UNIVERSITÀ degli STUDI di CATANIA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Ettore Majorana"

NUMERICAL METHODS FOR PHYSICS

A cura di L. Romano & S. Arena

anno 2022

Indice

1 Approssimazione e interpolazione di funzioni

Supponiamo di avere $n+1$ dati (x_i, y_i) con $i = 0, \dots, n$

$$\chi^2(\underline{a}) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n} \left[y_i - f(\underline{x}_i, \underline{a}) \right]^2 \geq 0$$

$$\begin{cases} c_0 + c_1 x_0 + c_2 x_0^2 + \ldots + c_n x_0^n = y_0 \\ c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + \ldots + c_n x_1^n = y_1 \\ \vdots \\ c_0 + c_1 x_n + c_2 x_n^2 + \ldots + c_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

Possiamo esprimere il sistema come

$$V \underline{c} = \underline{y}$$

dove

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

V è detta **matrice di Vandermonde**. Poiché $x_i \neq x_j \quad \forall\, i \neq j$, ogni colonna è diversa e quindi il determinante è non nullo. Per calcolarlo sottraiamo ad ogni colonna la precedente moltiplicata per x_0:

$$\det(V) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 - x_0 & x_0^2 - x_0^2 & \ldots & x_0^n - x_0^n \\ 1 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0 x_1 & \ldots & x_1^n - x_0 x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_0 x_n & \ldots & x_n^n - x_0 x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\implies \det(V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & (x_1 - x_0) x_1 & \ldots & (x_1 - x_0) x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_0 & (x_n - x_0) x_n & \ldots & (x_n - x_0) x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

dividendo la j-esima riga (tranne la prima) per $x_j - x_0$ e portando fuori dalla matrice otteniamo

$$\det(V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \underbrace{(x_1 - x_0) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_0)}_{= \prod_{j=2}^{n} (x_j - x_0)}$$

La matrice risultante non dipende più da x_0. Reiterando il processo possiamo eliminare la dipendenza da ogni x_i e in forma compatta il determinante si potrà scrivere come

$$\det V = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

Tale espressione ci dice che se i punti sono tutti distinti il determinante della matrice è diverso da zero. Si può anche scrivere come

$$\det V = \prod_{j=0}^{n-1} \left(\prod_{i=j+1}^{n} (x_i - x_j) \right)$$

non ho capito come si passa a questo vabbè

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

dove

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

nota: essendo così definito, il denominatore è sempre diverso da zero.
L'ordine di ogni polinomio L_i è proprio n

$$L_i = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

Si ha che

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq i \\ 1 & \text{se } j = i \end{cases} \equiv \delta_{ij}$$

infatti nel primo caso a numeratore ci sarà un termine nullo, nel secondo caso numeratore e denominatore saranno uguali.
In definitiva abbiamo che

$$P_n(x_j) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x_j) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \delta_{ij} = f(x_j) \quad \forall\, j$$

1.1 Formula di Newton per il polinomio interpolante

Tale metodo si adopera quando abbiamo trovato la soluzione per n punti e ne includiamo un altro. Supposto quindi di avere il polinomio $P_{n-1}(x)$ che passa per $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$, poniamo

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n w_{n-1}(x)$$

dove

$$w_{n-1}(x) = \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i) \quad , \quad a_n = \frac{f(x_n) - P_{n-1}(x_n)}{w_{n-1}(x_n)}$$

w_{n-1} è un *polinomio monico*, cioè un polinomio tale che il coefficiente del termine di grado massimo è pari a 1. Inoltre ha grado n.

Proviamo innanzitutto che il nuovo polinomio passa per i primi $n-1$ punti.
Posto $k \leq n-1$ si ha

$$w_{n-1}(x_k) = 0$$
$$P_n(x_k) = P_{n-1}(x_k) + a_n \underbrace{w_{n-1}(x_k)}_{=0} = P_{n-1}(x_k) \equiv f(x_k)$$

Proviamo adesso che passa per il nuovo punto:

$$P_n(x_n) = P_{n-1}(x_n) + a_n w_{n-1}(x_n) = P_{n-1}(x_n) + \frac{f(x_n) - P_{n-1}(x_n)}{w_{n-1}(x_n)} w_{n-1}(x_n) =$$
$$= P_{n-1}(x_n) + f(x_n) - P_{n-1}(x_n) = f(x_n)$$