbatoi, ci proponiamo di trovare la funzione di distribuzione degli elettroni in tale sistema.

Cerchiamo quindi una funzione<sup>(6)</sup>  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  tale che la quantità

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \frac{d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3},$$

cioè il prodotto tra essa e il volume elementare dello spazio delle fasi, ci dia la frazione di elettroni aventi posizione tra  $\mathbf{r}$  e  $d^3\mathbf{r}$  e impulso tra  $\mathbf{p}$  e  $d^3\mathbf{p}$  (la normalizzazione è fissata a 1 oppure a  $g_S$ ?).

Per trovare la funzione di distribuzione ne studiamo l'evoluzione temporale. Dopo un tempo  $dt$ , la funzione di distribuzione sarà  $f(\mathbf{r} + \mathbf{v} dt, \mathbf{p} + \mathbf{F} dt, t + dt)$ , dove  $\mathbf{v}$  è la velocità dell'elettrone e  $\mathbf{F}$  è la forza che agisce su di esso, generata dal campo elettromagnetico dovuto alla caduta di potenziale. Se non avvengono fenomeni di scattering, per il teorema di Liouville<sup>(7)</sup> la funzione di distribuzione rimane costante, ossia

$$f(\mathbf{r} + \mathbf{v} dt, \mathbf{p} + \mathbf{F} dt, t + dt) - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = 0$$

Se invece avvengono fenomeni di scattering, la funzione di distribuzione varia. Denotata con  $I_{\text{coll}}[f] dt$  tale differenza, dove  $I_{\text{coll}}[f]$  è detto integrale collisionale e tiene conto di tutti i processi di scattering, abbiamo che

$$f(\mathbf{r} + \mathbf{v} dt, \mathbf{p} + \mathbf{F} dt, t + dt) - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = I_{\text{coll}}[f] dt \quad (1.2)$$

Il membro destro dell'Equazione (1.2) rappresenta il termine quantistico nell'equazione che descrive il nostro sistema.

Consideriamo il membro di sinistra ed espandiamo al primo in ordine in  $dt$ , ottenendo<sup>(8)</sup>

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{r} + \mathbf{v} dt, \mathbf{p} + \mathbf{F} dt, t + dt) - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \\ &= f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} dt + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \mathbf{F} dt + \frac{\partial f}{\partial t} dt - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + o(dt)^2 \\ &\approx \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} dt + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \mathbf{F} dt + \frac{\partial f}{\partial t} dt \end{aligned}$$

Utilizzando quanto trovato, otteniamo

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \mathbf{F} + \frac{\partial f}{\partial t} = I_{\text{coll}}[f], \quad (1.3)$$

che è chiamata equazione di Boltzmann.

Puntualizziamo che in assenza del termine collisionale, l'equazione di Boltzmann prende il nome di equazione di Vlasov:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \mathbf{F} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (1.4)$$

(paragrafetto da sistemare spiegando meglio che nel sistema i cammini liberi medi e  $\lambda_F$  devono essere in relazione tale che  $\lambda_F$  deve essere molto più piccola dei liberi cammini medi ma questi devono essere abbastanza piccoli e quindi i processi di scattering abbastanza efficienti da randomizzare la fase della funzione d'onda e poter trascurare processi coerenti) Quindi, quando i processi di scattering sono trascurabili e dunque il

(6) Notiamo che la validità del concetto di funzione di distribuzione  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  poggia sull'assunzione fatta precedentemente su  $\lambda_F$ .

(7) E esso afferma che un volumetto  $d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{p}$  dello spazio delle fasi centrato in  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  evolve nello spazio delle fasi rimanendo invariato. (da sistemare)

(8) da fare il comando smallo per fare opiccolo calligrafico.

sistema si comporta in maniera pulita ma lo possiamo ancora trattare semiclassicamente. Si presti attenzione al fatto che tale fatto non è per niente banale, in quanto come abbiamo detto se un sistema è pulito vuol dire che sono trascurabili i processi di scattering, ma ciò implica che probabilmente si verificano processi coerenti, quindi fenomeni di interferenza quantistica, per non potremmo utilizzare questa trattazione. In ultima analisi, le situazioni in cui è possibile utilizzare l'Eq.(1.4) sono poche.

Torniamo adesso all'(1.3). E' utile esprimere la dipendenza da  $\mathbf{p}$  tramite le coordinate sferiche, dunque dividendo la dipendenza dalla parte angolare da quella radiale. In tali termini, la funzione di distribuzione sarà nella forma  $f(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{p}}, E)$ , dove abbiamo messo l'energia al posto del modulo  $p$  perché la relazione di dispersione è del tipo

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$$

dove  $m$  è la massa efficace dell'elettrone<sup>(9)</sup>.

In tale forma, il termine contenente la derivata rispetto a  $\mathbf{p}$  nell'Eq.(1.3) diventa

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{p}}} \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} \cdot \mathbf{F} + \frac{\partial f}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{p}} \cdot \mathbf{F}$$

Tuttavia, il primo termine del membro di destra risulta essere trascurabile, vedremo a breve perché.

Possiamo quindi scrivere

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{p}} \cdot \mathbf{F}$$

D'altra parte, il gradiente della relazione di dispersione rispetto all'impulso  $\mathbf{p}$  non è altro che la velocità di gruppo  $\mathbf{v}$ ,<sup>(10)</sup> per cui in definitiva abbiamo che

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial E} \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}$$

Supponiamo adesso che la forza sia dovuta soltanto al campo elettrico, dunque sia nella forma  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$  dove  $q$  è la carica. Allora, ricordando che  $\mathbf{E} = -\partial_{\mathbf{r}}\phi$ , per quanto detto il termine dell'(1.3) contenente  $\mathbf{F}$  diventa

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial E} \mathbf{v} \cdot \left( -q \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} \right) = \frac{\partial f}{\partial E} \left( -q \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} \right) \cdot \mathbf{v}$$

e dunque possiamo riscrivere l'Eq.(1.3) come

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial f}{\partial E} \left( -q \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} \right) \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial f}{\partial t} = I_{\text{coll}}[f]$$

ovvero, raggruppando i termini,

$$\left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - q \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f}{\partial E} \right) \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial f}{\partial t} = I_{\text{coll}}[f] \quad (1.5)$$

Se inglobiamo nell'energia la dipendenza del potenziale dalla posizione, il che corrisponde a dire che  $f$  ha una dipendenza del tipo  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, E - q\phi(\mathbf{r}))$ , il termine tra parentesi della (1.5) diventa proprio  $\partial f / \partial \mathbf{r}$ , per cui possiamo scrivere più sinteticamente

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial f}{\partial t} = I_{\text{coll}}[f] \quad (1.6)$$

(9) Infatti stiamo usando implicitamente l'approssimazione di elettroni liberi.

(10) Infatti, esplicitamente si ha

$$\nabla_{\mathbf{p}} \varepsilon(\mathbf{p}) = \nabla_{\mathbf{p}} \frac{\mathbf{p}^2}{2m} = \frac{\mathbf{p}}{m} \equiv \mathbf{v}$$

Osserviamo che se  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, E - q\phi(\mathbf{r}))$  si comportasse come una funzione di distribuzione di Fermi-Dirac, ciò significherebbe che nell'Eq.(1.1) al posto di  $\mu$  dovremmo scrivere  $\mu + q\phi(\mathbf{r})$ , cioè è come se ci ritrovassimo un potenziale chimico che dipende dalla posizione. Come vedremo, quando  $f$  prende la forma di una funzione di Fermi-Dirac efficace, tale  $\mu$  prenderà il nome di potenziale elettrochimico.

Prima di proseguire, facciamo una stima dell'ordine del termine relativo alla derivata rispetto a  $\hat{\mathbf{p}}$  che abbiamo trascurato, in modo da capire quanto è grande l'errore che commettiamo nel trascurarlo. Osserviamo che  $\partial f / \partial \hat{\mathbf{p}}$  è adimensionale perché  $f$  è una densità di probabilità, dunque possiamo concentrarci sulla parte  $\partial \hat{\mathbf{p}} / \partial \mathbf{p} \cdot \mathbf{F}$ : nella parte  $\partial \hat{\mathbf{p}} / \partial \mathbf{p}$ ,  $\hat{\mathbf{p}}$  non ha dimensioni, mentre  $\mathbf{p}$  ha le dimensioni di un impulso ed in particolare è dell'ordine dell'impulso di Fermi  $p_F$ ;  $F$  invece è una forza elettrica che è dell'ordine della carica moltiplicata per la differenza di tensione applicata divisa la lunghezza del campione. In definitiva abbiamo:

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{p}}} \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} \cdot \mathbf{F} \right] \sim \frac{1}{p_F} \frac{qV}{L}$$

Moltiplicando e dividendo per  $\frac{p_F}{m}$  otteniamo

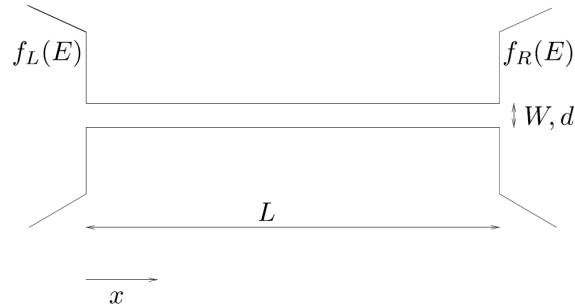
$$\frac{1}{p_F} \frac{qV}{L} = \frac{1}{p_F} \frac{qV}{L} \frac{p_F}{m} \frac{m}{p_F} = qV \frac{m}{p_F^2} \frac{1}{L} \frac{p_F}{m}$$

Notiamo che  $m/p_F^2$  è dell'ordine dell'inverso dell'energia di Fermi, ossia  $1/E_F$ , mentre  $p_F/m$  è dell'ordine della velocità di Fermi  $v_F$ . In definitiva otteniamo

$$\frac{1}{p_F} \frac{qV}{L} \sim \frac{qV}{E_F} \frac{v_F}{L}$$

Il termine  $v_F/L$  rappresenta la scala dell'inverso dei tempi tipici dell'Eq.(1.6), dunque per capire se tale termine è trascurabile dobbiamo guardare l'ordine di grandezza di  $qV/E_F$ . In un conduttore, l'energia di Fermi è tipicamente dell'ordine dell'eV o di frazioni dell'eV, mentre  $qV$  in genere è dell'ordine dei  $\mu\text{eV}$ , dunque tale termine risulta essere dell'ordine di  $10^{-6}$ , per cui è lecito trascurarlo. Precisiamo che omettere tale termine equivale sostanzialmente a trascurare il disturbo nella parte angolare della funzione di distribuzione dovuto a una tensione o ad un gradiente termico.

**Esempio 1.1** (Equazione di Boltzmann per un filo ballistico.). Consideriamo un filo quasi-unidimensionale come quello riportato nella figura seguente:<sup>(11)</sup>



Diciamo che tale sistema è quasi-unidimensionale perché supponia-

<sup>(11)</sup> Disegno da fare il LaTeX, ora mi secco.

mo che l'ampiezza  $W$  del filo sia molto minore della lunghezza  $L$  del filo stesso.

Supponiamo che non contenga impurità, sia perfettamente rettangolare e abbia bordi regolari, in modo che risulti  $I_{\text{coll}}[f] = 0$ . Nel limite statico, in cui  $\partial_t f = 0$ , l'Eq.(1.3) assumerà allora forma

$$\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{p}}, E) = 0$$

Supponendo che i serbatoi sinistro e destro seguano rispettivamente delle distribuzioni di Fermi-Dirac  $f_L(E)$  ed  $f_R(E)$ , la funzione di distribuzione sarà data da:

$$f(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{p}}, E) = \begin{cases} f_L(E) & \text{se } \hat{\mathbf{p}}_x < 0 \\ f_R(E) & \text{se } \hat{\mathbf{p}}_x > 0 \end{cases}$$

Il risultato trovato ci dice che, in assenza di collisioni, i due serbatoi restano indipendenti; inoltre gli elettroni iniettati da sinistra seguono la funzione di distribuzione del serbatoio sinistro anche nel sistema mesoscopico (cioè dentro il cavo) e gli elettroni iniettati da destra nel sistema avranno la funzione di distribuzione del serbatoio destro.<sup>(12)</sup>

## 1.2 Osservabili

Il motivo per cui siamo interessati a trovare la funzione di distribuzione è che possiamo esprimere le osservabili del sistema in termini di essa. In particolare, la densità di portatori di carica del sistema sarà data da<sup>(13)</sup>

$$n(\mathbf{r}) = g_s \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$$

dove  $g_s$  è la degenerazione di spin, che nel caso in esame è semplicemente pari a 2.

Analogamente, la densità di corrente sarà data da<sup>(14)</sup>

$$\mathbf{j}_c(\mathbf{r}) = -eg_s \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \mathbf{v}(\mathbf{p}) f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$$

Passando in coordinate polari possiamo riscrivere tale quantità come

$$\mathbf{j}_c(\mathbf{r}) = -eg_s \int dp p^2 \int \frac{d\hat{\mathbf{p}}}{(2\pi\hbar)^3} \mathbf{v}(\mathbf{p}) f(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{p}})$$

dove l'integrazione rispetto a  $\hat{\mathbf{p}}$  è esplicitamente data da

$$\int d\hat{\mathbf{p}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta$$

Se adesso esprimiamo  $p^2$  come  $p^2 = 2mE$ , da cui segue che  $2p dp = 2m dE$ , abbiamo che

$$dp p^2 = \sqrt{2} m^{\frac{3}{2}} \sqrt{E} dE$$

e inoltre possiamo riscrivere  $\mathbf{j}_c$  come

$$\mathbf{j}_c(\mathbf{r}) = -e \int dE N(E) \int \frac{d\hat{\mathbf{p}}}{4\pi} \mathbf{v}(\mathbf{p}) f(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{p}})$$

(12) Così come riportato in [Hei13], ciò significa che "Il sistema di elettroni all'interno del filo è quindi composto da elettroni che si muovono verso sinistra e elettroni che si muovono verso destra, che non si mescolano in assenza di diffusione e che sono distribuiti in energia secondo le funzioni di distribuzione dei serbatoi da cui provengono". Infatti integrando  $f$  rispetto all'impulso otteniamo la densità di probabilità di trovare un elettrone in posizione  $\mathbf{r}$ , cioè proprio la densità di portatori.

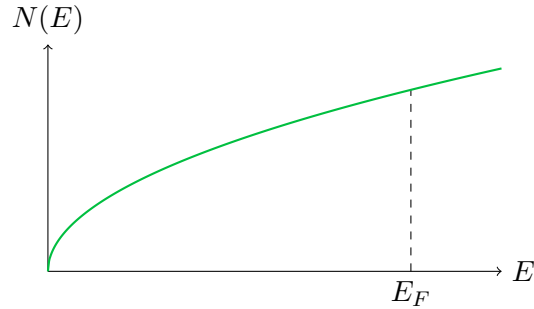
(14) Abbiamo scritto la velocità come  $\mathbf{v}(\mathbf{p})$  per sottolineare che essa è data da  $\nabla_p \varepsilon(\mathbf{p})$ .

dove

$$N(E) = \frac{\sqrt{2Em^{\frac{3}{2}}}}{\pi^2\hbar^3}$$

è la densità degli stati di una particella libera in un sistema tridimensionale.

**1:00:15 circa** Graficamente il comportamento di  $N(E)$  in funzione dell'energia è il seguente:



Dal grafico si evince che, se operiamo in una finestra di energia attorno all'energia di Fermi spostandoci da essa al massimo di una quantità  $\pm kBT$ , poiché l'energia di Fermi è dell'ordine della frazione di eV, mentre la temperatura ambiente (cioè circa 300 K) corrisponde a 25 meV, è lecito trattare la densità degli stati come approssimativamente costante.<sup>(15)</sup>

<sup>(15)</sup> Da ora in poi, tratteremo la densità degli stati come costante. Quando non sarà possibile fare ciò lo specificheremo.

### 1.3 Approssimazione di tempo di rilassamento



# Bibliografia

## Libri di testo

- [Hei13] T.T. Heikkilä. *The Physics of Nanoelectronics: Transport and Fluctuation Phenomena at Low Temperatures*. Oxford Master Series in Physics. OUP Oxford, 2013. ISBN: 9780199592449.

