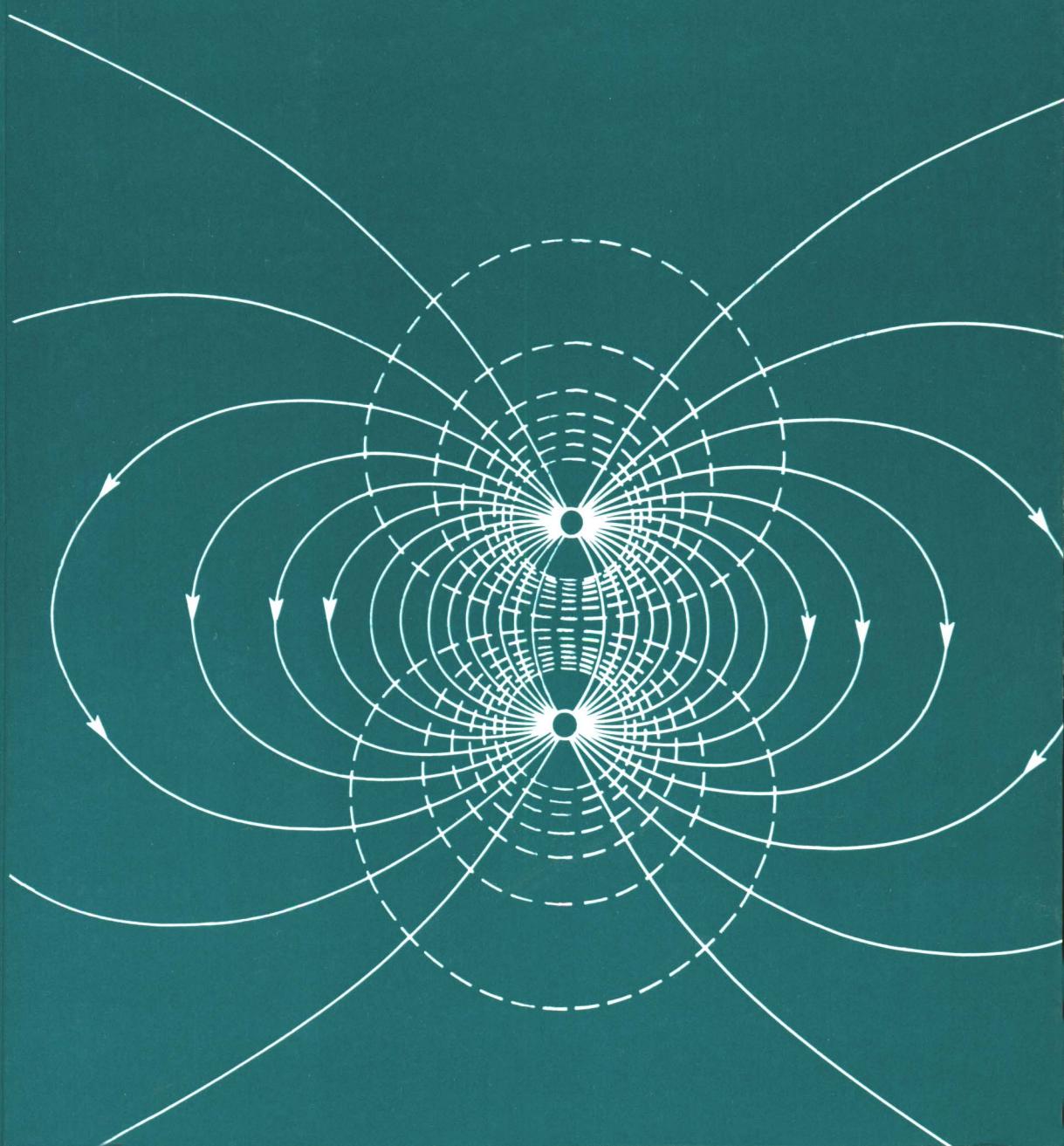


David Halliday  
Robert Resnick

FIZYKA 2



Książka jest kolejnym wznowieniem podręcznika fizyki ogólnej przeznaczonego dla studentów pierwszych lat studiów różnych wydziałów uczelni wyższych (uniwersytetów, politechnik, WSP, akademii rolniczych, akademii medycznych itp.) oraz uczniów szkół średnich i nauczycieli. Podane w niej zagadnienia są bardzo oryginalne, poparte wieloma udanymi rysunkami schematycznymi i przykładami. Na końcu każdego rozdziału zamieszczone są pytania i zadania.

T . 2

ISBN 83-01-09324-2



9 788301 093242

T . 1-2

ISBN 83-01-09322-6



9 788301 093228

**David Halliday  
Robert Resnick FIZYKA**

**Tom 2**

Wydanie jedenaste



**Wydawnictwo Naukowe PWN • Warszawa 1999**

Dane oryginału:

David Halliday, Robert Resnick  
PHYSICS, Part II  
John Wiley & Sons

Autorized translation from  
English language edition published  
by John Wiley & Sons, Inc., New York  
Copyright © 1960, 1962, 1966, 1978 by  
John Wiley and Sons, Inc. All rights reserved

Odpowiedzi do zadań o numeracji parzystej podał  
*Edward Derringh*

Z języka angielskiego tłumaczyli  
**TERESA KANIEWSKA**  
**WOJCIECH RATYŃSKI**

Okładkę projektował  
*Aleksander Januszewski*

© Copyright for the Polish edition by  
Państwowe Wydawnictwo Naukowe  
Warszawa 1984

Copyright © for the Polish edition  
by Wydawnictwo Naukowe PWN Sp. z o.o.  
Warszawa 1996

Copyright © for the Polish edition  
by Wydawnictwo Naukowe PWN SA  
Warszawa 1998

Wydawnictwo Naukowe PWN SA  
ul. Miodowa 10, 00-251 Warszawa  
Tel.: 69 54 321, e-mail: pwn@pwn.com.pl  
www.pwn.com.pl

ISBN 83-01-09322-6 t. 1-2  
ISBN 83-01-09324-2 t. 2

# *Spis rzeczy*

<b>26. Ładunek i materia</b> . . . . .	<b>9</b>
26-1. Elektromagnetyzm. Wstęp historyczny . . . . .	9
26-2. Ładunek elektryczny . . . . .	10
26-3. Przewodniki i izolatory . . . . .	11
26-4. Prawo Coulomba . . . . .	12
26-5. Kwantowa natura ładunku . . . . .	16
26-6. Ładunek i materia . . . . .	17
26-7. Zasada zachowania ładunku . . . . .	19
Pytania . . . . .	21
Zadania . . . . .	23
<b>27. Pole elektryczne</b> . . . . .	<b>26</b>
27-1. Pole elektryczne . . . . .	26
27-2. Natężenie pola elektrycznego $E$ . . . . .	28
27-3. Linie sił . . . . .	28
27-4. Znajdowanie natężenia $E$ pola elektrycznego . . . . .	30
27-5. Ładunek punktowy w polu elektrycznym . . . . .	37
27-6. Dipol w polu elektrycznym . . . . .	39
Pytania . . . . .	41
Zadania . . . . .	42
<b>28. Prawo Gaussa</b> . . . . .	<b>49</b>
28-1. Wstęp . . . . .	49
28-2. Strumień . . . . .	49
28-3. Strumień pola elektrycznego . . . . .	51
28-4. Prawo Gaussa . . . . .	54
28-5. Prawo Gaussa i prawo Coulomba . . . . .	55
28-6. Przewodnik izolowany . . . . .	56
28-7. Doświadczalne potwierdzenie praw Gaussa i Coulomba . . . . .	57
28-8. Prawo Gaussa i niektóre jego zastosowania . . . . .	60
28-9. Jądrowy model atomu . . . . .	64
Pytania . . . . .	66
Zadania . . . . .	68
<b>29. Potencjał elektryczny</b> . . . . .	<b>73</b>
29-1. Potencjał elektryczny . . . . .	73
29-2. Potencjał i pole elektryczne . . . . .	76
29-3. Potencjał pochodzący od ładunku punktowego . . . . .	79

29-4. Układ ładunków punktowych . . . . .	81
29-5. Potencjał dipola . . . . .	82
29-6. Potencjalna energia elektryczna . . . . .	85
29-7. Obliczanie natężenia pola elektrycznego $\mathbf{E}$ na podstawie potencjału elektrycznego $V$ . . . . .	87
29-8. Przewodnik izolowany . . . . .	91
29-9. Generator elektrostatyczny . . . . .	94
Pytania . . . . .	96
Zadania . . . . .	98
<b>30. Kondensatory i dielektryki</b> . . . . .	<b>105</b>
30-1. Pojemność . . . . .	105
30-2. Obliczanie pojemności . . . . .	107
30-3. Energia pola elektrycznego . . . . .	111
30-4. Kondensator płaski z dielektrykiem . . . . .	113
30-5. Dielektryki. Pogląd atomistyczny . . . . .	116
30-6. Dielektryki i prawo Gaussa . . . . .	119
30-7. Trzy wektory elektryczne . . . . .	121
Pytania . . . . .	124
Zadania . . . . .	126
<b>31. Natężenie i opór prądu elektrycznego</b> . . . . .	<b>133</b>
31-1. Natężenie i gęstość prądu elektrycznego . . . . .	133
31-2. Opór, opór właściwy i przewodnictwo właściwe . . . . .	136
31-3. Prawo Ohma . . . . .	140
31-4. Prawo Ohma — pogląd atomistyczny . . . . .	142
31-5. Przemiany energii w obwodzie elektrycznym . . . . .	145
Pytania . . . . .	147
Zadania . . . . .	148
<b>32. Siła elektromotoryczna a obwody z prądem</b> . . . . .	<b>152</b>
32-1. Siła elektromotoryczna . . . . .	152
32-2. Obliczanie natężenia prądu . . . . .	155
32-3. Inne proste obwody zamknięte (o jednym oczku) . . . . .	156
32-4. Różnice potencjałów . . . . .	158
32-5. Obwody złożone (o wielu oczkach) . . . . .	160
32-6. Pomiary natężeń prądów i różnic potencjałów . . . . .	163
32-7. Układ kompensacyjny . . . . .	164
32-8. Obwody $RC$ . . . . .	165
Pytania . . . . .	170
Zadania . . . . .	171
<b>33. Pole magnetyczne</b> . . . . .	<b>178</b>
33-1. Pole magnetyczne . . . . .	178
33-2. Definicja indukcji magnetycznej $\mathbf{B}$ . . . . .	179
33-3. Działanie pola magnetycznego na przewodnik z prądem . . . . .	183
33-4. Moment sił działających na zamknięty obwód z prądem (moment skręcający) . . . . .	186
33-5. Efekt Halla . . . . .	190
33-6. Ładunki krążące po orbitach . . . . .	192
33-7. Cyklotrony i synchrocyklotrony . . . . .	194
33-8. Odkrycie elektronu . . . . .	198
Pytania . . . . .	199
Zadania . . . . .	201
<b>34. Prawo Ampère'a</b> . . . . .	<b>209</b>
34-1. Prawo Ampère'a . . . . .	209

34-2. Indukcja magnetyczna $\mathbf{B}$ w otoczeniu długiego drutu . . . . .	213
34-3. Linie indukcji magnetycznej . . . . .	215
34-4. Dwa przewodniki równoległe . . . . .	217
34-5. Wektor indukcji magnetycznej $\mathbf{B}$ dla solenoidu . . . . .	219
34-6. Prawo Biota-Savarta . . . . .	223
Pytania . . . . .	227
Zadania . . . . .	229
<b>35. Prawo indukcji Faradaya</b> . . . . .	<b>237</b>
35-1. Doświadczenia Faradaya . . . . .	237
35-2. Prawo indukcji Faradaya . . . . .	239
35-3. Reguła Lenza . . . . .	240
35-4. Indukcja elektromagnetyczna. Rozważania ilościowe . . . . .	242
35-5. Zmienne pole magnetyczne . . . . .	246
35-6. Betatron . . . . .	250
35-7. Indukcja a ruch względny . . . . .	252
Pytania . . . . .	256
Zadania . . . . .	259
<b>36. Indukcyjność</b> . . . . .	<b>266</b>
36-1. Indukcyjność . . . . .	266
36-2. Obliczanie indukcyjności . . . . .	267
36-3. Obwód $LR$ . . . . .	269
36-4. Energia a pole magnetyczne . . . . .	273
36-5. Gęstość energii a pole magnetyczne . . . . .	275
36-6. Indukcja wzajemna . . . . .	277
Pytania . . . . .	279
Zadania . . . . .	280
<b>37. Magnetyczne właściwości materii</b> . . . . .	<b>284</b>
37-1. Biegunki i dipole . . . . .	284
37-2. Prawo Gaussa dla pola magnetycznego . . . . .	289
37-3. Magnetyzm Ziemi . . . . .	289
37-4. Paramagnetyzm . . . . .	292
37-5. Diamagnetyzm . . . . .	295
37-6. Ferromagnetyzm . . . . .	298
37-7. Magnetyzm jądrowy . . . . .	302
37-8. Trzy wektory magnetyczne . . . . .	304
Pytania . . . . .	310
Zadania . . . . .	311
<b>38. Organię elektromagnetyczne</b> . . . . .	<b>314</b>
38-1. Organię obwodu $LC$ . . . . .	314
38-2. Analogia do prostego ruchu harmonicznego . . . . .	317
38-3. Organię elektromagnetyczne. Opis ilościowy . . . . .	318
38-4. Układy drgające o elementach skupionych i elementach rozłożonych . . . . .	322
38-5. Elektromagnetyczna wnęka rezonansowa . . . . .	324
Pytania . . . . .	327
Zadania . . . . .	328
<b>39. Prądy zmienne</b> . . . . .	<b>331</b>
39-1. Wstęp . . . . .	331
39-2. Elementy $RLC$ rozwijażane pojedynczo . . . . .	332
39-3. Pojedynczy obwód $RLC$ . . . . .	337
39-4. Moc w obwodzie prądu zmennego . . . . .	340

39-5. Rezonans w obwodach prądu przemiennego	342
39-6. Prostowniki oraz filtry prądu przemiennego	344
39-7. Transformator	348
Pytania	351
Zadania	353
<b>40. Równania Maxwella</b>	<b>357</b>
40-1. Podstawowe równania elektromagnetyzmu	357
40-2. Indukowane pola magnetyczne	359
40-3. Prąd przesunięcia	361
40-4. Równania Maxwella	362
40-5. Równania Maxwella a drgania we wnętrzu	364
Pytania	367
Zadania	367
<b>41. Fale elektromagnetyczne</b>	<b>371</b>
41-1. Wstęp	371
41-2. Widmo fal elektromagnetycznych	371
41-3. Fale elektromagnetyczne z przestrzeni pozaziemskiej	373
41-4. Linie transmisyjne	376
41-5. Kabel koncentryczny. Pola i prądy	378
41-6. Falowód	381
41-7. Promieniowanie	383
41-8. Fale rozchodzące się w przestrzeni a równania Maxwella	384
41-9. Wektor Poyntinga	390
Pytania	392
Zadania	394
<b>42. Natura i rozchodzenie się światła</b>	<b>398</b>
42-1. Światło a widmo elektromagnetyczne	398
42-2. Energia i pęd	399
42-3. Prędkość światła	403
42-4. Poruszające się źródła i obserwatorzy	407
42-5. Efekt Dopplera	410
Pytania	413
Zadania	414
<b>43. Odbicie i załamanie. Plaskie fale i płaskie powierzchnie</b>	<b>418</b>
43-1. Odbicie i załamanie	418
43-2. Zasada Huygensa	423
43-3. Zasada Huygensa a prawo odbicia	424
43-4. Zasada Huygensa a prawo załamania	425
43-5. Całkowite wewnętrzne odbicie	428
43-6. Zasada Fermata	432
Pytania	434
Zadania	435
<b>44. Odbicie i załamanie. Fale kuliste i powierzchnie kuliste</b>	<b>439</b>
44-1. Optyka geometryczna i falowa	439
44-2. Fale kuliste. Zwierciadło płaskie	442
44-3. Fale kuliste. Zwierciadło kuliste	446
44-4. Kuliste powierzchnie załamujące	452
44-5. Soczewki cienkie	457
44-6. Przyrządy optyczne	464

<b>Pytania</b>	469
<b>Zadania</b>	472
<b>45. Interferencja</b>	480
45-1. Doświadczenie Younga	480
45-2. Koherencja	485
45-3. Natężenie w doświadczeniach Younga	488
45-4. Dodawanie zaburzeń falowych	491
45-5. Interferencja w cienkich błonkach	493
45-6. Odwzorczość optyczna i zmiany fazy przy odbiciu	498
45-7. Interferometr Michelsona	500
45-8. Interferometr Michelsona a rozchodzenie się światła	502
<b>Pytania</b>	504
<b>Zadania</b>	505
<b>46. Dyfrakcja</b>	511
46-1. Wstęp	511
46-2. Pojedyncza szczelina	513
46-3. Pojedyncza szczelina. Rozważania jakościowe	517
46-4. Pojedyncza szczelina. Rozważania ilościowe	519
46-5. Dyfrakcja na okrągłym otworze	522
46-6. Równoczesna interferencja i dyfrakcja na dwóch szczelinach	526
<b>Pytania</b>	530
<b>Zadania</b>	532
<b>47. Siatki dyfrakcyjne i widma</b>	536
47-1. Wstęp	536
47-2. Układ wielu szczelin	536
47-3. Siatki dyfrakcyjne	540
47-4. Zdolność rozdzielcza siatki dyfrakcyjnej	544
47-5. Dyfrakcja promieni Roentgena (promieni X)	547
47-6. Prawo Bragga	552
<b>Pytania</b>	554
<b>Zadania</b>	556
<b>48. Polaryzacja</b>	561
48-1. Polaryzacja	561
48-2. Płytki polaryzujące	563
48-3. Polaryzacja przez odbicie	566
48-4. Załamanie podwójne (dwójlomność)	568
48-5. Polaryzacja kołowa	575
48-6. Moment pędu światła	579
48-7. Rozpraszanie światła	579
48-8. Rozpraszanie podwójne	581
<b>Pytania</b>	581
<b>Zadania</b>	583
<b>49. Światło a fizyka kwantowa</b>	586
49-1. Źródła światła	586
49-2. Ciało doskonale czarne	587
49-3. Prawo Plancka dla promieniowania ciała doskonale czarnego	589
49-4. Efekt fotolektryczny	592
49-5. Fotonowa teoria Einsteina	594
49-6. Efekt Comptona	596
49-7. Widma liniowe	600

49-8. Modele atomu — model Bohra atomu wodoru . . . . .	601
49-9. Zasada odpowiedniości . . . . .	606
Pytania . . . . .	608
Zadania . . . . .	610
<b>50. Fale i cząstki . . . . .</b>	<b>615</b>
50-1. Fale materii . . . . .	615
50-2. Struktura atomu i fale stojące . . . . .	618
50-3. Mechanika falowa . . . . .	619
50-4. Znaczenie funkcji $\Psi$ . . . . .	622
50-5. Zasada nieoznaczoności . . . . .	623
Pytania . . . . .	627
Zadania . . . . .	628
<b>Uzupełnienie VI. Różniczkowa postać równań Maxwella oraz elektromagnetyczne równanie falowe . . . . .</b>	<b>631</b>
VI-1. Wstęp . . . . .	631
VI-2. Operator $\nabla$ . . . . .	632
VI-3. Równania Maxwella w postaci różniczkowej — I . . . . .	633
VI-4. Równania Maxwella w postaci różniczkowej — II . . . . .	634
VI-5. Równanie falowe . . . . .	635
<b>Dodatek K. Nagrody Nobla w dziedzinie fizyki . . . . .</b>	<b>637</b>
<b>Odpowiedzi do zadań o parzystych numerach . . . . .</b>	<b>642</b>
<b>Skorowidz nazwisk . . . . .</b>	<b>651</b>
<b>Skorowidz rzeczowy . . . . .</b>	<b>655</b>

# 26. Ładunek i materia

## 26-1. Elektromagnetyzm. Wstęp historyczny

Początki nauki o elektryczności sięgają czasów Talesa z Miletu (VI wiek p.n.e.), który obserwował przyciąganie kawałków trawy przez potarty bursztyn. Badania nad magnetyzmem zaczęły się od chwili zaobserwowania faktu, że niektóre występujące w przyrodzie „kamienie” (magnetyt) przyciągają żelazo. Elektryczność i magnetyzm rozwijały się zupełnie niezależnie od siebie aż do roku 1820, kiedy Hans Christian Oersted (1777–1851) zauważył, że *prąd elektryczny* w drucie może wpływać na zachowanie się *igły magnetycznej kompasu* (paragraf 33-1).

Zapoczątkowana wówczas nauka o elektromagnetyzmie rozwijała się dzięki pracom licznych badaczy, do których przede wszystkim zaliczamy Michaela Faradaya (1791–1867). Podstawowe prawa elektromagnetyzmu sformułował w formie obowiązującej do dnia dzisiejszego James Clerk Maxwell (1831–1879). Prawa te, zwane *równaniami Maxwella*, podane są w tablicy 40-2. Równania Maxwella spełniają w elektromagnetyzmie tę samą rolę, co równania ruchu Newtona i prawo powszechnego ciążenia w mechanice.

Chociaż Maxwell oparł swoją syntezę nauki o elektromagnetyzmie na pracach poprzedników, jego własny wkład jest bardzo istotny. Dowódł on, że światło ma naturę elektromagnetyczną i że jego prędkość możemy określić na podstawie czysto elektrycznych i magnetycznych pomiarów. W ten sposób optyka została ściśle powiązana z elektrycznością i magnetyzmem. Zakres zastosowań równań Maxwella jest bardzo szeroki i obejmuje, między innymi, podstawowe zasady działania wielu urządzeń elektromagnetycznych i optycznych, takich jak: silniki elektryczne, cyklotrony, maszyny matematyczne, radio, telewizję, radar, mikroskopy i teleskopy.

Rozwój klasycznej nauki o elektromagnetyzmie oraz optyce nie zakończył się na pracach Maxwella. Fizyk angielski Oliver Heaviside (1850–1925), a zwłaszcza fizyk holenderski H. A. Lorentz (1853–1928) przyczynili się znacznie do wyjaśnienia teorii Maxwella. Heinrich Hertz\* (1857–1894) uczynił wielki krok naprzód, wytwarzając w laboratorium elektromagnetyczne „fale Maxwella” przewidziane przez teorię Maxwella dwadzieścia kilka lat wcześniej. Obecnie fale Maxwella nazwalibyśmy krótko *falami radiowymi*. Prak-

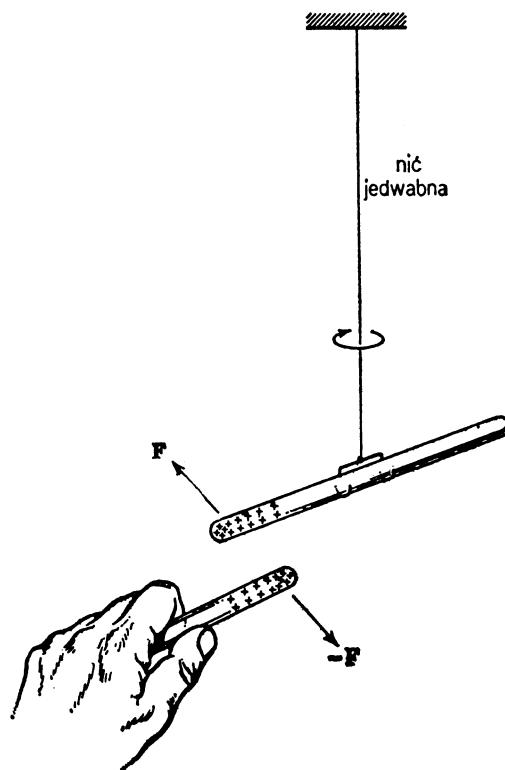
\* Heinrich Hertz P. i E. Morrison, *Scientific American*, December 1957.

tyczne zastosowanie dla fal elektromagnetycznych Maxwella–Hertza znalazły Marconi i inni badacze.

Ostatnio badania nad elektromagnetyzmem poszły w dwóch kierunkach. Równania Maxwella znajdują stałe i powszechnie zastosowanie w technice oraz w szerokim zakresie praktycznych zagadnień. Z drugiej strony w badaniach teoretycznych czynione są wysiłki nad takim ich uogólnieniem, aby teoria elektromagnetyzmu stała się szczególnym przypadkiem bardziej ogólnej teorii. Taka teoria powinna również obejmować teorię grawitacji i fizyki kwantowej. Dotychczas jednak tego typu syntezy nie udało się osiągnąć.

## 26-2. Ładunek elektryczny\*

Cały dalszy ciąg tego rozdziału poświęcony jest ładunkowi elektrycznemu i jego powiązaniu z materią. Możemy wykazać, że istnieją dwa rodzaje ładunków. Pocieramy pałeczkę szklaną jedwabiem i wieszamy ją na długiej nici jedwabnej, jak na rys. 26-1. Jeżeli drugą tak samo potartą pałeczkę szklaną przybliżymy do wiszącej, to zauważymy wz-



Rys. 26-1. Dwa dodatnio naładowane pręty szklane odpychają się

\* Aby zapoznać się z praktycznymi zastosowaniami statycznych ładunków elektrycznych, takich jak strącanie unoszących się pyłów, rozpylanie farby, elektrostatyczne kopiarki itd. zobacz: A. W. Bright, *Modern Electrostatics Physics Education*, 9, 381 (1974); A. D. Moore, *Electrostatics Scientific American*, March 1972.

jemne *odpychanie* się pałeczek. Z drugiej strony, potarta futerkiem pałeczka plastikowa (np. ebonit) będzie *przyciągać* pałeczkę szklaną. Natomiast dwie pałeczki plastikowe będą się nawzajem odpychać. Fakty te tłumaczymy przyjmując, że proces pocierania wytwarza na przetach *ładunki elektryczne*, które działają na siebie pewnymi siłami. Z różnych kierunków działania tych sił wnosimy, że ładunki szkła i plastiku muszą mieć inną naturę.

Benjamin Franklin (1706–1790), który między innymi interesował się również fizyką (był pierwszym amerykańskim fizykiem), nadał ładunkom elektrycznym nazwy, które utrzymały się do dzisiaj: *ładunki dodatnie* to takie, jakie gromadzą się na szkle, *ujemne* – takie, jakie gromadzą się na potartym ebonicie. Podsumowując omówione doświadczenia możemy powiedzieć, że *ładunki jednoimienne odpychają się, a różnoimienne – przyciągają*.

Zjawiska elektryczne obserwujemy nie tylko w przypadku szkła potartego jedwabiem i plastiku potartego suknem albo futerkiem. Każda substancja potarta przez inną, w odpowiednich warunkach, naładowuje się elektrycznie do pewnego stopnia. Porównując ten nieznany ładunek z ładunkiem nagromadzonym na pałeczce szklanej potartej jedwabiem lub pałeczce plastikowej potartej futrem mamy możliwość określenia jego znaku.

Według współczesnego poglądu na budowę materii zawiera ona w stanie normalnym, albo inaczej – obojętnym, równe ilości elektryczności dodatniej i ujemnej. Jeżeli takie dwa ciała jak szkło i jedwab potrzebują o siebie, pewna niewielka ilość ładunku elektrycznego przejdzie z jednego ciała na drugie i ciała te z obojętnych staną się naładowanymi. W podobnym przykładzie szkło naładowuje się dodatnio, a jedwab ujemnie.

### 26-3. Przewodniki i izolatory

Przez pocieranie wełną trzymanego w ręku pręta metalowego nie możemy go naładować. Jeżeli jednak ten sam pręt umocujemy na szklanej albo na plastikowej podstawce, tak aby nie dotykał rąk podczas pocierania, to naładowanie takiego pręta staje się możliwe. Dla wyjaśnienia tego faktu przyjmujemy, że metale, ciało ludzkie i ziemia są dobrymi przewodnikami elektryczności, a szkło, sztuczne tworzywa itp. są *izolatorami* (nazywamy je także *dielektrykami*).

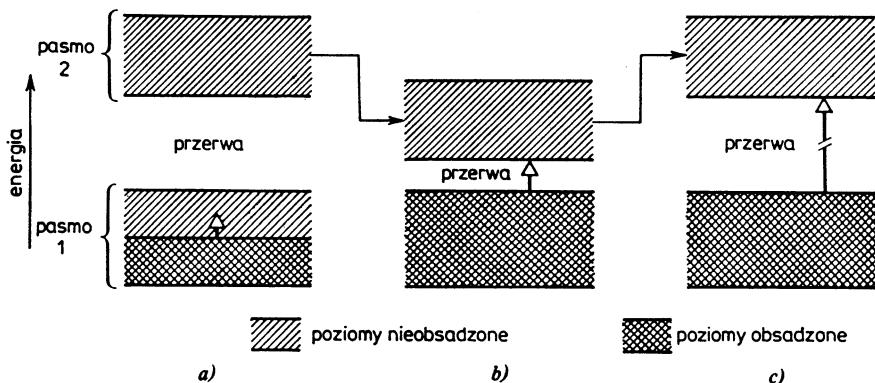
W przewodnikach ładunki elektryczne mogą się swobodnie poruszać wewnętrz przewodnika, natomiast w izolatorach ładunki te są unieruchomione. Mimo że w przyrodzie nie ma doskonałych izolatorów, zdolność izolacyjna stopionego kwarcu jest około  $10^{25}$  razy większa niż miedzi. Dlatego też w wielu praktycznych zagadnieniach pewne materiały zachowują się tak, jakby były doskonałymi izolatorami.

Pomysłowe doświadczenie pozwalające obserwować zjawisko zwane *efektem Halla* (patrz paragraf 33-5) wskazuje na to, że w metalach mogą się swobodnie poruszać tylko ładunki ujemne. Ładunki dodatnie są nieruchome, podobnie jak w szkle i każdym innym dielektryku. Rzeczywistymi nośnikami ładunku elektrycznego w metalach są *elektrony swobodne*. Kiedy oddzielne atomy łączą się tworząc metal, najbardziej zewnętrzne elektrony atomów przestają być związane z poszczególnymi atomami i mogą się swobodnie poruszać w całej objętości metalu. W niektórych przewodnikach, takich jak elektrolity, mogą się poruszać zarówno ładunki dodatnie, jak i ujemne.

Istnieje pewna grupa materiałów zwanych *półprzewodnikami*, które pod względem przewodnictwa zajmują miejsce pośrednie pomiędzy przewodnikami a izolatorami. Najbardziej znany przykładami pół-

przewodników są german i krzem. Półprzewodniki znajdują wiele praktycznych zastosowań, między innymi do wyróżnienia tranzystorów. Jednak bez zrozumienia podstawowych pojęć fizyki kwantowej trudno byłoby opisać zasadnicze właściwości półprzewodników. Rysunek 26-2 jednakże ilustruje zasadnicze cechy rozróżniające przewodniki, półprzewodniki i izolatory.

W ciałach stałych, elektrony mają energie ograniczone do pewnych poziomów, które należą do pewnych pasm. Przedziały pomiędzy pasmami są zabronione, tzn. że elektrony w ciele stałym nie mogą mieć tych energii. Elektrony są przypisane po dwa do każdego poziomu i nie mogą zwiększyć swojej energii (co znaczy, że nie mogą poruszać się swobodnie poprzez ciało stałe) chyba że są wolne łatwo dostępne poziomy przy wyższych energiach; wtedy mogą się poruszać.



Rys. 26-2. Schematyczna ilustracja: (a) przewodnika, (b) czystego półprzewodnika, (c) izolatora. W (b) przerwa energetyczna jest względnie mała, a w (c) względnie duża. Przewodnictwo elektryczne w czystych półprzewodnikach można znacznie powiększyć dodając małe ilości innych pierwiastków takich jak arsen albo bor. Sam proces dodawania zachodzi w wyniku dyfuzji termicznej albo implantacji

Rysunek 26-2a przedstawia przewodnik, np. miedź. Pasmo 1 jest tylko częściowo zajęte, tak że elektrony mogą łatwo przejść do wyższych poziomów, a zatem poruszać się przez ciało stałe. Rysunek 26-2b przedstawia czysty półprzewodnik, np. krzem, w którym pasmo 1 jest całkowicie wypełnione, ale pasmo 2 jest tak energetycznie blisko, że elektrony mogą łatwo „przeskoczyć” na niezapełnione poziomy tego pasma (elektrony mogą np. absorbować energię z fluktuacji termicznych). Rysunek 26-2c przedstawia izolator, np. chlorek sodu. W tym przypadku pasmo 1 jest również zajęte, ale pasmo 2 jest energetycznie za wysoko nad pasmem 1, aby pozwolić jakiekolwiek znaczącej liczbie elektronów pasma 1 przeskoczyć tę przerwę energetyczną.

#### 26-4. Prawo Coulomba

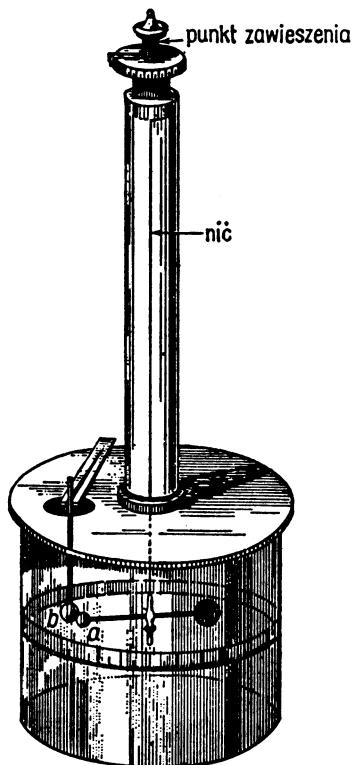
Charles Augustin Coulomb (1736–1806) w roku 1785 zmierzył po raz pierwszy wielkość sił elektrycznych, przyciągających i odpychających i sformułował prawo, które tymi siłami rządzi. Pomiary wykonał on za pomocą przyrządu przedstawionego na rys. 26-3. Jest to *waga skręceń* podobna do przedstawionej na rys. 26-1, z tym że ładunki gromadzą się nie na pręcie, lecz na dwóch kuleczkach *a* i *b*.

Jeżeli kuleczki *a* i *b* są naładowane, to siła elektryczna działająca na kuleczkę *a* będzie dążyć do skręcenia nici wagi skręceń. Coulomb zlikwidował efekt tego skręcenia obracając nici o kąt  $\theta$ , tak aby kulki *a* i *b* utrzymać w stałej, zadanej odległości od siebie. Ten kąt  $\theta$  jest zatem względną miarą siły elektrycznej działającej na ładunek *a*. Urządzenie podobne do wagi skręceń z rys. 26-3 zastosował później Cavendish do pomiaru przyciągania grawitacyjnego (paragraf 16-3).

Pierwsze doświadczalne wyniki Coulomba zapisujemy w postaci:

$$F \propto \frac{1}{r^2}.$$

$F$  jest wartością siły, jaka działa między ładunkami  $a$  i  $b$  znajdującymi się w odległości  $r$  od siebie. Siły takie, zgodnie z trzecią zasadą Newtona, działają wzdłuż linii łączącej ładunki, ale są przeciwnie skierowane. Zwracamy uwagę, że wartość siły działającej na każdy z ładunków jest taka sama nawet w tych przypadkach, kiedy ładunki są różne.



Rys. 26-3. Waga skręceń Coulomba (wg jego rozprawy z roku 1785 dla Francuskiej Akademii Nauk)

Siła działająca między ładunkami zależy również od wartości ładunków. Dokładnie, zależność ta jest proporcjonalna do ich iloczynu. Mimo, że Coulomb zasadniczo nie udowodnił tego, opierając się na jego twierdzeniu otrzymamy:

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (26-1)$$

gdzie  $q_1$  i  $q_2$  są względnymi miarami ładunków na kulkach  $a$  i  $b$ . Równanie (26-1) nosi nazwę prawa Coulomba i jest słuszne tylko dla takich naładowanych obiektów, których rozmiary są małe w porównaniu z odlegością między nimi. Mówimy, że stosuje się ono tylko do ładunków punktowych.

Przepis Coulomba przypomina prawo powszechnego ciążenia, które zostało odkryte ponad sto lat wcześniej: ładunek  $q$  zajął w tym prawie miejsce masy  $m$ . Jednakże siły grawitacyjne są zawsze siłami przyciągania. Wynika to z faktu, że (widocznie) istnieje

tylko jeden rodzaj masy. Natomiast prawo Coulomba dowodzi, że istnieją dwa rodzaje elektryczności.

Ilościowe sprawdzenie prawa Coulomba nie opiera się wyłącznie na doświadczeniach Coulomba. Dokładność pomiarów dokonanych za pomocą wagi skręceń nie przekracza kilku procent. Pomiary takie nie mogą upewnić nas czy wykładnik potęgi w równaniu (26-1) jest równy dokładnie 2, czy też na przykład 2,01. W paragrafie 28-7 pokażemy, że prawo Coulomba wynika z bezpośredniego doświadczenia (1971), które wyznacza wykładnik potęgi w równaniu (26-1), mieści się on w granicach  $2 \pm 3 \cdot 10^{-16}$ .

Wprowadziliśmy już fizyczne pojęcie ładunku elektrycznego. Powinniśmy jeszcze zdefiniować jednostkę ładunku. Możemy to zrobić w następujący sposób: Umieszczać równe ładunki  $q$  na kulkach wagi skręceń znajdujących się w odległości  $r$  od siebie i mierzymy siłę  $F$  działającą między nimi. Można by przyjąć, że ładunki  $q$  mają wartość jednostkową wówczas, kiedy działa między nimi jednostkowa siła przy jednostkowej wzajemnej ich odległości. Jednostce tak zdefiniowanej można by nadać jakąś nazwę\*.

Ze względu na małą dokładność pomiarów uzyskanych za pomocą wagi skręceń, jednostkę ładunku elektrycznego w układzie SI określa się na podstawie jednostki natężenia prądu. Jeżeli końce długiego drutu połączymy z zaciskami źródła prądu, to, jak poważnie wiadomo, w drucie popłynie prąd elektryczny o natężeniu  $i$ . Wyobraźmy sobie ten prąd jako przepływ ładunków. W układzie SI jednostką natężenia prądu jest amper (A). W jaki sposób zdefiniowano natężenia prądu wyjaśnimy w paragrafie 34-4.

W układzie SI jednostką ładunku jest kulomb (C). 1 kulomb jest równy ładunkowi, jaki przepływa przez poprzeczny przekrój przewodnika w ciągu 1s, jeżeli w przewodniku płynie prąd stały o natężeniu 1 ampera. Czyli

$$q = it, \quad (26-2)$$

gdzie  $q$  otrzymuje się w kulombach, jeżeli  $i$  jest wyrażone w amperach, a  $t$  w sekundach. Umieszczona na izolatorze kula metalowa otrzyma ładunek  $10^{-6}$  C, jeżeli w przewodniku połączonym z kulą płynął prąd o natężeniu 1,0 A w ciągu  $10^{-6}$  s.

**Przykład 1.** Moneta miedziana ma masę 3,1 g. Jako elektrycznie obojętna zawiera ona równe ilości ładunku elektrycznego dodatniego i ujemnego. Jak wiele są te ładunki? Ładunki dodatni i ujemny atomu miedzi są sobie równe i wynoszą  $4,6 \cdot 10^{-18}$  C każdy.

Liczba  $N$  atomów miedzi zawartych w monetie znajdziemy ze stosunku

$$\frac{N}{N_0} = \frac{m}{M},$$

gdzie  $N_0$  jest liczbą Avogadra,  $m$  — masą monety, a  $M$  — masą cząsteczkową miedzi. Stąd rozwiązanie dla  $N$ :

$$N = \frac{(6,0 \cdot 10^{23} \text{ atom/mol}) \cdot 3,1 \text{ g}}{64 \text{ g/mol}} = 2,9 \cdot 10^{22} \text{ atomów.}$$

Natomiast ładunek

$$q = (4,6 \cdot 10^{-18} \text{ C/atom}) \cdot 2,9 \cdot 10^{22} \text{ atomów} = 1,3 \cdot 10^5 \text{ C.}$$

W żarówce o mocy 100 W, przy napięciu 110 V płynie prąd o natężeniu 0,91 A. Można sprawdzić, że żarówka ta musiałaby świecić przez 40 h, aby przepłynął przez nią ładunek, równy ładunkowi zawartemu w rozpatrywanej monetie miedzianej.

\* Jest to elektrosta tyczna jednostka ładunku. W niniejszym podręczniku jednostka ta nie będzie używana, podobnie jak cały układ jednostek, do którego ona należy (układ CGSE). Patrz dodatek L.

Zależność (26-1) można przekształcić w równość dopisując współczynnik proporcjonalności, np.  $k$ . Zamiast pisać po prostu  $k$ , wprowadza się zwykle bardziej złożony współczynnik w postaci  $1/4\pi\epsilon_0$ , czyli

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (26-3)$$

Dzięki dobraniu takiego współczynnika proporcjonalności w równaniu (26-3), pewne równania, które wynikają z równania (26-3) i są częściej stosowane, przyjmują bardziej prostą postać.

Wielkości  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $r$  i  $F$  występujące w równaniu (26-3) możemy wyrażać w układzie jednostek SI w sposób niezależny od prawa Coulomba. Po wstawieniu odpowiedniej liczby jednostek tych wielkości, otrzymamy wartość współczynnika  $\epsilon_0$  zwanego *przenikalnością elektryczną próżni*. Wartość ta musi być taka, aby lewa strona równania (26-3) równała się prawej. Po przeliczeniu otrzymujemy\*

$$\epsilon_0 = 8,854187818 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{N} \cdot \text{m}^2).$$

Dla wszystkich zadań znajdujących się w tym podręczniku dostatecznie dokładna będzie wartość  $8,9 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{N} \cdot \text{m}^2)$ . W prawie Coulomba albo innych zadaniach zawierających wielkość  $1/4\pi\epsilon_0$  możemy z dostateczną dokładnością, wymaganą w tej książce, przyjąć że

$$1/4\pi\epsilon_0 = 9,0 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2.$$

**Przykład 2.** Przypuśćmy, że całkowity dodatni ładunek i całkowity ujemny ładunek znajdujące się w miedzianej monetce zostały rozsunięte na taką odległość, że siła działająca między nimi wynosi  $4,5 \text{ N}$ . Na jaką odległość musiały być rozsunięte te ładunki?

Piszemy równanie (26-3)

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Przyjmując, że  $q_1 q_2 = q^2$  (patrz przykład 1) i rozwiązując je względem  $r$  otrzymujemy

$$r = q \sqrt{\frac{1/4\pi\epsilon_0}{F}} = 1,3 \cdot 10^5 \text{ C} \sqrt{\frac{9,0 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2}{4,5 \text{ N}}} = 5,8 \cdot 10^9 \text{ m}.$$

Jest to 910 promieni Ziemi. Widzimy więc, że jest rzeczą niemożliwą zlikwidowanie w znacznym stopniu elektrycznej obojętności dużych obiektów. Jaka siła działałaby między tymi ładunkami, gdyby były rozsunięte na odległość  $1,0 \text{ m}$ ?

W przypadku, gdy ładunków jest więcej niż dwa, równanie (26-3) obowiązuje dla każdej pary ładunków oddzielnie. Przypuśćmy, że mamy układ ładunków  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  itd. Siłę działającą na jeden z nich, np.  $q_1$ , pochodząą od wszystkich pozostałych znajdujemy z równania wektorowego

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{14} + \dots, \quad (26-4)$$

gdzie np.  $\mathbf{F}_{12}$  oznacza siłę działającą między ładunkami  $q_1$  i  $q_2$ .

**Przykład 3.** Rysunek 26-3 przedstawia trzy ładunki  $q_1$ ,  $q_2$  i  $q_3$ . Obliczyć siły działające na  $q_1$ . Zakładamy, że  $q_1 = -1,0 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ ,  $q_2 = 3,0 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ ,  $q_3 = -2,0 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ ,  $r_{12} = 15 \text{ cm}$ ,  $r_{13} = 10 \text{ cm}$  i  $\theta = 30^\circ$ .

---

\* W rzeczywistości ze względów praktycznych wartość  $\epsilon_0$  nie jest wyliczana bezpośrednio z równania (26-3), lecz z równoważnej, chociaż bardziej złożonej zależności.

Z równania (26-3), pomijając znaki, gdyż interesują nas tylko bezwzględne wartości sił, otrzymujemy siły

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} = \frac{(9,0 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) (1,0 \cdot 10^{-6} \text{ C}) (3,0 \cdot 10^{-6} \text{ C})}{(1,5 \cdot 10^{-1} \text{ m})^2} = 1,2 \text{ N},$$

$$F_{13} = \frac{(9,0 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) (1,0 \cdot 10^{-6} \text{ C}) (2,0 \cdot 10^{-6} \text{ C})}{(1,0 \cdot 10^{-1} \text{ m})^2} = 1,8 \text{ N}.$$

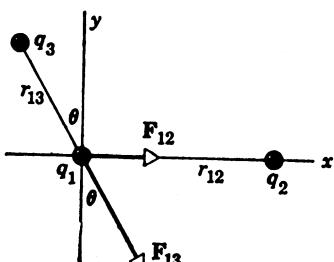
Kierunki sił  $F_{12}$  i  $F_{13}$  zaznaczone są na rys. 26-4.

Składowe siły wypadkowej  $F_1$  działającej na ładunek  $q_1$  (patrz równanie (26-4)) wynoszą

$$F_{1x} = F_{12x} + F_{13x} = F_{12} + F_{13} \sin \theta = 1,2 \text{ N} + 1,8 \text{ N} (\sin 30^\circ) = 2,1 \text{ N},$$

$$F_{1y} = F_{12y} + F_{13y} = 0 - F_{13} \cos \theta = -1,8 \text{ N} (\cos 30^\circ) = -1,6 \text{ N}.$$

Łatwo już teraz znaleźć wartość bezwzględną siły  $F_1$  i kąt, jaki ta sila tworzy z osią  $x$ .



Rys. 26-4. Przykład 3. Sily oddziaływanie ładunków  $q_2$  i  $q_3$  na ładunek  $q_1$

## 26-5. Kwantowa natura ładunku

W czasach Franklina ładunek elektryczny traktowano jako ciągły płyn. Pojęcie to było pozytyczne z wielu powodów. Jednakże atomowa teoria materii pokazała, że płyny, takie jak woda i powietrze, nie są ciągłe, lecz zbudowane z atomów. Z doświadczenia wynika, że „pływ elektryczny” również nie jest ciągły, lecz składa się z całkowitej wielokrotności pewnego minimalnego ładunku elektrycznego. *Ladunek elementarny*, który oznaczamy symbolem  $e$ , jest równy  $1,6021892 \cdot 10^{-19}$  C. Każdy realnie istniejący ładunek  $q$ , niezależnie od jego pochodzenia, można zapisać jako iloczyn  $ne$ , gdzie  $n$  jest ujemną albo dodatnią liczbą całkowitą.

Kiedy wielkość fizyczna, taka jak ładunek elektryczny, występuje w postaci wydzielonych „porcji”, wtedy mówimy, że wielkość ta jest skwantowana. Kwantyzacja leży u podstaw współczesnej fizyki. Istnienie atomów i cząstek, takich jak elektrony czy protony, wskazuje, że masa również jest skwantowana. Dowiemy się później, że także szereg innych wielkości, jeżeli je rozpatrywać w skali atomowej, wykazuje naturę kwantową. Do wielkości skwantowanych należy zaliczyć między innymi energię i moment pędu.

*Ladunek elementarny e (kwant ładunku)* jest tak mały, że „ziarnistość” elektryczności jest niedostrzegalna w świecie makroskopowym, podobnie jak nie dostrzegamy, że otaczające nas powietrze składa się z atomów. Na przykład, w zwykłej (110 V, 100 W) żarówce w każdej sekundzie przepływa przez włókno  $6 \cdot 10^{18}$  ładunków elementarnych.

Nie istnieje dotychczas teoria, która przewidywałaby kwantyzację ładunku (albo kwantyzację masy, tzn. istnienie takich podstawowych cząstek, jak protony, elektrony, miony itp.). Ale nawet przyjmując kwantyzację, klasyczna teoria elektromagnetyzmu i mechanika Newtona są dalej niekompletne, ponieważ nie opisują poprawnie zachowania się ładunku i materii w skali atomowej. Na przykład, klasyczna teoria elektromagnetyzmu opisuje poprawnie, co dzieje się podczas poruszania sztabki magnesu w zamkniętej pętli mie-

dzianej. Jednakże na podstawie tej teorii nie da się wyjaśnić magnetyzmu sztabki za pomocą własności atomów, z których jest zbudowana. Dla wyjaśnienia tego i podobnych zagadnień niezbędne są bardziej dokładne teorie fizyki kwantowej.

## 26-6. Ładunek i materia

Zgodnie z wynikami najprostszego doświadczeń można uważać, że materia składa się z trzech rodzajów cząstek elementarnych: protonów, elektronów i neutronów. Tablica 26-1 zawiera masy i ładunki tych cząstek. Zwracamy uwagę, że masy neutronu i protonu są sobie w przybliżeniu równe, lecz elektron jest od nich lżejszy o czynnik bliski 1840.

Tablica 26-1. Niektóre właściwości trzech cząstek elementarnych

Cząstka	Oznaczenie	Ładunek	Masa
proton	$p$	$+e$	$1,6726485 \cdot 10^{-27}$ kg
neutron	$n$	0	$1,6749543 \cdot 10^{-27}$ kg
elektron	$e^-$	$-e$	$9,109534 \cdot 10^{-31}$ kg

Atomy są zbudowane z dodatnio naładowanego jądra o dużej gęstości otoczonego chmurą elektronów (patrz rys. 26-5). Promień jądra atomowego zmienia się od  $1 \cdot 10^{-15}$  m dla wodoru do  $7 \cdot 10^{-15}$  m dla najcięższych atomów. Zewnętrzna średnica chmury elektronowej, która jest jednocześnie średnicą atomu, wynosi  $1-3 \cdot 10^{-10}$  m i jest około  $10^5$  razy większa od średnicy jądra atomowego.

**Przykład 4.** W atomie wodoru odległość między elektronem i protonem wynosi około  $5,3 \cdot 10^{-11}$  m. Obliczyć: (a) siłę przyciągania elektrostatycznego i (b) siłę przyciągania grawitacyjnego między tymi dwiema cząstkami.

Z prawa Coulomba mamy

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{(9,0 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{(5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m})^2} = 8,1 \cdot 10^{-8} \text{ N}.$$

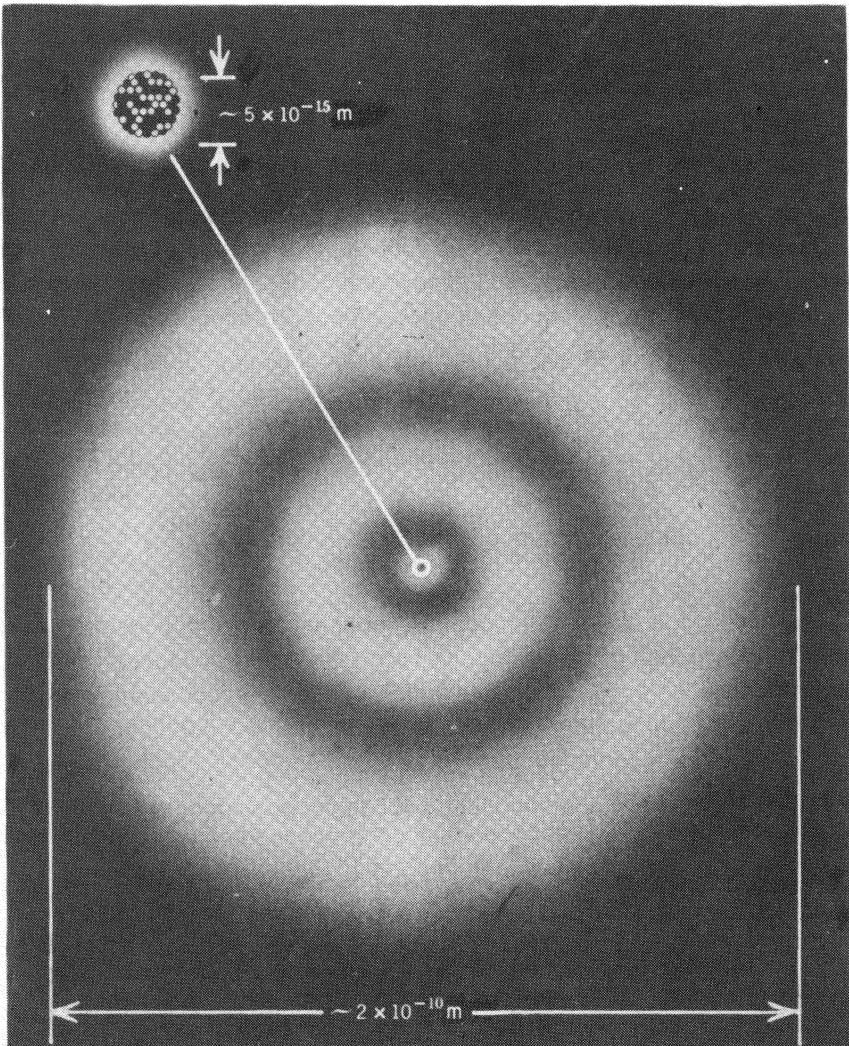
Siłę grawitacyjną obliczamy z równania (16-1),

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = \frac{(6,7 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2) (9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}) (1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg})}{(5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m})^2} = 3,7 \cdot 10^{-47} \text{ N}.$$

Widzimy zatem, że siła elektryczna jest około  $10^{39}$  razy większa niż siła grawitacyjna.

Znaczenie prawa Coulomba sięga daleko poza opis sił działających między naładowanymi kulami. Prawo to zastosowane do zagadnień fizyki kwantowej poprawnie opisuje: (a) siły elektryczne, które wiążą elektrony atomu z jego jądrem, (b) siły, które wiążą atomy w cząsteczce, (c) siły, które wiążą atomy albo cząsteczki w ciałach stałych i cieczach. Większość sił, z którymi mamy na co dzień do czynienia, jeśli nie są siłami grawitacyjnymi, to są siłami elektrycznymi. Siła przenoszona przez stalowy drut\* jest zasadniczo siłą elektryczną. Jeżeli bowiem wyobrażmy sobie płaszczyznę prostopadłą do drutu i przecinającą ten drut, to jedynie elektryczne, przyciągające siły między atomami znajdującymi się po obydwu stronach płaszczyzny utrzymują preć w całości. Nasz organizm jest również zbiorem jąder atomowych i elektronów związanych ze sobą w trwałą konfigurację dzięki działaniu sił Coulomba.

\* Który jest przez coś rozciągany (przyp. tłum.).



Rys. 26-5. Atom i otaczająca go chmura elektronowa. Powyżej powiększony obraz jądra atomowego

W jądrze atomowym występują nowe siły, które nie są ani grawitacyjne, ani elektryczne. Te ogromne siły przyciągające wiążą ze sobą protony i neutrony wchodzące w skład jądra atomowego. Siły te nazywamy po prostu *siłami jądrowymi* lub *dużymi silami wzajemnego oddziaływania*. Gdyby siły te przestały działać, jądro atomowe rozleciałoby się natychmiast ze względu na istnienie znaczących sił odpychania kulombowskiego między protonami. Natura sił jądrowych znana jest obecnie jedynie częściowo i dlatego stanowi centralny problem ostatnich badań fizyki jądrowej.

**Przykład 5.** Obliczyć odpychającą siłę Coulomba działającą między dwoma protonami znajdującymi się w jądrze żelaza. Niech odległość między nimi wynosi  $4,0 \cdot 10^{-15}$  m.

Z prawa Coulomba:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{(9,0 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{(4,0 \cdot 10^{-15} \text{ m})^2} = 14 \text{ N.}$$

Ta olbrzymia siła odpychająca musi być skompensowana, a nawet przewyższona przez silnie przyciągające siły jądrowe. Z przykładów 4 i 5 wynika, że jądrowe siły wiązania są o wiele większe niż atomowe siły wiązania, które z kolei są o wiele większe od sił grawitacyjnych (dla tych samych cząstek znajdujących się w tej samej odległości).

Odpychające siły kulombowskie między protonami osłabiają stabilność jądra atomowego. Samorzutna emisja cząstek  $\alpha$  z ciężkich jąder oraz proces rozszczepienia są widocznym potwierdzeniem tej niestabilności.

Fakt, że jądra ciężkie zawierają znacznie więcej neutronów niż protonów, jest jeszcze jednym efektem spowodowanym przez istnienie sił kolumbowskich. Przyjrzyjmy się rys. 26-6, na którym poszczególne jądra atomowe przedstawione są jako kółka o współrzędnych  $Z$  — liczba protonów w jądrze (czyli *liczba atomowa*) i  $N$  — liczba neutronów w jądrze (czyli *liczba neutronowa*). Kółka czarne przedstawiają jądra trwałe, a kółka białe jądra promieniotwórcze, tzn. samorzutnie emitujące elektryny albo cząstki  $\alpha$ . Zauważmy, że wszystkie pierwiastki (np. ksenon  $Z = 54$ , patrz strzałka) występują w kilku różnych formach zwanych *izotopami*.

Z rysunku 26-6 widać, że jądra lekkie, w których siły kulombowskie nie odgrywają większej roli\*, leżą na linii, albo w pobliżu linii oznaczonej „ $N = Z$ ”, a zatem w jądrach takich liczba neutronów jest w przybliżeniu równa liczbie protonów. Jądra ciężkie mają wyraźnie więcej neutronów niż protonów. Na przykład,  $^{238}\text{U}$  zawiera 92 protony i  $238 - 92 = 146$  neutronów\*\*. Przy nieobecności sił kulombowskich moglibyśmy założyć, że w jądrach trwałych zawsze  $N = Z$ . Wówczas najbardziej trwałe jądro, złożone z 238 cząstek, zawierałoby 119 protonów i 119 neutronów. W rzeczywistości jądro takie, gdyby zostało utworzone, rozpadłoby się natychmiast z powodu odpychania kulombowskiego. Względna trwałość można uzyskać, jeżeli 27 protonów zastąpić neutronami, zmniejszając całkowite odpychanie kulombowskie. Ale nawet w  $^{238}_{92}\text{U}$  odpychanie kulombowskie jest w dalszym ciągu duże. Z tego powodu jest to jądro promieniotwórcze emitujące cząstki  $\alpha$ . Oprócz tego po pochłonięciu neutronu rozszczepia się ono na dwa fragmenty. Z rysunku 26-6 wynika, że wszystkie jądra  $Z > 83$  są nietrwałe.

Poprzednio, na podstawie najprostszych doświadczeń stwierdziliśmy, że materia składa się z elektronów, neutronów i protonów. W rzeczywistości skład materii okazuje się znacznie bardziej różnorodny. Istnieje znacznie więcej odrębnych cząstek elementarnych. Większość z nich odkryto po roku 1940 bądź jako składowe promieniowania kosmicznego przychodzącego do nas spoza atmosfery, bądź jako wynik reakcji jądrowych w gigantycznych urządzeniach przyspieszających.

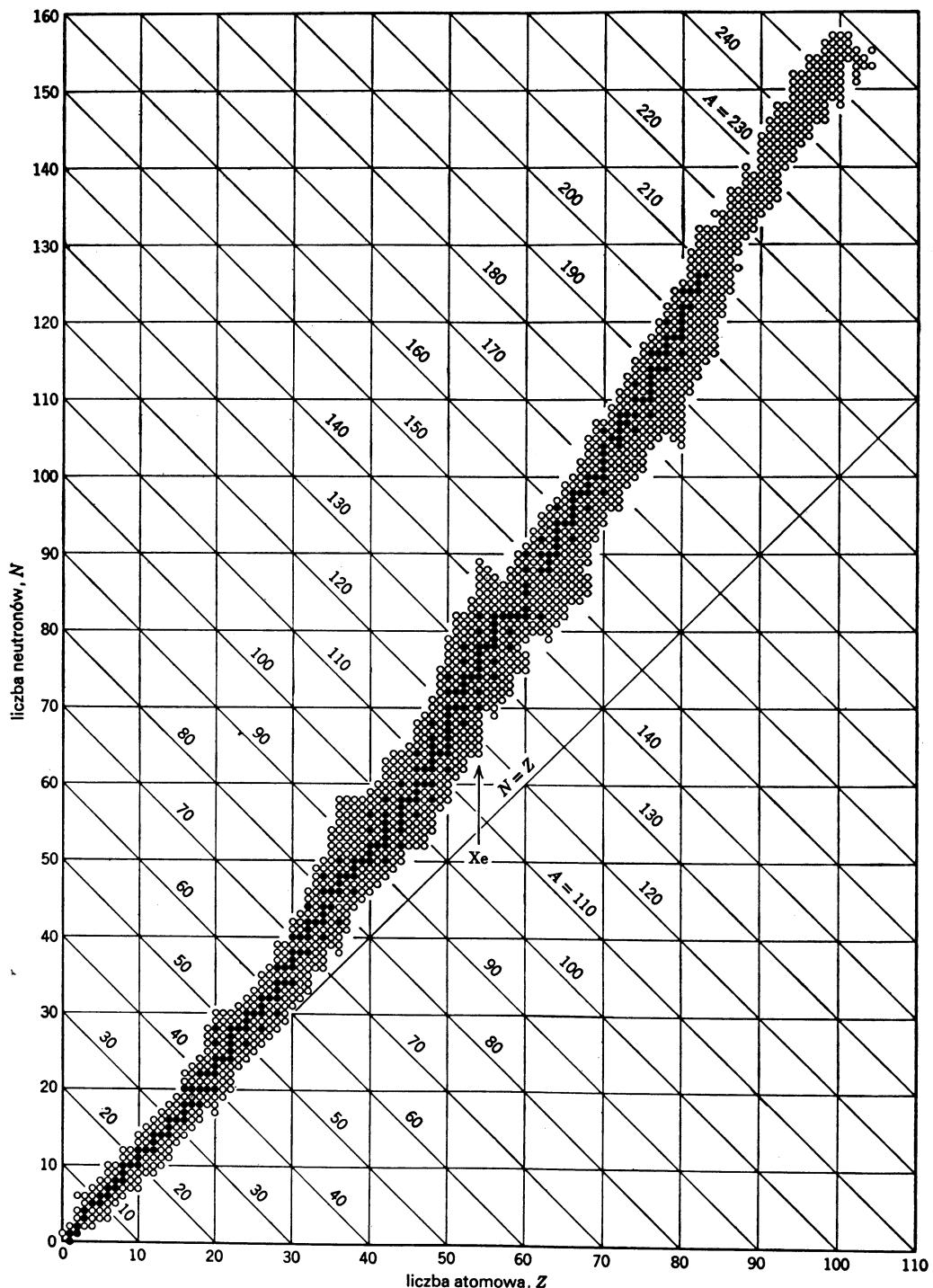
W dodatku D podane są niektóre właściwości tych cząstek. Z własności tych widać, że podobnie jak dla cząstek naładowanych, wymienionych w tablicy 26-1, ich ładunek jest skwantowany. Elementarny ładunek niesiony przez te cząstki jest także równy  $e$ . Zrozumienie natury wszystkich znanych cząstek elementarnych i ich wzajemnych zależności jest prawdopodobnie jednym z najważniejszych celów badań współczesnej fizyki.

## 26-7. Zasada zachowania ładunku

Kiedy pręt szklany pocieramy jedwabiem, na przecie pojawia się ładunek dodatni. Pomiary dowodzą, że taki sam ładunek ujemny wytworzy się jednocześnie na jedwabiu. Z doświadczenia tego wynika, że w czasie pocierania jedwabiu o szkło ładunek elektryczny nie jest wytwarzany, lecz jedynie przenoszony z jednego ciała na drugie, co zakłoca nieznacznie elektryczną obojętność każdego z nich. Jako wniosek z dokładnych doświadczeń

\* Siły kulombowskie mają znaczną wartość w stosunku do silnych oddziaływań jądrowych tylko dla jąder ciężkich, ponieważ działają między każdą parą protonów w jądrze, natomiast siły jądrowe nie mają tej właściwości. Na przykład, w pierwiastku  $^{238}\text{U}$  każdy proton odpycha każdy z pozostałych 91 protonów. Natomiast każdy proton (i neutron) oddziałuje siłami jądrowymi (przyciągającymi) tylko z niewielką liczbą neutronów i protonów, mianowicie z tymi, które go bezpośrednio otaczają. Z tego powodu dla coraz cięższych jąder odpychające siły kulombowskie rosną szybciej niż przyciągające siły jądrowe.

\*\* Górnny wskaźnik przy symbolu pierwiastka nazywamy *liczbą masową A* ( $= N + Z$ ). Jest to całkowita liczba cząstek w jądrze atomowym. Patrz pochylne linie na rys. 26-6.



Rys. 26-6. Kółka czarne oznaczają jądra trwałe, kółka białe — jądra promieniotwórcze. Na przykład ksenon ( $Z = 54$ ) ma 26 izotopów w tym 9 trwałych i 17 promieniotwórczych. Każdy izotop ksenonu posiada 54 protony (i 54 elektryny dla atomów obojętnych). Liczba neutronów zmienia się od  $N = 64$  do  $N = 89$  i liczba masowa  $A (= N + Z)$  zmienia się od 118 do 143. Żaden inny pierwiastek nie posiada tylu izotopów

dotyczących zarówno dużych obiektów, jak i układów atomowych i jądrowych, nasunęła się hipoteza o istnieniu zasady zachowania ładunku. Dotychczas nie przeprowadzono żadnego doświadczenia, które by przeczyło tej zasadzie.

Interesującym przykładem zasady zachowania ładunku elektrycznego jest reakcja między elektronem (ładunek =  $-e$ ) i pozytonem (ładunek =  $+e$ ). Te dwie cząstki mogą po prostu zniknąć, przy czym cała ich masa przechodzi w energię zgodnie z dobrze znanym wzorem  $E = mc^2$ . Proces ten zwany *anihilacją* opisany był w paragrafie 8-9. Energia powstała w wyniku anihilacji przyjmuje postać dwu przeciwnie skierowanych promieni  $\gamma$  o własnościach analogicznych do bardzo przenikliwych promieni Roentgena: a więc



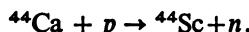
Ładunek wypadkowy przed anihilacją, równa się ładunkowi po anihilacji, zatem jest zachowany. Natomiast masa nie jest zachowana, ponieważ całkowicie zamienia się w energię.

Innym przykładem zasady zachowania ładunku elektrycznego jest rozpad promieniotwórczy przedstawiony przez typową reakcję:



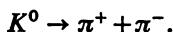
Promieniotwórcze jądro wyjściowe  $^{238}\text{U}$  zawierające 92 protony (liczba atomowa  $Z = 92$ ) rozpada się samorzutnie na cząstkę  $\alpha$  ( $^4\text{He}$ ,  $Z = 2$ ) i jądro toru  $^{234}\text{Th}$  ( $Z = 90$ ). Ładunek elektryczny przed rozpadem ( $+92e$ ) jest równy ładunkowi po rozpadzie.

Innym przykładem zasady zachowania ładunku są reakcje jądrowe. Rozpatrzmy np. reakcję, w której wapń  $^{44}\text{Ca}$  jest bombardowany przyspieszonymi w cyklotronie protonami. W niektórych zderzeniach produktem reakcji jest neutron i jądro  $^{44}\text{Sc}$ :



Suma liczb atomowych przed reakcją ( $20 + 1$ ) jest dokładnie równa sumie liczb atomowych po reakcji ( $21 + 0$ ). Ładunek elektryczny jest więc zachowany.

Ostatnim przykładem zasady zachowania ładunku jest rozpad mezonu  $K$  (patrz: dodatek F, tom I), który zachodzi następująco:



Wypadkowy ładunek wynosi zero zarówno przed, jak i po procesie rozpadu.

### Pytania

1. Mamy dwie metalowe kule umieszczone na przenośnych izolatorach. W jaki sposób można wytworzyć na nich równe, lecz mające przeciwnie znaki ładunki elektryczne? Możemy zastosować pręt szklany potarty jedwabiem, lecz nie możemy dotykać nim kul. Czy wymiary kul mają tutaj jakieś znaczenie (czy kule powinny być jednakowe)?

2. Znaleźć sposób naładowania kul z pytania 1 równymi ładunkami tego samego znaku. Czy wymiary kul powinny być jednakowe?

3. Naładowany pręt przyciąga kawałki suchego pyłu korkowego, który często po dotknięciu pręta szybko od niego odskakuje. Wyjaśnić to zjawisko.

4. Czy nie może być czterech rodzajów ładunków, tzn. ładunku na szkle, jedwabiu, plastiku i futrze, o których mówimy w paragrafie 26-2? Co przemawia przeciw temu?

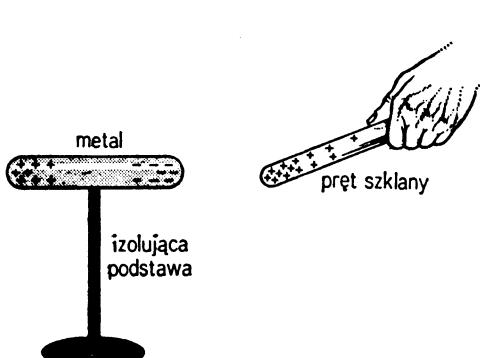
5. Jeżeli szybko pociera się monetę między palcami, to nie wydaje się, że jest ona naładowana przez tarcie. Wyjaśnić dlaczego.

6. Jeżeli idzie się szybko wzdłuż wyłożonego dywanem korytarza hotelowego, można zauważać przeskakującą iskrę między ręką a klamką tuż przed jej dotknięciem. (a) Jaka jest tego przyczyna? (b) Jak można temu zapobiec?

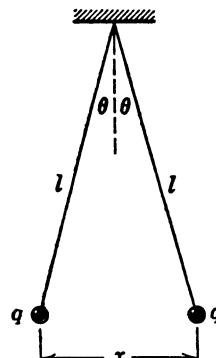
7. Dlaczego doświadczenia elektrostatyczne nie udają się w dni wilgotne?

8. Izolowany pręt ma ładunek elektryczny. Jak to sprawdzić i jak określić znak ładunku?

9. Jeżeli szklany, naładowany pręt będziemy trzymać w pobliżu końca izolowanego, nienalałowanego pręta metalowego, tak jak to przedstawia rys. 26-7, pewna ilość elektronów przypłynie na ten koniec. Dlaczego przepływ elektronów zatrzyma się? Pręt metalowy jest ich prawie niewyczerpywalnym źródłem.



Rys. 26-7. Pytania 9 i 10



Rys. 26-8. Zadania 9, 10 i 11

10. Czy na pręt metalowy z rysunku 26-6 działa jakaś wypadkowa siła? Wytlumaczyć to.

11. Człowiek stojący na izolowanym stołku dotyka naładowanego, izolowanego przewodnika. Czy przewodnik rozłada się całkowicie?

12. Czy siła Coulomba, jaką jeden ładunek działa na drugi, zmieni się, jeżeli w pobliżu umieścimy inne ładunki?

13. (a) Dodatnio naładowana pałeczka szklana przyciąga zawieszony przedmiot. Czy możemy stąd wywnioskować, że przedmiot jest naładowany ujemnie? (b) Dodatnio naładowana pałeczka szklana odpala zawieszony przedmiot. Czy możemy stąd wywnioskować, że przedmiot ten jest naładowany dodatnio?

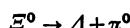
14. Mamy do swej dyspozycji zbiór małych, naładowanych kulek, których masa, ładunek i znak są do wyboru. Czy możliwa jest trwała równowaga ich ustawienia, gdy uwzględniamy tylko elektrostatyczne siły oddziaływania? Sprawdzić kilka ustawień. Nie wymaga się ścisłej odpowiedzi.

15. Przypuśćmy, że ktoś proponuje, aby w równ. (26-3) iloczyn  $(q_1 \cdot q_2)$  zamienić na sumę  $(q_1 + q_2)$ . Jakie eksperymentalne fakty przeczą tej propozycji? A co by było, gdyby ktoś proponował pierwiastek kwadratowy z ilocznym tzn.  $\sqrt{q_1 \cdot q_2}$ ?

16. Kwantem ładunku jest ładunek równy  $1,60 \cdot 10^{-19}$  C. Czy istnieje również odpowiedni kwant masy?

17. Jądro  $^{238}\text{U}$  rozpada się na dwie identyczne części. Czy powstałe na tej drodze jądra będą trwałe czy promieniotwórcze?

18. W schemacie rozpadu



występuje cząstka  $\Lambda$  o nieoznaczonym ładunku. Jaki jest jej ładunek? Patrz dodatek F.

19. Sprawdzić czy schematy rozpadów cząstek elementarnych w dodatku F zgodne są z prawem zachowania ładunku.

20. Co to znaczy, gdy mówimy o wielkości fizycznej, że jest (a) skwantowana lub (b) zachowana? Podać jakieś przykłady.

## Zadania

### Paragraf 26-4

1. Siła elektrostatyczna działająca między dwoma jednakowymi jonami oddalonymi o  $5,0 \cdot 10^{-10}$  m wynosi  $3,7 \cdot 10^9$  N. (a) Jaki jest ładunek każdego jona? (b) Ile elektronów brakuje każdemu z jonów?

Odp.: (a)  $13,2 \cdot 10^{-19}$  C. (b) Dwa.

2. Dwa umieszczone na stałe ładunki  $+1,0 \cdot 10^{-6}$  C i  $-3,0 \cdot 10^{-6}$  C, oddalone są o 10 cm. (a) Gdzie należy umieścić trzeci ładunek, aby nie działała na niego żadna siła? (b) Czy równowaga trzeciego ładunku będzie trwała czy nietrwała?

3. Dwie małe kulki są naładowane dodatnio. Ich sumaryczny ładunek wynosi  $5,0 \cdot 10^{-5}$  C. W jaki sposób jest on podzielony pomiędzy kulki, jeżeli wiadomo, że w odległości 2,0 m każda kula jest odpinana od drugiej siłą 1,0 N?

Odp.:  $1,2 \cdot 10^{-5}$  C,  $3,8 \cdot 10^{-5}$  C.

4. Dwa równe, dodatnie ładunki punktowe dzieli odległość  $2a$ . W płaszczyźnie prostopadłej do odcinka łączącego te ładunki i przechodzącej przez jego środek umieszczono próbny ładunek punktowy. (a) Obliczyć promień  $r$  koła symetrii leżącego w tej płaszczyźnie, dla którego siła działająca na ładunek próbny ma wartość maksymalną. (b) Jaki jest kierunek tej siły, gdy ładunek próbny jest dodatni?

5. Chcemy podzielić ładunek  $Q$  na dwie części  $q$  i  $Q-q$  tak, żeby po umieszczeniu ich w danej odległości od siebie otrzymać maksymalną kulombowską siłę odpinającą. Znaleźć zależność pomiędzy  $Q$  i  $q$ .

Odp.:  $q = \frac{1}{2}Q$ .

6. O ile muszą być oddalone od siebie dwa protony, żeby elektryczna siła odpinająca, działająca na każdy z tych protonów, była równa jego ciężarowi na Ziemi? Masa protonu wynosi  $1,7 \cdot 10^{-27}$  kg.

7. Dwa jednakowe, dodatnie ładunki  $Q$  umieszczone są w odległości  $2a$ . Siła działająca na mały, dodatni ładunek próbny umieszczony w połowie drogi między nimi wynosi zero. Znaleźć kierunek siły działającej na ładunek próbny, jeżeli przemieści się on trochę albo (a) w stronę któregoś z ładunków lub (b) pod kątem prostym do linii łączącej ładunki. W którym z podanych przypadków równowaga jest trwała, a w którym nietrwała?

- Odp.: (a) W kierunku do pozycji początkowej — trwała. (b) W kierunku od pozycji początkowej — nietrwała.

8. Dwa swobodne ładunki punktowe  $+q$  i  $+4q$  znajdują się w odległości  $l$ . Trzeci ładunek umieszczony jest tak, że cały układ znajduje się w stanie równowagi. Znaleźć położenie, wartość i znak trzeciego ładunku. Czy równowaga jest trwała?

9. Dwie jednakowe, przewodzące kulki, każda o masie  $m$  i ładunku  $q$ , zawieszone są na jedwabnej nici o długości  $l$  (rys. 26-8). Zakładamy, że kąt  $\theta$  jest tak mały, że można zastąpić  $\operatorname{tg}\theta$  prawie równym  $\mu \sin\theta$ . Przy tym założeniu wykazać, że (a)

$$x = \left( \frac{q^2 l}{2\pi\epsilon_0 mg} \right)^{1/3},$$

gdzie  $x$  jest odlegością pomiędzy kulkami. (b) Obliczyć  $q$  dla  $l = 120$  cm,  $m = 10$  g i  $x = 5,0$  cm.

Odp.:  $\pm 2,4 \cdot 10^{-8}$  C.

10. Założmy, że każda kula z poprzedniego zadania traci ładunek z szybkością  $1,0 \cdot 10^{-9}$  C/s. Z jaką chwilową prędkością względną ( $= dx/dt$ ) kulki zaczynają zbliżać się do siebie?

11. Jeżeli kulki z rys. 26-8 są przewodzące, to (a) co się stanie, gdy jedna z nich zostanie rozładowana? (b) Znaleźć oddalenie w nowym stanie równowagi.

Odp.: (a) Kulki zetkną się i natychmiast się odpchną. (b) 3,1 cm.

12. Ładunki i współrzędne dwóch ładunków punktowych leżących na płaszczyźnie  $xy$  wynoszą  $q_1 = +3,0 \cdot 10^{-6}$  C,  $x = 3,5$  cm,  $y = 0,50$  cm, i  $q_2 = -4,0 \cdot 10^{-6}$  C,  $x = -2,0$  cm,  $y = 1,5$  cm. (a) Znaleźć wielkość i kierunek siły działającej na  $q_2$ . (b) Gdzie należy umieścić trzeci ładunek  $q_3 = +4,0 \cdot 10^{-6}$  C, żeby siła wypadkowa działająca na  $q_2$  była równa zeru?

13. Dwie identyczne przewodzące kule, mające ładunki o znakach przeciwnych, przyciągają się siłą 0,108 N z odległości 0,500 m. Kule połączone są przewodzącym drutem, który potem się usuwa i kule wzajemnie się odpinają siłą 0,0360 N. Ile wynosiły ładunki początkowe obu kul?

Odp.:  $\pm 1,0 \cdot 10^{-6}$  C,  $\pm 3,0 \cdot 10^{-6}$  C.

14. Dwoje studentów (Jan ważący 80 kg i Maria ważąca 50 kg) znajdują się w odległości 30 m. Niech

w każdym z nich niezrównoważenie ładunków dodatnich i ujemnych wynosi 0,01%. Jan ma przewagę ładunku dodatniego, Maria ujemnego. Oszacować siłę elektrostatyczną przyciągania między studentami (*Wskazówka*: Wyobrazić sobie studentów jako równoważne kule wody).

15. Dwie jednakowo naładowane cząstki elementarne oddalone od siebie o  $3,2 \cdot 10^{-3}$  m wyprowadzono ze stanu równowagi. Obserwowane przyspieszenie pierwszej cząstki wynosi  $7,0 \text{ m/s}^2$ , a przyspieszenie drugiej cząstki wynosi  $9,0 \text{ m/s}^2$ . Jeżeli masa pierwszej cząstki wynosi  $6,3 \cdot 10^{-7} \text{ kg}$ , to: (a) jaka jest masa drugiej cząstki i (b) jaki jest wspólny ładunek obu cząstek?

*Odp.*: (a)  $4,9 \cdot 10^{-7} \text{ kg}$ , (b)  $7,1 \cdot 10^{-11} \text{ C}$ .

16. (a) Ile elektronów należało usunąć z pięciogroszówki, żeby pozostały w niej ładunek  $+10^{-7} \text{ C}$ ? (b) Jaka to część wszystkich elektronów znajdujących się w monecie?

17. (a) Jakie równe ładunki dodatnie należałyby umieścić na Ziemi i na Księżyku, żeby zrównoważyć przyciąganie grawitacyjne tych ciał? (b) Czy trzeba znać odległość Księżyca od Ziemi, aby rozwiązać to zadanie? (c) Ile ton wodoru trzeba by użyć, żeby otrzymać ładunek dodatni obliczony w punkcie (a)?

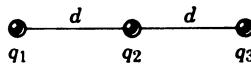
*Odp.*: (a)  $5,7 \cdot 10^{13} \text{ C}$ , (b) Nie, (c) 630 ton.

18. Ocenić w przybliżeniu, ile kulombów ładunku dodatniego znajduje się w szklance wody? Przyjąć, że pojemność szklanki wynosi  $250 \text{ cm}^3$ .

19. Liczba protonów promieniowania kosmicznego dochodzących do górnych warstw atmosfery wynosi, po uśrednieniu po całej powierzchni Ziemi,  $0,15 \text{ protonów}/(\text{cm}^2 \cdot \text{s})$ . Jaki całkowity prąd dochodzi do Ziemi spoza jej atmosfery w postaci padających protonów promieniowania kosmicznego? Promień Ziemi jest równy  $6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$ .

*Odp.*:  $0,12 \text{ A}$ .

20. Trzy naładowane cząstki elementarne leżą na linii prostej i są oddalone od siebie o odcinek  $d$ , jak pokazano na rys. 26-9. Ładunki  $q_1$  i  $q_2$  są umieszczone na stałe. Jeżeli  $q_3$  może się poruszać, lecz nie zmienia położenia, to w jakim stosunku do siebie znajdują się  $q_1$  i  $q_2$ ?



Rys. 26-9. Zadanie 20

21. Trzy małe kulki, każda o masie 10 g zawieszone są w jednym punkcie na oddzielnych nitkach jedwabnych o długości 1 m. Kulki są jednakowo naładowane i wisząc układają się w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku 0,1 m. Jaki jest ładunek każdej kulki?

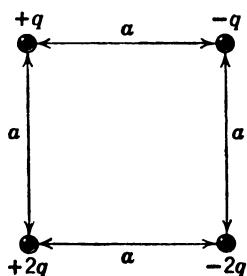
*Odp.*:  $6,0 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ .

22. Trzy ładunki punktowe  $+4,0 \cdot 10^{-6} \text{ C}$  są umieszczone w rogach równobocznego trójkąta o boku 10 cm. Jaka siła (wielkość i kierunek) działa na każdy ładunek?

23. W dwóch przeciwnieległych rogach kwadratu znajdują się ładunki  $Q$ , w dwóch pozostałych ładunki  $q$ . (a) Jaka jest zależność pomiędzy  $Q$  i  $q$ , jeśli wypadkowa siła działająca na  $Q$  wynosi zero? (b) Czy można tak dobrąć  $q$ , żeby wypadkowa siła działająca na każdy ładunek była równa zeru?

*Odp.*: (a)  $Q = -2\sqrt{2}q$ , (b) Nie.

24. Jaka wypadkowa siła działa na ładunek umieszczony w dolnym, lewym rogu kwadratu na rys. 26-10? Założyć, że  $q = 1,0 \cdot 10^{-7} \text{ C}$  i  $a = 5,0 \text{ cm}$ . Ładunki nie zmieniają swej pozycji.



Rys. 26-10. Zadanie 24

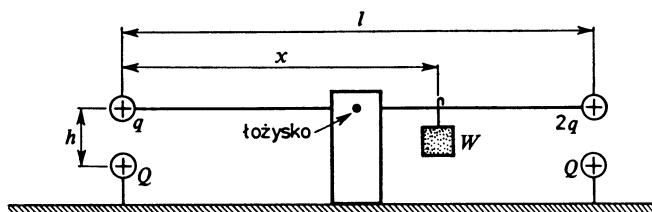
25. W każdym rogu sześcianu o boku  $a$  znajduje się ładunek punktowy  $q$ . (a) Wykazać, że wielkość wypadkowej siły działającej na każdy z ładunków jest równa

$$F = \frac{0,262q^2}{\epsilon_0 a^2}.$$

(b) Jaki jest kierunek  $F$  względem boków sześcianu?

Odp.: (b) Diagonalny, skierowany na zewnątrz sześcianu.

26. Rysunek 26-11 pokazuje długi, nieważki pręt będący izolatorem, o długości  $l$  umocowany w środku i wyważony ciężarkiem  $W$  w odległości  $x$  od lewego końca. Na końcach lewym i prawym pręta umieszczone są odpowiednio dodatnie ładunki  $q$  i  $2q$ . W odległości  $h$  pod każdym ładunkiem umieszczony jest dodatni ładunek  $Q$ . (a) Znaleźć odległość  $x$  dla pozycji ciężarka, gdy pręt jest wyważony. (b) Jakie powinno być  $h$ , aby pręt nie wywierał pionowej siły na łożysko, gdy jest wyważony? Pominąć wzajemne oddziaływanie między ładunkami na przeciwnych końcach pręta.



Rys. 26-11. Zadanie 26

27. Elektron jest wyrzucony z prędkością początkową  $3,24 \cdot 10^5$  m/s prosto w kierunku protonu, który znajduje się w stanie spoczynku. Jeżeli elektron początkowo znajduje się w dużej odległości od protonu, w jakiej odległości od protonu jego prędkość będzie chwilowo równa podwójnej prędkości początkowej? (Wskazówka: Skorzystać z twierdzenia o pracy i energii).

Odp.  $1,6 \cdot 10^{-9}$  m.

28. W procesie rozpadu promieniotwórczego  $^{238}\text{U}$  (patrz równ. (26-6)) środek emitowanej cząstki  $\alpha$  znajduje się w pewnej chwili w odległości  $9 \cdot 10^{-15}$  m od środka jądra końcowego  $^{234}\text{Th}$ . (a) Jaka siła działa na cząstkę  $\alpha$  w tej chwili? (b) Jakie jest przyspieszenie tej cząstki?

# 27. Pole elektryczne

## 27-1. Pole elektryczne

Każdemu punktowi przestrzeni wokół Ziemi możemy przypisać wektor natężenia pola grawitacyjnego  $\mathbf{g}$  (patrz równ. (16-12)). Jest to przyspieszenie grawitacyjne, jakie uzyskałoby próbne ciało umieszczone w tym punkcie i puszczone swobodnie. Jeżeli  $m$  jest masą ciała, a  $\mathbf{F}$  siłą grawitacyjną działającą na nie, to  $\mathbf{g}$  jest dane przez

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m}. \quad (27-1)$$

Jest to przykład pola wektorowego. Dla punktów bliskich powierzchni Ziemi przyjmujemy często, że pole to jest jednorodne: wówczas  $\mathbf{g}$  jest jednakowe we wszystkich punktach.

Przepływ wody w rzece dostarcza innego przykładu pola wektorowego, zwanego polem przepływu (patrz paragraf 18-7). Z każdym punktem w wodzie można związać wielkość wektorową — prędkość  $\mathbf{v}$ , z jaką woda przepływa przez ten punkt. Jeżeli  $\mathbf{g}$  i  $\mathbf{v}$  nie zmieniają się w czasie, to takie pola nazywamy stacjonarnymi. Zauważmy, że w przypadku rzeki, chociaż woda porusza się, wektor  $\mathbf{v}$  w danym punkcie, w przypadku przepływu stacjonarnego, nie zmienia się w czasie.

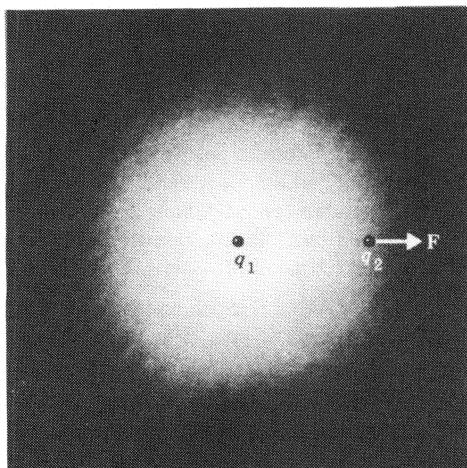
Jeżeli umieścimy próbną ładunek w pobliżu naładowanego pręta, to pręt będzie działał siłą na ładunek. Mówimy, że wytwarza on pole elektryczne w tej przestrzeni. Podobnie mówimy o polu magnetycznym w przestrzeni otaczającej sztabkę magnesu. W klasycznej teorii elektromagnetyzmu pola elektryczne i magnetyczne są podstawowymi pojęciami. W tym rozdziale zajmiemy się polami elektrycznymi związanymi z ładunkami z punktu widzenia układu odniesienia, w których one spoczywają.

Do czasów Faradaya uważano, że oddziaływanie pomiędzy cząstками naładowanymi jest bezpośrednie i natychmiastowe. Ten pogląd, określany jako oddziaływanie na odległość, był również przyjęty w przypadku sił magnetycznych i grawitacyjnych. Obecnie, posługując się pojęciem pola elektrycznego, rozumujemy następująco:

1. Ładunek  $q_1$  (rys. 27-1) wytwarza pole elektryczne w otaczającej go przestrzeni. Na rysunku pole to zaznaczyliśmy rozjaśnieniem; później pokażemy, jak można przedstać pole elektryczne bardziej konkretnie.

2. Pole oddziałuje na ładunek  $q_2$ ; przejawia się to jako siła  $\mathbf{F}$ , której działania doznaje ten ładunek.

A więc pole odgrywa rolę pośrednika w przenoszeniu oddziaływań pomiędzy ładunkami. Pojawiają się dwa oddzielne problemy: (a) obliczenie pól wytworzonych przez zadany rozkład ładunku i (b) obliczenie sił, jakimi dane pola będą oddziaływały na umieszczone w nich ładunki.



Rys. 27-1. Ładunek  $q_1$  wytwarza pole elektryczne, które oddziałuje siłą  $\mathbf{F}$  na ładunek  $q_2$

Rozumujemy więc według schematu

$$\text{ładunek} \rightleftharpoons \text{pole} \rightleftharpoons \text{ładunek},$$

a nie, jak z punktu widzenia oddziaływania na odległość,

$$\text{ładunek} \rightleftharpoons \text{ładunek}.$$

W przypadku przedstawionym na rys. 27-1 możemy sobie również wyobrazić, że ładunek  $q_2$  wytwarza pole i że to pole oddziałuje na ładunek  $q_1$  siłą  $-\mathbf{F}$ . Sytuacja jest tu zupełnie symetryczna, gdyż każdy ładunek znajduje się w obszarze pola wytworzonego przez drugi ładunek.

Gdyby jedynym problemem elektromagnetyzmu był problem sił działających pomiędzy stacjonarnymi ładunkami, to podejście polowe i oddziaływanie na odległość byłyby zupełnie równoważne. Założymy jednak, że  $q_1$  na rys. 27-1 zaczyna nagle poruszać się w prawą stronę. Jak szybko ładunek  $q_2$  „dowiaduje się”, że  $q_1$  poruszył się i że siła, która działa na niego ( $q_2$ ) musi wzrosnąć? Według teorii elektromagnetycznej  $q_2$  „dowiaduje się” o ruchu  $q_1$  poprzez rozchodzące się z prędkością światła *zaburzenie pola*, spowodowane ruchem ładunku  $q_1$ . Przyjęcie teorii oddziaływania na odległość wymaga, żeby wiadomość o przyspieszeniu  $q_1$  była przekazana do  $q_2$  natychmiast; jest to niezgodne z doświadczeniem\*. Przyspieszenie elektronów w antenie nadajnika radiowego oddziałuje na elektryny w antenie odbiornika dopiero po czasie  $l/c$ , gdzie  $l$  jest odległością pomiędzy antenami, a  $c$  prędkością światła.

\* Wprowadzając inne rozważania można rozwijać konsekwentny program elektromagnetyzmu z punktu widzenia teorii oddziaływania na odległość. Jednak nie robi się tego często, a więc pominiemy tę możliwość w tej książce.

## 27-2. Natężenie pola elektrycznego $\mathbf{E}$

W celu ilościowego opisania pola elektrycznego umieszczamy w badanym punkcie przestrzeni małe ciało próbne mające ładunek próbny  $q_0$  (założenia dodatni) i mierzymy siłę elektryczną  $\mathbf{F}$  działającą na to ciało. Natężenie pola elektrycznego  $\mathbf{E}$  w tym punkcie definiujemy jako\*

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0}. \quad (27-2)$$

$\mathbf{E}$  jest tu wektorem, gdyż  $\mathbf{F}$  jest wektorem, a  $q_0$  skalarem.  $\mathbf{E}$  ma kierunek  $\mathbf{F}$ , czyli kierunek, w jakim poruszałby się ładunek dodatni umieszczony w tym punkcie.

Definicja natężenia pola grawitacyjnego  $\mathbf{g}$  jest bardzo podobna do definicji natężenia pola elektrycznego z tym wyjątkiem, że w pierwszym przypadku interesuje nas masa ciała próbne, a nie jego ładunek. Chociaż zwykle używaną jednostką  $\mathbf{g}$  jest  $\text{m/s}^2$ , można je również wyrazić w  $\text{N/kg}$  (równ. (27-1)); dla  $\mathbf{E}$  byłoby  $\text{N/C}$  (równ. (27-2)). Tak więc zarówno  $\mathbf{g}$ , jak i  $\mathbf{E}$ , można wyrazić jako siłę podzieloną przez właściwość (masę lub ładunek) ciała próbne.

**Przykład 1.** Na elektron umieszczony w polu elektrycznym działa siła równa jego ciężarowi. Jaka jest wielkość natężenia  $\mathbf{E}$  pola elektrycznego?

Podstawiając do równania (27-2) na miejsce  $q_0 = e$ , a na miejsce  $\mathbf{F} = mg$ , gdzie  $m$  jest masą elektronu, otrzymujemy

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{mg}{e} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 5,6 \cdot 10^{-11} \text{ N/C}.$$

Jest to bardzo słabe pole elektryczne. Jaki kierunek musi mieć  $\mathbf{E}$ , aby siła elektryczna równoważyła siłę grawitacyjną?

Stosując zależność (27-2) musimy używać możliwie najmniejszego ładunku próbne. Duży ładunek próbny mógłby wywierać wpływ na ładunki pierwotne tworząc własne pole, a więc zmieniając tę wielkość, o której zmierzenie nam chodzi. W dokładnych rozważaniach równanie (27-2) powinno być zastąpione równaniem

$$\mathbf{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q_0}. \quad (27-3)$$

Z równania tego wynika, że powinniśmy używać kolejno coraz mniejszych ładunków  $q_0$  i oceniać  $\mathbf{F}/q_0$  dla każdego przypadku. Natężenie pola elektrycznego  $\mathbf{E}$  jest graniczną wielkością mierzonego stosunku dla wartości ładunku próbne dążących do zera\*\*.

## 27-3. Linie sił

Michael Faraday, nie doceniając przedstawiania pola elektrycznego jako wektora, operował zawsze pojęciem *linii sił*. Zresztą ciągle jeszcze linie sił są wygodną formą modelem opisu pola elektrycznego. Będziemy je używać do tego celu, ale nie będziemy ich wykorzystywać do rozważań ilościowych.

Zależność pomiędzy liniami sił a wektorem natężenia pola elektrycznego jest następująca:

1. Styczna do linii sił w dowolnym punkcie wyznacza kierunek  $\mathbf{E}$  w tym punkcie.

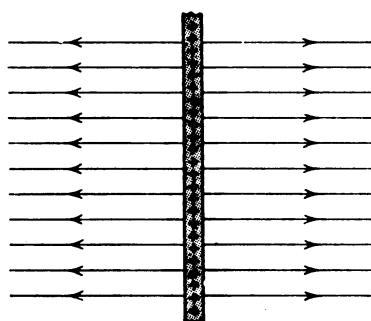
\* Ta definicja  $\mathbf{E}$ , chociaż pojęciowo prosta i bardzo przydatna do naszych obecnych celów, rzadko jest stosowana w praktyce z powodu trudności doświadczalnych. Normalnie znajdujemy  $\mathbf{E}$  poprzez wyliczanie z łatwiejszych do mierzenia wielkości, takich jak potencjał elektryczny; patrz rozdział 29-7.

\*\* Oczywiście  $q_0$  nie może być nigdy mniejsze od ładunku  $e$ .

2. Linie sił wykresla się tak, że liczba linii na jednostkę powierzchni przekroju jest proporcjonalna do wielkości  $E$ . Gdy linie leżą blisko siebie,  $E$  jest duże, a gdy są odległe,  $E$  jest małe.

Nie jest rzeczą oczywistą, że można wykreślić ciągły zbiór linii spełniających te warunki. W szczególności nie byłoby to możliwe, gdyby prawo Coulomba nie było prawdziwe; patrz zadanie 7.

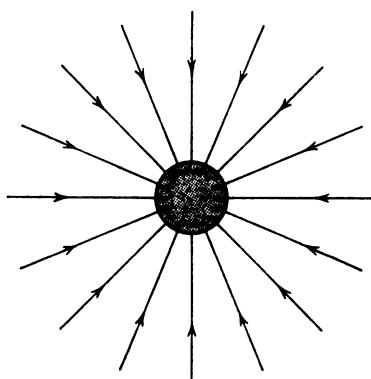
Rysunek 27-2 przedstawia linie sił dla jednorodnej płaszczyzny naładowanej dodatnio. Założenie, że rozpatrujemy płaszczyznę nieskończoną, oznacza, że w przypadku płyt o wymiarach skończonych rozważamy tylko te punkty, których odległość od płytki jest mała w porównaniu z odlegością od najbliższego jej brzegu. Dodatni ładunek próbny,



Rys. 27-2. Linie sił pola elektrycznego wytworzonego przez dodatnio naładowaną, płaską, nieskończoną płytę

umieszczony przed taką płytą, oddalałby się od niej wzdłuż linii prostopadłej do płaszczyzny płytki. A więc wektor natężenia pola elektrycznego w każdym punkcie blisko płytki musi być do niej prostopadły. Linie sił są rozmieszczone równomiernie, co oznacza, że  $E$  ma tę samą wartość dla wszystkich punktów przestrzeni leżących blisko powierzchni płytki.

Na rysunku 27-3 widzimy linie sił dla ujemnie naładowanej kuli. Z symetrii zagadnienia wynika, że linie te muszą leżeć wzdłuż promieni. Są one skierowane do wewnętrz kuli, ponieważ swobodny ładunek dodatni byłby przyspieszany w tym kierunku. Natężenie pola elektrycznego nie jest stałe, lecz maleje ze wzrostem odległości od kuli. Wynika to w sposób oczywisty z rozmieszczenia linii sił, które na większych odległościach oddalają się od siebie.



Rys. 27-3. Linie sił pola elektrycznego wytworzonego przez ujemnie naładowaną kulę

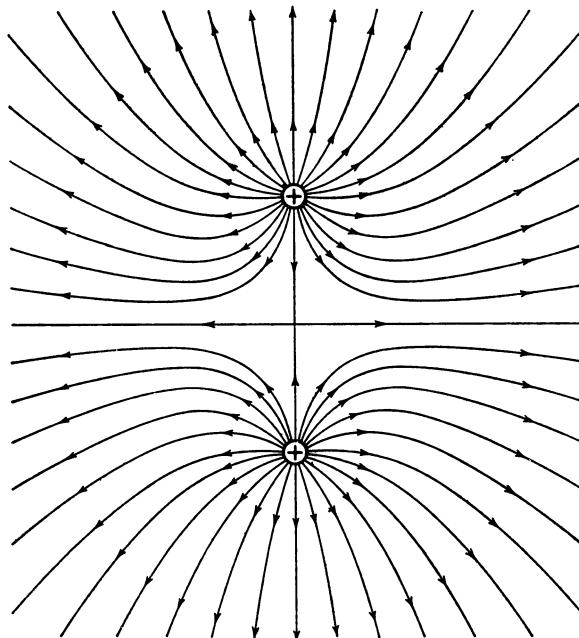
**Przykład 2.** W jaki sposób  $E$  zmienia się wraz z odlegością  $r$  od środka naładowanej kuli (rys. 27-3)?

Załóżmy, że z kuli wychodzi  $N$  linii sił. Zakreślamy w myśl koncentryczną kulę o promieniu  $r$ , liczba linii sił na jednostkę powierzchni w każdym punkcie tej kuli jest równa  $N/4\pi r^2$ . Ponieważ natężenie pola jest proporcjonalne do tej wielkości, możemy napisać, że

$$E \propto \frac{1}{r^2}.$$

Dokładną zależność wyprowadzimy w rozdziale 27-4. Jak zmienia się  $E$  ze zmianą odległości od nieskończenie długiego, równomiernie naładowanego walca?

Na rysunkach 27-4 i 27-5 widzimy układ linii sił dla dwóch różnych ładunków jednoimiennych i różnoimiennych. Faraday, jak już mówiliśmy, chętnie posługiwał się liniami sił w swych rozważaniach. Były one dla niego bardziej realne niż dla większości dzisiejszych naukowców i inżynierów. Łatwo nam sympatyzować z punktem widzenia Faradaya. Na rysunku 27-4 prawie „widzimy”, że ładunki są odpychane, a na rysunku 27-5, że są przyciągane poprzez linie sił. Czytelnik powinien porównać rys. 27-5 z rys. 18-14, który przedstawia pole przepływu. Rysunek 27-6 przedstawia rozkład linii sił wokół naładowanych przewodników, uzyskany przy użyciu nasion trawy zawieszonych w cieczy izolującej.



Rys. 27-4. Linie sił pola elektrycznego wytworzonego przez dwa dodatnie ładunki

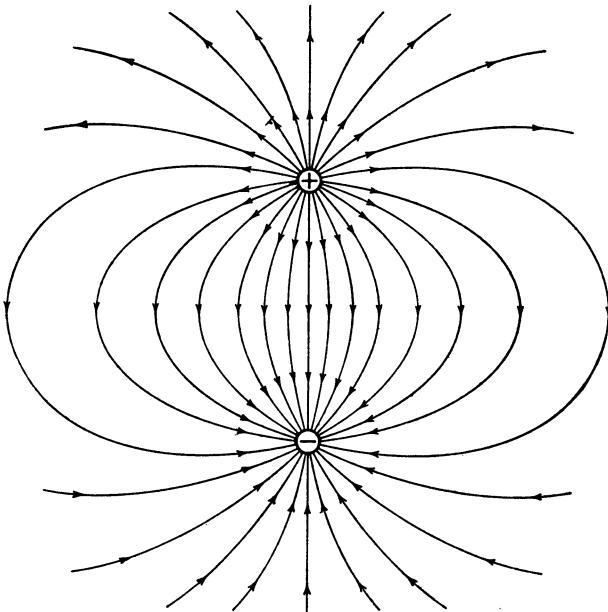
Linie sił przedstawiają, w jaki sposób natężenie pola  $E$  zmienia się w danym obszarze przestrzeni. Jednakże równania opisujące elektromagnetyzm (patrz tabl. 40-2) zawierają natężenie pola, a nie linie sił. Pole elektryczne  $E$  zmienia się w doskonale ciągły sposób na dowolnej drodze przecinającej to pole, patrz rys. 27-7.

#### 27-4. Znajdowanie natężenia $E$ pola elektrycznego

W tym rozdziale zajmiemy się wzajemnym oddziaływaniem ładunku i pola, pokazując jak można obliczyć pole  $E$  w różnych punktach w pobliżu rozmieszczonych ładunków. Zaczniemy od prostego przypadku ładunku punktowego  $q$ .

Przypuśćmy, że umieściliśmy ładunek próbny  $q_0$  w odległości  $r$  od ładunku punktowego  $q$ . Wielkość siły działającej na  $q_0$  dana jest prawem Coulomba

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2}.$$



Rys. 27-5. Linie sił pola elektrycznego wytworzonego przez dwa jednakowe ładunki o przeciwnych znakach

Natężenie pola elektrycznego w punkcie, w którym znajduje się ładunek próbny, otrzymujemy z równania (27-2)

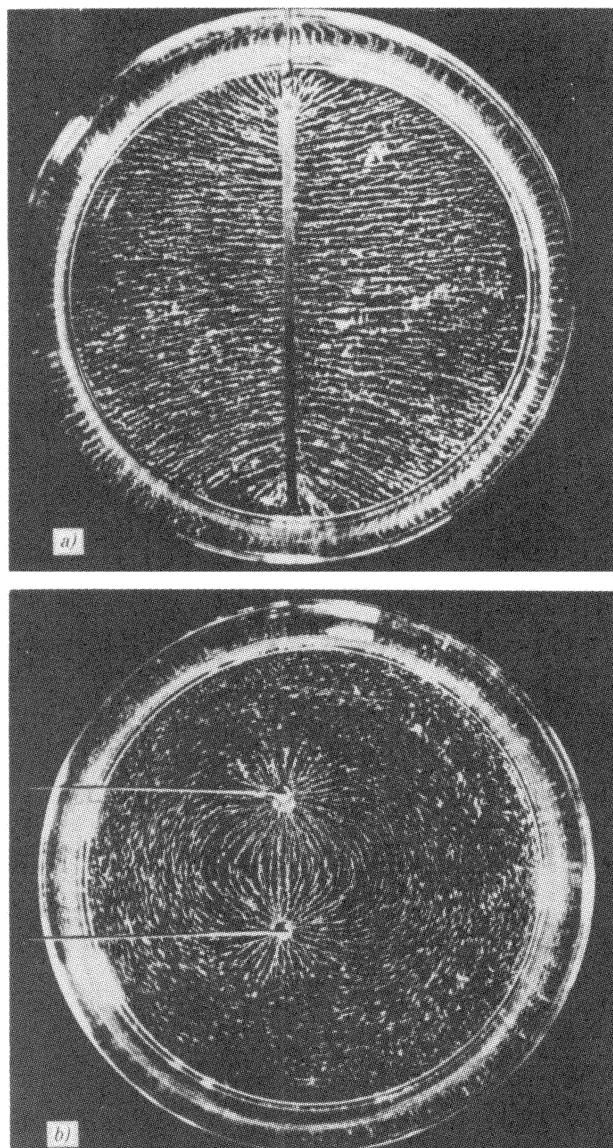
$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (27-4)$$

Wektor  $\mathbf{E}$  jest skierowany wzdłuż linii radialnych wychodzących z  $q$  w stronę: od ładunku  $q$ , gdy jest on dodatni, a do ładunku  $q$ , gdy jest on ujemny.

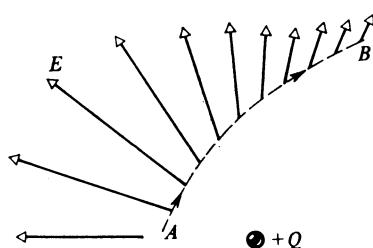
W celu znalezienia natężenia  $\mathbf{E}$  pola wytwarzanego przez kilka ładunków punktowych, należy: (a) obliczyć  $\mathbf{E}_n$  w danym punkcie, pochodzące od każdego ładunku, tak jakby to był jedyny obecny ładunek; (b) dodać wektorowo znalezione natężenia, w celu znalezienia wypadkowego pola  $\mathbf{E}$  w danym punkcie. W równaniu

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \dots = \sum \mathbf{E}_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (27-5)$$

przeprowadzamy sumowanie wektorowe po wszystkich ładunkach. Równanie (27-5) (podobnie jak równanie (26-4)) jest przykładem zasady superpozycji, która w tym kontekście stwierdza: pole elektryczne w danym punkcie wynikające z oddzielnych rozkładów ładunku jest sumą wektorową pól pochodzących od poszczególnych rozkładów. Zasada



Rys. 27-6. Fotografie linii sił pola elektrycznego dookoła (a) naładowanej płyty (porównać z rys. 27-2) i (b) dwóch prętów naładowanych jednakowo, lecz z przeciwnymi znakami (porównać z rys. 27-5). Fotografie przedstawiają rozkład nialektryzowanej zawiesiny z nasionek trawy znajdującej się w cieczy, która jest dobrym izolatorem



Rys. 27-7.  $E$  zmienia się stopniowo w sposób ciągły wzduż dowolnej drogi  $AB$  w polu wytworzonym przez ładunek punktowy  $+Q$ . Na ogół droga  $AB$  i wektory pola  $E$  nie leżą w płaszczyźnie rysunku

superpozycji jest bardzo ważną zasadą w fizyce. Stosuje się ona również np. do pól grawitacyjnych czy też magnetycznych\*.

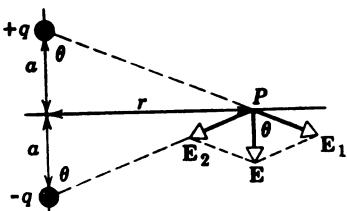
Jeżeli rozkład ładunku jest ciągły, możemy obliczyć pole wytworzone w jakimś punkcie  $P$  dzieląc ładunek na nieskończonie małe elementy  $dq$ . Traktując każdy taki element jako ładunek punktowy obliczamy wytworzone przez niego pole w badanym punkcie. Wielkość  $dE$  (patrz równ. (27-4)) jest dana przez

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}, \quad (27-6)$$

gdzie  $r$  jest odlegością od elementu ładunku  $dq$  do punktu  $P$ . Wypadkowe pole w punkcie  $P$  znajdujemy z zasady superpozycji dodając (tj. całkując) wkłady od wszystkich elementów ładunku, czyli

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E}. \quad (27-7)$$

Całkowanie, podobnie jak sumowanie w równaniu (27-5), jest tu operacją wektorową; w przykładzie 5 zobaczymy, jak obliczyć taką całkę w prostym przypadku.



Rys. 27-8. Przykład 3

**Przykład 3. Dipol elektryczny.** Na rysunku 27-8 widzimy dwa ładunki, dodatni i ujemny, o równej wielkości  $q$ , oddalone od siebie o  $2a$  — jest to układ zwany dipolem elektrycznym. Model linii sił dla tego przypadku przedstawia rys. 27-5. Jakie jest natężenie  $\mathbf{E}$  pola wytworzonego przez te ładunki w punkcie  $P$  leżącym na symetralnej odcinka łączącego obydwa ładunki w odległości  $r$  od jego środka? Założyć, że  $r \gg a$ .

Zależność (27-5) daje równanie wektorowe

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2,$$

gdzie na podstawie równania (27-4)\*\*,

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2+r^2}.$$

Suma wektorów  $\mathbf{E}_1$  i  $\mathbf{E}_2$  jest skierowana do dołu, a jej wielkość wynosi

$$E = 2E_1 \cos \theta.$$

Z rysunku widzimy, że

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}}.$$

\* Z formalnego punktu widzenia zasada superpozycji w fizyce obowiązuje tylko dla zjawisk, które dają się opisać liniowymi równaniami różniczkowymi. Kiedy amplitudy drgań mechanicznych albo elektromagnetycznych stają się względnie wielkie, zasada ta zaczyna przestawać obowiązywać. Jednak takich przypadków nie będziemy dyskutować. Natomiast w elektrostatyce zasadę superpozycji stosuje się zawsze.

\*\* Należy zauważyć, że  $r$  w równaniu (27-4) i w tym równaniu są różne.

Podstawiając wyrażenia na  $E_1$  i  $\cos\theta$  do równania na  $E$  otrzymujemy

$$E = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2+r^2} \frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2aq}{(a^2+r^2)^{3/2}}.$$

Ponieważ  $r \gg a$ , możemy zaniedbać  $a$  w mianowniku i wówczas równanie redukuje się do

$$E \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2aq}{r^3}. \quad (27-8a)$$

Zasadnicze wielkości charakteryzujące układ ładunków na rys. 27-8, wartość ładunku  $q$  i odległość pomiędzy ładunkami  $2a$  wchodzą do równania (27-8a) jako iloczyn. Oznacza to, że mierząc  $E$  w różnych odległościach od dipola elektrycznego (przy założeniu  $r \gg a$ ) nigdy nie znajdziemy oddzielnie  $q$  i  $2a$ , a tylko ich iloczyn  $2aq$ ; gdybyśmy podwoili  $q$ , a jednocześnie zmniejszyli  $a$  do połowy, pole elektryczne w *dużych odległościach od dipola* nie zmieniłoby się.

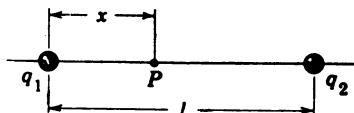
Iloczyn  $2aq$  nazywamy *elektrycznym momentem dipolowym p*. Możemy obecnie przepisać wyrażenie na  $E$  dla punktów *wzdłuż symetrycznej w postaci*

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3}. \quad (27-8b)$$

Wynik dla punktów leżących *wzdłuż osi dipola* (patrz zadanie 25) oraz ogólny wynik dla dowolnego punktu (patrz zadanie 28) również zawierają wielkości  $2a$  i  $q$  tylko w postaci iloczynu  $2aq$  ( $= p$ ). Także zależność  $E$  od  $r$  w ogólnym rozwiązaniu dla punktów leżących daleko od dipola jest typu  $1/r^3$ , podobnie jak zależność (27-8b).

Dipol na rys. 27-8 składa się z dwóch równych ładunków o przeciwnych znakach umieszczonych tak blisko siebie, że pola wytworzone przez każdy z tych ładunków oddzielnie na dużych odległościach prawie, lecz niezupełnie, znoszą się. Z tego punktu widzenia łatwo zrozumieć, dlaczego  $E(r)$  dla dipola maleje jak  $1/r^3$  (równ. (27-8b)), podczas gdy dla pojedynczego ładunku  $E(r)$  maleje wolniej, mianowicie jak  $1/r^2$  (równ. (27-4)).

**Przykład 4.** Na rysunku 27-9 widzimy ładunek  $q_1 (= +1,0 \cdot 10^{-6} \text{ C})$  umieszczony w odległości 10 cm od ładunku  $q_2 (= +2,0 \cdot 10^{-6} \text{ C})$ . W którym punkcie linii łączącej obydwa ładunki natężenie pola elektrycznego równe się零?



Rys. 27-9. Przykład 4

Punkt taki musi leżeć pomiędzy ładunkami, ponieważ tylko tu siły, jakimi ładunki  $q_1$  i  $q_2$  działają na ładunek próbny (bez względu na to czy jest on dodatni czy ujemny) są przeciwnie skierowane. Jeżeli przez  $E_1$  i  $E_2$  oznaczmy natężenia pól elektrycznych wytworzonych odpowiednio przez ładunki  $q_1$  i  $q_2$ , to musi być  $E_1 = E_2$ , czyli (patrz równ. (27-4))

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{(l-x)^2},$$

gdzie  $x$  jest odlegością od  $q_1$ ,  $l$  jest równe 10 cm. Rozwiązuając ostatnie równanie względem  $x$  otrzymujemy

$$x = \frac{l}{1 + \sqrt{q_2/q_1}} = \frac{10 \text{ cm}}{1 + \sqrt{2}} = 4,1 \text{ cm}.$$

Czytelnik powinien sam wykonać szczegółowe przeliczenie. Na jakiej podstawie odrzucono drugi pierwiastek równania kwadratowego?

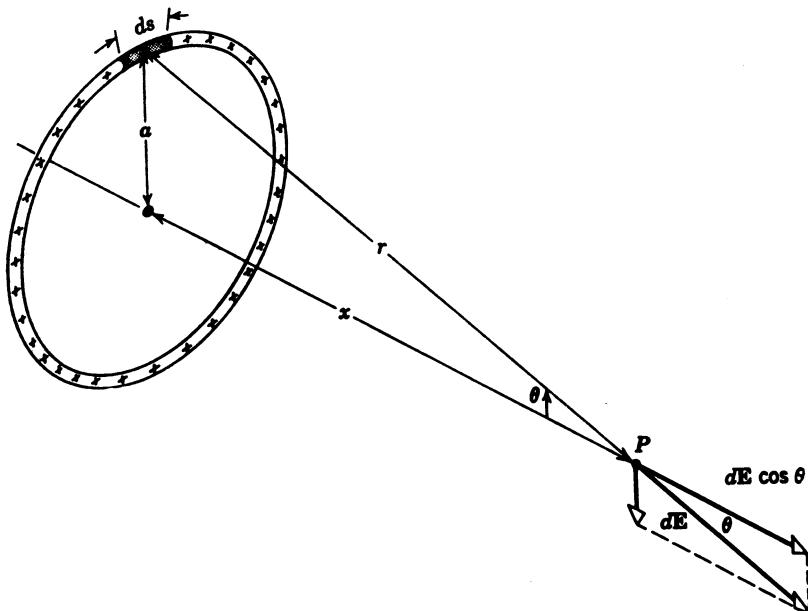
**Przykład 5. Naladowany pierścień.** Rysunek 27-10 przedstawia pierścień o ładunku  $q$  i promieniu  $a$ . Obliczyć  $E$  dla punktów leżących na osi pierścienia w odległości  $x$  od jego środka.

Rozważmy różniczkowy element pierścienia o długości  $ds$  umieszczony na rys. 27-10, w górnej części pierścienia. Zawiera on element ładunku

$$dq = q \frac{ds}{2\pi a},$$

gdzie  $2\pi a$  jest obwodem pierścienia. Element ten wytworzy w punkcie  $P$  pole elektryczne  $dE$ .

Wypadkowe pole  $E$  w punkcie  $P$  znajdujemy sumując składowe od wszystkich elementów tworzących pierścień (całkując). Z symetrii wynika, że to wypadkowe pole musi być skierowane wzdłuż osi pierścienia. Tak więc tylko składowa  $dE$  równoległa do osi daje wkład do ostatecznego wyniku. Składowa prostopadła do osi znowu się z równą, lecz przeciwnie skierowaną składową pochodząą od elementu ładunku leżącego po przeciwniej stronie pierścienia.



Rys. 27-10. Przykład 5

W wyniku tego zamiast całki wektorowej (równ. (27-7))  $\mathbf{E} = \int d\mathbf{E}$  otrzymujemy całkę skalarną

$$E = \int dE \cos \theta.$$

$dE$  wyliczamy z równania (27-6), skąd

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q ds}{2\pi a} \frac{1}{a^2+x^2}.$$

Z rysunku 27-10 mamy

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Ponieważ  $x$  w danym punkcie  $P$  ma tę samą wartość dla wszystkich elementów ładunku, czyli jest ustalone, a  $s$  jest zmienną całkowania, otrzymujemy

$$E = \int dE \cos \theta = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q ds}{2\pi a(a^2+x^2)} \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{2\pi a(a^2+x^2)^{3/2}} \int ds.$$

Całka jest po prostu obwodem pierścienia ( $= 2\pi a$ ), tak że

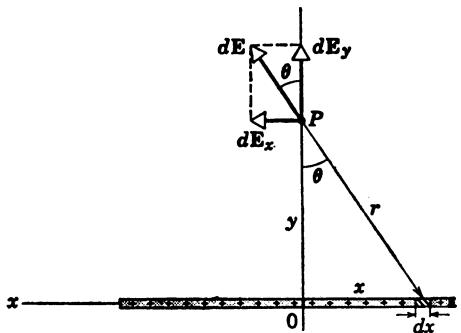
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(a^2+x^2)^{3/2}}.$$

Czy dla  $x = 0$  wyrażenie to redukuje się dając oczekiwany wynik? Gdy  $x \gg a$ , możemy w mianowniku równania zaniedbać  $a$ , wtedy otrzymamy

$$E \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2}.$$

Wynik ten jest prawidłowy (por. z równ. (27-4)), ponieważ dla dostatecznie dużych odległości pierścień zachowuje się jak ładunek punktowy  $q$ .

**Przykład 6. Nieskończanie dlugi naładowany pręt.** Rysunek 27-11 przedstawia odcinek nieskończoności długiego naładowanego pręta, dla którego gęstość liniowa ładunku (to jest ładunek przypadający na jednostkę długości; mierzona w C/m) ma stałą wartość  $\lambda$ . Obliczyć natężenie  $E$  pola w odległości  $y$  od pręta.



Rys. 27-11. Przykład 6. Odcinek nieskończoności długiego naładowanego pręta

Wielkość pola  $dE$  pochodzącego od ładunku  $dq (= \lambda dx)$  obliczamy używając wzoru (27-6):

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{y^2 + x^2}.$$

Wektor  $dE$ , jak wynika z rys. 27-11, ma składowe

$$dE_x = -dE \sin \theta, \quad dE_y = dE \cos \theta.$$

Znak minus przed  $dE_x$  oznacza, że  $dE_x$  jest skierowane w ujemną stronę osi  $x$ . Składowe  $x$  i  $y$  wypadkowego wektora  $E$  w punkcie  $P$  dane są przez

$$E_x = \int dE_x = - \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \sin \theta dE, \quad E_y = \int dE_y = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \cos \theta dE.$$

Składowa  $E_x$  musi być równa零, gdyż dla każdego elementu ładunku po prawej stronie istnieje odpowiadający mu element po lewej stronie taki, że ich wkłady do natężenia pola w kierunku  $x$  znowszą się. Wobec tego  $E$  ma kierunek  $y$ . Ponieważ wkłady do  $E_y$  od lewej i prawej połowy pręta są równe, możemy napisać

$$E = E_y = 2 \int_{x=0}^{x=+\infty} \cos \theta dE.$$

Zwracamy uwagę, że zmieniliśmy dolną granicę całkowania i wprowadziliśmy wyrównujący to czynnik 2. Podstawiając wyrażenia na  $dE$  do tego równania otrzymujemy

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{x=0}^{x=\infty} \cos \theta \frac{dx}{y^2 + x^2}.$$

Z rysunku 27-11 wynika, że wielkości  $\theta$  i  $x$  nie są niezależne. Musimy wyeliminować jedną z nich, powiedzmy  $x$ . Zależność pomiędzy  $x$  i  $\theta$  jest (patrz rysunek) następująca:

$$x = y \tan \theta.$$

Różniczkując to otrzymujemy

$$dx = y \sec^2 \theta d\theta.$$

Podstawienie tych dwóch wyrażeń daje ostatecznie

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \cos\theta d\theta.$$

Czytelnik powinien starannie przeanalizować ostatni krok, pamiętając, że teraz granice całkowania odnoszą się do  $\theta$ , a nie do  $x$ . Na przykład, gdy  $x \rightarrow +\infty$ , to  $\theta \rightarrow \frac{1}{2}\pi$ , jak wynika z rys. 27-11. Otrzymane równanie daje się łatwo scałkować

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} (\sin\theta) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}.$$

Można się zastanawiać nad użytecznością rozwiązywania problemu dotyczącego nieskończonym długiego naładowanego pręta, podczas gdy każdy pręt ma w rzeczywistości długość skończoną (patrz zadanie 23). Jednakże dla punktów leżących dostatecznie blisko naładowanego pręta, a daleko od jego końców, wprowadzony wzór daje wyniki tak zbliżone do poprawnych, że w wielu praktycznych sytuacjach różnica może być pominięta. Zazwyczaj nie ma konieczności dokładnego rozważania geometrii urządzeń napotkanych w praktycznych problemach. Gdybyśmy nie stosowali idealizacji lub przybliżeń, ogromna większość różnych ważnych problemów w fizyce i technice nie mogłyby być w ogóle rozwiązana.

## 27-5. Ładunek punktowy w polu elektrycznym

W tym i następnym paragrafie, w przeciwieństwie do paragrafu 27-4, zbadamy drugą część wzajemnego oddziaływania między polem a ładunkiem, tj. jeśli dane jest pole  $E$ , jakie siły i momenty obrotowe działają na rozkład ładunków w nim umieszczonych. Rozpoczniemy od prostego przypadku ładunku punktowego umieszczonego w jednorodnym polu elektrycznym.

Pole elektryczne działa na cząstkę naładowaną z siłą określona zależnością (27-2)  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ . Siła ta wytwarza przyspieszenie

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m},$$

gdzie  $m$  jest masą cząstki. Rozważmy dwa przykłady przyspieszenia cząstki naładowanej w jednorodnym polu elektrycznym. Takie pole można wytworzyć łącząc dwie końcówki baterii z dwiema równoległyimi płytami metalowymi, odizolowanymi od siebie. Jeżeli odległość pomiędzy płytami jest mała w porównaniu z rozmiarami płytek, to pole pomiędzy nimi będzie wystarczająco jednorodne z wyjątkiem obszaru położonego blisko brzegów. Zauważmy, że rozważając ruch cząstki w polu wytworzonym przez ładunki zewnętrzne, pomijamy pole wytworzone przez samą cząstkę. Podobnie pole grawitacyjne Ziemi nie wywiera żadnej siły na samą Ziemię, a tylko na inne przedmioty, powiedzmy kamień, umieszczone w tym polu.

**Przykład 7.** Wprowadzamy cząstkę o masie  $m$  i ładunku  $q$  do jednorodnego pola elektrycznego i puszczamy ją swobodnie (rys. 27-12). Opisać jej ruch.

Ruch ten jest podobny do ruchu ciała spadającego w ziemskim polu grawitacyjnym. Przyspieszenie (stałe) dane jest przez

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m}.$$

Stosujemy więc równanie ruchu jednostajnie przyspieszonego (tabl. 3-1). Przyjmując  $v_0 = 0$  mamy

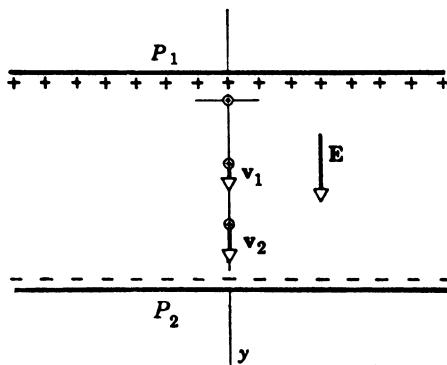
$$v = at = \frac{qEt}{m}, \quad y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{qEt^2}{2m},$$

$$v^2 = 2ay = \frac{2qEy}{m}.$$

Energię kinetyczną osiągniętą po przebyciu odległości  $y$  znajdujemy z zależności

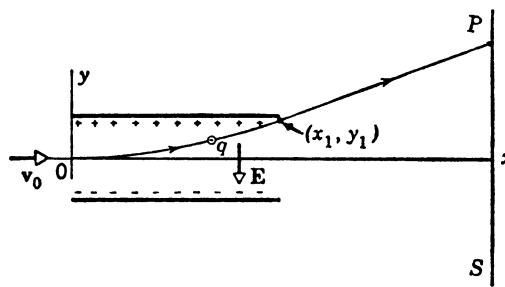
$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \frac{2qEy}{m} = qEy.$$

Ten wynik można również otrzymać bezpośrednio z twierdzenia o zamianie pracy na energię, gdyż stała sila  $qE$  działa na drodze  $y$ .



Rys. 27-12. Ruch ładunku w jednorodnym polu elektrycznym wytworzonym przez dwie przeciwnie naładowane płyty  $P_1$  i  $P_2$

**Przykład 8. Odchylenie wiązki elektronów.** Rysunek 27-13 przedstawia elektron o masie  $m$  i ładunku  $q = e$ , wpadający do jednorodnego pola elektrycznego z prędkością początkową  $v_0$ , prostopadłą do kierunku wektora natężenia pola  $E$ . Opisać ruch tego elektronu.



Rys. 27-13. Przykład 8. Elektron o prędkości początkowej  $v_0$  wchodzi w obszar pola elektrycznego wytworzonego przez dwie płytki naładowanego kondensatora. Kierunek prędkości jest prostopadły do kierunku pola

Ruch elektronu będzie podobny do ruchu pocisku wystrzelonego poziomo w polu grawitacyjnym Ziemi. Stosując rozważania z paragrafu 4-3 otrzymujemy następujące wyrażenia na składową poziomą ( $x$ ) i pionową ( $y$ ) ruchu

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{eE}{2m}t^2.$$

Eliminując  $t$  otrzymujemy równanie toru

$$y = \frac{eE}{2mv_0^2} x^2. \quad (27-9)$$

Elektron opuszczając obszar zawarty pomiędzy płytami (rys. 27-13) porusza się (zaniebujemy siły ciążenia) po linii prostej, stycznej do paraboli z rówн. (27-9) w punkcie wyjścia. Na jego drodze, w pewnej odległości przed płytami, możemy ustawić fluoryzujący ekran  $S$ . Wówczas rozważany elektron razem z innymi elektronami biegącymi po tej samej drodze będzie widoczny jako mała plamka świetlna; na tym polega zasada działania *elektrostatycznego oscylometru katodowego*.

**Przykład 9.** Pole elektrostatyczne pomiędzy płytami oscylometru katodowego wynosi  $1,2 \cdot 10^4$  N/C.

Jakiego odchylenia dozna elektron, który znajduje się w tym polu, mając typową dla tego rodzaju urządzeń wartość energii kinetycznej 2000 eV ( $= 3,2 \cdot 10^{-16}$  J). Układ odchylający ma 1,5 cm długości.

Pamiętając, że  $K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$ , możemy przepisać wzór (27-9) w postaci

$$y = \frac{eEx^2}{4K_0}.$$

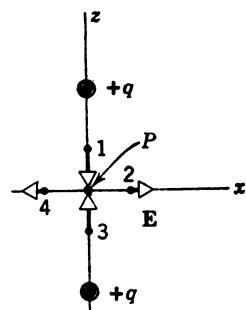
Jeżeli przez  $x_1$  oznaczymy poziomą odległość od lewej krawędzi płytki, to  $y_1$  będzie odpowiednim odchyleniem pionowym (patrz rys. 27-13), czyli

$$y_1 = \frac{eEx^2}{4K_0} = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})(1,2 \cdot 10^4 \text{ N/C})(1,5 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2}{4 \cdot 3,2 \cdot 10^{-16} \text{ J}} = 3,4 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,34 \text{ mm}.$$

Odchylenie zmierzone nie przy płytach odchylających, lecz na ekranie fluoryzującym jest znacznie większe.

**Przykład 10.** Dodatni, punktowy ładunek próbowy  $q_0$  znajduje się w połowie drogi pomiędzy dwoma równymi umieszczeniami na stałe ładunkami dodatnimi  $q$ . Jaka siła działa na niego w punkcie  $P$  i w pobliżu punktu  $P$ ?

Ze względu na symetrię siła w punkcie  $P$  równa się zeru; cząstka znajduje się w równowadze. Należy znaleźć rodzaj tej równowagi. Na rysunku 27-14 (porównaj rys. 27-4) pokazane są wektory  $E$  dla czterech punktów w sąsiedztwie punktu  $P$ . Jeżeli ładunek próbowy porusza się wzdłuż osi  $z$ , to występuje siła przyciągająca równowagę; jednakże równowaga jest nietrwała dla ruchu po osiach  $x$  i  $y$ . Jest to zatem *trójwymiarowy równoważnik siodłowego punktu równowagi* (patrz rys. 14-8). Jaki byłby rodzaj równowagi dla ujemnego ładunku próbnego?



Rys. 27-14. Przykład 10. Pole elektryczne w czterech punktach w pobliżu punktu  $P$ , leżącego w środku odległości między dwoma dodatnimi ładunkami  $q$

## 27-6. Dipol w polu elektrycznym

Elektryczny moment dipolowy może być traktowany jako wektor  $\mathbf{p}$ , którego wielkość  $p$  dla dipola, takiego jak opisany w przykładzie 3, jest iloczynem  $2aq$ , tj. wielkości ładunku  $q$  i odległości  $2a$  pomiędzy ładunkami, a *kierunek*  $\mathbf{p}$  jest zgodny z kierunkiem od ładunku *ujemnego do dodatniego*. Wektorowa natura elektrycznego momentu dipolowego pozwala nam, jak zobaczymy, sprowadzić wiele wyrażeń do bardziej zwartej postaci poprzez wprowadzenie dipoli elektrycznych.

Rysunek 27-15a przedstawia dipol elektryczny utworzony przez umieszczenie dwóch ładunków  $+q$  i  $-q$  w stałej wzajemnej odległości  $2a$ . Układ jest umieszczony w jednorodnym *zewnętrznym* polu elektrycznym  $\mathbf{E}$ , z którym moment dipolowy  $\mathbf{p}$  tworzy kąt  $\theta$ . Na dipol, jak pokazano, działają dwie równe i przeciwnie skierowane siły  $\mathbf{F}$  i  $-\mathbf{F}$ , gdzie  $F = qE$ . Wypadkowa siła jest oczywiście równa零, lecz istnieje wypadkowy moment obracający dipol wokół osi przechodzącej przez punkt  $O$  (patrz równ. (12-2)) dany przez

$$\tau = 2F(a \sin \theta) = 2aF \sin \theta.$$

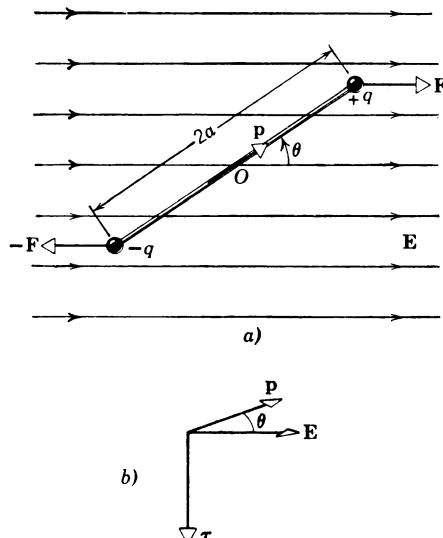
Łącząc te dwa równania i biorąc pod uwagę, że  $p = 2aq$ , otrzymujemy

$$\tau = 2aqE \sin \theta = pE \sin \theta. \quad (27-10)$$

Widzimy, że na dipol elektryczny umieszczony w zewnętrznym polu  $\mathbf{E}$  działa moment skręcający, dający do ułożenia go wzdłuż linii pola. Równanie (27-10) można przepisać w postaci wektorowej

$$\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E}. \quad (27-11)$$

Odpowiednie wektory pokazane są na rys. 27-15b.



Rys. 27-15. (a) Dipol elektryczny w jednorodnym polu zewnętrznym. (b) Ilustracja zależności  $\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$

Ażeby zmienić położenie dipola elektrycznego w zewnętrznym polu elektrycznym, musi być wykonana pewna praca (dodatnia lub ujemna) przez czynnik zewnętrzny. Praca ta zostaje zmagazynowana jako energia potencjalna  $U$  układu składającego się z dipola i urządzenia wytwarzającego pole zewnętrzne. Jeżeli  $\theta$  na rys. 27-15a ma wartość początkową  $\theta_0$ , to praca potrzebna do obrócenia dipola do kąta  $\theta$  dana jest równaniem (12-9), czyli (patrz tabl. 12-2)

$$W = \int dW = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau d\theta = U,$$

gdzie  $\tau$  jest momentem skręcającym, wywieranym przez czynnik, który wykonuje pracę. Z tego równania oraz z zależności (27-10) otrzymujemy

$$U = \int_{\theta_0}^{\theta} pE \sin \theta d\theta = pE \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta d\theta = pE(-\cos \theta) \Big|_{\theta_0}^{\theta}.$$

Ponieważ interesują nas tylko zmiany energii potencjalnej, orientację punktu odniesienia,  $\theta_0$  możemy dobrać tak, aby miała wygodną wartość, w tym przypadku  $90^\circ$ . Stąd mamy

$$U = -pE \cos \theta \quad (27-12)$$

**lub w postaci wektorowej**

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}. \quad (27-13)$$

**Przykład 11.** Dipol elektryczny składa się z dwóch różnoimiennych ładunków o wielkości  $q = 1,0 \cdot 10^{-6}$  C, odległych od siebie o  $d = 2,0$  cm. Dipol ten jest umieszczony w zewnętrznym polu elektrycznym o natężeniu  $1,0 \cdot 10^5$  N/C.

(a) Jaki maksymalny moment skręcający działa na dipol w tym polu? Maksymalny moment skręcający znajdujemy podstawiając  $\theta = 90^\circ$  we wzorze (27-10). Wówczas

$$\begin{aligned}\tau &= pE \sin \theta = qdE \sin \theta = \\ &= (1,0 \cdot 10^{-6} \text{ C}) (0,020 \text{ m}) (1,0 \cdot 10^5 \text{ N/C}) (\sin 90^\circ) = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}.\end{aligned}$$

(b) Jaką pracę należy wykonać, aby obrócić dipol o  $180^\circ$ , wychodząc z pozycji równoległej do pola ( $\theta = 0^\circ$ )? Praca jest równa różnicy energii potencjalnej  $U$  w położeniach  $\theta = 180^\circ$  i  $\theta = 0^\circ$ . Z równania (27-12)

$$\begin{aligned}W &= U_{180^\circ} - U_{0^\circ} = -pE \cos 180^\circ - (-pE \cos 0^\circ) = 2pE = \\ &= 2qdE = 2 \cdot 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot 0,020 \text{ m} \cdot 1,0 \cdot 10^5 \text{ N/C} = 4,0 \cdot 10^{-3} \text{ J}.\end{aligned}$$

### Pytania

1. Wymienić wszystkie znane pola skalarnie i wektorowe.

2. Rozważamy przyciąganie grawitacyjne pomiędzy Ziemią i kamieniem. (a) Czy możemy powiedzieć, że Ziemia leży w polu grawitacyjnym kamienia? (b) Jaki jest stosunek pól grawitacyjnych wytworzonych przez kamień i przez Ziemię?

3. Dodatnio naładowana kulka wisi na jedwabnej nici. Chcemy zmierzyć natężenie  $E$  w punkcie leżącym w tej samej płaszczyźnie poziomej co wiszący ładunek. W tym celu umieszczałyśmy dodatni ładunek próbny w tym punkcie i mierzmy stosunek  $F/q_0$ . Czy  $F/q_0$  będzie mniejsze, równe, czy większe od wartości  $E$  w badanym punkcie?

4. Weźmy pod uwagę kwantyzację ładunku elektrycznego (zakładamy, że pojedynczy elektron jest elementarną jednostką ładunku). Jak można uzasadnić słuszność stosowania równania (27-3) w tym przypadku?

5. Badając pola elektryczne z ładunkiem próbny często przyjmowaliśmy dla wygody, że ładunek próbny jest dodatni. Czy rzeczywiście stanowi to jakąś różnicę w określaniu tego pola? Zilustrować prostym przykładem własnego pomysłu.

6. Linie sił pola elektrycznego nigdy się nie przecinają. Dlaczego?

7. Dlaczego styczne do linii sił z rys. 27-4 w punktach dostatecznie odległych od obu ładunków przetną się w środku rysunku?

8. Na rysunku 27-2 widzimy, że we wszystkich punktach przed naładowaną płaszczyzną  $E$  ma tę samą wartość. Czy to jest słuszne? Można by przypuszczać, że pole powinno być silniejsze blisko płytka, gdyż ładunki są wówczas dużo bliżej.

9. Czy ładunek  $q$  o masie  $m$  wprowadzony do pola niejednorodnego będzie się poruszał wzduł linii sił?

10. Ładunek punktowy porusza się w polu elektrycznym pod kątem prostym do linii sił pola. Czy działa nań jakaś siła  $F$ ?

11. Na rys. 27-7 droga  $AB$  nie jest linią sił pola. Skąd to wiadomo?

12. Dlaczego na rys. 27-6 rozkład zawiesiny z nasionek trawy powinien być zgodny z układem linii sił pola? Zawiesina normalnie nie jest naładowana. Patrz: O. Jefimenko, Demonstration of the Electric Fields of Current-Carrying Conductors, *American Journal of Physics*, January 1962.

13. Dwa punktowe ładunki o nieznanej wartości i znaku są oddalone od siebie o  $d$ . Natężenie pola elektrycznego w jednym z punktów leżących na linii łączącej ładunki jest równe zeru. Co możemy wynieść na podstawie tego o ładunkach?

14. Porównać, w jaki sposób  $E$  zależy od  $r$  dla: (a) ładunku punktowego (równ. (27-4)), (b) dipola (równ. (27-8a)) i (c) kwadrupola (zadanie 33).

15. Ładunki  $+Q$  i  $-Q$  umieszczone są w odległości  $L$  od siebie, a między nimi narysowana jest dłuża,

prosta linia. Jaki jest kierunek pola  $E$  na tej linii dla punktów: (a) między ładunkami, (b) poza ładunkami w kierunku  $+Q$ , (c) poza ładunkami w kierunku  $-Q$ ?

16. Dwa ładunki punktowe o nieznanym znaku i wartości znajdują się w odległości  $L$  od siebie. Czy  $E$  może być równe zeru dla punktów pozaosiowych (wyłączając  $\infty$ )? Wyjaśnić to.

17. Dlaczego, jeżeli nie weźmiemy pod uwagę warunku  $r \gg a$ , równanie (27-86) nie będzie reprezentować linii sił pola z rys. 27-5?

18. Jeżeli dwa dipole o momentach  $p_1$  i  $p_2$  zostaną nałożone, czy moment dipolowy powstałego układu będzie równy  $p_1 + p_2$ ?

19. Na rysunku 27-5 siła działająca na dolny ładunek jest skierowana do góry i ma skończoną wartość. Natomiast zagęszczenie linii sił sugeruje, że w bezpośrednim sąsiedztwie tego ładunku (punktowego) natężenie  $E$  pola elektrycznego jest nieskończonie duże. Na ładunek umieszczony w nieskończonie dużym polu powinna działać nieskończonie duża siła. Jakie jest rozwiążanie tego problemu?

20. Dipol elektryczny znajduje się w niejednorodnym polu elektrycznym. Czy działa na niego jakaś siła wypadkowa?

21. Dipol elektryczny wprowadzamy do jednorodnego pola elektrycznego, jak na rys. 27-15a i puszczamy. Opisać jego ruch.

22. Moment dipolowy  $p$  dipola elektrycznego jest skierowany równolegle do linii sił jednorodnego, zewnętrznego pola elektrycznego  $E$ . (a) Czy równowaga jest trwała czy nietrwała? (b) Rozważyć stan równowagi, gdy  $p$  i  $E$  mają przeciwnie kierunki.

## Zadania

### Paragraf 27-2

1. Jak trzeba dobrąć wielkość ładunku punktowego, żeby wytworzone przez niego pole elektryczne miało w odległości 50 cm natężenie 2,0 N/C?

Odp.:  $5,6 \cdot 10^{-11}$  C.

2. Podać wielkość i kierunek pola elektrostatycznego, które będzie równoważyć ciężar (a) elektronu i (b) cząstki  $\alpha$ .

3. Pole elektryczne  $E$  o średniej wartości natężenia, około 150 N/C, jest skierowane do góry w atmosferze ziemskiej. Chcemy „zawiesić” w tym polu kulę siarkową ważący 500 g, naładowawszy ją. (a) Jakiego musimy użyć ładunku (znak i wielkość)? (b) Dlaczego doświadczenie nie jest wykonalne? Podać powód jakościowy poparty przybliżonymi obliczeniami.

Odp.: (a)  $-0,030$  C. (b) Kulka wybuchały z powodu wzajemnego odpychania kulombowskiego.

4. W pewnej chwili składowe prędkości elektronu poruszającego się między dwoma równoległymi, naładowanymi płytami wynoszą  $v_x = 1,5 \cdot 10^5$  m/s i  $v_y = 0,30 \cdot 10^4$  m/s. Jeżeli pole elektryczne między płytami wynosi  $E = j \cdot 1,2 \cdot 10^4$  N/C, to: (a) Jakie jest przyspieszenie elektronu? (b) Gdy składowa  $x$  elektronu zmieni się o 2 cm, jaka będzie prędkość elektronu?

5. Na cząstkę o ładunku  $-2,0 \cdot 10^{-9}$  C, znajdującej się w jednorodnym polu elektrycznym, działa siła równa  $3,0 \cdot 10^{-6}$  N skierowana do dołu. (a) Jakie jest natężenie tego pola elektrycznego? (b) Jakie są: wielkość i kierunek siły elektrycznej, działającej na proton umieszczony w tym polu? (c) Jaka siła grawitacyjna działa na proton? (d) Jaki jest stosunek siły elektrycznej do grawitacyjnej w tym przypadku?

Odp.: (a)  $1,5 \cdot 10^3$  N/C. (b)  $2,4 \cdot 10^{-16}$  N w góre. (c)  $1,6 \cdot 10^{-26}$  N. (d)  $1,5 \cdot 10^{10}$ .

6. Między dwiema dużymi, równoległymi płytami ukształtowało się jednorodne pole  $E$ . W polu tym na sznurku o długości  $l$  zawieszono małą, przewodzącą kulę o masie  $m$ . Znaleźć okres tego wahadła, gdy kula posiada ładunek  $+q$ , jeżeli płyta dolna (a) jest naładowana dodatnio, (b) jest naładowana ujemnie.

### Paragraf 27-3

7. Zakładamy, że wykładnik potęgi w prawie Coulomba jest nie 2, lecz  $n$ . Wykazać, że dla  $n \neq 2$  nie można tak skonstruować linii sił, żeby miały one właściwości wymienione w paragrafie 27-3. Dla uproszczenia rozważyć izolowany ładunek punktowy.

8. Naszkicować jakościowo linie sił dla pola wytworzonego przez cienki, okrągły, równomiernie naładowany dysk o promieniu  $R$ . (Wskazówka. Rozważyć jako przypadki graniczne punkty leżące bardzo blisko i bardzo daleko od powierzchni.) Pokazać linie sił tylko w płaszczyźnie zawierającej os dysku.

9. Naszkicować jakościowo linie sił pola między dwiema koncentrycznymi, przewodzącymi kulistymi powłokami, gdy kula wewnętrzna ma ładunek  $+q_1$ , a kula zewnętrzna  $-q_2$ . Rozważyć następujące przypadki:  $q_1 > q_2$ ,  $q_1 = q_2$ ,  $q_1 < q_2$ .

10. (a) Naszkicować jakościowo linie sił pola związane z trzema długimi, równoległymi naładowanymi liniami, w prostopadłej płaszczyźnie. Przyjąć, że przecięcia naładowanych linii z taką płaszczyzną tworzą trójkąt równoboczny, i że każda linia ma taką samą liniową gęstość ładunku  $\lambda$  (C/m). (b) Omówić naturę równowagi ładunku punktowego umieszczonego na środkowej osi tego układu.

11. Rozważyć dwie sąsiadujące linie sił wychodzące z górnego ładunku pod małymi kątami do prostej linii łączącej ładunki na rys. 27-4. Jeżeli styczne do nich w punktach bliskich ładunku tworzą ze sobą kąt  $\theta$ , to na dużych odległościach tworzą kąt  $\theta/2$ . Sprawdzić to i wyjaśnić. (Wskazówka. Rozważyć, jak muszą przebiegać linie sił blisko każdego ładunku i daleko od ładunków.)

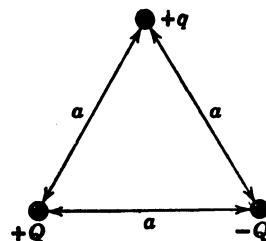
#### Paragraf 27-4

12. Trzy ładunki tworzą trójkąt równoboczny, jak na rys. 27-16. Jaki jest kierunek siły działającej na  $+q$ ?

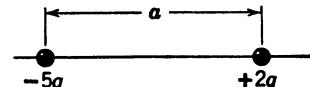
13. Dwa równe i różnoimienne ładunki o wielkości  $2,0 \cdot 10^{-7}$  C znajdują się w odległości 15 cm od siebie. (a) Jaka jest wielkość i kierunek  $E$  w środku odległości pomiędzy ładunkami? (b) Jaka siła (wielkość i kierunek) działały na elektron umieszczony w tym punkcie?

Odp.: (a)  $6,4 \cdot 10^5$  N/C, w kierunku ładunku ujemnego. (b)  $1,0 \cdot 10^{-13}$  N, w kierunku ładunku dodatniego.

14. Dwa ładunki punktowe o wielkości  $+2,0 \cdot 10^{-7}$  C i  $+8,5 \cdot 10^{-8}$  C znajdują się w odległości 12 cm od siebie. (a) Jakie pole elektryczne wytwarza każdy ładunek w sąsiedztwie drugiego ładunku? (b) Jaka siła działa na każdy z tych ładunków?



Rys. 27-16. Zadanie 12



Rys. 27-17. Zadanie 16

15. Dwa ładunki punktowe o nieznanej wielkości i znaku są umieszczone w odległości  $d$  od siebie. (a) Czy można uzyskać  $E = 0$  w punkcie leżącym na linii łączącej obydwa ładunki, ale nie pomiędzy nimi? Jakie konieczne warunki muszą być spełnione i gdzie znajduje się ten punkt? (b) Czy możliwe jest dla dowolnego układu dwóch ładunków punktowych znalezienie dwóch punktów (oprócz nieskończoności), w których  $E = 0$ ; jeśli tak, to przy jakich warunkach?

Odp.: (a) Ładunki muszą być przeciwnych znaków, przy czym ładunek bliższy musi mieć mniejszą wartość niż ładunek dalszy. (b) Nie.

16. (a) Znaleźć na rys. 27-17 punkt (lub punkty), w którym natężenie pola elektrycznego równe jest zero. (b) Naszkicować jakościowo linie sił. Przyjąć  $a = 50$  cm.

17. Dwa ładunki znajdują się w odległości  $d$  od siebie (rys. 27-18). Wykreślić  $E(x)$  zakładając, że ładunek leżący z lewej strony znajduje się w punkcie  $x = 0$ . Rozważyć zarówno dodatnie, jak i ujemne wartości  $x$ . Założyć, że  $E$  jest dodatnie, gdy wektor  $E$  jest skierowany w prawą stronę, a ujemne, gdy jest skierowany w lewą. Założyć, że  $q_1 = +1,0 \cdot 10^{-6}$  C,  $q_2 = +3,0 \cdot 10^{-6}$  C i  $d = 10$  cm.

18. Jaka jest wielkość i kierunek  $E$  w środku kwadratu na rys. 27-19? Założyć, że  $q = 1,0 \cdot 10^{-8}$  C i  $a = 5,0$  cm.

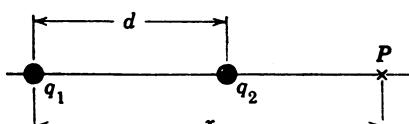
19. Założmy, że obydwa ładunki na rys. 27-8 są dodatnie. (a) Pokazać przy założeniu  $r \gg a$ , że  $E$  w punkcie  $P$  (na tym rysunku) jest dane wzorem

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{2q}{r^2}.$$

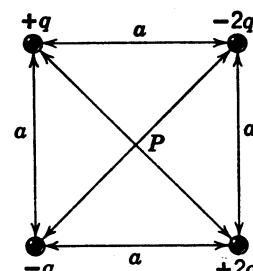
(b) Jaki jest kierunek E? (c) Czy możliwe jest, że E powinno zmieniać się tu jak  $r^{-2}$ , i jak  $r^{-3}$  dla dipola z rys. 27-8?

Odp.: (b) Pod kątem prostym do osi na zewnątrz.

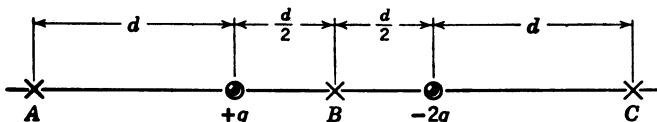
20. Ładunki  $+q$  i  $-2q$  umieszczone są w odległości  $d$  od siebie, jak na rys. 27-20. (a) Znaleźć pole E w punktach A, B i C. (b) Naszkicować linie sił pola.



Rys. 27-18. Zadanie 17



Rys. 27-19. Zadanie 18

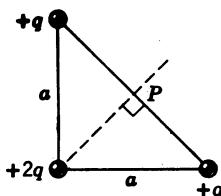


Rys. 27-20. Zadanie 20

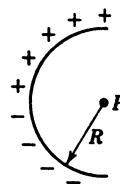
21. Obliczyć pole E (kierunek i wartość) w punkcie P na rys. 27-21.

Odp.:  $E = q/\pi\epsilon_0 a^2$  wzdłuż dwusiecznej, na zewnątrz.

22. Cienki, szklany pręt jest zagięty w półkole o promieniu  $R$ . Ładunek  $+Q$  jest równomiernie rozmiieszczony na górnej połowie pręta, a ładunek  $-Q$  jest równomiernie rozmiieszczony na dolnej połowie, jak na rys. 27-22. Znaleźć pole elektryczne E w punkcie P, będącym środkiem półkola.



Rys. 27-21. Zadanie 21



Rys. 27-22. Zadanie 22

23. Cienki nieprzewodzący pręt o skończonej długości  $l$  ma ładunek całkowity  $q$ , rozłożony równomiernie. Wykazać, że E w punkcie P leżącym na symetralnej (rys. 27-23) jest dane wzorem

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 y} \frac{1}{\sqrt{l^2 + 4y^2}}.$$

Wykazać, że gdy  $l \rightarrow \infty$ , otrzymujemy wynik z przykładu 6.

24. Wykazać, że elektron poruszający się wzdłuż osi naładowanego pierścienia z przykładu 5 może wykonywać drgania o częstotliwości

$$\omega = \sqrt{\frac{eq}{4\pi\epsilon_0 ma^3}}.$$

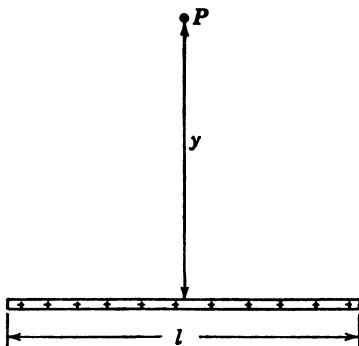
Wzór ten jest słuszny jedynie dla małych drgań, to jest dla  $x \ll a$  na rys. 27-10. (Wskazówka: Wykazać, że jest to prosty ruch harmoniczny i wykorzystać zależność (15-11)).

25. *Pole osiowe wytworzone przez dipol elektryczny.* Rozważmy punkt leżący w odległości  $r$  od środka dipola wzdłuż jego osi (patrz rys. 27-8). (a) Wykazać, że dla dużych wartości  $r$  natężenie pola elektrycznego jest równe

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3},$$

czyli jest dwukrotnie większe od wartości podanej dla warunków z przykładu 3. (b) Jaki jest kierunek  $E$ ?

Odp. Równoległy do p.



Rys. 27-23. Zadanie 23

26. Wykazać, że w przypadku naładowanego pierścienia z przykładu 5, maksymalna wartość  $E$  przyjmuje dla  $x = a/\sqrt{2}$ .

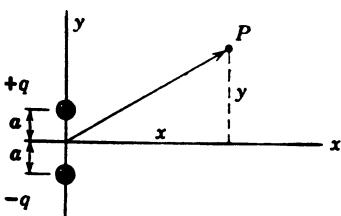
27. Rozważmy naładowany pierścień z przykładu 5. Przypuśćmy, że ładunek  $q$  nie jest rozłożony równomiernie w całym pierścieniu, lecz  $q_1$  jest rozłożony równomiernie na jednej połowie pierścienia, a  $q_2$  na drugiej. Niech  $q_1 + q_2 = q$ . (a) Znaleźć składową natężenia pola elektrycznego równoległą do osi w dowolnym punkcie osi i porównać z wynikiem uzyskanym w przykładzie 5. (b) Znaleźć składową natężenia pola elektrycznego prostopadłą do osi w dowolnym punkcie osi i porównać z wynikiem uzyskanym w przykładzie 5.

Odp.: (a)  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$ ; (b)  $E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{(q_1-q_2)a}{(a^2+x^2)^{3/2}}$ .

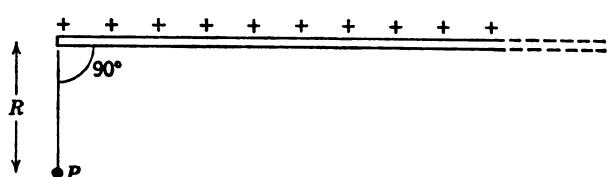
28. *Natężenie pola wytworzonego przez dipol elektryczny.* Wykazać, że w dużej odległości składowe natężenia pola  $E$  dipola elektrycznego określone są wzorem

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3pxy}{(x^2+y^2)^{5/2}}, \quad E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p(2y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}},$$

gdzie  $x$  i  $y$  są współrzędnymi punktu  $P$  (rys. 27-24). Pokazać, że wzór (27-8b) oraz rozwiązanie zadania 25 są szczególnymi przypadkami powyższego ogólnego wzoru.



Rys. 27-24. Zadanie 28



Rys. 27-25. Zadanie 29

29. „Półnieskończony” pręt będący izolatorem (rys. 27-25) przenosi stały ładunek na jednostkę długości  $\lambda$ . Wykazać, że pole elektryczne w punkcie  $P$  tworzy kąt  $45^\circ$  z prętem, i że ten rezultat jest niezależny od odległości  $R$ .

30. Nieprzewodząca półkula o wewnętrznym promieniu  $a$  posiada ładunek całkowity  $q$ , rozłożony równomiernie na jej powierzchni wewnętrznej. Znaleźć natężenie pola elektrycznego w środku krzywizny.

31. Cienki, nieprzewodzący pręt jest zgięty i tworzy łuk koła o promieniu  $a$  rozpięty na kącie środkowym  $\theta_0$ . Całkowity ładunek  $q$  jest rozłożony równomiernie wzdłuż pręta. Wyrazić natężenie pola elektrycznego w środku koła poprzez  $a$ ,  $q$  i  $\theta_0$ .

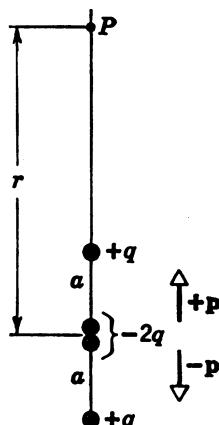
$$Odp.: E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\theta_0 a^2} \sin(\theta_0/2).$$

32. Cienki okrągły dysk o promieniu  $a$  jest naładowany równomiernie tak, że ma ładunek  $\sigma$  na jednostkę powierzchni. Znaleźć natężenie pola elektrycznego na osi dysku w odległości  $r$  od niego.

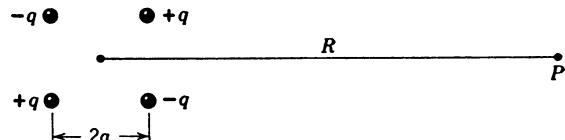
33. *Kwadrupol elektryczny.* Rysunek 27-26 przedstawia typowy kwadrupol elektryczny. Składa się on z dwóch dipoli, których oddziaływanie na punkty zewnętrzne nie znosi się całkowicie. Pokazać, że wartość  $E$  w punkcie leżącym na osi kwadrupola w odległości  $r$  od jego środka (przy założeniu  $r \gg a$ ) jest dana wzorem

$$E = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 r^4},$$

gdzie  $Q (= 2qa^2)$  jest *momentem kwadrupolowym* takiego rozkładu ładunków.



Rys. 27-26. Zadanie 33



Rys. 27-27. Zadanie 34

34. Jeden typ elektrycznego kwadrupola tworzą cztery ładunki umieszczone na rogach kwadratu o boku  $2a$ . Punkt  $P$  leży w odległości  $R$  od środka kwadrupola na linii równoległej do dwóch boków kwadratu jak na rys. 27-27. Wykazać, że dla  $R \gg a$ , pole elektryczne w punkcie  $P$  można w przybliżeniu podać jako:

$$E = \frac{3(2qa^2)}{2\pi\epsilon_0 R^4}.$$

(Wskazówka: Traktować kwadrupol jako dwa dipole.)

#### Paragraf 27-5

35. Między dwoma przeciwnie naładowanymi płytami istnieje jednorodne pole elektryczne. Elektron znajdujący się na powierzchni ujemnie naładowanej płytki, uwolniony uderza w powierzchnię płytki przeciwnej, odległej o 2 cm, po czasie  $1,5 \cdot 10^{-8}$  s. (a) Jaka jest prędkość elektronu, w momencie, gdy uderza w drugą płytę? (b) Jaka jest wartość pola elektrycznego  $E$ ?

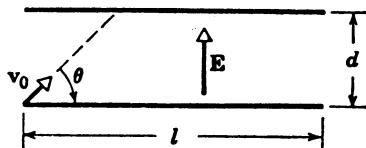
$$Odp.: (a) 2,7 \cdot 10^6 \text{ m/s. (b) } 1,0 \cdot 10^3 \text{ N/C.}$$

36. Elektron o prędkości  $5,0 \cdot 10^8$  cm/s wpada, poruszając się równolegle do linii sił, w obszar pola elektrycznego o natężeniu  $1,0 \cdot 10^3$  N/C tak zorientowanego, że hamuje ono ruch elektronu. (a) Jaką drogę przebiegnie elektron w polu zanim zostanie zatrzymany? (b) Ile czasu upłynie do chwili zatrzymania? (c) Jaką część pierwotnej energii straciłby elektron przechodząc przez pole kończące się nagle po 0,8 cm?

37. (a) Jakiego przyspieszenia doznaje elektron w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu  $10^6 \text{ N/C}$ ? (b) Jak szybko elektron, początkowo spoczywający, osiągnąłby  $\frac{1}{10}$  prędkości światła? Przyjmując stosowność mechaniki Newtona.

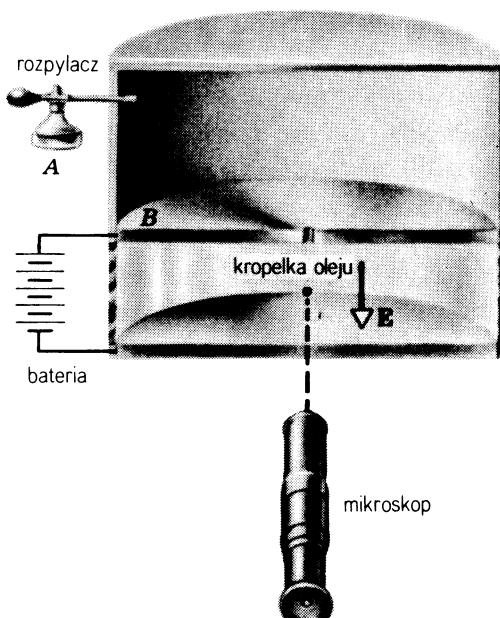
Odp.: (a)  $1,8 \cdot 10^{17} \text{ m/s}$ . (b)  $1,7 \cdot 10^{-10} \text{ s}$ .

38. W obszarze pola elektrycznego (patrz rys. 27-28) wpada elektron poruszający się z prędkością  $6,0 \cdot 10^6 \text{ m/s}$  pod kątem  $\theta = 45^\circ$ ;  $E = 2,0 \cdot 10^3 \text{ N/C}$  (skierowane do góry),  $d = 2,0 \text{ cm}$  i  $l = 10,0 \text{ cm}$ . (a) Czy elektron uderzy w którąś z płyt? (b) Jeżeli tak, to w którym miejscu?



Rys. 27-28. Zadanie 38

39. Doświadczenie Millikana. R. A. Millikan zbudował przyrząd (rys. 27-29), w którym można uzyskiwać warunki równowagi dla drobnych, naładowanych kropelek oleju umieszczonych w polu elektrycznym, przez takie dobranie  $E$ , żeby siła elektryczna działająca na kropelkę była równa jej ciężarowi, lecz przeciwnie skierowana. Założymy, że promień kropelki jest  $1,64 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$ , a  $E$  w stanie równowagi wynosi  $1,92 \cdot 10^5 \text{ N/C}$ . (a) Jaki ładunek niesie kropelka biorąc pod uwagę ładunek elektryczny  $e$ ? (b) Dlaczego Millikan nie próbował zrównoważyć w swym przyrządzie elektronów zamiast kropelek oleju? Gęstość oleju wynosi  $0,851 \text{ g/cm}^3$ . (W ten sposób Millikan po raz pierwszy zmierzył ładunek elektronu. Promień



Rys. 27-29. Zadanie 39. Aparat Millikana. Naładowane krople oliwy spadają na dół z rozpylacza A poprzez otwór w płycie B

kropli mierzył on obserwując graniczną prędkość, jaką osiągały krople spadając w powietrzu przy wyłączonej polu. (Ladował on krople naświetlając je promieniami Roentgena.) Patrz Robert Millikan, *The Electron*, II wyd., University of Chicago Press, 1924.

Odp.: (a)  $5,0e$ . (b) Nie można zobaczyć elektronów, a również  $E$  równoważące byłoby niezwykle małe.

40. Przy przeprowadzeniu jednego z pierwszych pomiarów (1911) Millikan zaobserwował — między innymi — następujące ładunki, mierzone na pojedynczych kroplach:

$$6,563 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \quad 13,3 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \quad 19,71 \cdot 10^{-19} \text{ C},$$

$$8,204 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \quad 16,48 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \quad 22,89 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \\ 11,50 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \quad 18,08 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \quad 26,13 \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

Jaka jest wartość elementarnego ładunku wyliczona na podstawie tych danych?

#### Paragraf 27-6

41. *Dipol w polu niejednorodnym.* (a) Wyprowadzić wzór na  $dE/dz$  dla dowolnego punktu leżącego w połowie drogi pomiędzy dwoma równymi, dodatnimi ładunkami;  $z$  jest odległością od jednego z ładunków mierzoną wzdłuż łączącej je linii. (b) Czy na umieszczony w tym punkcie mały dipol, którego osi jest równoległa do osi  $z$ , będzie działała jakaś siła? Należy pamiętać, że w tym punkcie  $E = 0$ .

Odp.: (a)  $dE/dz = -8q/\pi\epsilon_0 d^3$ , gdzie  $d$  jest odlegością między ładunkami. (b) Tak.

42. Znaleźć częstotliwość drgań dipola elektrycznego, o momencie  $p$  i bezwładności obrotowej  $I$ , dla małych amplitud drgań wokół pozycji równowagi w jednorodnym polu elektrycznym  $E$ .

43. Ładunek  $q = 3,0 \cdot 10^{-6}$  C znajduje się w odległości 30 cm od małego dipola na prostej prostopadłej do dipola i przechodzącej przez jego środek. Wartość siły działającej na ładunek wynosi  $5,0 \cdot 10^{-6}$  N. Pokazać na diagramie: (a) kierunek siły działającej na ładunek, (b) kierunek siły działającej na dipol i (c) określić wartość siły działającej na dipol.

Odp.: (a) Kierunek przeciwny do  $\mathbf{p}$ . (b, c)  $5,0 \cdot 10^6$  N, równoległy do  $\mathbf{p}$ .

# 28. Prawo Gaussa

## 28-1. Wstęp

W poprzednim rozdziale zobaczyliśmy jak można stosować prawo Coulomba do obliczenia natężenia pola elektrycznego  $\mathbf{E}$  w różnych punktach, znając dostatecznie rozmieszczenie ładunków tworzących to pole. Metoda ta zawsze przynosi dobre rezultaty. Jest to metoda bezpośrednią, ale poza najprostszymi przypadkami bardzo czasochłonna.

Mając jednak dostatecznie szybki komputer, możemy zawsze znaleźć odpowiedź do dowolnego takiego zadania, niezależnie od jego komplikacji.

Prawo Coulomba można przedstawić w innej postaci zwanej *prawem Gaussa*. Używanie tego ostatniego nie jest tak pracochłonne. Jednakże liczba zadań, które można rozwiązać stosując prawo Gaussa jest mała. Te, które możemy rozwiązać, rozwiązujemy łatwo i elegancko, ale w większości przypadków prawo Gaussa jest użyteczne raczej z innych względów niż dla praktycznego rozwiązywania zadań.

Przed dyskusją prawa Gaussa musimy wprowadzić nowe pojęcie, którym jest strumień pola wektorowego.

## 28-2. Strumień

**Strumień** (symbol  $\Phi$ ) jest własnością wszystkich pól wektorowych. W tym rozdziale będziemy mieli do czynienia ze strumieniem  $\Phi_E$  pola elektrycznego  $\mathbf{E}$ . Dla wprowadzenia przedyskutujemy bardziej przystępny pojęciowo strumień przepływu cieczy  $\Phi_v$  (patrz rozdział 18).

Rysunek 28-1 przedstawia stacjonarne i jednorodne pole przepływu cieczy (np. wody) charakteryzujące się stałym wektorem przepływu  $\mathbf{v}$ , czyli stałą prędkością cieczy w dowolnym punkcie. Rysunek 28-1a przedstawia w przekroju hipotetyczną płaską powierzchnię o promieniu  $R$  i powierzchni  $A_a$  zanurzoną w polu przepływowym pod kątem prostym do wektora  $\mathbf{v}$ . Strumień masy  $\Phi_{v,a}$  (kg/s) przez tę powierzchnię jest dany jako

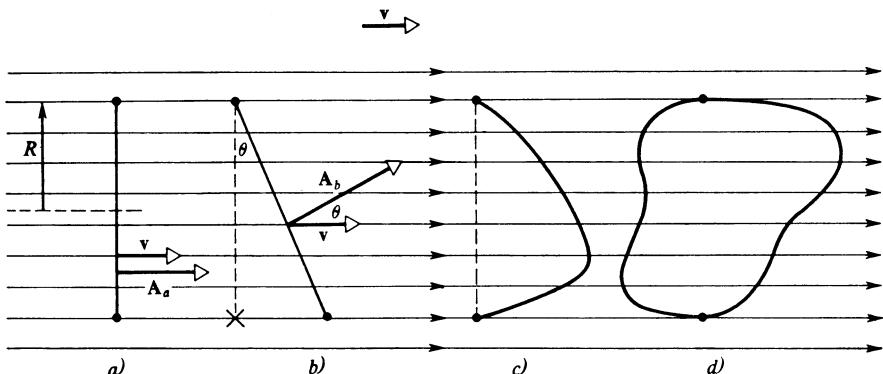
$$\Phi_{v,a} = \varrho v A_a, \quad (28-1a)$$

gdzie  $\rho$  jest gęstością cieczy w  $\text{kg/m}^3$ . Sprawdź czy wymiary są zachowane. Równanie to możemy zapisać również w formie wektorowej, jako:

$$\Phi_{v,a} = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_a. \quad (28-1b)$$

Zwracamy uwagę, że strumień jest wielkością skalarną.

Rysunek 28-1b przedstawia płaską powierzchnię, której rzut ( $A_b \cos \theta$ ) jest równy  $A_a$ .



Rys. 28-1. Cztery hipotetyczne powierzchnie zanurzone w stacjonarnym, jednorodnym polu przepływu nieściśliwej cieczy (np. wody) scharakteryzowanym przez stały wektor pola oznaczający prędkość do-wolnego punktu cieczy. Linie poziome są liniami przepływu we wszystkich czterech przypadkach.  $R$  jest promieniem koła prostopadłego do linii przepływu

Wydaje się rzeczą jasną, że strumień masy  $\Phi_v$  (w  $\text{kg/s}$ ) przez powierzchnię  $b$  musi być taki sam, jak przez powierzchnię  $a$ . Aby to sobie unaoczyć, możemy napisać

$$\Phi_{v,b} = \Phi_{v,a} = \rho v A_a = \rho v (A_b \cos \theta) = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_b. \quad (28-2)$$

Rysunek 28-1c przedstawia hipotetyczną krzywą powierzchnię, której rzut — przyjmijmy to bez dowodu — równy jest powierzchni  $A_a$ . I tu wydaje się, że  $\Phi_{v,c} = \Phi_{v,a}$ .

Rysunek 28-1d przedstawia zamkniętą powierzchnię, podczas gdy trzy poprzednie były otwarte. Twierdzimy, że strumień  $\Phi_{v,d}$  przez powierzchnię zamkniętą umieszczoną w tym polu przepływu jest równy zeru. Wynika to z faktu, że ilość cieczy w ( $\text{kg/s}$ ) wpływająca przez lewą część powierzchni na jednostkę czasu wypływa przez część prawą. W tym przypadku ciecz (zakładamy że jest nieściśliwa) nie powstaje i nie znika wewnątrz zamkniętej powierzchni. Używając języka z rozdziału 18 mówimy, że wewnątrz powierzchni nie ma ani źródeł, ani zanikania cieczy. Każda linia strumienia, która wchodzi z lewej strony, wychodzi z prawej strony rozpatrywanej, zamkniętej powierzchni.

Po tych wstępnych rozważaniach nad  $\Phi_v$  zajmiemy się teraz  $\Phi_E$ , tzn. strumieniem pola elektrycznego. Może się wydawać, że w tym przypadku nic nie płynie. Jednakże z formalnego punktu widzenia równania (28-1b) i (28-2) nie odnoszą się tylko do cieczy, lecz także do pola wektorowego  $\mathbf{v}$  (stałego w tym przypadku). Jeżeli na rys. 28-1 zamienimy  $v$  na  $E$ , a linie przepływu na linie sił pola elektrycznego — cała dyskusja tego paragrafu pozostaje w mocy.

Ostatecznie mamy tu do czynienia z zamkniętymi powierzchniami w polu elektrycznym  $E$ . A to dlatego, że zajmujemy się tu prawem Gaussa, które dotyczy tylko zamkniętych powierzchni.

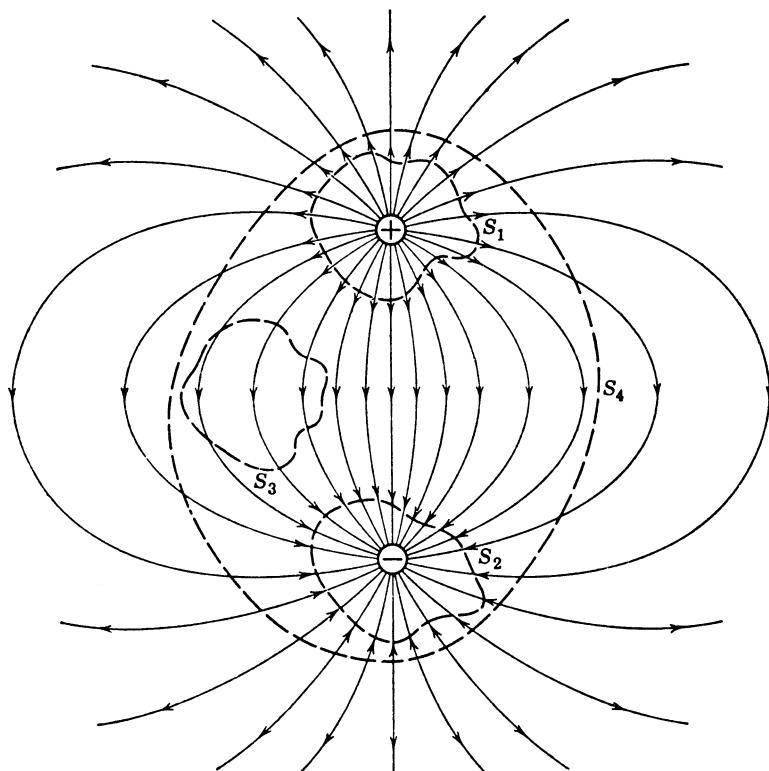
Nie jest w ogólności prawdą, że przy przepływie cieczy nieściśliwej, w szczególnym przypadku przedstawionym na rys. 28-1d, dla wszystkich powierzchni zamkniętych mamy  $\Phi_v = 0$ .

Wewnątrz powierzchni mogą występować źródła albo zanikanie cieczy, jak to sugeruje rys. 18-14. Wówczas  $\Phi_v \neq 0$ .

Z tego samego powodu nie jest prawdą, że  $\Phi_E = 0$  dla każdej zamkniętej powierzchni. Wewnątrz hipotetycznej zamkniętej powierzchni zanurzonej w polu elektrycznym  $E$  mogą występować źródła (ładunki dodatnie, wówczas  $\Phi_E > 0$ ) albo zanikanie (ładunki ujemne, wówczas  $\Phi_E < 0$ ).

### 28-3. Strumień pola elektrycznego

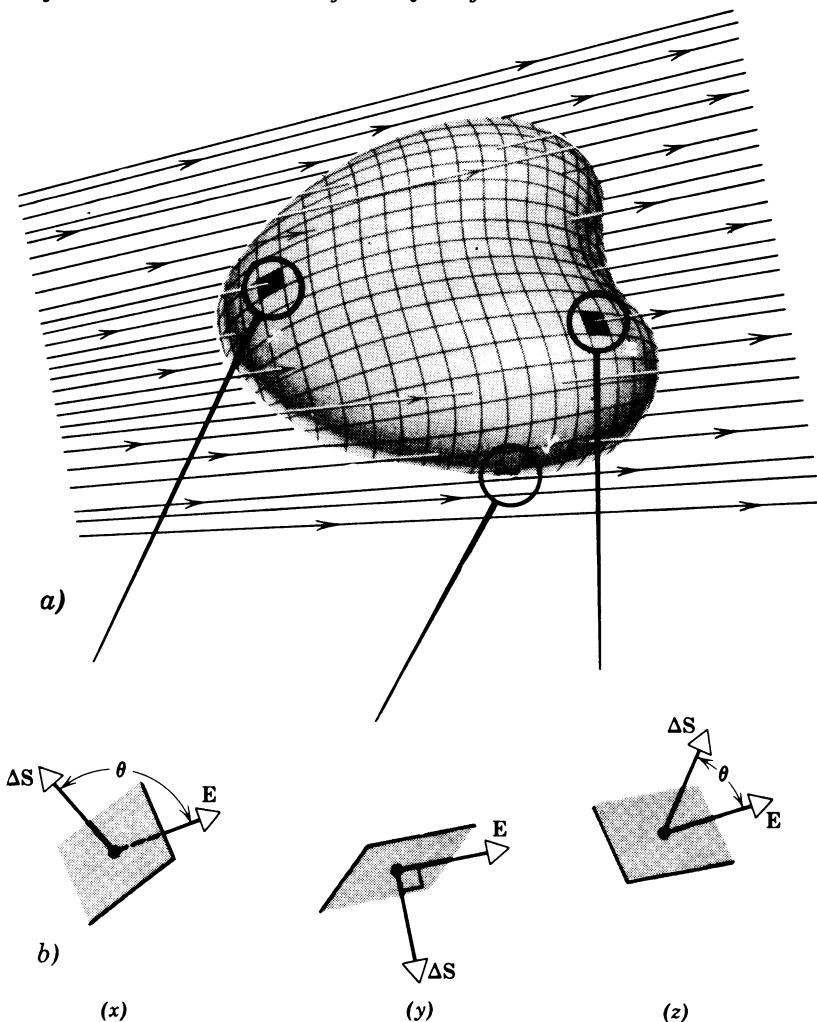
Zobaczmy poniżej, że dla powierzchni zamkniętej w polu elektrycznym strumień  $\Phi_E$  jest dodatni, jeżeli linie sił skierowane są wszędzie na zewnątrz, a ujemny, jeżeli są skierowane do wewnątrz. Rysunek 28-2 przedstawia dwa ładunki o różnych wartościach bezwzględnych i przeciwnych znakach oraz linie sił wokół nich. Krzywe  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  i  $S_4$  są przecięciami czterech powierzchni zamkniętych z płaszczyzną rysunku. Z tego, co powiedzieliśmy powyżej, wynika, że strumień  $\Phi_E$  jest dodatni dla  $S_1$ , a ujemny dla  $S_2$ .  $\Phi_E$  dla powierzchni  $S_3$  (porównać rys. 28-1d) wynosi zero.  $\Phi_E$  dla powierzchni  $S_4$  omówimy w pa-



Rys. 28-2. Dwa równe ładunki o przeciwnych znakach. Linie przerywane przedstawiają przecięcie z płaszczyzną hipotetycznych zamkniętych powierzchni

ografie 28-4. Strumień pola elektrycznego jest ważnym pojęciem, gdyż przy pomocy tej wielkości jest wyrażone prawo Gaussa, jedno z czterech podstawowych równań elektromagnetyzmu (patrz tablica 40-2).

W celu ścisłego zdefiniowania strumienia  $\Phi_E$  rozpatrzmy rysunek 28-3, na którym wyobrażona jest pewna dowolna, zamknięta powierzchnia, znajdująca się w niejednorodnym polu elektrycznym. Podzielimy tę powierzchnię na elementarne kwadraty  $\Delta S$ , z których każdy jest tak mały, że można go uważać za płaski. Taki element powierzchni można przedstawić jako wektor  $\Delta S$ , którego długość jest równa wielkości powierzchni  $\Delta S$ , a kierunek jest kierunkiem *normalnej zewnętrznej*.



Rys. 28-3. (a) Hipotetyczna powierzchnia w niejednorodnym polu elektrycznym. (b) Trzy elementy tej powierzchni w powiększonej skali

W każdym kwadracie na rysunku 28-3 można określić wektor natężenia pola elektrycznego  $E$ . Ponieważ kwadraty mogą być dowolnie małe, można uważać, że  $E$  jest stałe we wszystkich punktach danego kwadratu.

Wektory  $\mathbf{E}$  i  $\Delta\mathbf{S}$  tworzą z sobą kąt  $\theta$ . Rysunek 28-3b przedstawia powiększony widok trzech kwadratów oznaczonych przez  $x$ ,  $y$  i  $z$  na rys. 28-3a. Zauważmy, że dla  $x$ ,  $\theta > 90^\circ$  (wektor  $\mathbf{E}$  skierowany do środka), dla  $y$ ,  $\theta = 90^\circ$  (wektor  $\mathbf{E}$  jest równoległy do powierzchni), dla  $z$ ,  $\theta < 90^\circ$  (wektor  $\mathbf{E}$  skierowany na zewnątrz).

Przybliżona definicja strumienia pola elektrycznego jest następująca:

$$\Phi_E \cong \sum \mathbf{E} \Delta \mathbf{S}. \quad (28-3)$$

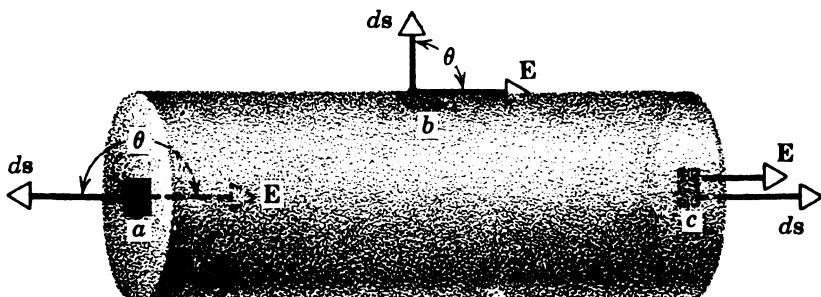
Σ oznacza, że należy dodać do siebie wielkości skalarne  $\mathbf{E} \Delta \mathbf{S}$  znalezione dla wszystkich elementów, na które powierzchnia została podzielona. W punktach takich jak  $x$  na rys. 28-3 wkład do strumienia jest ujemny, w  $y$  wynosi zero, a w  $z$  jest dodatni. Stąd, jeśli  $\mathbf{E}$  jest skierowane stale na zewnątrz, tzn.  $\theta < 90^\circ$ , iloczyn  $\mathbf{E} \Delta \mathbf{S}$  jest dodatni i  $\Phi_E$  dla całej powierzchni jest dodatnie, patrz rys. 28-2, powierzchnia  $S_1$ . Jeśli  $\mathbf{E}$  jest skierowane stale do wewnętrz, tzn.  $\theta > 90^\circ$ , iloczyn  $\mathbf{E} \Delta \mathbf{S}$  jest ujemny i  $\Phi_E$  dla takiej powierzchni jest ujemne (porównać z powierzchnią  $S_2$  na rys. 28-2). Z równania (28-3) widzimy, że właściwą jednostką SI dla strumienia  $\Phi_E$  jest  $\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$ .

Ścisła definicja strumienia elektrycznego jest dana graniczną wartością prawej strony równania (28-3). Zastępując sumę całką po powierzchni otrzymujemy

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} d\mathbf{S}. \quad (28-4)$$

Calka powierzchniowa oznacza, że rozpatrywaną powierzchnię należy podzielić na infinitesimalne elementy powierzchniowe  $d\mathbf{S}$ , obliczyć wielkość skalarną  $\mathbf{E} d\mathbf{S}$  dla każdego elementu i sumować po całej powierzchni. Kółko na znaku całki oznacza, że powierzchnia całkowania jest zamknięta\*.

**Przykład 1.** Na rysunku 28-4 widzimy hipotetyczną zamkniętą powierzchnię walca o promieniu  $R$ , umieszczoną w jednorodnym polu elektrycznym  $\mathbf{E}$ . Oś walca jest równoległa do pola. Ile wynosi  $\Phi_E$  dla tej powierzchni? Powierzchnia jest zamknięta z obu stron.



Rys. 28-4. Przykład 1. Zamknięta powierzchnia cylindryczna w jednorodnym polu elektrycznym  $\mathbf{E}$  równoległym do osi cylindra

Strumień  $\Phi_E$  może być przedstawiony jako suma trzech wyrazów: (a) całki po lewej powierzchni zamkającej, (b) całki po powierzchni bocznej i (c) całki po prawej powierzchni zamkającej. Mamy więc

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int_{(a)} \mathbf{E} d\mathbf{S} + \int_{(b)} \mathbf{E} d\mathbf{S} + \int_{(c)} \mathbf{E} d\mathbf{S}.$$

\* Podobnie kółko na znaku całki krzywoliniowej oznacza kontur zamknięty. To, czy mamy do czynienia z całką powierzchniową, czy krzywoliniową, wynika z kontekstu i oznaczenia elementu różniczkowego (w tym przypadku  $d\mathbf{S}$ ).

Na lewej powierzchni zamkającej kąt  $\theta$  wynosi  $180^\circ$ ,  $\mathbf{E}$  ma stałą wartość we wszystkich punktach, a wektory  $d\mathbf{S}$  są równolegle. Stąd

$$\int_{(a)} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int E \cos 180^\circ dS = -E \int dS = -ES,$$

gdzie  $S (= \pi R^2)$  jest wielkością powierzchni zamkającej. Podobnie dla prawej powierzchni zamkającej mamy

$$\int_{(c)} \mathbf{E} d\mathbf{S} = +ES,$$

ponieważ kąt  $\theta$  wynosi tutaj zero we wszystkich punktach. W końcu, na powierzchni bocznej,

$$\int_{(b)} \mathbf{E} d\mathbf{S} = 0,$$

ponieważ  $\theta = 90^\circ$  i  $\mathbf{E} d\mathbf{S} = 0$  we wszystkich punktach tej powierzchni. Ostatecznie

$$\Phi_E = -ES + 0 + ES = 0.$$

Takiego rezultatu należało oczekiwać, jak zobaczymy w paragrafie 28-4, ponieważ nie ma źródeł ani źródeł ujemnych pola  $\mathbf{E}$ , to jest ładunków w zamkniętej powierzchni z rys. 28-4. Linie pola  $\mathbf{E}$  (stalego) wchodzą z lewej strony i wychodzą ze strony prawej (dokładnie tak, jak na rys. 28-1d).

## 28-4. Prawo Gaussa\*

Prawo Gaussa zastosowane do dowolnej, hipotetycznej powierzchni (nazywanej *powierzchnią Gaussa*) podaje związek pomiędzy  $\Phi_E$  przechodzącym przez tę powierzchnię i całkowitym ładunkiem zamkniętym wewnątrz niej. Związek ten jest następujący

$$\epsilon_0 \Phi_E = q \quad (28-5)$$

albo stosując równanie (28-4),

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = q. \quad (28-6)$$

Fakt zanikania  $\Phi_E$  w przykładzie 1 wynika z prawa Gaussa, ponieważ wewnątrz powierzchni Gaussa na rys. 28-4 nie ma żadnego ładunku ( $q = 0$ ).

Należy zauważyć, że  $q$  w równaniu (28-5) (albo w równ. (28-6)) jest ładunkiem wypadkowym, z uwzględnieniem znaku. Jeżeli powierzchnia zawiera ładunki równe co do wielkości bezwzględnej, ale o przeciwnych znakach, to strumień  $\Phi_E$  jest równy zeru. Ładunki leżące *na zewnątrz* powierzchni nie dają żadnego wkładu do wartości  $q$ . Sposób rozmieszczenia ładunków wewnętrznych także nie wpływa na tę wartość.

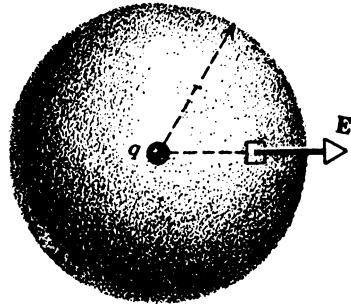
Prawo Gaussa może być użyte do wyznaczenia  $\mathbf{E}$ , jeśli rozkład ładunków jest tak symetryczny, że przez odpowiedni wybór powierzchni Gaussa możemy łatwo obliczyć całkę w równaniu (28-6). Na odwrót, jeśli  $\mathbf{E}$  jest znane we wszystkich punktach danej powierzchni zamkniętej, prawo Gaussa może być stosowane do obliczenia ładunku znajdującego się wewnątrz powierzchni. Jeśli  $\mathbf{E}$  ma składową skierowaną na zewnątrz w każdym punkcie pewnej powierzchni zamkniętej, to strumień  $\Phi_E$ , jak wynika z równania (28-4), będzie dodatni i na mocy równania (28-6) wewnątrz tej powierzchni musi być zawarty dodatni ładunek wypadkowy (patrz rys. 28-2, powierzchnia  $S_1$ ). Jeśli  $\mathbf{E}$  ma składową skierowaną do wewnątrz we wszystkich punktach pewnej powierzchni zamkniętej, wewnątrz tej powierzchni musi znajdować się ujemny ładunek wypadkowy (patrz rys.

\* Patrz: Ian Stewart Gauss, *Scientific American*, July 1977, gdzie można znaleźć fascynujący opis życia tego niezwykłego człowieka.

28-2 powierzchnia  $S_2$ ). Powierzchnia  $S_3$  na rys. 28-2 nie zawiera żadnego ładunku i z prawa Gaussa wynika, że  $\Phi_E = 0$ . Jest to w zgodzie z faktem, że linie pola  $E$  przechodzą na wylot przez powierzchnię  $S_3$ , przy czym wkład do całki od jednej części powierzchni znosi się z wkładem od drugiej części. Dla powierzchni  $S_4$  na rys. 28-2,  $\Phi_E = 0$ , ponieważ suma algebraiczna ładunków wewnątrz powierzchni wynosi zero. Innymi słowy, dla powierzchni  $S_3$ , tyle samo linii sił pola wychodzi z powierzchni ile do niej wchodzi.

### 28-5. Prawo Gaussa i prawo Coulomba

Prawo Coulomba można wyprowadzić z prawa Gaussa i rozważań dotyczących symetrii. W tym celu zastosujemy prawo Gaussa do odosobnionego ładunku punktowego  $q$  (rys. 28-5). Pomimo że prawo Gaussa stosuje się do zupełnie dowolnej powierzchni, odpowiednie informacje najłatwiej uzyskać stosując powierzchnię kulistą o promieniu  $r$  i środku w punkcie położenia ładunku. Zaletą tej powierzchni jest to, że dzięki symetrii  $E$  musi być prostopadłe do niej i musi mieć taką samą, na razie nieznaną, wielkość we wszystkich punktach powierzchni.



Rys. 28-5. Kulista powierzchnia Gaussa o promieniu  $r$  otaczająca ładunek punktowy  $q$

Na rysunku 28-5 zarówno  $E$  jak i  $dS$  w dowolnym punkcie powierzchni Gaussa są skierowane radialnie na zewnątrz. Kąt między nimi wynosi zero i wielkość  $E dS$  jest równa po prostu  $E dS$ . Prawo Gaussa (równ. (28-6)) redukuje się do

$$\epsilon_0 \oint E dS = \epsilon_0 \oint E dS = q.$$

Ponieważ natężenie pola  $E$  jest stałe we wszystkich punktach kuli, więc możemy je wy ciągnąć spod znaku całki i otrzymamy

$$\epsilon_0 E \oint dS = q,$$

gdzie całka jest równa po prostu powierzchni kuli\*.

Z równania tego mamy

$$\epsilon_0 E (4\pi r^2) = q,$$

czyli

$$E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (28-7)$$

\* Przydatność prawa Gaussa zależy od możliwości znalezienia powierzchni, na której z powodu symetrii zarówno  $E$ , jak  $\theta$  mają wartości stałe (patrz rys. 28-3). Wtedy można wyciągnąć spod znaku całki  $E \cos \theta$  i wyznaczyć w prosty sposób  $E$ , jak w omawianym przykładzie.

Wzór (28-7) podaje bezwzględną wartość natężenia pola elektrycznego  $\mathbf{E}$  w dowolnym punkcie oddalonym o  $r$  pojedynczego ładunku  $q$ ; (porównać równ. (27-4)). Kierunek  $\mathbf{E}$  jest już znany z rozważań symetrii.

Umieścimy drugi ładunek punktowy  $q_0$  w punkcie, w którym wyznaczyliśmy  $\mathbf{E}$ . Wielkość siły działającej na ten ładunek (patrz równ. (27-2)) wynosi  $F = Eq_0$ . W połączeniu z równaniem (28-7) otrzymujemy

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2},$$

czyli właśnie prawo Coulomba. Wyrowadziliśmy więc prawo Coulomba z prawa Gaussa i rozważań symetrii.

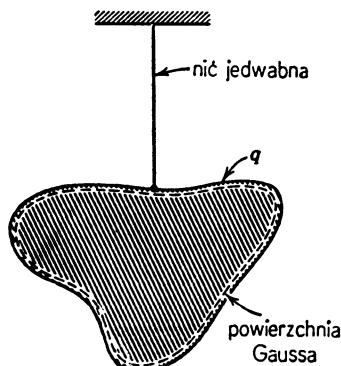
Prawo Gaussa jest jednym z podstawowych równań teorii elektromagnetyzmu i jest wymienione w tablicy 40-2 jako jedno z równań Maxwell'a. Prawo Coulomba nie jest umieszczone w tej tablicy, ponieważ — jak właśnie wykazaliśmy — można je wyrowadzić z prawa Gaussa i prostych rozważań dotyczących symetrii pola  $\mathbf{E}$  ładunku punktowego.

Interesujące jest to, że zapisanie stałego współczynnika proporcjonalności w prawie Coulomba w postaci  $1/4\pi\epsilon_0$  pozwala na przedstawienie w szczególnie prostej postaci prawa Gaussa (równ. (28-5)). Gdybyśmy stała w prawie Coulomba oznaczyli przez  $k$ , to prawo Gaussa musiałoby być zapisane w postaci  $(1/4\pi k)\Phi_E = q$ . Wolimy pozostawić współczynnik  $4\pi$  w prawie Coulomba po to, aby nie pojawił się on w prawie Gaussa i innych, często używanych związkach, które wyrowadzimy później.

## 28-6. Przewodnik izolowany

Z prawa Gaussa można wyrowadzić ważny wniosek, mianowicie: *ładunek umieszczony na izolowanym przewodniku rozmieszcza się w całości na jego zewnętrznej powierzchni*. Prawdziwość tej hipotezy została potwierdzona doświadczalnie (patrz paragraf 28-7), zanim jeszcze zostały sformułowane prawo Gaussa i prawo Coulomba. Co więcej, doświadczalne potwierdzenie tej hipotezy jest doświadczalną podstawą, na której opierają się obydwa prawa. Wskazywaliśmy już, że doświadczenia Coulomba z wagą skręceń, pomimo, że bezpośrednie i przekonywające, nie mogą być przeprowadzone z wielką dokładnością. Pokazując, że wniosek wydrukowany pochyłym drukiem wynika z prawa Gaussa, odwracamy po prostu sytuację historyczną.

Rysunek 28-6 przedstawia przekrój izolowanego przewodnika dowolnego kształtu mającego ładunek  $q$ . Linią przerywaną oznaczona jest powierzchnia Gaussa umieszczona



Rys. 28-6. Metaliczny przewodnik izolowany

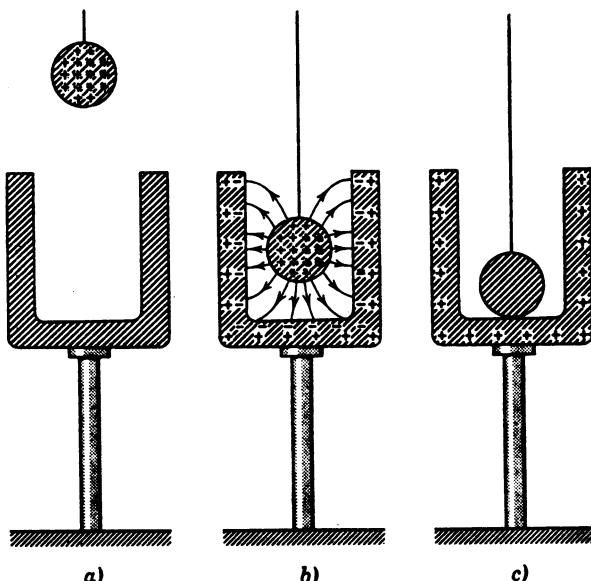
w niewielkiej odległości pod właściwą powierzchnią przewodnika. Powierzchnia Gaussa może leżeć dowolnie blisko właściwej powierzchni, byle by tylko znajdowała się ona *wewnętrz* przewodnika.

Gdy ładunek jest rozmieszczony w przewodniku izolowanym w sposób przypadkowy, wytwarza on pole elektryczne wewnętrz przewodnika. Pole to działa na nośniki ładunku przewodnika, elektrony, powodując ich ruch, tak że powstają prądy wewnętrzne. Prądy te przemieszczają ładunek w taki sposób, że wewnętrzne pole elektryczne automatycznie zmniejsza swoje natężenie. W końcu pole elektryczne wszędzie wewnętrz przewodnika znika, prądy przestaną płynąć i otrzymamy statyczny rozkład ładunku. Takie przemieszczenie ładunku zachodzi zwykle w czasie, który w większości zastosowań można pominąć. Co można powiedzieć o rozkładzie ładunku po osiągnięciu równowagi elektrostatycznej?

Jeśli w stanie równowagi elektrostatycznej  $E$  znika wszędzie wewnętrz przewodnika, to musi także zniknąć w każdym punkcie omawianej powierzchni Gaussa, ponieważ powierzchnia ta leży wewnątrz przewodnika. Oznacza to, że strumień  $\Phi_E$  przez tę powierzchnię znika. Z prawa Gaussa (patrz równ. (28-5)) wynika wtedy, że wewnętrz powierzchni Gaussa nie ma ładunku wypadkowego. Jeśli ładunku  $q$  nie ma *wewnętrz powierzchni*, to może być tylko na *zewnętrz*, co oznacza, że *musi on znajdować się na samej powierzchni przewodnika*.

### 28-7. Doświadczalne potwierdzenie praw Gaussa i Coulomba

Zajmijmy się doświadczeniami potwierdzającymi prawdziwość wniosku podanego w paragrafie 28-6. Dla prostego sprawdzenia tego wniosku naładujmy metalową kulę i opuścimy ją na jedwabnej nitce głęboko do wnętrza puszki metalowej (rys. 28-7). Dot-



Rys. 28-7. Całkowity ładunek kuli przechodzi na zewnętrzną powierzchnię puszki. Stwierdzenie to i dyskusja w pierwszej części paragrafu 28-7 są całkowicie poprawne tylko wtedy, gdy puszka ma przewodzącą pokrywę, którą jest przykryta zaraz po wprowadzeniu kuli; w przeciwnym razie nie możemy zdefiniować „powierzchni zewnętrznej”

knijmy kulę wnętrza puszki. Gdy kulę wyjmiemy z puszki, okaże się, że jej ładunek znikł. Kiedy kula dotyka puszki, tworzy razem z puszką przewodnik izolowany, do którego stosuje się wniosek z paragrafu 28-6. To, że ładunek przeniósł się całkowicie na zewnętrzną powierzchnię puszki, można stwierdzić dotykając puszki małym izolowanym przedmiotem metalowym. Jedynie przy dotykaniu z zewnętrznej strony puszki można zdjąć ładunek.

Wydaje się, że Benjamin Franklin był pierwszym, który zauważył, iż wewnątrz izolowanej metalowej puszki nie może być ładunku. W roku 1755 pisał on do przyjaciela:

„Naładowałem półkwartową srebrną puszkę, a następnie opuszczałem do jej wnętrza kulę korkową o średnicy około 1 cala, zawieszoną na jedwabnym sznurku, tak żeby korek dotknął dna puszki. Korek nie był przyciągany przez wnętrze puszki, tak jak byłby przyciągany przez jej zewnętrzną powierzchnię i pomimo że dotknął dna, po wyciągnięciu okazało się, że nie został napelektryzowany przez to dotknięcie, tak jak byłby napelektryzowany po dotknięciu powierzchni zewnętrznej. Jest to fakt osobliwy. Chciałbym znać przyczynę. Nie znam jej...”

Okolo dziesięć lat później Franklin polecił ten „osobliwy fakt” uwadze swego przyjaciela Josepha Priestleya (1733–1804). W roku 1767 (około dwadzieścia lat przed doświadczeniami Coulomba) — Priestley sprawdził obserwację Franklina i z zadziwiającą intuicją wywnioskował, że wynika z niego prawo odwrotnych kwadratów dla siły. Tak więc sprawdzenie pośrednie jest nie tylko dokładniejsze od bezpośredniego, podanego w parafrazie 26-4, ale było przeprowadzone wcześniej.

Priestley powołując się na analogię z grawitacją zauważał, że fakt niedziałania sił elektrycznych na kulę korkową Franklina, gdy była ona otoczona głęboką puszką metalową, podobny jest do faktu (patrz paragraf 16-6), że na masę umieszoną wewnątrz kulistej powłoki materialnej nie działa siła grawitacyjna. Jeśli grawitacja spełnia prawo odwrotnych kwadratów, to może siły elektryczne spełniają je także. Słowa-mi Priestleya:

„Czy nie możemy stąd (to znaczy z doświadczenia Franklina) wywnioskować, że przyciąganie ładunków elektrycznych podlega tym samym prawom co grawitacja, a więc zależy od kwadratów odległości, skoro można łatwo pokazać, że gdyby Ziemia miała kształt powłoki, to ciała umieszczone wewnątrz niej nie byłyby przyciągane bardziej w jedną stronę niż w drugą?”

Michael Faraday także przeprowadzał doświadczenia zmierzające do pokazania, że ładunek rozkłada się na zewnętrznej powierzchni przewodnika. W szczególności zbudował on dużą skrzynię pokrytą metalem, którą zamontował na izolujących podstawach i naładował za pomocą potężnego generatora elektrostatycznego. Słowa-mi Faradaya:

„Wszedłem do skrzyni i mieszkałem w niej. Używając zapalonej świec, elektrometrów i innych przyrządów służących do sprawdzania stanu elektryzowania nie mogłem stwierdzić najmniejszego oddziaływanie na nie..., pomimo że przez cały czas zewnętrzna powierzchnia skrzyni była potężnie napelektryzowana i wielkie iskry wyskakiwały z każdej jej części”.

Dla wielu przyczyn ważne jest wiedzieć czy wykładnik potęgi w prawie Coulomba wynosi dokładnie 2. Eksperymenty oparte na prawie Gaussa mogą dać na to pytanie odpowiedź. Napiszmy prawo Coulomba w postaci

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^{2+n}}, \quad (28-8)$$

gdy  $n = 0^*$ , otrzymujemy zależność odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości.

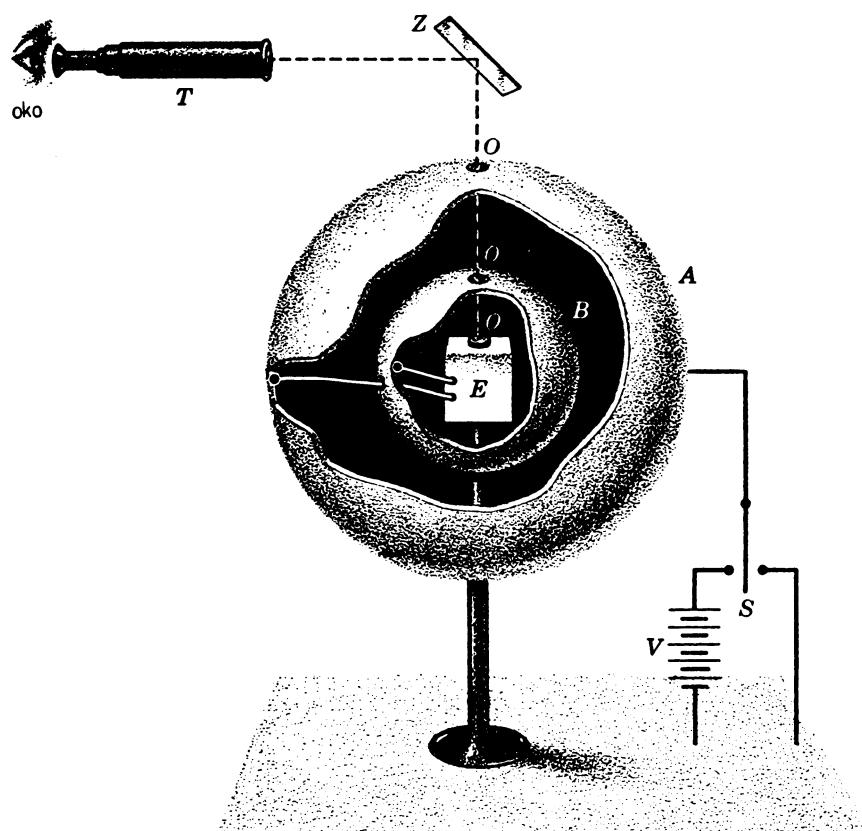
Tablica 28-1 pokazuje postęp w określaniu wykładnika  $n$  z równania (28-8), zbliża się on coraz bardziej do zera.

\* Jeżeli  $n \neq 0$ , to równania Maxwell'a (tablica 40-2), włączając w to prawo Gaussa, musiałyby być zmodyfikowane, a foton — cząsteczkowe przedstawienie światła — musiałby mieć masę niezerową — co nie jest prawdopodobne. Patrz: Alfred Scharff Goldhaber, Michael Martin Nieto, The Mass of the Photon, *Scientific American*, January 1976.

Tablica 28-1. Sprawdzenie prawa Coulomba

Eksperymentator	Data	Dokładność
Benjamin Franklin	1755	—
Joseph Priestley	1767	zgodnie z kwadratem odległości
John Robison	1769	$\leq 0,06$
Henry Cavendish	1773	$\leq 0,02$
Charles A. Coulomb	1785	kilka %
James Clerk Maxwell	1873	$\leq 5 \cdot 10^{-5}$
Samuel J. Plimpton	1936	$\leq 2 \cdot 10^{-9}$
Willard E. Lawton		$\leq 2 \cdot 10^{-16}$
Edwin R. Williams	1971	$\leq 2 \cdot 10^{-16}$
Henry A. Hill		

Na rysunku 28-8 widzimy szkic przedstawiający w uproszczony sposób przyrząd Plimptona i Lawtona (patrz tablica 28-1). Składa się on w zasadzie z dwu koncentrycznych powłok metalowych  $A$  i  $B$ , z których pierwsza ma około 1,5 m średnicy. Wewnętrzna



Rys. 28-8. Aparat Plimptona i Lawtona

powłoka zawiera czuły elektrometr  $E$  podłączony w ten sposób, aby wskazywał czy między powłokami  $A$  i  $B$  przepływa ładunek\*.

Jeżeli prawo Gaussa i co za tym idzie, prawo Coulomba są właściwie sformułowane i powłoki są połączone elektrycznie, to jakikolwiek ładunek układu powłok powinien w całości znaleźć się na powłoce  $A$  (patrz paragraf 28-6).

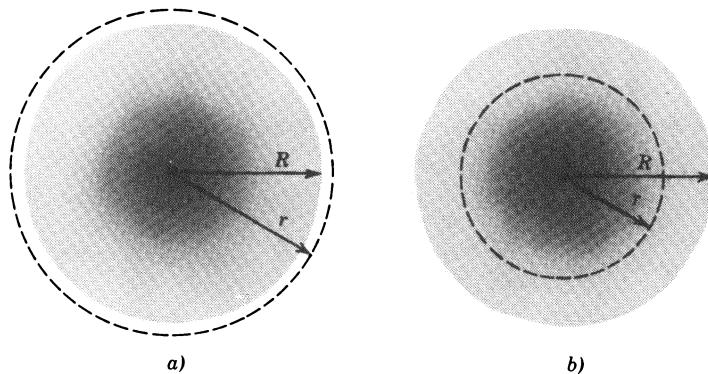
Przez przerzucenie przełącznika  $S$  w lewą stronę, można doprowadzić do układu powłok znaczny ładunek. Jeśli jakakolwiek część tego ładunku będzie chciała przedostać się na powłokę  $B$ , będzie musiała przejść przez elektrometr, powodując wychylenie, które można obserwować optycznie za pomocą lunetki  $T$ , zwierciadełka  $Z$  i okienek  $O$ .

Jednak gdy przełącznik  $S$  jest przerzucany na przemian w lewą i w prawą stronę, tak że łączy układ powłok na zmianę z baterią i ziemią, nie obserwuje się żadnego wpływu na galwanometr. Znając czułość elektrometru Plimpton i Lawton obliczyli, że  $n$  w równ. (28-8) ma wartość pokazaną w tablicy 28-1.

### 28-8. Prawo Gaussa i niektóre jego zastosowania

W przypadkach wysokiej symetrii rozkładu ładunków prawo Gaussa może być użyte do obliczania natężenia pola  $E$ . Jeden z przykładów, obliczenie  $E$  dla ładunku punktowego, był już poprzednio omówiony (równ. (28-7)). Poniżej przedstawimy inne przykłady.

**Przykład 2. Kulisto-symetryczny rozkład ładunku.** Rysunek 28-9 przedstawia kulisty rozkład ładunku o promieniu  $R$ . Gęstość ładunku  $\rho$  (tj. ładunek na jednostkę objętości mierzony w  $C/m^3$ ) w każdym punkcie zależy tylko od odległości tego punktu od środka, nie zależy od kierunku. Jest to warunek *kulistej symetrii*.



Rys. 28-9. Przykład 2. Kulisto-symetryczne rozkłady ładunków i dwie powierzchnie Gaussa. Gęstość ładunku — jak widać z zacieniowania rysunku — zmienia się z odległością od środka, ale nie zależy od kierunku

Znaleźć wyrażenie na  $E$  dla punktów znajdujących się (a) na zewnątrz i (b) wewnętrz rozkładu ładunku. Zauważmy, że obiekt na rys. 28-9 nie może być przewodnikiem, gdyż wtedy — jak widzieliśmy poprzednio — cały ładunek znajdowałby się na jego powierzchni.

Zastosowanie prawa Gaussa do kulistej powierzchni o promieniu  $r$  przedstawionej na rysunku 28-9a (patrz paragraf 28-5) prowadzi do równania (28-5)

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, \quad (28-7)$$

\* Układ ten stanowi rodzaj czułego galwanometru (przyp. tłum.).

gdzie  $q$  jest całkowitym ładunkiem. A więc dla punktów znajdujących się na zewnątrz kulisto-symetrycznego rozkładu ładunku pole elektryczne ma takie natężenie, jakie miałyby, gdyby cały ładunek był umieszczony w środku. Kuliście symetryczne rozmieszczenie masy  $m$  tworzy na zewnątrz takie pole grawitacyjne, jak gdyby cała jej masa skupiona była w środku. Przyczyną tego podobieństwa jest fakt, że zarówno prawo Coulombla, jak i prawo powszechnego ciążenia opisują oddziaływanie odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości. Przypadek sił grawitacyjnych rozważany był szczegółowo w paragrafie 16-6, uzasadnienie użycia prawa Gaussa w przypadku elektrostatyki jest z pewnością znacznie prostsze.

Rysunek 28-9b przedstawia kulistą powierzchnię Gaussa o promieniu  $r$ , przebiegającą wewnątrz rozkładu ładunku. Prawo Gaussa (równ. (28-6)) daje w tym wypadku

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \epsilon_0 E(4\pi r^2) = q'$$

lub

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r^2},$$

gdzie  $q'$  jest to część ładunku  $q$  zawarta wewnątrz kuli o promieniu  $r$ . Ta część  $q$ , która znajduje się poza tą kulą, nie daje wkładu do  $E$ . Odpowiada to w przypadku grawitacji temu, że kulista powłoka materiałna nie oddziałuje grawitacyjnie na ciało znajdujące się w jej wnętrzu.

Szczególnym przypadkiem kulisto-symetrycznego rozkładu ładunku jest równomiernie naładowana kula. Dla takiej kuli, która byłaby przedstawiona na rys. 28-9 jako jednakowo zacieniona, gęstość ładunku  $\rho$  ma stałą wartość dla wszystkich punktów wewnętrz promienia  $R$  oraz jest równa zeru na zewnątrz. Dla punktów znajdujących się wewnętrz takiej równomiernie naładowanej kuli możemy napisać:

$$q' = q \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad \text{lub} \quad q' = q \left(\frac{r}{R}\right)^3,$$

gdzie  $\frac{4}{3}\pi R^3$  jest objętością kuli. Wyrażenie na  $E$  ma więc postać:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qr}{R^3}. \quad (28-9)$$

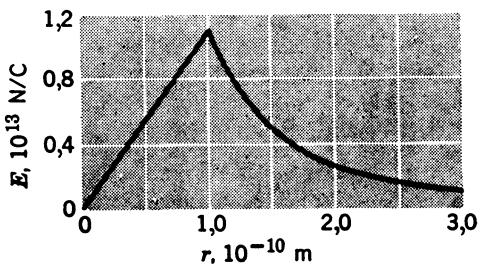
Wyrażenie to równa się zeru dla  $r = 0$ . Zauważmy, że równania (28-7) dają ten sam wynik dla punktów leżących na powierzchni rozkładu ładunku, tzn. dla  $r = R$ . Oczywiście, tak być powinno. Zauważmy także, że równanie (28-9) nie stosuje się do rozkładu ładunku przedstawionego na rys. 28-9b, ponieważ mamy wtedy do czynienia ze zmianą gęstości ładunku, na co wskazuje niejednakowe zacienianie.

**Przykład 3. Model atomu Thomsona.** Kiedyś uważano, że dodatni ładunek atomu rozłożony jest równomiernie wewnątrz kuli o promieniu około  $1,0 \cdot 10^{-10}$  m, tj. wewnątrz całego atomu. Obliczyć przy tym błędym założeniu natężenie pola elektrycznego na powierzchni atomu złota ( $Z = 79$ ). Zaniedbać wpływ elektronów.

Dodatni ładunek atomu wynosi  $Ze$  lub  $79 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$  C. Z równania (28-7) otrzymujemy następującą wartość  $E$  na powierzchni

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = \frac{(9,0 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \cdot 79 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{(1,0 \cdot 10^{-10} \text{ m})^2} = 1,1 \cdot 10^{13} \text{ N/C}.$$

Na rysunku 28-10 pokazany jest wykres  $E$  w zależności od odległości od środka atomu, otrzymany przy zastosowaniu równań (28-7) i (28-9). Widzimy, że natężenie pola  $E$  osiąga wartość maksymalną



Rys. 28-10. Przykład 3. Pole elektryczne wytworzone przez dodatni ładunek atomu zgodnie z (błędnym) modelem Thomsona

powierzchni i maleje liniowo do zera w środku atomu (patrz równ. (28-9)). Na zewnątrz atomu natężenie pola  $E$  maleje odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości (patrz równ. (28-7)).

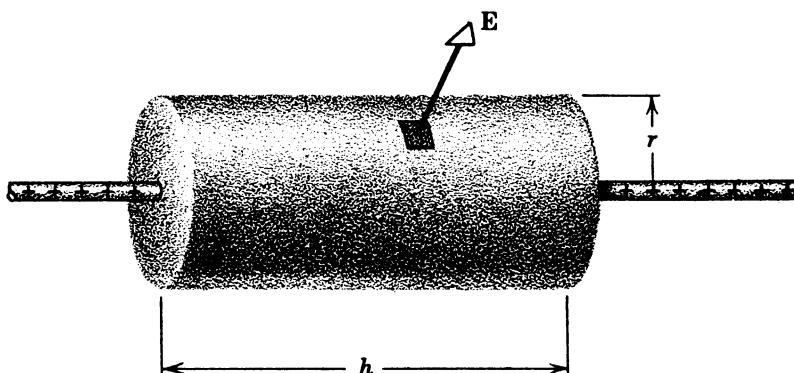
**Przykład 4. Model atomu Rutherforda.** W paragrafie 28-9 widzieliśmy, że dodatni ładunek atomu nie jest rozłożony równomiernie w całej jego objętości (patrz przykład 3), lecz jest skoncentrowany w małym obszarze (jądro), znajdującym się w jego środku. Promień jądra atomu złota wynosi około  $6,9 \cdot 10^{-15}$  m. Jakie jest natężenie pola elektrycznego na powierzchni jądra? Zaniedbać efekty wywołane przez elektrony atomu.

Problem jest identyczny jak w przykładzie 3 z wyjątkiem tego, że teraz promień jest znacznie mniejszy. Dzięki temu natężenie pola na powierzchni jest większe, proporcjonalnie do stosunku kwadratów promieni. A więc

$$E = 1,1 \cdot 10^{13} \text{ N/C} \frac{(1,0 \cdot 10^{-10} \text{ m})^2}{(6,9 \cdot 10^{-15} \text{ m})^2} = 2,3 \cdot 10^{21} \text{ N/C}.$$

Otrzymaliśmy niezwykle silne pole elektryczne, znacznie silniejsze od tych, jakie mogą być wytwarzane w laboratoriach. Jest ono około  $10^8$  razy silniejsze niż pole otrzymane w przykładzie 3.

**Przykład 5. Nieskończony, naładowany pręt\***. Na rysunku 28-11 pokazany jest odcinek nieskończoności długiego naładowanego pręta o stałej liniowej gęstości ładunku  $\lambda$  ( $\lambda$  — ładunek na jednostkę długości mierzony w C/m). Znaleźć natężenie pola elektrycznego  $E$  w odległości  $r$  od pręta.



Rys. 28-11. Przykład 5. Nieskończoność dłuży, naładowany pręt i otaczająca go zamknięta, współosiowa cylindryczna powierzchnia Gaussa

Wektor natężenia pola elektrycznego  $E$  wytworzonego przez liniowy rozkład ładunku może być skierowany jedynie radialnie względem pręta (ze względu na symetrię). Jako powierzchnię Gaussa wybieramy walec o promieniu  $r$  i wysokości  $h$  zamknięty z obu końców płaskimi podstawkami. Ponieważ na bocznej powierzchni  $E$  jest stałe, więc strumień  $E$  przez tę powierzchnię jest równy  $E(2\pi rh)$ , gdzie  $2\pi rh$  jest wielkością powierzchni. Dla obu podstawa walca strumień jest równy零, ponieważ w każdym ich punkcie wektor  $E$  leży na powierzchni.

Ladunek zamknięty wewnętrz powierzchni Gaussa przedstawionej na rys. 28-11 wynosi  $\lambda h$ . Z prawa Gaussa (równ. (28-6)),  $\epsilon_0 \oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = q$  wynika, że

$$\epsilon_0 E(2\pi rh) = \lambda h,$$

a więc

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (28-10)$$

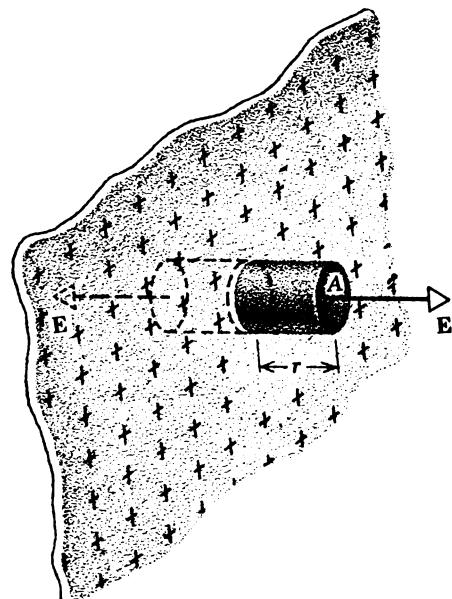
W przypadku pręta o ładunku dodatnim wektor  $E$  jest skierowany radialnie na zewnątrz.

\* W praktyce nie ma, oczywiście, takich rzeczy jak nieskończone, naładowane pręty lub płaszczyzny. Abstrakcja ta jest jednak wygodna, tak jak np. koncepcja gazu doskonałego przedstawiona w rozdziale 23. We wszystkich przypadkach omawianych w tej książce, przyjęcie nieskończonych, naładowanych prętów (lub płaszczyzn) pozwala nam pomijać efekty na końcach (lub na brzegach).

Zauważmy, o ile prostsze jest rozwiązywanie omawianego zagadnienia przy zastosowaniu prawa Gaussa niż w przypadku użycia metod całkowych (przykład 6, rozdział 27). Zauważmy także, że rozwiązywanie przy użyciu prawa Gaussa jest możliwe tylko wówczas, gdy wybierzymy powierzchnię Gaussa w ten sposób, by wykorzystać w pełni cylindryczną symetrię pola elektrycznego wytwarzanego przez pręt. Jako powierzchnię Gaussa moglibyśmy wybrać dowolną powierzchnię, np. sześcian lub kulę. Choć prawo Gaussa jest słusne dla każdej takiej powierzchni, jedynie powierzchnia walca (rys. 28-11) spełnia podany warunek.

Prawo Gaussa ma tę własność, że jest użyteczne jedynie w rozwiązańach dotyczących problemów mających pewien stopień symetrii, lecz dla tych problemów rozwiązań są wyjątkowo proste.

**Przykład 6. Nieskończona, naładowana płaszczyzna.** Na rysunku 28-12 pokazana jest część cienkiej, nieprzewodzącej, nieskończonej płaszczyzny naładowanej ze stałą gęstością powierzchniową ładunku  $\sigma$  ( $\sigma$  — ładunek na jednostkę powierzchni mierzony w  $C/m^2$ ). Jakie jest natężenie pola elektrycznego  $E$  w odległości  $r$  od płaszczyzny?



Rys. 28-12. Przykład 6. Nieograniczona, nieprzewodząca naładowana płyta i cylindryczna powierzchnia Gaussa

Odpowiednią powierzchnią Gaussa jest tutaj zamknięty cylinder o powierzchni przekroju  $A$  i wysokości  $2r$ , przecinający płaszczyznę w sposób pokazany na rys. 28-11. Z symetrii wynika, że  $E$  przecina podstawy walca pod kątem prostym. Ponieważ  $E$  nie przecina samej powierzchni walca, to strumień przechodzący przez nią jest równy零. A więc z prawa Gaussa,  $\epsilon_0 \oint EdS = q$ , wynika, że

$$\epsilon_0 (EA + EA) = \sigma A,$$

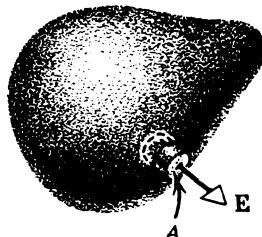
gdzie  $\sigma A$  jest ładunkiem zamkniętym wewnętrz powierzchni Gaussa. Stąd

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (28-11)$$

Zauważmy, że  $E$  jest jednakowe dla wszystkich punktów po obu stronach płaszczyzny; porównać z rys. 27-2. Choć nieskończona płaszczyzna nie może istnieć fizycznie, rozwiązanie to jest użyteczne, gdyż równanie (28-11) daje poprawne wyniki w przypadku realnych (nie nieskończonych) naładowanych płaszczyzn, jeżeli tylko będziemy rozważać punkty dostatecznie oddalone od brzegów i takie, że ich odległość od płaszczyzny jest mała w porównaniu z jej rozmiarami.

**Przykład 7. Naładowany przewodnik.** Na rysunku 28-13 pokazany jest przewodnik, na którego powierzchni znajduje się ładunek o gęstości powierzchniowej  $\sigma$ ; na ogół  $\sigma$  jest różne w różnych punktach powierzchni. Jakie jest  $E$  w punktach leżących blisko powierzchni?

Kierunek  $\mathbf{E}$  w punktach leżących blisko powierzchni jest prostopadły do tej powierzchni i w przypadku ładunku dodatniego zwrócony na zewnątrz. Gdyby  $\mathbf{E}$  nie było prostopadłe do powierzchni, to istniałaby jego składowa leżąca na tej powierzchni. Składowa ta działałaby na nośniki ładunku powodując przepływ prądów powierzchniowych. Ponieważ przy podanych warunkach elektrostatycznych prądy takie nie mogą płynąć, wektor  $\mathbf{E}$  musi być prostopadły do powierzchni przewodnika.



Rys. 28-13. Przykład 7. Naładowany przewodnik izolowany i powierzchnia Gaussa

Wielkość  $\mathbf{E}$  można wyznaczyć stosując prawo Gaussa i biorąc jako powierzchnię Gaussa mały płaski cylinder o przekroju poprzecznym  $A$ . Ponieważ wewnętrz przewodnika  $\mathbf{E}$  jest równe zero (patrz paragraf 28-6), jedyny wkład do  $\Phi_E$  daje płaska podstawa walca leżąca na zewnątrz przewodnika. Z prawa Gaussa  $\epsilon_0 \oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = q$  wynika, że

$$\epsilon_0 (EA) = \sigma A,$$

gdzie  $\sigma A$  jest ładunkiem zawartym wewnątrz powierzchni Gaussa. Prowadzi to do wyrażenia

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (28-12)$$

Porównanie z równaniem (28-11) wskazuje, że w pobliżu *przewodnika naładowanego z powierzchniową gęstością ładunku  $\sigma$*  natężenie pola elektrycznego jest dwa razy większe od natężenia pola w pobliżu *izolatora mającego tę samą powierzchniową gęstość ładunku*. Czytelnik powinien uważnie porównać powierzchnie Gaussa, pokazane na rys. 28-12 i 28-13. Na rysunku 28-12 pole elektryczne istnieje po obu stronach płaszczyzny i linie sił wychodzą przez obie podstawy walcowatej powierzchni Gaussa. Na rysunku 28-13 linie sił wychodzą jedynie przez zewnętrzną podstawę powierzchni Gaussa, ponieważ druga podstawa znajduje się wewnątrz przewodnika, gdzie pole elektryczne nie istnieje. Jeżeli przyjmiemy jednakowe gęstości powierzchniowe ładunku i jednakowe przekroje poprzeczne  $A$  dla obu powierzchni Gaussa, to zawarte wewnątrz nich ładunki ( $= \sigma A$ ) będą jednakowe. Ponieważ z prawa Gaussa wynika, że strumień  $\Phi_E$  jest w każdym wypadku ten sam, więc  $E (= \Phi_E / A)$  musi być w przypadku przedstawionym na rys. 28-13 dwa razy większe niż w przypadku przedstawionym na rys. 28-12. Pozytyczną rzeczą jest zauważyc, że na rys. 28-12 połowa strumienia wychodzi z jednej, a połowa z drugiej strony powierzchni, podczas gdy na rys. 28-13 cały strumień wychodzi z zewnętrznej strony powierzchni.

## 28-9. Jądrowy model atomu

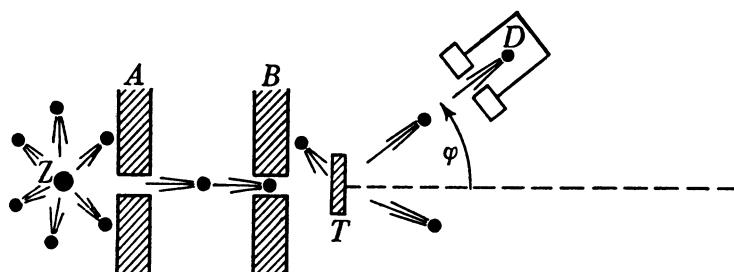
Próba interpretacji wyników doświadczeń wykonanych na uniwersytecie w Manchesterze przez H. Geigera i E. Marsdена\* doprowadziła w roku 1911 Ernesta Rutherforda (1871–1937) do przyjęcia istnienia jądra atomu. Wyniki z przykładów 3 i 4 odegrały ważną rolę w przeprowadzonej przez Rutherforda analizie tych doświadczeń.

Geiger i Marsden badali, według wskazówek Rutherforda, rozpraszanie wiązki cząstek alfa \*\* przez cienką folię z ciężkiego pierwiastka, np. złota. Liczyli oni cząstki  $\alpha$  odchylane

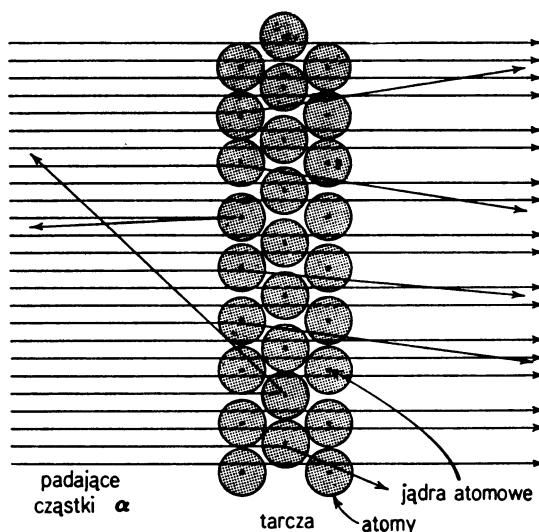
\* Patrz: E. N. da L. Andrade, The Birth of Nuclear Atom, *Scientific American*, November 1956. Patrz także przykład 6, rozdział 10.

\*\* Cząstki  $\alpha$  są jądrami helu emitowanymi samorzutnie przez pewne substancje promieniotwórcze, np. rad. W chwili emisji mają one prędkość rzędu  $\frac{1}{3}$  prędkości światła.

pod różnymi kątami  $\varphi$ . Na rysunku 28-14 pokazany jest schemat doświadczenia. Na rysunku 28-15 pokazane są typowe tory cząstek  $\alpha$  rozproszonych przez atomy złota; kąty  $\varphi$ , pod jakimi rozpraszane są cząstki  $\alpha$ , zmieniają się od  $0^\circ$  do  $180^\circ$ , gdy charakter rozproszenia zmienia się ze „stycznego” na „centralny”.



Rys. 28-14. Doświadczalny układ do badania rozpraszanego cząstek  $\alpha$ . Cząstki ze źródła  $Z$  padają poprzez kolimator na cienką metalową tarczę  $T$ . Cząstki rozproszone przez tarczę pod znacznym kątem są liczone przez licznik  $D$



Rys. 28-15. Odchylenie padających cząstek zależy od rodzaju zderzenia jądrowego. (Według: E. N. Andrade, The Birth of the Nuclear Atom, *Scientific American*, November 1956)

Elektrony atomu złota ze względu na ich małą masę prawie nie oddziałują na ruch padającej cząstki  $\alpha$ , natomiast one same są silnie odchylane, podobnie do roju owadów, poprzez który rzucono kamień. Każde odchylenie cząstki  $\alpha$  musi być powodowane przez odpychające działanie dodatniego ładunku atomu złota, który był — jak wiadomo — związany z większością masy atomu.

W czasach, gdy wykonywano to doświadczenie, większość fizyków wierzyła w tzw. „rodzynkowy” model atomu zaproponowany przez J. J. Thomsona (1856-1940). Według tego modelu (patrz przykład 3) dodatni ładunek atomu rozłożony jest w całym atomie, tj. w objętości kuli o promieniu około  $10^{-10}$  m. Elektrony oscylują dokoła ustalonych punktów wewnętrz tej kuli.

Rutherford pokazał, że model ten jest sprzeczny z wynikami doświadczeń nad rozpraszaniem cząstek  $\alpha$  i zaproponował zamiast niego jądrowy model atomu, który obecnie uznawany jest za właściwy. Według tego modelu dodatni ładunek zawarty jest w bardzo małej kuli, której promień wynosi około  $10^{-14}$  m (jądro). Elektrony krążą dokoła tego jądra i zajmują objętość o promieniu około  $10^{-10}$  m. Genialny pomysł Rutherforda stał się podstawą rozwoju współczesnej fizyki atomowej i jądrowej.

Rutherforda zainteresowała pewna własność rozpraszania cząstek  $\alpha$ , a mianowicie fakt, że pewne cząstki  $\alpha$  rozpraszane są pod bardzo dużymi kątami, aż do  $180^\circ$ . Dla fizyków przyzwyczajonych do myślenia według modelu „rodzynkowego” rezultat ten był bardzo zaskakujący. Rutherford wyraził to w sposób następujący: „Było to najbardziej niewiarygodne zdarzenie, jakie kiedykolwiek spotkało mnie w życiu. Było ono prawie tak niewiarygodne jak to, gdybyś strzelił 15-calowym pociskiem w kartkę papieru, a ten wrócił i uderzył w ciebie”.

Rzeczywiście, aby cząstka  $\alpha$  mogła być odchylona tak silnie, musiałaby przechodzić przez obszar pola elektrycznego o bardzo dużym natężeniu\*. Na podstawie przykładu 3 widzimy, że w modelu Thomsona maksymalne natężenie pola elektrycznego wynosi  $1,1 \cdot 10^{13}$  N/C. Porównajmy to z wartością obliczoną w przykładzie 4 dla punktów na powierzchni jądra złota ( $2,3 \cdot 10^{21}$  N/C). Widzimy, że odchylająca siła działająca na cząstkę  $\alpha$  jest aż  $10^8$  razy większa, gdy dodatni ładunek atomu jest skupiony w bardzo małej objętości (jądro w środku atomu). Rutherford wysunął swą hipotezę o istnieniu jąder atomowych po znacznie bardziej szczegółowej analizie matematycznej niż ta, która została podana tutaj.

### **Pytania**

1. Jak można, przez analogię do strumienia  $\Phi_E$ , zdefiniować strumień  $\Phi_g$  pola grawitacyjnego? Jaki jest strumień ziemskiego pola grawitacyjnego przechodzący przez ściany pokoju, przy założeniu, że nie zawierają one materii?

2. Ładunek punktowy umieszczony jest w środku kulistej powierzchni Gaussa. Czy  $\Phi_E$  zmieni się:  
(a) jeżeli powierzchnia ta zostanie zastąpiona powierzchnią sześcianu o tej samej objętości, (b) jeżeli powierzchnia kuli zostanie zastąpiona powierzchnią sześcianu o objętości dziesięć razy mniejszej, (c) jeżeli ładunek zostanie przesunięty ze środka kuli, lecz będzie pozostawał w jej wnętrzu, (d) jeżeli ładunek zostanie przesunięty tuż na zewnątrz pierwotnej kuli, (e) jeżeli umieścimy blisko pierwotnej powierzchni kulistej, po jej zewnętrznej stronie drugi ładunek i (f) jeżeli drugi ładunek umieścimy wewnętrz powierzchni Gaussa?

3. Czy w prawie Gaussa

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = q,$$

$E$  jest natężeniem pola elektrycznego pochodzącego od ładunku  $q$ ?

4. Pokazać, że równanie (18-3) przedstawia to, co mogłyby być nazwane *prawem Gaussa dla nieskończego cieczy*, mianowicie

$$\Phi_g = \oint \mathbf{v} d\mathbf{S} = 0.$$

5. Zamknięta powierzchnia zawiera wewnętrz dipol elektryczny. Co można powiedzieć o strumieniu  $\Phi_E$  przechodzącym przez tę powierzchnię?

\* Można wykazać, że prawdopodobieństwo tego, by duże odchylenie było wynikiem nałożenia się wielu małych odchyleń, jest bardzo małe.

6. Założmy, że wewnątrz pewnej powierzchni Gaussa nie ma żadnego ładunku. Czy prawo Gaussa wymaga, aby  $E$  równało się zeru dla wszystkich punktów tej powierzchni? Czy słuszne jest odwrotne twierdzenie, tzn. jeżeli  $E$  jest równe zeru dla wszystkich punktów pewnej powierzchni, to prawo Gaussa wymaga, aby wewnątrz niej nie było ładunku?

7. Czy prawo Gaussa można zastosować do obliczenia natężenia pola pochodzącego od trzech jednakowych ładunków umieszczonych w wierzchołkach trójkąta równobocznego? Uzasadnić odpowiedź.

8. Użycie pojęcia liniowej, powierzchniowej i objętościowej gęstości ładunku przy obliczaniu ładunku zawartego w jakimś elemencie naładowanego przedmiotu, pociąga za sobą konieczność przyjęcia ciągłego rozkładu ładunku, podczas gdy w rzeczywistości ładunek jest w skali mikroskopowej nieciągły. Jak można uzasadnić ten sposób postępowania?

9. Czy  $E$  wewnątrz naładowanego gumowego balonu koniecznie musi być równe zeru, jeżeli balon ten: (a) jest kulisty, (b) ma kształt wydłużony? Dla obu przypadków przyjąć, że ładunek jest rozłożony równomiernie na powierzchni.

10. Kulisty gumowy balon ma ładunek, który jest równomiernie rozłożony na jego powierzchni. Jak zmienia się  $E$  dla punktów: (a) wewnątrz balonu, (b) na powierzchni balonu i (c) wewnątrz balonu, gdy jest on nadmuchiwany?

11. Widzieliśmy, że dla pola  $E$  istnieją źródła (ładunki dodatnie) i pułapki (ładunki ujemne). Czy istnieją źródła i (lub) pułapki dla: (a) pola  $v$  w ruchu płynu i (b) pola grawitacyjnego  $g$ ?

12. Czy jest prawdą w pełnym tego słowa znaczeniu, że według prawa Gaussa całkowita liczba linii sił przechodzących przez jakąkolwiek zamkniętą powierzchnię w kierunku zewnętrznym jest proporcjonalna do dodatniego ładunku netto zawartego wewnątrz powierzchni?

13. W paragrafie 28-5 widzieliśmy, że prawo Coulomba można otrzymać z prawa Gaussa. Czy w takim razie można otrzymać prawo Gaussa z prawa Coulomba?

14. Duży, izolowany, pusty w środku przewodnik ma ładunek  $+q$ . Małą metalową kulę o ładunku  $-q$  wpuszczono na nici przez mały otwór do środka przewodnika, aby dotknęła powierzchni wewnętrznej a następnie kulę wyjęto. Jaki jest ładunek na (a) przewodniku i (b) kulce?

15. Czy z twierdzenia przedstawionego w paragrafie 28-6 można wynioskować, że elektryny w drutach domowego układu elektrycznego poruszają się po powierzchniach tych drutów. Jeżeli nie, to dlaczego?

16. Czy prawo Gaussa, zastosowane tak jak w paragrafie 28-6, wymaga, aby wszystkie elektryny przewodnictwa w izolowanym przewodniku znajdowały się na jego powierzchni?

17. W paragrafie 28-6 przyjmowaliśmy, że wszędzie wewnątrz przewodnika  $E$  jest równe zero. Jednakże z pewnością istnieje bardzo duże pole elektryczne w samym przewodniku w tych punktach, gdzie znajdują się elektryny i jądra. Czy obala to dowody podane w paragrafie 28-6?

18. Czasami mówimy, że nadmiar ładunku gromadzi się tylko na zewnętrznej powierzchni przewodnika, gdyż ładunki tego samego znaku odpychają się i dążą do tego, aby znajdować się jak najdalej jeden od drugiego. Skomentować to.

19. Czy prawo Gaussa jest słuszne, gdy wykładnik w prawie Coulomba nie jest ścisłe równy 2?

20. Jeżeli będziemy się zbliżać do środka, wewnątrz równomiernie naładowanej kuli, to  $E$  będzie maleło, gdyż coraz mniej ładunku będzie leżało wewnątrz powierzchni kulistej przechodzącej przez punkt obserwacji. Z drugiej strony  $E$  powinno wzrastać, gdyż będziemy się zbliżać do środka tego ładunku. Który efekt dominuje i dlaczego?

21. Dany jest kulisto-symetryczny rozkład ładunku (o niejednakowej gęstości); czy maksimum  $E$  koniecznie musi znajdować się na powierzchni ładunku? Rozważyć inne możliwości.

22. Wyjaśnić własnymi słowami współczynnik 2, który odróżnia równ. (28-11) od równ. (28-12).

23. Czy równanie 28-7 jest prawdziwe dla rys. 28-9a, jeżeli: (a) w ciele znajduje się współśrodkowa, kulista wnęka, (b) ładunek punktowy  $Q$  znajduje się w środku tej wnęki i (c) ładunek  $Q$  znajduje się we wnęce, lecz nie w jej środku?

24. Normalnie atom jest elektrycznie obojętny. Dlaczego więc cząstka  $\alpha$  będzie odchylana przez atom w dowolnych warunkach?

25. Jeżeli cząstka  $\alpha$  jest odchylona o  $135^\circ$  przez jądro złota, to czy można wyciągnąć wnioski: (a) że na cząstkę  $\alpha$  działała jakaś siła lub (b) że jakaś praca została wykonana nad tą cząstką?

26. Wyjaśnić własnymi słowami, dlaczego doświadczenia Rutherforda i jego towarzyszy z rozpraszaniem cząstek  $\alpha$  (patrz przykład 4) podważyły model atomu Thomsona (patrz przykład 3).

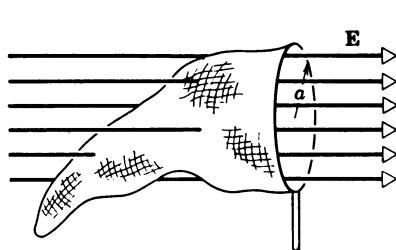
## Zadania

### Paragraf 28-1

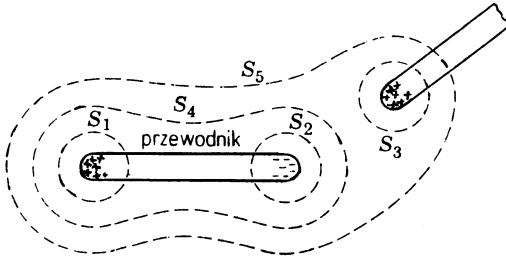
1. Obliczyć strumień  $\Phi_E$  przechodzący przez półkulę o promieniu  $R$ . Pole E jest jednorodne i równoległe do osi półkuli.

Odp.:  $\pi R^2 E$ .

2. Siatka na motyle znajduje się w jednorodnym polu elektrycznym jak na rys. 28-16. Obręcz, okrąg o promieniu  $a$ , jest ustawiona prostopadle do tego pola. Znaleźć strumień elektryczny przepływający przez siatkę.



Rys. 28-16. Zadanie 2



Rys. 28-17. Zadanie 5

### Paragraf 28-3

3. W przykładzie 1 obliczyć bezpośrednio strumień  $\Phi_E$  dla walca, gdy jest on tak obrócony, że jego os jest prostopadła do pola elektrycznego, nie używając prawa Gaussa.

Odp.: Zero.

4. Punktowy ładunek  $1,0 \cdot 10^{-6}$  C znajduje się w środku sześciennej powierzchni Gaussa o boku 0,50 m. Jaki jest strumień  $\Phi_E$  przechodzący przez tę powierzchnię?

### Paragraf 28-4

5. Ładunek początkowo obojętnego, izolowanego przewodnika został rozdzielony przez zbliżenie dodatnio naładowanego pręta (rys. 28-17). Co można wywnioskować z prawa Gaussa o strumieniu przechodzącym przez pięć pokazanych powierzchni Gaussa? Ujemny ładunek indukowany w przewodniku jest równy dodatniemu ładunkowi pręta.

Odp.:  $+q$  = ładunek pręta.  $\Phi_{S1} = q/\epsilon_0$ .  $\Phi_{S2} = -q/\epsilon_0$ .  $\Phi_{S3} = q/\epsilon_0$ .  $\Phi_{S4} = 0$ .  $\Phi_{S5} = q/\epsilon_0$ .

6. Jednorodnie naładowana, przewodząca kula o średnicy 1 m ma powierzchniową gęstość ładunku  $8,0 \text{ C/m}^2$ . Jaki jest całkowity strumień elektryczny wychodzący z powierzchni kuli?

7. Intensywność pola elektrycznego Ziemi przy powierzchni wynosi  $\sim 130 \text{ N/C}$  i jest ono skierowane w dół. Jaki jest ładunek Ziemi, przyjmując, że pole to jest przezeń spowodowane?

Odp.:  $-6 \cdot 10^5 \text{ C}$ .

8. Ładunek punktowy  $q$  znajduje się w jednym rogu sześcianu o boku  $a$ . Jaki strumień przepływa przez każdą ze ścian sześcianu? (Wskazówka: Skorzystać z prawa Gaussa i reguły symetrii).

9. „Prawo Gaussa dla grawitacji” ma postać:

$$\frac{1}{4\pi G} \Phi_g = \frac{1}{4\pi G} \oint \mathbf{g} d\mathbf{S} = -m,$$

gdzie  $m$  jest masą zawartą wewnętrz powierzchni całkowania,  $G$  zaś uniwersalną stałą grawitacyjną (paragraf 16-3). Wyrowadzić na podstawie tego prawo powszechnego ciążenia Newtona.

10. Składowe natężenia pola elektrycznego przedstawionego na rys. 28-18 wynoszą:  $E_x = bx^{1/2}$ ,  $E_y = E_z = 0$ , gdzie  $b = 800 \text{ N/(C} \cdot \text{m}^{1/2}\text{)}$ . Znaleźć (a) strumień  $\Phi_E$  przechodzący przez powierzchnię sześcianu i (b) ładunek wewnętrz sześcianu. Przyjąć  $a = 10 \text{ cm}$ .

### Paragraf 28-6

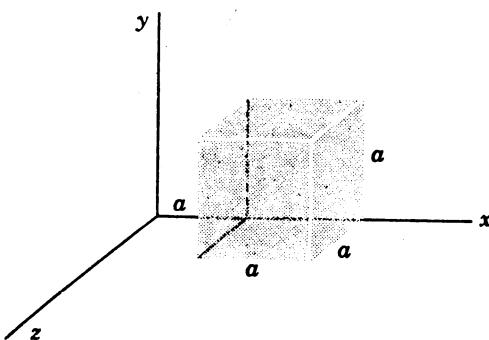
11. Równanie (28-12) ( $E = \sigma/\epsilon_0$ ) daje natężenie pola elektrycznego w punktach położonych blisko naładowanej powierzchni przewodzącej. Pokazać, że równanie to prowadzi do wiarygodnych rezultatów, gdy zastosujemy je do przewodzącej kuli o promieniu  $r$ , mającej ładunek  $q$ .

Odp.: Prowadzi to do  $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$ .

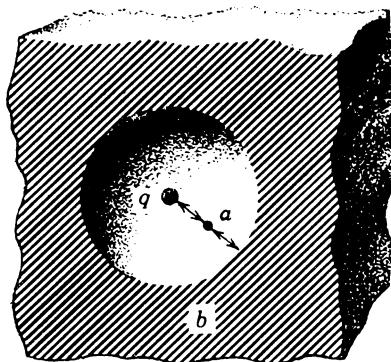
12. Przewodnik izolowany ma ładunek  $+10 \cdot 10^{-6}$  C. Wewnątrz przewodnika znajduje się wydrążona wnęka z ładunkiem punktowym  $Q$  równym  $+3,0 \cdot 10^{-6}$  C. Jaki jest ładunek (a) na ścianie wnęki i (b) na zewnętrznej powierzchni przewodnika?

13. Na rysunku 28-19 pokazany jest punktowy ładunek  $1,0 \cdot 10^{-7}$  C, umieszczony w środku kulistej wnęki o promieniu 3 cm, znajdującej się w kawałku metalu. Korzystając z prawa Gaussa obliczyć natężenie pola elektrycznego (a) w punkcie  $a$ , leżącym w połowie odległości od środka wnęki do jej powierzchni oraz (b) w punkcie  $b$ .

Odp.: (a)  $4,0 \cdot 10^6$  N/C. (b) Zero.



Rys. 28-18. Zadanie 10



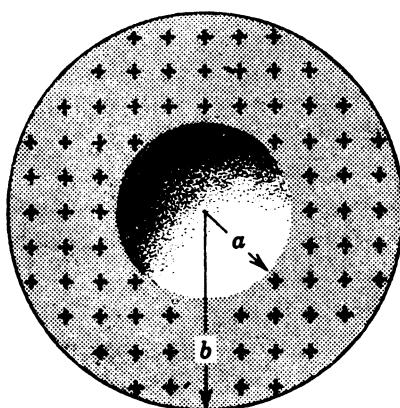
Rys. 28-19. Zadanie 13

14. Na rysunku 28-20 przedstawiona jest nieprzewodząca powłoka kulista naładowana równomiernie z gęstością  $\rho$  (C/m<sup>3</sup>). Wykreślić natężenie pola elektrycznego  $E$  jako funkcję odległości  $r$  od środka powłoki w zakresie 0-30 cm. Przyjąć, że  $\rho = 1,0 \cdot 10^{-6}$  C/m<sup>3</sup>,  $a = 10$  cm i  $b = 20$  cm.

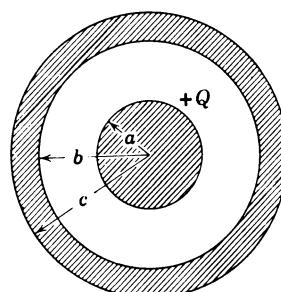
15. W średnicy nienalażowanej, cienkiej, metalicznej powłoki kulistej umieszczony jest punktowy ładunek  $q$ . Podać wyrażenie na natężenie pola elektrycznego (a) wewnątrz powłoki i (b) na zewnątrz powłoki. Skorzystać z prawa Gaussa. (c) Czy powłoka ma jakiś wpływ na pole wytworzone przez  $q$ ? (d) Czy obecność  $q$  ma jakiś wpływ na powłokę? (e) Jeżeli na zewnątrz powłoki umieszczony jest inny ładunek punktowy to czy działa na niego siła? (f) Czy na ładunek znajdujący się wewnątrz powłoki działa siła? (g) Czy możemy tu mówić o sprzeczności z trzecim prawem Newtona?

Odp.: (a)  $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$ , radialnie na zewnątrz. (b) Tak jak (a). (c) Nie. (d) Tak, ładunki są indukowane na powierzchniach. (e) Tak. (f) Nie. (g) Nie.

16. Na cienkiej metalowej powłoce kulistej o promieniu  $a$  znajduje się ładunek  $q_a$ . Współśrodkowo z nią umieszczona jest inna metalowa powłoka kulista o promieniu  $b$  ( $b > a$ ) i ładunku  $q_b$ . Zastosować



Rys. 28-20. Zadanie 14



Rys. 28-21. Zadanie 17

prawo Gaussa dla znalezienia natężenia pola elektrycznego w punktach odległych od środka o  $r$ , gdzie:  
 (a)  $r < a$ , (b)  $a < r < b$ , (c)  $r > b$ . (d) Ustalić kryterium, według którego można by ustalić jak rozłożone są ładunki na zewnętrznej i wewnętrznej powierzchni każdej powłoki.

17. Nieprzewodząca kula o promieniu  $a$  jest umieszczona w środku kulistej, przewodzącej powłoki o wewnętrzny promieniu  $b$  i zewnętrznym promieniu  $c$ , jak na rys. 28-21. Ładunek  $+Q$  rozmieszczony jest jednorodnie w wewnętrznej kuli (gęstość ładunku  $\rho$ ,  $C/m^3$ ). Zewnętrzna powłoka ma ładunek  $-Q$ . Znaleźć  $E(r)$ : (a) w kuli ( $r < a$ ), (b) między kulą i powłoką ( $a < r < b$ ), (c) wewnątrz powłoki ( $b < r < c$ ) i (d) na zewnątrz powłoki ( $r > c$ ). (e) Jakie ładunki znajdują się na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni powłoki?

Odp.: (a)  $E = (Q/4\pi\epsilon_0 a^3)r$ . (b)  $E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$ . (c) Zero. (d) Zero. (e) Na wewnętrznej,  $-Q$ ; Na zewnętrznej, zero.

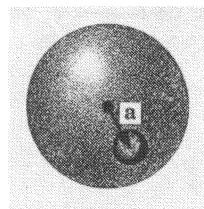
18. Przewodnik o nieregularnych kształtach ma w środku nieregularnie ukształtowaną wnękę. Przewodnik ma ładunek  $+Q$ , natomiast wnęka ładunku nie ma. Wykazać, że (a)  $E = 0$  we wnęce i (b) że nie ma ładunku na ścianach wnęki.

19. Dwie współśrodkowe, przewodzące, kuliste powłoki mają promienie  $R_1 = 0,145$  m i  $R_2 = 0,207$  m. Zewnętrzna kula ma ładunek  $-6,00 \cdot 10^{-8}$  C. Elektron ucieka z wewnętrznej kuli z nieznaczną prędkością. Przymając, że przestrzeń między powłokami jest próżnią, obliczyć prędkość, z jaką elektron uderzy w zewnętrzna kulę.

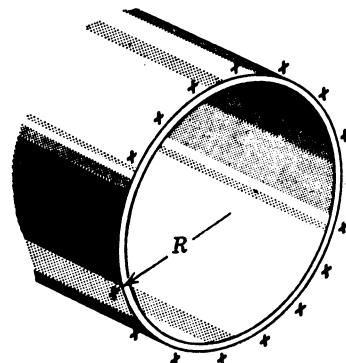
Odp.:  $2,0 \cdot 10^7$  m/s.

20. Kulisty obszar  $a < r < b$  na jednostkę objętości ma ładunek  $\rho = A/r$ , gdzie  $A$  jest stałe. W środku ( $r = 0$ ) wewnętrznej wnęki znajduje się ładunek punktowy  $Q$ . Jaka powinna być wartość  $A$ , aby pole elektryczne w obszarze  $a < r < b$  miało stałą wartość?

21. Pełna, nieprzewodząca kula ma jednorodny ładunek na jednostkę objętości  $\rho$ . Niech  $\mathbf{r}$  będzie wektorem wychodzącym ze środka kuli w kierunku jakiegoś punktu  $P$  wewnątrz kuli. (a) Wykazać, że pole elektryczne w  $P$  dane jest następująco:  $\mathbf{E} = \rho\mathbf{r}/3\epsilon_0$ . (b) W powyższej kuli znajduje się kulista wnęka, jak na rys. 28-22. Stosując zasadę superpozycji, wykazać, że pole elektryczne we wszystkich punktach wnęki wynosi  $\mathbf{E} = q\mathbf{a}/3\epsilon_0$  (pole jednorodne), gdzie  $\mathbf{a}$  jest wektorem łączącym środkiem kuli ze środkiem wnęki. Należy zauważyć, że oba te rezultaty są niezależne od promieni kuli i wnęki.



Rys. 28-22. Zadanie 21



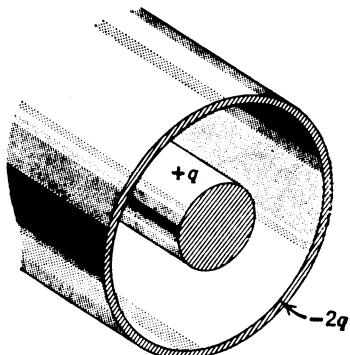
Rys. 28-23. Zadanie 22

22. Na rysunku 28-23 pokazany jest poprzeczny przekrój cienkościennej metalowej rury o promieniu  $R$ , na powierzchni której znajduje się ładunek o gęstości liniowej  $\lambda$ . Wyprowadzić wyrażenie na natężenie pola elektrycznego  $E$  w różnych odległościach od osi rury, rozważając zarówno (a)  $r > R$ , jak i (b)  $r < R$ . Wykreślić otrzymane wyniki dla  $r$  w zakresie od zera do 5 cm, przyjmując  $\lambda = 2,0 \cdot 10^{-8}$  C/m i  $R = 3,0$  cm.

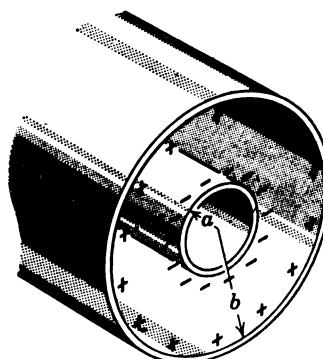
23. Długi przewodzący walec, na którym umieszczono ładunek  $+q$ , otoczony jest, jak pokazano na rys. 28-24 przez przewodzącą, cylindryczną powłokę o ładunku  $-2q$ . Zastosować prawo Gaussa dla znalezienia: (a) natężenia pola elektrycznego w punktach na zewnątrz powłoki, (b) rozkładu ładunku na powłoce i (c) natężenia pola elektrycznego w obszarze między walcem a powłoką.

Odp.: (a)  $E = q/2\pi\epsilon_0 lr$ , radialnie do wewnątrz. (b)  $-q$  na powierzchniach wewnętrznej i zewnętrznej. (c)  $E = q/2\pi\epsilon_0 lr$ , radialnie na zewnątrz.

24. Dwa naładowane, współśrodkowe cylindry mają promień 3 cm i 6 cm. Ładunek na jednostkę długości na wewnętrznym cylindrze wynosi  $5,0 \cdot 10^{-6}$  C/m, a na cylindrze zewnętrznym wynosi  $-7,0 \cdot 10^{-6}$  C/m. Znaleźć pole elektryczne dla (a)  $r = 4,0$  cm i (b)  $r = 8,0$  cm.



Rys. 28-24. Zadanie 23



Rys. 28-25. Zadanie 25

25. Na rysunku 28-25 pokazany jest poprzeczny przekrój przez dwa długie, współosiowe cylindry o promieniach  $a$  i  $b$ . Cylindry mają różne, lecz o przeciwnym znaku ładunki na jednostkę długości  $\lambda$ . Używając prawa Gaussa sprawdzić, (a) że  $E = 0$  dla  $r > b$  i dla  $r < a$  oraz (b) że między cylindrami  $E$  jest dane wzorem

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}.$$

26. W zadaniu 25 między cylindrami, koncentrycznie z nimi krąży dodatni elektron po orbicie o promieniu  $r$ . Jaka musi być jego energia kinetyczna  $K$ ? Przyjąć, że  $a = 2,0$  cm,  $b = 3$  cm i  $\lambda = 3,0 \cdot 10^{-8}$  C/m.

27. Ładunek jest rozłożony równomiernie na nieskończonym długim walcu o promieniu  $R$ . (a) Pokazać, że natężenie pola elektrycznego  $E$  w odległości  $r$  od osi walca ( $r < R$ ) jest dane wzorem

$$E = \frac{\varrho r}{2\epsilon_0},$$

gdzie  $\varrho$  jest gęstością ładunku (C/m<sup>3</sup>). (b) Jakiego wyniku należy oczekwać dla  $r > R$ ?

Odp.: (b)  $\varrho R^2/2\epsilon_0 r$ .

28. Kwadratowa płytka metalowa o długości boku 8,0 cm ma całkowity ładunek  $6,0 \cdot 10^{-6}$  C. (a) Oszacować pole elektryczne 0,50 cm nad powierzchnią płytki w pobliżu środka. (b) Oszacować pole w odległości 3,0 m.

29. Dwie duże metalowe płyty umieszczone naprzeciwko siebie, jak na rys. 28-26 mają na powierzchniach wewnętrznych ładunki o gęstości powierzchniowej odpowiednio  $+σ$  i  $-σ$ . Jakie jest natężenie pola elektrycznego  $E$  w punktach: (a) na lewo od płyt, (b) między nimi i (c) na prawo od nich? Rozważyć tylko te punkty odległe od brzegów, dla których odległość od płyt jest mała w porównaniu z rozmiarami płyt. Odp.: (a) Zero. (b)  $E = σ/ε_0$ , na lewo. (c) Zero.

30. Dwie duże płyty metalowe, każda o powierzchni  $1 \text{ m}^2$ , umieszczone naprzeciw siebie. Znajdują się one w odległości 5,0 cm i mają na wewnętrznych powierzchniach ładunki przeciwnego znaku. Jeżeli natężenie pola elektrycznego  $E$  pomiędzy płytami wynosi 55 N/C, to jaki jest ładunek na płytach? Zaniedbać efekty brzegowe.

31. Dwa duże, nieprzewodzące, dodatnio naładowane arkusze umieszczone naprzeciw siebie, jak na rys. 28-27. Jakie jest natężenie pola elektrycznego  $E$  w punktach: (a) na lewo od arkuszy, (b) między nimi i (c) na prawo od nich? Przyjąć jednakową powierzchniową gęstość ładunku dla obu arkuszy. Rozważyć tylko te punkty odległe od brzegów, dla których odległość od arkuszy jest mała w porównaniu z rozmiar-

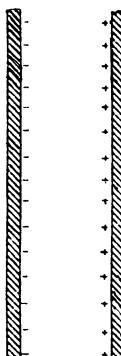
rami arkuszy. (Wskazówka:  $E$  w każdym punkcie jest sumą wektorową natężeń pól elektrycznych wytwarzanych przez każdy arkusz).

Odp.: (a)  $E = \sigma/\epsilon_0$ , na lewo. (b)  $E = 0$ . (c)  $E = \sigma/\epsilon_0$ , na prawo.

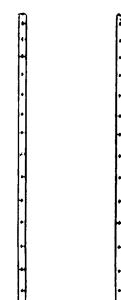
32. Nieprzewodząca płyta o grubości  $d$  ma jednorodną objętościową gęstość ładunku  $\rho$ . Znaleźć wartość pola elektrycznego we wszystkich punktach przestrzeni zarówno (a) wewnętrz jak i (b) na zewnątrz płyty.

33. W stronę dużej, metalowej płyty naładowanej z powierzchniową gęstością ładunku  $-2,0 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$  został wystrzelony elektron o energii 100 eV. Z jakiej odległości musi być wystrzelony elektron, aby mógł dolecieć dokładnie do powierzchni płyty?

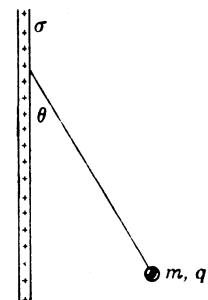
Odp.: 0,44 mm.



Rys. 28-26. Zadanie 29



Rys. 28-27. Zadanie 31



Rys. 28-28. Zadanie 34

34. Mała kula, o masie  $m = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ g}$ , ma ładunek  $q = 2,0 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ . Wisi ona na jedwabnej nitce, która tworzy kąt  $30^\circ$  z dużą, naładowaną, nieprzewodzącą płytą, jak pokazano na rys. 28-28. Obliczyć powierzchniową gęstość ładunku  $\sigma$  płyty.

35. Wykazać, że stała równowaga przy działaniu jedynie sił elektrostatycznych jest niemożliwa. (Wskazówka: Przyjąć, że w pewnym punkcie  $P$  w polu  $E$  ładunek  $+q$  znajdowałby się w stanie równowagi trwałej, gdyby był tam umieszczony — a tak nie jest. Narysować kulistą powierzchnię Gaussa dookoła  $P$ , wyobrazić sobie, jaki kierunek muszą mieć linie sił pola  $E$  na tej powierzchni i zastosować prawo Gaussa.)

#### Paragraf 28-9

36. Złota folia użyta w doświadczeniu Rutherforda miała grubość  $3 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$ . (a) Jaka część jej powierzchni była zajęta przez jądra złota przy założeniu, że promień takiego jądra równy jest  $6,9 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ ? Przyjąć, że jedne jądra nie zasłaniają drugich. (b) Jaka część objętości folii była zajmowana przez jądra? (c) Co zapełniało resztę przestrzeni w folii?

37. Cząstka  $\alpha$  zbliżająca się do powierzchni jądra złota znajduje się w odległości równej jednemu promieniowi jądra ( $6,9 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ ) od tej powierzchni. (a) Jaka siła działa na cząstkę  $\alpha$  i (b) jakie jest jej przyspieszenie w tym punkcie? Masa cząstki  $\alpha$ , którą możemy tutaj traktować jako punkt, wynosi  $6,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ .

Odp.: (a) 190 N. (b)  $2,9 \cdot 10^{28} \text{ m/s}^2$ .

# 29. Potencjał elektryczny

## 29-1. Potencjał elektryczny

Pole elektryczne istniejące wokół naładowanego przęta można opisać nie tylko za pomocą wektora natężenia pola elektrycznego  $\mathbf{E}$ , lecz także za pomocą pewnej wielkości skalarnej, *potencjału elektrycznego*  $V$ . Wielkości te są ściśle powiązane i wybór, którą z nich użyjemy w danym problemie, jest często jedynie kwestią wygody.

Aby wyznaczyć różnicę potencjałów elektrycznych między  $A$  i  $B$ , znajdującymi się w polu elektrycznym, przesuwamy ładunek próbny  $q_0$  z  $A$  do  $B$  mierząc jednocześnie pracę  $W_{AB}$ , którą w tym celu należy wykonać. Różnica potencjałów elektrycznych\* jest określona jako

$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0}. \quad (29-1)$$

Praca  $W_{AB}$  może być: (a) dodatnia, (b) ujemna i (c) równa零. W tych przypadkach potencjał elektryczny w  $B$  będzie: (a) wyższy, (b) niższy i (c) taki sam jak w  $A$ .

W układzie jednostek SI różnica potencjałów ma wymiar dżul/kulomb [J/C] (równ. (29-1)). Wprowadzona została specjalna jednostka różnicy potencjałów, *wolt* (V) określona jako

$$1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}.$$

Zazwyczaj jako punkt  $A$  wybiera się punkt znajdujący się w dużej odległości od wszystkich ładunków (ściśle biorąc w nieskończoności) i potencjał elektryczny  $V_A$  w tym punkcie jest umownie przyjmowany za równy zero. Pozwala to nam na określenie *potencjału elektrycznego* w konkretnym punkcie. Przyjmując  $V_A = 0$  w równaniu (29-1) i usuwając wskaźniki  $A$  i  $B$  otrzymujemy

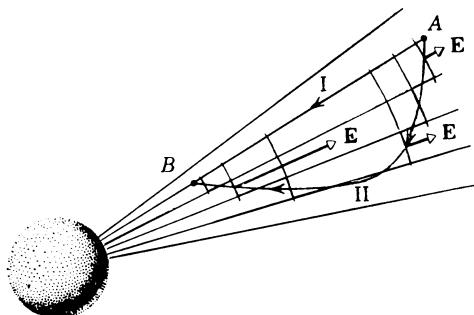
$$V = \frac{W}{q_0}, \quad (29-2)$$

\* To określenie różnicy potencjałów, chociaż słusze pojęciowo i odpowiednie dla naszych obecnych celów, jest rzadko używane w praktyce ze względu na trudności techniczne. Zazwyczaj przyjmuje się określenia równoważne, lecz pozwalające na łatwiejsze znajdowanie w praktyce omawianej wielkości.

gdzie  $W$  jest pracą, którą należy wykonać, aby przenieść ładunek próbny  $q_0$  z nieskończoności do danego punktu. Czytelnik powinien pamiętać, że podstawowym pojęciem jest *różnica potencjałów* i że równanie (29-2) jest wynikiem umownego przyjęcia wartości zero dla potencjału  $V_A$  w punkcie odniesienia (w nieskończoności); jako ten potencjał odniesienia mógłby równie dobrze być wybrana inna wielkość, powiedzmy – 100 V. Podobnie, każdy inny punkt mógłby być wybrany jako punkt odniesienia. W wielu zagadnieniach jako punkt odniesienia dla potencjału przyjmuje się Ziemię, której przypisuje się potencjał zero.

Pamiętając o założeniach dotyczących punktu odniesienia, widzimy z równania (29-2), że  $V$  w pobliżu izolowanego ładunku dodatniego jest dodatnie ze względu na konieczność wykonania dodatniej pracy w celu sprowadzenia dodatniego ładunku próbneego z nieskończoności. Podobnie potencjał w pobliżu izolowanego ładunku ujemnego jest ujemny. Potencjał elektryczny zdefiniowany równaniem (29-2) jest skalarem, gdyż  $W$  i  $q_0$ , występujące w tym równaniu, są scalarami.

Zarówno  $W_{AB}$ , jak i  $V_B - V_A$ , występujące w równ. (29-1), nie zależą od drogi, którą przebywa ładunek próbny między punktami  $A$  i  $B$ . Gdyby tak nie było, wtedy potencjał w punkcie  $B$  nie byłby jednoznacznie określony (względem punktu  $A$  jako punktu odniesienia) i pojęcie potencjału elektrycznego nie byłoby pożyteczne. Wykażemy teraz, że różnica potencjałów jest niezależna od przebytej drogi w polu wytworzonym przez ładunek punktowy na rys. 29-1. Następnie pokażemy, że ta niezależność od przebytej drogi utrzymuje się we wszystkich sytuacjach elektrostatycznych. Rysunek 29-1 przedstawia przypadek, w którym dwa punkty  $A$  i  $B$  znajdują się w polu wytworzonym przez kulisty ładunek  $q$ , w założeniu dodatni.



Rys. 29-1. Ładunek próbny  $q_0$  przesuwa się z punktu  $A$  do  $B$  w polu ładunku  $q$ . Strzałki przedstawiają wektory natężenia pola  $E$  w trzech punktach na drodze II

Wyobraźmy sobie przesunięcie dodatniego ładunku próbneego  $q_0$  przez jakiś czynnik zewnętrzny z punktu  $A$  do punktu  $B$  dwiema różnymi drogami. Droga I łączy  $A$  i  $B$  wzduż promienia. Droga II jest całkowicie dowolna.

Droga II może być przybliżona przez linię łamana, składającą się na przemian z elementów łuków i elementów promieni. Ponieważ elementy te mogą być dowolnie małe, więc linia łamana może być dowolnie bliska rzeczywistej drogi. Na drodze II czynnik zewnętrzny będzie wykonywał pracę *tylko na odcinkach radialnych*, gdyż na łukach siła  $F$  i przesunięcie  $dl$  są prostopadłe, więc  $F dl$  będzie wtedy równe零. Suma prac wykonanych na odcinkach radialnych drogi II będzie równa pracy wykonanej na drodze I. Ponieważ droga II została wybrana zupełnie dowolnie, wykazaliśmy równość prac na wszyst-

kich drogach łączących  $A$  i  $B$ . Dowód ten jest prawdziwy jedynie dla pola wytworzonego przez ładunek punktowy. Jednakże, jakiekolwiek rozmieszczenie ładunku (ciągle lub nieciągłe) można rozpatrywać jako zbiór ładunków punktowych lub naładowanych elementów różniczkowych. A więc na podstawie reguły superpozycji wnioskujemy, że niezależność potencjału elektrostatycznego od drogi utrzymuje się w każdym polu elektrostatycznym. Chociaż dowód ten został przeprowadzony tylko dla szczególnego przypadku przedstawionego na rys. 29-1, to różnica potencjałów jest niezależna od drogi dla dowolnych dwu punktów w dowolnym polu elektrycznym. Tę niezależność od drogi omawialiśmy już w paragrafie 8-2 w ogólnym przypadku sił zachowawczych; siły elektrostatyczne, podobnie jak siły grawitacyjne, są siłami zachowawczymi.

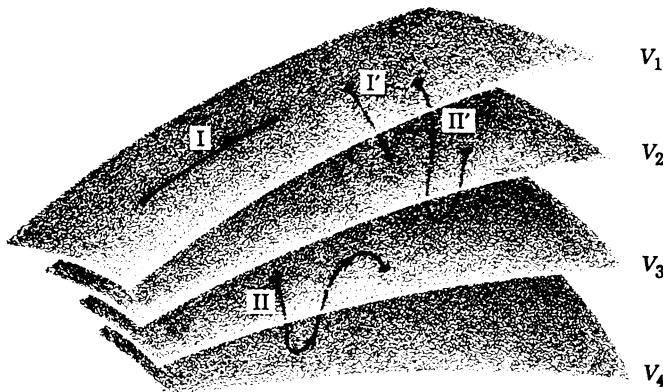
Zbiór punktów, w których potencjał elektryczny jest jednakowy, nazywamy *powierzchnią ekwipotencjalną*. Rodzina powierzchni ekwipotencjalnych, z których każda odpowiada innej wartości potencjału, może być użyta do opisu pola elektrycznego w pewnej części przestrzeni. Widzieliśmy poprzednio (paragraf 27-3), że w tym celu można używać także sił; w następnych paragrafach (patrz np. rys. 29-15) omówimy zagadnienie związku między tymi dwoma sposobami opisu pola elektrycznego.

Przy przesunięciu ładunku próbnego między dowolnymi punktami leżącymi na powierzchni ekwipotencjalnej nie jest wykonywana żadna praca. Wynika to z równania (29-1)

$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0},$$

gdyż  $W_{AB}$  musi być równe zeru, gdy  $V_A = V_B$ . Jest to słusne ze względu na niezależność różnicy potencjałów od drogi, nawet wtedy, gdy droga łącząca  $A$  i  $B$  nie leży całkowicie na powierzchni ekwipotencjalnej.

Na rysunku 29-2 pokazana jest dowolnie wybrana rodzina powierzchni ekwipotencjalnych. Praca wykonana przy przesunięciu ładunku wzduż dróg I i II jest równa zeru, gdy



Rys. 29-2. Wycinki czterech powierzchni ekwipotencjalnych. Grube linie przedstawiają cztery drogi, po których przesuwał się ładunek próbny

obie drogi zaczynają się i kończą na tej samej powierzchni ekwipotencjalnej. Praca wykonana przy przesunięciu ładunku wzduż dróg I' i II' jest różna od zera, lecz jest w obu przypadkach ta sama ze względu na identyczność potencjałów początkowych i końcowych; linie I' i II' łączą tę samą parę powierzchni ekwipotencjalnych.

Z symetrii wynika, że powierzchnie ekwipotencjalne dla ładunku kulistego są rodziną współosiowych kul. Dla pola jednorodnego są one rodziną płaszczyzn prostopadłych do wektora natężenia pola. We wszystkich przypadkach, włączając oba powyższe przykłady, powierzchnie ekwipotencjalne są prostopadłe do linii sił, a więc do E (patrz rys. 29-15). Gdyby E nie było prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnej, to istniałaby jego składowa leżąca na tej powierzchni. Wówczas trzeba by wykonywać pracę przy przesuwaniu ładunku próbnego wzdłuż tej powierzchni. Ponieważ w przypadku powierzchni ekwipotencjalnej praca nie jest wykonywana, więc E musi być prostopadłe do tej powierzchni.

Istnieje ścisła analogia między siłami elektrostatycznymi i siłami grawitacyjnymi, wskutek tego, że podstawowe prawa w obu przypadkach są prawami odwrotnych kwadratów (patrz równ. (26-3) i (16-1)):

$$F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

a także wskutek faktu, że siły są proporcjonalne do wielkości ciała próbnego (w jednym przypadku ładunku, w innym masy). Możemy więc zdefiniować *potencjał grawitacyjny*  $V_g$  (porównać z równaniem (29-2)) jako

$$V_g = \frac{W}{m},$$

gdzie  $W$  jest pracą potrzebną do tego, aby przenieść ciało próbne o masie  $m$  z nieskończoności do rozważanego punktu. Można także skonstruować grawitacyjne powierzchnie ekwipotencjalne; można wykazać, że będą one w każdym punkcie prostopadłe do wektora natężenia pola grawitacyjnego g. W przypadku jednorodnego pola grawitacyjnego, takiego jak w pobliżu Ziemi, powierzchnie te będą poziomymi płaszczyznami. Wynika to z faktu, że (a) nie trzeba wykonywać żadnej (wypadkowej) pracy dla przesunięcia masy  $m$  między dwoma punktami leżącymi na tej samej wysokości i (b) aby przesunąć masę  $m$  wzdłuż dowolnej drogi zaczynającej się na danej powierzchni poziomej i kończącej na określonej innej powierzchni poziomej, trzeba zawsze wykonać taką samą pracę. Siły grawitacyjne, podobnie jak siły kulombowskie, są zachowawcze; patrz paragraf 8-2.

## 29-2. Potencjał i pole elektryczne

Niech A i B pokazane na rys. 29-3, będą dwoma punktami znajdującymi się w jednorodnym polu elektrycznym E, wytworzonym przez układ ładunków nie zaznaczony na tym rysunku. Punkt A znajduje się w odległości  $d$  od punktu B, prosta łącząca te dwa punkty jest równoległa do E. Zakładamy, że dodatni ładunek próbny  $q_0$  jest przesuwany przez czynnik zewnętrzny wzdłuż tej prostej z A do B ruchem jednostajnym, bez przyspieszenia.

Siła elektryczna działająca na ładunek wynosi  $q_0 E$  i jest skierowana w dół. Ażeby poruszać ładunek w sposób opisany powyżej, trzeba zrównoważyć tę siłę zewnętrzną siłą F o tej samej wielkości, lecz skierowaną do góry. Praca wykonana przez czynnik dostarczający tej siły wynosi

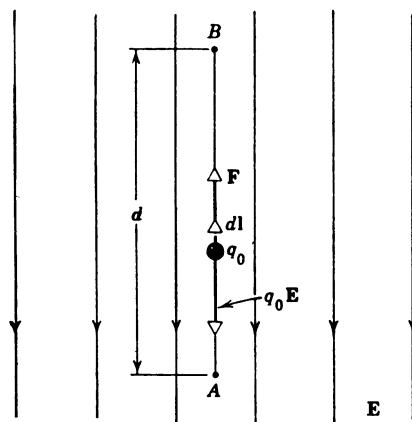
$$W_{AB} = Fd = q_0 Ed. \quad (29-3)$$

Wstawiając to do równania (29-1) otrzymujemy

$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0} = Ed. \quad (29-4)$$

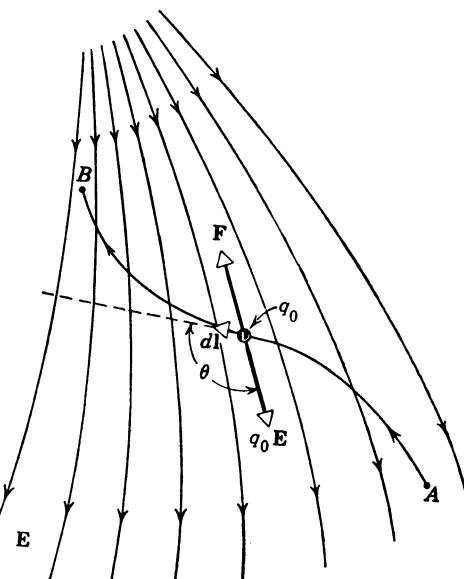
Równanie to daje związek między różnicą potencjałów i natężeniem pola dla omówionego prostego, szczególnego przypadku. Zauważmy, że z tego równania wynika nowa jednostka

Rys. 29-3. Ładunek próbny przesuwa się od punktu  $A$  do  $B$  w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu  $E$  pod wpływem zewnętrznej siły  $F$



pola elektrycznego  $E$  w układzie SI — V/m. Czytelnik może sprawdzić, że jednostka V/m jest identyczna z N/C; ta ostatnia jednostka była podana w paragrafie 27-2.

Na rysunku 29-3 punkt  $B$  ma wyższy potencjał niż  $A$ . Jest to zrozumiałe, gdyż czynnik zewnętrzny musi wykonać dodatnią pracę, aby przesunąć dodatni ładunek próbny z punktu  $A$  do  $B$ . Rysunek 29-3 może służyć w niezmienionej formie jako ilustracja podnoszenia kamienia z punktu  $A$  do  $B$  w jednorodnym polu grawitacyjnym w pobliżu powierzchni Ziemi.



Rys. 29-4. Dodatni ładunek próbny  $q_0$  porusza się od punktu  $A$  do  $B$  w niejednorodnym polu elektrycznym pod wpływem zewnętrznej siły  $F$

Jaki jest związek między  $V$  i  $E$  w ogólniejszym przypadku, gdy pole jest niejednorodne i gdy ciało próbne porusza się po zakrzywionej drodze (rys. 29-4)? Pole elektryczne działa na ładunek próbny siłą  $q_0 E$ . Aby ładunek nie doznawał przyspieszenia, czynnik zewnętrzny musi w każdym punkcie działać na niego siłą  $F$  dokładnie równą  $-q_0 E$ .

Jeżeli czynnik zewnętrzny przesunie ciało próbne o odcinek  $dl$  wzdłuż drogi  $AB$ , to

praca wykonana przez ten czynnik wyniesie  $Fdl$ . Ażeby znaleźć całkowitą pracę  $W_{AB}$  wykonaną przez czynnik zewnętrzny przy przesunięciu ładunku próbnego z  $A$  do  $B$ , dodajemy, tj. całkujemy wkłady prac od wszystkich nieskończoność małych odcinków, na które podzielona jest droga. Prowadzi to do

$$W_{AB} = \int_A^B Fdl = -q_0 \int_A^B Edl.$$

Taka całka nazywa się *całką liniową*. Zauważmy, że w miejsce  $F$  podstawiliśmy  $-q_0 E$ .

Wstawiając otrzymane wyrażenie na  $W_{AB}$  do równania (29-1) otrzymujemy

$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0} = - \int_A^B Edl. \quad (29-5)$$

Jeżeli za punkt  $A$  przyjmujemy punkt leżący w nieskończoności i założymy, że potencjał  $V_A$  jest równy零, to równanie to daje potencjał  $V$  w punkcie  $B$ :

$$V = - \int_{\infty}^B Edl. \quad (29-6)$$

Te dwa równania pozwalają nam obliczyć różnicę potencjałów między dwoma dowolnymi punktami lub potencjał w dowolnym punkcie, gdy znamy  $E$  w różnych punktach pola.

**Przykład 1.** Stosując równanie (29-5) obliczyć  $V_B - V_A$  z rys. 29-3. Porównać otrzymany wynik z równaniem (29-4).

Przy przesuwaniu ładunku próbnego element drogi  $dl$  jest zawsze skierowany w kierunku ruchu, na rys. 29-3 do góry. Wektor natężenia pola elektrycznego  $E$  skierowany jest w dół, tak więc kąt  $\theta$  między  $E$  i  $dl$  wynosi  $180^\circ$ .

Z równania (29-5) otrzymujemy

$$V_B - V_A = - \int_A^B Edl = - \int_A^B E \cos 180^\circ dl = \int_A^B Edl.$$

Ponieważ w tym przykładzie  $E$  jest stałe dla wszystkich punktów drogi, więc można je wynieść przed znak całkowania

$$V_B - V_A = E \int_A^B dl = Ed.$$

Otrzymaliśmy wynik całkowicie zgodny z równaniem (29-4).

**Przykład 2.** Niech ładunek próbny  $q_0$  porusza się ruchem jednostajnym z punktu  $A$  do punktu  $B$  wzduż drogi pokazanej na rys. 29-5. Obliczyć różnicę potencjałów między punktami  $A$  i  $B$ .

Dla drogi  $AC$  mamy  $\theta = 135^\circ$ , więc z równania (29-5)

$$V_C - V_A = - \int_A^C Edl = - \int_A^C E \cos 135^\circ dl = \frac{E}{\sqrt{2}} \int_A^C dl.$$

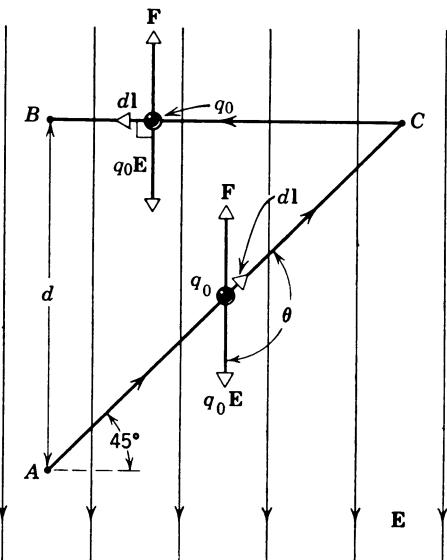
Wartość całki przedstawia długość odcinka  $AC$ , tzn.  $\sqrt{2}d$ . A więc

$$V_C - V_A = \frac{E}{\sqrt{2}} \sqrt{2}d = Ed.$$

Punkty  $B$  i  $C$  mają ten sam potencjał, gdyż przy przesunięciu ładunku między nimi nie wykonuje się pracy ( $E$  i  $dl$  są do siebie prostopadłe we wszystkich punktach odcinka  $CB$ ). Innymi słowy,  $B$  i  $C$  leżą na tej samej powierzchni ekwipotencjalnej. A więc

$$V_B - V_A = V_C - V_A = Ed.$$

Taką samą wartość otrzymujemy dla prostej łączącej  $A$  i  $B$ . Należało się tego spodziewać, gdyż różnica potencjałów między dwoma punktami nie zależy od drogi.



Rys. 29-5. Przykład 2. Ładunek próbny  $q_0$  przesuwa się wzdłuż drogi  $ACB$  w jednorodnym polu elektrycznym pod wpływem siły zewnętrznej

### 29-3. Potencjal pochodzący od ładunku punktowego

Na rysunku 29-6 pokazane są dwa punkty  $A$  i  $B$ , leżące blisko odosobnionego, dodatniego ładunku punktowego  $q$ . Dla uproszczenia zakładamy, że  $A$ ,  $B$  i  $q$  leżą na jednej prostej. Obliczmy różnicę potencjałów między punktami  $A$  i  $B$  przyjmując, że ładunek próbny  $q_0$  przesuwany jest ruchem jednostajnym wzdłuż linii radialnej z punktu  $A$  do punktu  $B$ .

Na rysunku 29-6 wektor  $E$  skierowany jest w prawą stronę, dl zaś, mający zawsze kierunek ruchu, skierowany jest w lewą stronę. Dlatego w równaniu (29-5) wielkość podcałkowa wynosi

$$Edl = Ec \cos 180^\circ dl = -Edl.$$

Jednakże poruszając się w lewą stronę o  $dl$ , poruszamy się w stronę malejących  $r$ , gdyż  $r$  mierzone jest od  $q$  jako początku. A więc

$$dl = -dr,$$

skąd

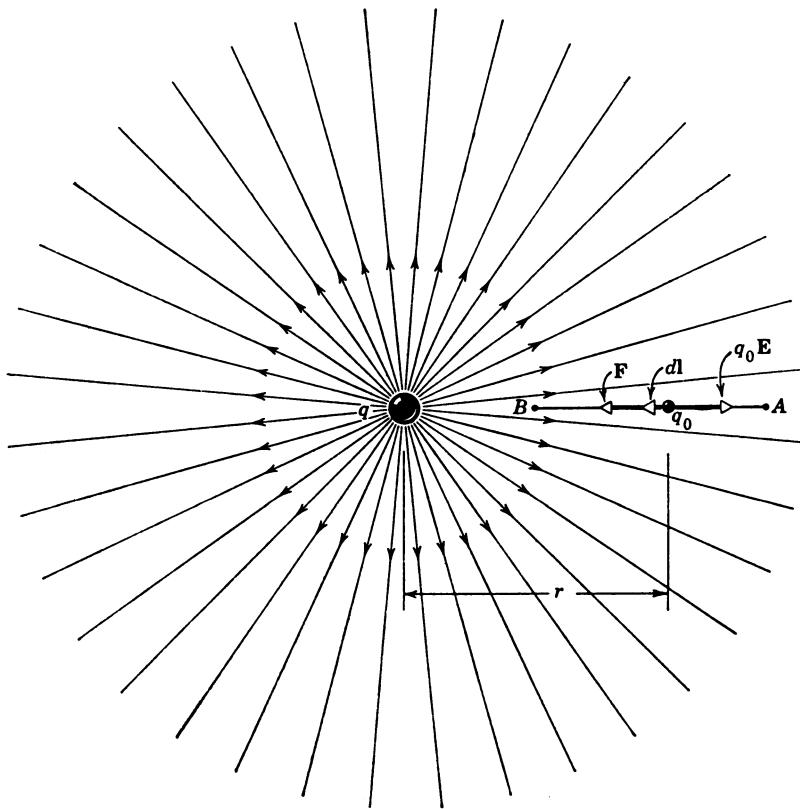
$$Edl = E dr.$$

Wstawiając to do równania (29-5) otrzymujemy

$$V_B - V_A = - \int_A^B Edl = - \int_{r_A}^{r_B} E dr.$$

Stosując równanie (27-4)

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$



Rys. 29-6. Ładunek próbny  $q_0$  porusza się pod wpływem siły zewnętrznej od punktu  $A$  do punktu  $B$  w polu elektrycznym wytworzonym przez dodatni ładunek  $q$

otrzymujemy

$$V_B - V_A = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right). \quad (29-7)$$

Przyjmując, że punkt odniesienia  $A$  znajduje się w nieskończoności (tj. że  $r_A \rightarrow \infty$ ), podstawiając  $V_A = 0$  i opuszczając wskaźnik  $B$  otrzymujemy

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (29-8)$$

Z równania tego wynika, że w przypadku odosobnionego ładunku punktowego powierzchnie ekwipotencjalne są kulami koncentrycznymi, w których środku leży ten ładunek (patrz rys. 29-15a). Analiza wyprowadzenia równania wskazuje, że zależność ta jest także słuszna w przypadku punktów leżących na zewnątrz kulisto-symetrycznego rozkładu ładunków.

**Przykład 3.** Jaka musi być wielkość odosobnionego ładunku punktowego, aby w odległości 10 cm od niego potencjał wynosił +100 V?

Rozwiązujejąc równanie (29-8) względem  $q$  otrzymujemy

$$q = V 4\pi\epsilon_0 r = 100 \text{ V} \cdot 4\pi \cdot (8,9 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)) \cdot 0,10 \text{ m} = 1,1 \cdot 10^{-9} \text{ C}.$$

Ładunek ten jest tego rzędu, co ładunki wytwarzane przez tarcie.

**Przykład 4.** Jaki jest potencjał elektryczny na powierzchni jądra złota? Promień jądra wynosi  $6,6 \cdot 10^{-15}$  m, a liczba atomowa  $Z = 79$ .

Przymajemy, że jądro jest kulisto-symetryczne i dla punktów zewnętrznych zachowuje się jak ładunek punktowy. Używając równania (29-8) i przyjmując, że ładunek protonu wynosi  $1,6 \cdot 10^{-19}$  C otrzymujemy

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = \frac{(9,0 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \cdot 79 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{6,6 \cdot 10^{-15} \text{ m}} = 1,7 \cdot 10^7 \text{ V.}$$

## 29-4. Układ ładunków punktowych

Potencjał układu ładunków punktowych w dowolnym punkcie można znaleźć (a) obliczając potencjały  $V_n$  poszczególnych ładunków przy zaniedbaniu obecności pozostałych i (b) dodając tak otrzymane wielkości. Korzystając z równania (29-8) mamy

$$V = \sum_n V_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_n \frac{q_n}{r_n}, \quad (29-9)$$

gdzie  $q_n$  jest wielkością  $n$ -tego ładunku, a  $r_n$  jego odległością od rozważanego punktu. Badana suma jest sumą algebraiczną, a nie wektorową, jakiej używa się przy obliczaniu  $\mathbf{E}$  dla układu ładunków punktowych (patrz równ. (27-5)). Na tym polega wyższość potencjału nad natężeniem pola elektrycznego przy przeprowadzaniu konkretnych obliczeń.

Jeżeli rozkład ładunków jest rozkładem ciągłym, to sumowanie w równaniu (29-9) musi być zastąpione całkowaniem

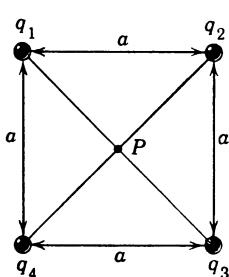
$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}, \quad (29-10)$$

gdzie  $dq$  jest elementem różniczkowym rozkładu ładunku,  $r$  jest jego odległością od punktu, w którym obliczamy  $V$ , a  $dV$  jest potencjałem wytwarzanym przez  $dq$  w tym punkcie.

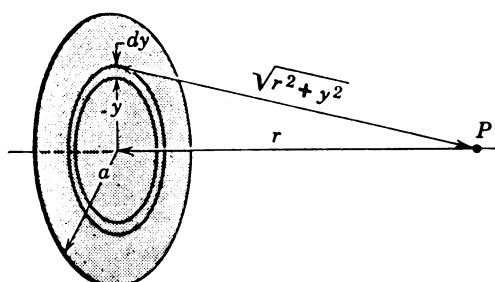
**Przykład 5.** Ile wynosi potencjał w środku kwadratu pokazanego na rys. 29-7? Przyjąć, że  $q_1 = +1,0 \cdot 10^{-8}$  C,  $q_2 = -2,0 \cdot 10^{-8}$  C,  $q_3 = +3,0 \cdot 10^{-8}$  C,  $q_4 = +2,0 \cdot 10^{-8}$  C i  $a = 1,0$  m.

Odległość  $r$  każdego z ładunków od punktu  $P$  wynosi  $a/\sqrt{2}$ , tzn. 0,71 m. Z równania (29-9) otrzymujemy

$$\begin{aligned} V &= \sum_n V_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2 + q_3 + q_4}{r} = \\ &= \frac{(9,0 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \cdot (1,0 - 2,0 + 3,0 + 2,0) \cdot 10^{-8} \text{ C}}{0,71 \text{ m}} = 500 \text{ V}. \end{aligned}$$



Rys. 29-7. Przykład 5



Rys. 29-8. Przykład 6. Punkt  $P$  na osi równomiernie naładowanej tarczy o promieniu  $a$

Czy potencjał jest stały wewnątrz kwadratu? Czy jakiś punkt wewnętrzny ma potencjał ujemny? Naszkicować przecięcie płaszczyzny przedstawionej na rys. 29-7 z powierzchnią ekwipotencjalną odpowiadającą potencjałowi 0 V.

**Przykład 6. Naładowana tarcza.** Znaleźć potencjał elektryczny dla punktów znajdujących się na osi równomiernie naładowanej tarczy o gęstości powierzchniowej ładunku  $\sigma$  (patrz rys. 29-8).

Rozważmy element ładunku  $dq$  będący płaskim pierścieniem o promieniu  $y$  i szerokości  $dy$ . Mamy

$$dq = \sigma 2\pi y dy,$$

gdzie  $2\pi y dy$  jest powierzchnią pierścienia. Wszystkie części tego elementu ładunku są jednakowo odległe o  $r' (= \sqrt{y^2 + r^2})$  od punktu  $P$  i ich wkład  $dV$  do potencjału elektrycznego w tym punkcie jest dany równaniem (29-8), tzn.

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 2\pi y dy}{\sqrt{y^2 + r^2}}.$$

Potencjał  $V$  znajdujemy całkując po wszystkich pierścieniach, na jakie tarcza może być podzielona (równ. (29-10)),

$$V = \int dV = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^a (y^2 + r^2)^{-1/2} y dy = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{a^2 + r^2} - r).$$

Wynik ten jest słuszny dla wszystkich wartości  $r$ . W przypadku specjalnym, gdy  $r \gg a$ , wielkość  $\sqrt{a^2 + r^2}$  można aproksymować przez

$$\sqrt{a^2 + r^2} = r \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right)^{1/2} = r \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{r^2} + \dots \right) \cong r + \frac{a^2}{2r},$$

gdzie wielkość w nawiasie występująca w drugim członie tego równania została rozwinięta w szereg potęgowy (patrz dodatek I). Otrzymujemy wtedy na  $V$  wyrażenie

$$V \cong \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( r + \frac{a^2}{2r} - r \right) = \frac{\sigma\pi a^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r},$$

gdzie  $q (= \sigma\pi a^2)$  jest całkowitym ładunkiem tarczy. Ten graniczny wynik jest zgodny z oczekiwaniem, gdyż dla  $r \gg a$  tarcza zachowuje się jak ładunek punktowy.

## 29-5. Potencjał dipola

Dwa jednakowe ładunki o przeciwnych znakach  $\pm q$ , umieszczone w odległości  $2a$  tworzą *dipol elektryczny* (patrz przykład 3, rozdział 27). Moment elektryczny  $\mathbf{p}$  takiego dipola ma wartość  $2aq$  i skierowany jest od ładunku ujemnego do ładunku dodatniego. Wyprowadzimy wyrażenie na potencjał elektryczny  $V$  dla punktów przestrzeni dostatecznie oddalonych od dipola ( $r \gg a$ ).

Rozpatrzmy punkt  $P$ , rys. 29-9, określony przez podanie wielkości  $r$  i  $\theta$ . Jest rzeczą oczywistą, że względu na symetrię zagadnienia, że potencjał nie będzie się zmieniał, jeżeli punkt  $P$  będzie się obracał wokół osi  $z$  przy ustalonych  $r$  i  $\theta$ . Musimy więc znaleźć  $V(r, \theta)$  dla dowolnej płaszczyzny zawierającej oś  $z$ ; płaszczyzna rys. 29-9 jest właśnie taką płaszczyzną. Stosując równanie (29-9) otrzymujemy

$$V = \sum_n V_n = V_1 + V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$

Jest to ścisłe wyrażenie na potencjał dipola.

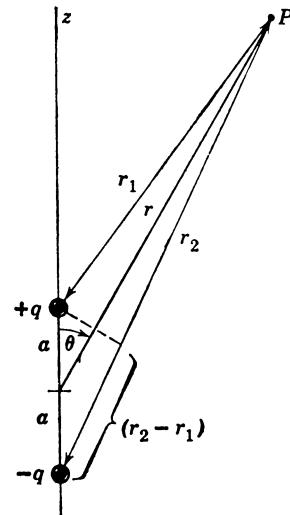
Rozważmy teraz tylko te punkty, dla których  $r \gg 2a$ . Z rysunku 29-9 otrzymujemy

$$r_2 - r_1 \cong 2a \cos \theta, \quad r_1 r_2 \cong r^2$$

i wyrażenie na potencjał przyjmuje postać

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}, \quad (29-11)$$

gdzie  $p (= 2aq)$  jest momentem dipolowym. Zauważmy, że  $V$  zniknie na całej płaszczyźnie równikowej ( $\theta = 90^\circ$ ). Jest to odbiciem faktu, że przy przesuwaniu ładunku próbnego



Rys. 29-9. Punkt  $P$  w polu elektrycznym dipola

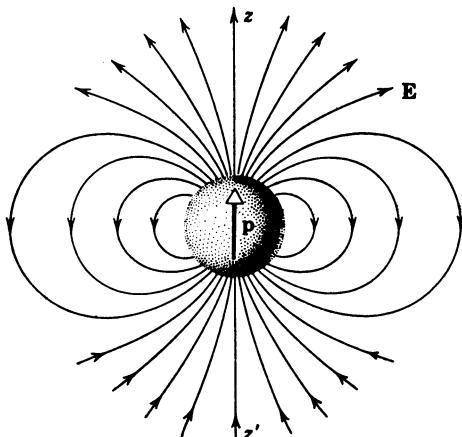
z nieskończoności wzdłuż symetrycznej dipola nie wykonuje się żadnej pracy. Dla danego promienia  $r$  potencjał  $V$  przyjmuje największą wartość dodatnią, gdy  $\theta = 0^\circ$  i największą wartość ujemną, gdy  $\theta = 180^\circ$ . Zauważmy, że potencjał nie zależy oddzielnie od  $q$  i  $2a$ , lecz tylko od ich iloczynu  $p$ .

Wygodnie jest nazywać *dipolem elektrycznym* każdy układ ładunków, dla którego  $V$  w odległych punktach dane jest równaniem (29-11). Wykażaliśmy, że dwa punktowe ładunki leżące blisko siebie zachowują się w ten sposób. Jednakże dla innych układów ładunków równanie (29-11) też może być spełnione. Założymy, że wykonując pomiary w punktach na zewnątrz kulistego obszaru przedstawionego na rys. 29-10 znajdziemy zespół linii sił, który może być opisany ilościowo za pomocą równania (29-11). Powiemy wówczas, że wewnątrz tego obszaru znajduje się *dipol elektryczny*, którego osią jest linia  $zz'$  i którego moment dipolowy  $p$  skierowany jest do góry.

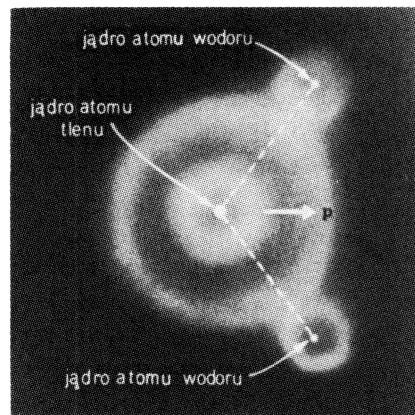
Wiele cząsteczek ma elektryczny moment dipolowy. Dla cząsteczki  $H_2O$  w stanie pary wynosi on  $6,1 \cdot 10^{-30}$  C · m. Na rysunku 29-11, gdzie przedstawiona jest ta cząsteczka, pokazane są trzy jądra i otaczająca je chmura elektronów. Moment dipolowy  $p$  przedstawiony jest przez strzałkę leżącą na osi symetrii cząsteczki. W tej cząsteczce efektywny środek ładunku dodatniego jest przesunięty względem efektywnego środka ładunku ujemnego. I właśnie dzięki temu przesunięciu istnieje moment dipolowy.

Atomy oraz wiele cząsteczek nie mają trwałych momentów dipolowych. Jednakże momenty dipolowe mogą być indukowane przez umieszczenie atomu lub cząsteczki w zewnętrznym polu elektrycznym. Działanie pola (rys. 29-12) rozdziela środki dodatniego i ujemnego ładunku. Mówimy, że atomy *polaryzują się* i wykazują *indukowany elektryczny moment dipolowy*. Indukowane momenty dipolowe znikają, gdy usuniemy zewnętrzne pole elektryczne.

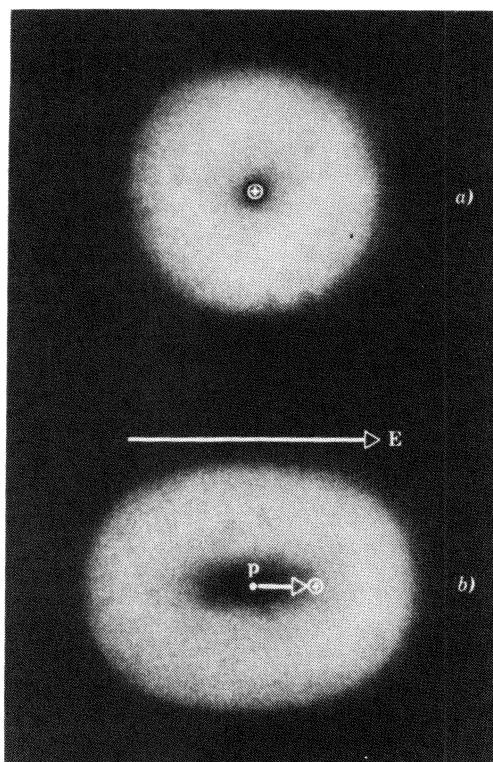
Dipole elektryczne odgrywają ważną rolę także w innych przypadkach. Anteny radiowe i radarowe mają często kształt drutu lub pręta metalowego, w którym elektrony oscylują periodycznie. W pewnej



Rys. 29-10. Jeżeli obiekt znajdujący się wewnątrz kuli wywarza pole elektryczne, takie jak na rysunku (opisane ilościowo równ. (29-11)), to jest to dipol elektryczny



Rys. 29-11. Schematyczne przedstawienie cząsteczki wody. Trzy jądra, trzy chmury elektronowe i kierunek momentu dipolowego



Rys. 29-12. (a) Atom składający się z jądra i chmury elektronowej. Środek ujemnego ładunku pokrywa się ze środkiem ładunku dodatniego, tj. jądra atomowego. (b) Jeżeli przyłożymy pole zewnętrznne  $E$ , to chmura elektronowa zostaje zniekształcona w taki sposób, że jej środek zostaje przesunięty względem jądra. Otrzymujemy zatem dipol elektryczny. Zniekształcenie jest znacznie przesadzone

chwili jeden koniec pręta będzie naładowany ujemnie, drugi zaś dodatnio. O pół okresu później polarność końców zmieni się na przeciwną. Będzie to *oscylujący dipol elektryczny*. Został on nazwany w ten sposób, gdyż jego moment dipolowy zmienia się okresowo w czasie.

**Przykład 7. Kwadrupol elektryczny.** Kwadrupol elektryczny, którego przykład pokazany jest na rys. 27-26, składa się z dwóch dipoli elektrycznych tak umieszczonych, że neutralizują one prawie całkowicie, ale

niezupełnie wzajemne efekty elektryczne w oddalonych punktach. Obliczyć  $V(r)$  dla punktów znajdujących się na osi kwadrupola.

Korzystając z równania (29-9) otrzymamy

$$V = \sum_n V_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r-a} - \frac{2q}{r} + \frac{q}{r+a} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a^2}{(r-a)r(r+a)}.$$

Zakładając, że  $r \gg a$ , możemy przyjąć, że w mianowniku  $a = 0$ . Otrzymujemy wówczas

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3},$$

gdzie  $Q (= 2qa^2)$  jest *elektrycznym momentem kwadrupolowym* układu ładunków przedstawionego na rys. 27-26. Zauważmy, że  $V$  zmienia się (a) jak  $1/r$  dla ładunku punktowego, (b) jak  $1/r^2$  dla dipola i (c) jak  $1/r^3$  dla kwadrupola.

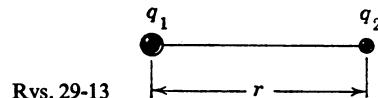
Zauważmy także, że (a) dipol tworzą dwa równe ładunki o przeciwnych znakach nieco rozsunięte, tak że ich oddziaływanie elektryczne w oddalonych punktach nie znosi się całkowicie i że (b) kwadrupol tworzą dwa dipole o równych co do wielkości, lecz przeciwnie skierowanych momentach dipolowych, nieco rozsunięte, tak że ich oddziaływanie elektryczne w oddalonych punktach nie znosi się całkowicie. Można rozwiniąć ten model definiując rozkłady ładunku wyższych rzędów, jak np. *oktupole*.

Potencjał w punktach, których odległości od dowolnego rozkładu ładunków, ciągłego lub nieciągłego, są duże w porównaniu z rozmiarami tego rozkładu, może być zapisany jako suma potencjałów (a) pojedynczego ładunku, zwanego czasami *monopolem*, (b) dipola, (c) kwadrupola itd. Proces ten nazywany jest *rozwinięciem na multipole* i jest bardzo użyteczny w wielu obliczeniach.

## 29-6. Potencjalna energia elektryczna\*

Podnosząc z powierzchni Ziemi kamień wykonujemy pracę przeciwko przyciąganiu grawitacyjnemu Ziemi. Praca ta zostaje zmagażynowana w postaci *energii potencjalnej* układu Ziemia+kamień. Gdy puścimy kamień, energia potencjalna w trakcie jego spadania zmienia się stale w energię kinetyczną. Po upadku ciała na Ziemię energia kinetyczna, której wielkość tuż przed zderzeniem z Ziemią równa jest pierwotnie zgromadzonej energii potencjalnej, zamienia się na energię cieplną układu Ziemia+kamień.

Podobną sytuację występuje w elektrostatyce. Rozważmy dwa ładunki  $q_1$  i  $q_2$ , znajdujące się we wzajemnej odległości  $r$ , jak na rys. 29-13. Chcąc zwiększyć odległość pomiędzy



Rys. 29-13

nimi musimy wykonać z zewnątrz pracę dodatnią, jeśli ładunki są różnoimienne i ujemną w przeciwnym przypadku. Możemy uważać, że praca ta zostaje zmagażynowana w układzie  $q_1+q_2$  w postaci *potencjalnej energii elektrycznej*. Ta energia, podobnie jak każda inna energia potencjalna, może przekształcać się w inną postacie. Jeżeli na przykład  $q_1$  i  $q_2$  są ładunkami o przeciwnych znakach i jeżeli w pewnym momencie pozwolimy im swobodnie się poruszać, to zaczną się zbliżać do siebie, zamieniając zmagażynowaną energię po-

\* W mechanice pojęcie *energii potencjalnej* (ściślejstępnej sprężyny, ciała w polu grawitacyjnym Ziemi itd.) jest być może częściej używane od pojęcia *potencjału* (np. grawitacyjnego). W elektryczności i magnetyzmie natomiast potencjał jest częściej używanym pojęciem niż *energia potencjalna*. Różnicę stanowi fakt, iż potencjał jest to energia potencjalna na jednostkę ładunku. Jeżeli potencjał dany jest w voltach, a energia potencjalna w dżulach, to volt ma wymiar dżul na kulomb.

tencjalną na energię kinetyczną poruszających się mas. Analogia z układem Ziemia + kamień jest tu oczywista, z wyjątkiem faktu, że siły elektryczne mogą być zarówno przyciągające, jak i odpychające, podczas gdy siły grawitacyjne są zawsze przyciągające.

Potencjalną energię elektryczną układu ładunków punktowych definiujemy jako pracę potrzebną do utworzenia tego układu z ładunków znajdujących się w nieskończoności dużej odległości. Zakładamy przy tym, że wszystkie ładunki w nieskończoności znajdują się w stanie spoczynku, czyli nie mają żadnej początkowej energii kinetycznej.

Przypuśćmy, że usuwamy ładunek  $q_2$  przedstawiony na rys. 29-13 do nieskończoności, w stan spoczynku. *Potencjal elektryczny* wytworzony przez ładunek  $q_1$  w punkcie, w którym znajdował się ładunek  $q_2$ , dany jest równaniem (29-8),

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r}.$$

Do przeniesienia  $q_2$  z nieskończoności do pierwotnego położenia w odległości  $r$  potrzebna jest, z definicji potencjału elektrycznego (równ. (29-2)), praca równa

$$W = Vq_2. \quad (29-12)$$

Łącząc te dwa równania i pamiętając, że praca  $W$  jest równa *potencjalnej energii elektrycznej*  $U$  układu  $q_1 + q_2$ , otrzymujemy

$$U (= W) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}. \quad (29-13)$$

Wskaźniki przy  $r$  oznaczają, że jest to odległość pomiędzy ładunkami punktowymi  $q_1$  i  $q_2$ .

W przypadku układu zawierającego więcej niż dwa ładunki liczymy energię potencjalną dla każdej pary ładunków oddziennie, a następnie dodajemy algebraicznie otrzymane wyniki. To postępowanie opiera się na następującym fizycznym modelu: (a) umieszczamy ładunek  $q_1$  w określonym położeniu, (b) przenosimy ładunek  $q_2$  z nieskończoności do położenia obok  $q_1$ , (c) przenosimy ładunek  $q_3$  z nieskończoności do położenia obok  $q_1$  i  $q_2$  itd.

Energię potencjalną ciągłego rozkładu ładunków, np. elipsoidy ładunku, znajdujemy dzieląc ładunek na różniczkowe elementy  $dq$  i traktując każdy taki element jako ładunek punktowy. Następnie stosujemy procedurę opisaną poprzednio zastępując dodawanie całkowaniem. Takich problemów nie rozważaliśmy w tym rozdziale.

**Przykład 8.** Dwa protony w jądrze  $^{238}\text{U}$  dzieli odległość  $6,0 \cdot 10^{-15}$  m. Jaka jest ich wzajemna potencjalna energia elektryczna?

Z równania (29-13)

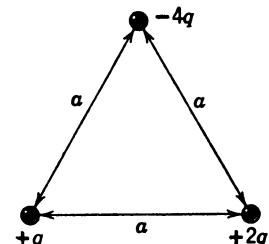
$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} = \frac{(9,0 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{6,0 \cdot 10^{-15} \text{ m}} = 3,8 \cdot 10^{-14} \text{ J} = 2,4 \cdot 10^5 \text{ eV}.$$

**Przykład 9.** Trzy ładunki tworzą układ przedstawiony na rysunku 29-14. Jaka jest ich wzajemna potencjalna energia elektryczna? Założyć, że  $q = 1,0 \cdot 10^{-7}$  C i  $a = 10$  cm.

Energia całkowita układu jest sumą energii każdej pary cząstek. Z równania (29-13)

$$\begin{aligned} U &= U_{12} + U_{13} + U_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{(+q)(-4q)}{a} + \frac{(+q)(+2q)}{a} + \frac{(-4q)(+2q)}{a} \right] = \\ &= -\frac{10}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a} = \frac{(9,0 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \cdot 10(1,0 \cdot 10^{-7} \text{ C})^2}{0,10 \text{ m}} = -9,0 \cdot 10^{-3} \text{ J}. \end{aligned}$$

Fakt, że całkowita energia potencjalna jest ujemna, oznacza, że konstruując ten układ z trzech oddzielnych ładunków znajdujących się w nieskończoności w stanie spoczynku musielibyśmy wykonać pracę ujemną. Mówiąc inaczej, należałoby wykonać pracę  $9,0 \cdot 10^{-3}$  J, ażeby zlikwidować ten układ usuwając każdy ładunek oddzielnie do nieskończoności.



Rys. 29-14. Przykład 9. Trzy ładunki sztywno „zamocowane” przy pomocy sił zewnętrznych

Gdy, co jest zwykle praktykowane, przyjmiemy, że w nieskończoności potencjał elektryczny jest równy零, dodatnia energia potencjalna w tak prostych jak to zadaniach (przykład 8) odpowiada odpowiadającym siłom elektrycznym, a ujemna energia potencjalna (jak w tym przykładzie) — siłom przyciągającym. Gdyby protony w przykładzie 8 nie były utrzymywane w swych położeniach przez przyciągające (nieelektryczne) siły jądrowe, odsunęłyby się jeden od drugiego. Podobnie w powyższym przykładzie, gdyby trzy cząstki uwolniły się ze swych ustalonych położień, w których są utrzymywane przez siły zewnętrzne, to zaczęłyby się zbliżać do siebie.

## 29-7. Obliczanie natężenia pola elektrycznego $\mathbf{E}$ na podstawie potencjału elektrycznego $V$

Stwierdziliśmy, że  $V$  i  $\mathbf{E}$  są równoważne przy opisie pól elektrycznych i wiemy (równ. (29-6)), jak obliczyć  $V$  znając  $\mathbf{E}$ . Zastanówmy się teraz, jak obliczyć  $\mathbf{E}$ , jeżeli znamy  $V$  w pewnym obszarze.

Problem ten został już rozwiązyany graficznie. Znając  $\mathbf{E}$  w każdym punkcie przestrzeni możemy wykreślić linie sił; wówczas możemy również naszkicować powierzchnie ekwipotencjalne, rysując powierzchnie prostopadłe do linii sił. Opisują one zachowanie się  $V$ . Odwrotnie, jeżeli dany jest potencjał  $V$  jako funkcja położenia, to możemy narysować zbiór powierzchni ekwipotencjalnych. Wówczas rysując linie prostopadłe do tych powierzchni znajdujemy linie sił, które opisują zachowanie się  $\mathbf{E}$ . Podamy tu matematyczny odpowiednik tego drugiego procesu graficznego. Na rysunku 29-15 przedstawiliśmy trzy przykłady linii sił i odpowiadających im powierzchni ekwipotencjalnych.

Na rysunku 29-16 pokazane jest przecięcie rodziny powierzchni ekwipotencjalnych z płaszczyzną tego rysunku. Widzimy, że  $\mathbf{E}$  w dowolnym punkcie  $P$  jest prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnej przechodzącej przez  $P$ , jak powinno być.

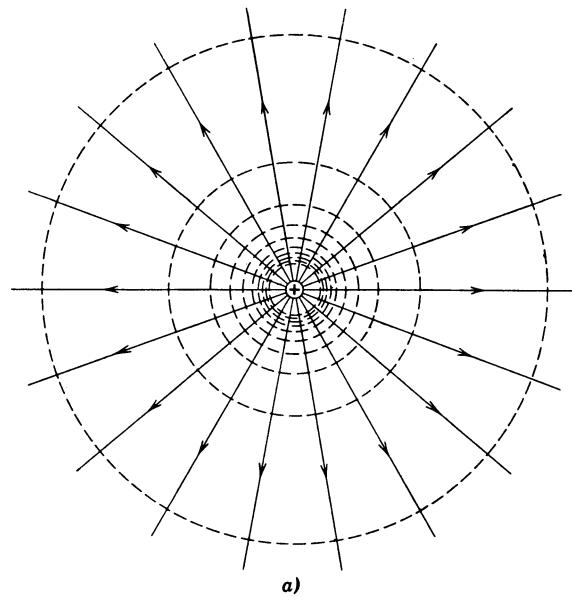
Przesuńmy ładunek próbny  $q_0$  z punktu  $P$  wzduż drogi oznaczonej  $\Delta l$  do powierzchni ekwipotencjalnej oznaczonej  $V + \Delta V$ . Praca wykonana przez zewnętrzną siłę  $\mathbf{F}$  jest równa  $q_0 \Delta V$  (patrz równ. (29-1)).

Z drugiej strony pracę tę możemy obliczyć ze wzoru\*

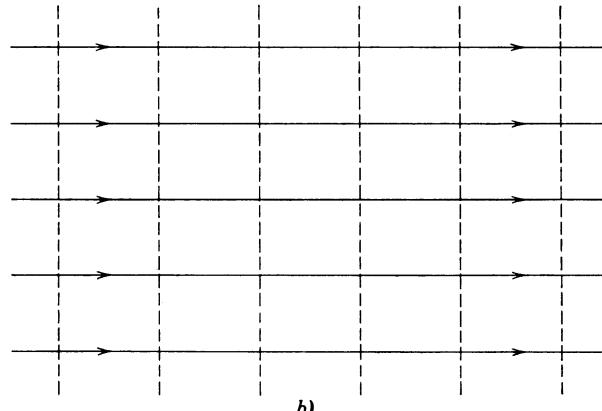
$$\Delta W = \mathbf{F} \Delta \mathbf{l},$$

gdzie  $\mathbf{F}$  jest siłą, która musi działać na ładunek, ażeby przezwyciężyć siłę elektryczną  $q_0 \mathbf{E}$ .

\* Zakładamy, że powierzchnie ekwipotencjalne leżą tak blisko siebie, że siła  $\mathbf{F}$  jest stała na drodze  $\Delta l$ . W granicznym przypadku różniczki drogi fakt ten jest oczywisty.



a)



b)

Ponieważ  $\mathbf{F}$  i  $q_0\mathbf{E}$  mają przeciwnie znaki i równe wartości, więc

$$\Delta W = -q_0\mathbf{E}\Delta\mathbf{l} = -q_0\mathbf{E}\cos(\pi - \theta)\Delta l = q_0\mathbf{E}\cos\theta\Delta l.$$

Te dwa wyrażenia na pracę muszą być równe, co daje

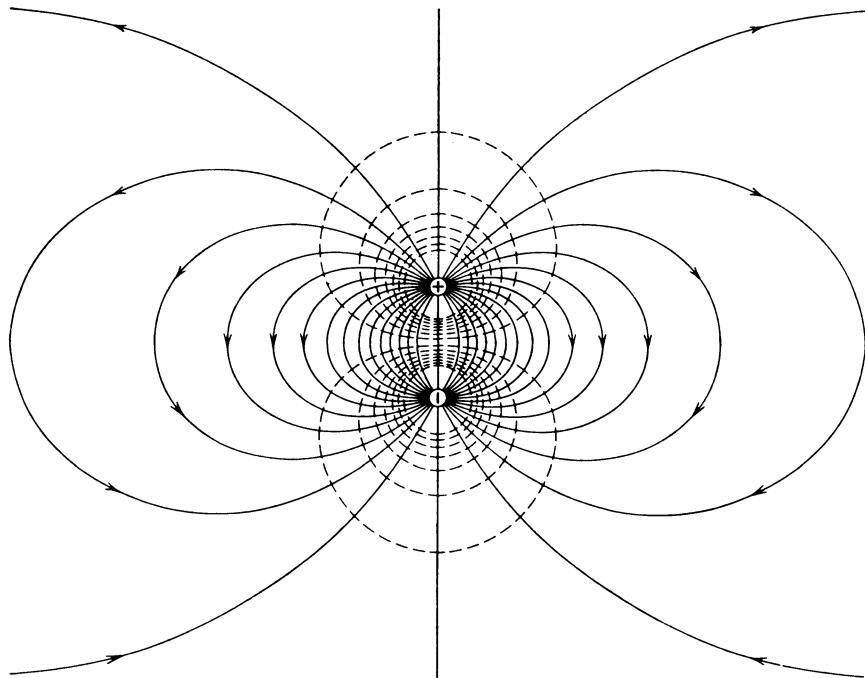
$$q_0\Delta V = q_0\mathbf{E}\cos\theta\Delta l,$$

czyli

$$\mathbf{E}\cos\theta = \frac{\Delta V}{\Delta l}. \quad (29-14)$$

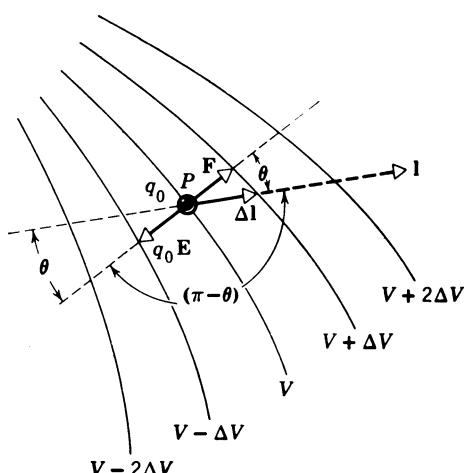
$\mathbf{E}\cos\theta$  jest składową  $\mathbf{E}$  w kierunku  $-\mathbf{l}$  na rysunku 29-16, wielkość  $-\mathbf{E}\cos\theta$ , którą oznaczmy  $E_l$ , będzie więc składową  $\mathbf{E}$  w kierunku  $+\mathbf{l}$ . W granicy równanie (29-14) można zapisać jako

$$E_l = -\frac{dV}{dl}. \quad (29-15)$$



c)

Rys. 29-15. Powierzchnie ekwipotencjalne (linie przerwane) i linie sił (linie ciągłe): (a) ładunku punktowego, (b) jednorodnego pola elektrycznego, utworzonego przez niezaznaczone ładunki, (c) dipola elektrycznego. W (a) i (c) linie przerwane oznaczają przecięcia zamkniętych powierzchni z płaszczyzną rysunku; w (b) linie przerwane reprezentują nieskończone płaszczyzny. Na wszystkich rysunkach sąsiednie powierzchnie ekwipotencjalne mają stałą różnicę potencjałów  $\Delta V$ . Zatem z równania (29-14), dla kąta  $\theta = 180^\circ$ , otrzymamy  $\Delta l = -\Delta V/E$ . Stąd wynika, że powierzchnie te będą leżały blisko siebie tam, gdzie  $E$  jest duże i daleko tam, gdzie  $E$  jest małe. Podobnie (patrz paragraf 27-3) linie sił przebiegają blisko siebie tam, gdzie  $E$  jest duże i daleko tam, gdzie  $E$  jest małe. Porównać z odpowiednimi rysunkami paragrafu 18-7



Rys. 29-16. Próbny ładunek  $q_0$  jest przesuwany z jednej powierzchni ekwipotencjalnej na inną wzdłuż dowolnie wybranego kierunku oznaczonego 1

Słowami możemy to wyrazić następująco: jeżeli poruszamy się w polu elektrycznym wzdłuż linii prostej mierząc  $V$ , to zmiana potencjału przypadająca na jednostkę długości, po zmianie znaku, daje nam składową  $\mathbf{E}$  w tym kierunku. Znak minus oznacza, że  $\mathbf{E}$  jest skierowane w stronę zmniejszającego się potencjału, jak na rys. 29-16. Z równania (29-15) widać jasno, że odpowiednią jednostką dla  $\mathbf{E}$  jest  $\text{V/m}$ .

Istnieje jeden kierunek  $\mathbf{l}$ , dla którego  $-dV/dl$  osiąga wartość maksymalną. Z równania (29-15) widać, że  $E_l$  również będzie maksymalne dla tego kierunku i będzie po prostu równe  $E$ . A więc

$$E = -\left(\frac{dV}{dl}\right)_{\max}. \quad (29-16)$$

Maksymalną wartość  $dV/dl$  w danym punkcie nazywamy *gradientem potencjału* w tym punkcie. Kierunek  $\mathbf{l}$ , dla którego  $dV/dl$  przyjmuje wartość maksymalną, jest zawsze prostopadły do powierzchni ekwipotencjalnej i odpowiada  $\theta = 0$  na rys. 29-16.

Jeżeli na kierunek  $\mathbf{l}$  przyjmiemy kolejno kierunki osi  $x$ ,  $y$  i  $z$ , to z równania (29-15) możemy znaleźć trzy składowe  $\mathbf{E}$  w dowolnym punkcie

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (29-17)$$

Znając więc  $V$  we wszystkich punktach przestrzeni, czyli funkcję  $V(x, y, z)$ , możemy znaleźć składowe wektora  $\mathbf{E}$  i samo  $\mathbf{E}$  obliczając odpowiednie pochodne\*.

**Przykład 10.** Obliczyć  $E(r)$  dla ładunku punktowego  $q$  posługując się równaniem (29-16) i zakładając, że  $V(r)$  dane jest jako (patrz. równ. (29-8))

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

Z symetrii wynika, że  $\mathbf{E}$  musi być skierowane radialnie od (dodatniego) ładunku punktowego. Rozpatrzmy punkt  $P$  pola leżący w odległości  $r$  od ładunku. Widać, że  $-dV/dr$  w punkcie  $P$  jest największe, jeśli kierunek  $\mathbf{l}$  jest ten sam co  $\mathbf{r}$ . Zatem, z równania (29-16)

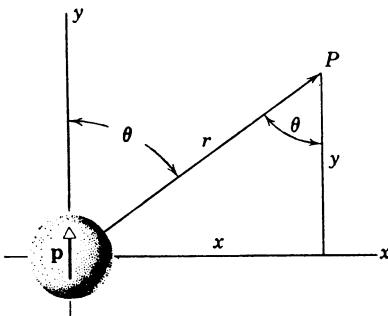
$$E = -\frac{dV}{dr} = -\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

Wynik ten, jak być powinno, jest identyczny z równaniem (27-4).

**Przykład 11. Natężenie  $\mathbf{E}$  dla dipola.** Na rysunku 29-17 pokazany jest odległy punkt  $P$  w polu dipola umieszczonego w początku układu współrzędnych  $xy$ .  $V$  dane jest równaniem (29-11), czyli

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}.$$

Obliczyć  $\mathbf{E}$  jako funkcję położenia punktu  $P$ .



Rys. 29-17. Punkt  $P$  w polu elektrycznym dipola  $p$

\* Symbol  $\partial V/\partial x$  oznacza pochodną cząstkową funkcji  $V(x, y, z)$ . Obliczając tę pochodną uważaemy  $x$  za zmienną, a  $y$  i  $z$  za stałe. Podobnie dla  $\partial V/\partial y$  i  $\partial V/\partial z$ .

Z symetrii wynika, że wektor  $\mathbf{E}$  leży całkowicie w płaszczyźnie rys. 29-17; zatem może być on opisany przez składowe  $E_x$  i  $E_y$ ,  $E_z$  równa się零. Wyrażmy najpierw potencjał we współrzędnych prostokątnych, korzystając z zależności  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ ,  $\cos \theta = y/(x^2 + y^2)^{1/2}$ . Wynik końcowy ma postać

$$V = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

$E_y$  znajdujemy z równania (29-17), pamiętając o tym, że podczas obliczeń  $x$  jest traktowane jako stała:

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x^2 + y^2)^{3/2} \frac{3}{2}y(x^2 + y^2)^{-1/2}2y}{(x^2 + y^2)^3} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}.$$

Zauważmy, że podstawienie  $x = 0$  opisuje punkty na osi dipola (tj. na osi  $y$ ), a wyrażenie na  $E_y$  sprowadza się do postaci

$$E_y = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y^3}.$$

Wynik ten pokrywa się z wynikiem otrzymanym w rozdziale 27 (patrz zadanie 25), ponieważ na osi dipola, jak wynika z symetrii,  $E_x = 0$ .

Podstawienie  $y = 0$  w wyrażeniu na  $E_y$  opisuje punkty w równikowej płaszczyźnie dipola i daje

$$E_y = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^3}.$$

Wynik ten również pokrywa się z wynikiem otrzymanym w rozdziale 27 (patrz przykład 3), ponieważ w płaszczyźnie równikowej  $E_x = 0$ , co znów wynika z symetrii. Znak minus w tym równaniu wskazuje, że  $\mathbf{E}$  jest zwrócone w kierunku ujemnych  $y$  (patrz rys. 29-10).

Składową  $E_x$  znajdujemy także z równania (29-17), pamiętając o tym, aby  $y$  uważać za stałą podczas obliczeń

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{py}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{3}{2}\right) (x^2 + y^2)^{-5/2} 2x = \frac{3p}{4\pi\epsilon_0} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}}.$$

Jak oczekiwaliśmy,  $E_x$  znika zarówno na osi dipola ( $x = 0$ ), jak też w płaszczyźnie równikowej ( $y = 0$ ); patrz rys. 29-10.

## 29-8. Przewodnik izolowany

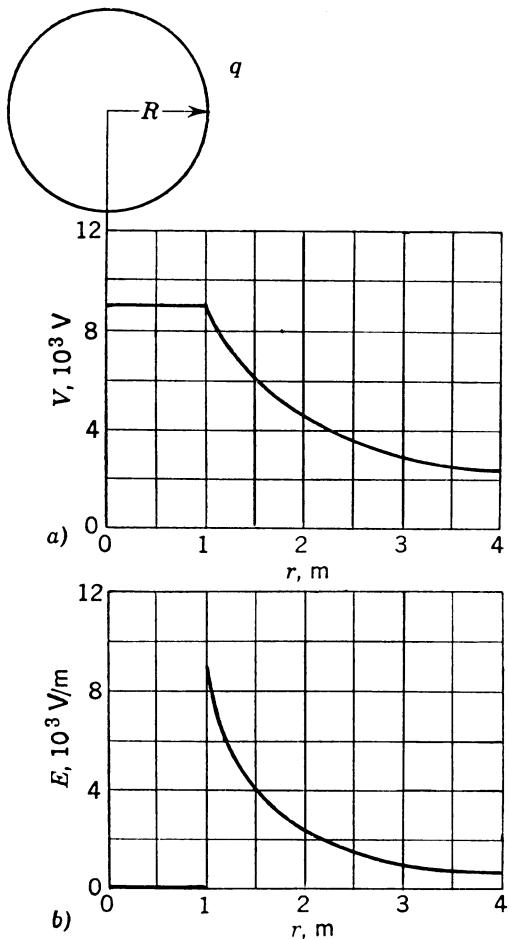
W paragrafie 28-4 wykazaliśmy, posługując się prawem Gaussa, że po osiągnięciu stanu równowagi ładunek umieszczony na izolowanym przewodniku znajdzie się na jego zewnętrznej powierzchni. Teraz twierdzimy, że ładunek  $q$  rozmieści się na tej powierzchni w taki sposób, aby wszystkie punkty przewodnika, zarówno na powierzchni, jak i wewnętrz, miały ten sam potencjał.

Rozpatrzmy dwa dowolne punkty  $A$  i  $B$  leżące wewnętrz lub na powierzchni przewodnika. Gdyby punkty te nie miały tego samego potencjału, to nośniki ładunku w przewodniku posuwałyby się od punktu o niższym potencjale do punktu o potencjale wyższym. Założyliśmy jednak, że została już osiągnięta równowaga, tzn. że nie istnieją takie prądy, wobec tego wszystkie punkty, zarówno na powierzchni, jak i wewnętrz niej, muszą mieć ten sam potencjał. Ponieważ powierzchnia przewodnika jest powierzchnią ekwipotencjalną, więc wektor  $\mathbf{E}$  w punktach na powierzchni musi być do niej prostopadły.

W paragrafie 28-6 widzieliśmy, że ładunek umieszczony na izolowanym przewodniku będzie się rozprzestrzeniał po jego powierzchni dotąd, aż wektor  $\mathbf{E}$  stanie się równy zeru we wszystkich punktach wewnętrznych. Mamy teraz alternatywny sposób wypowiedzenia tego samego; ładunek będzie się poruszał dopóty, dopóki wszystkie punkty przewodnika (punkty na powierzchni i punkty wewnętrzne) nie osiągną tego samego po-

tencjału, ponieważ, jeśli  $V$  jest stałe w całym przewodniku, to  $\mathbf{E}$  jest równe zeru wewnątrz przewodnika ( $E_l = -dV/dl$ ).

Na rysunku 29-18a przedstawiony jest wykres potencjału w funkcji odległości dla izolowanej kulistej powłoki przewodzącej o promieniu 1,0 m, mającej dodatni ładunek  $1,0 \cdot 10^{-6}$  C. Dla punktów na zewnątrz powłoki  $V(r)$  można wyliczyć z równania (29-8), ponieważ dla takich punktów ładunek  $q$  zachowuje się tak, jakby był umieszczony w środku kuli. Równanie (29-8) jest poprawne na zewnątrz powłoki. Przesuńmy następnie ładunek próbny przez powierzchnię do wnętrza powłoki, zakładając, że w powierzchni jest mały otwór. Nie wymaga to wykonania żadnej pracy ponieważ wewnątrz powłoki na ładunek



Rys. 29-18. (a) Potencjał i (b) natężenie pola elektrycznego w pobliżu przewodzącej powłoki kulistej o promieniu 1,0 m i ładunku  $+1,0 \cdot 10^{-6}$  C

próbny nie działają żadne siły. Zatem wszędzie we wnętrzu powłoki potencjał jest taki sam jak na powierzchni, co przedstawione jest na rys. 29-18a.

Rysunek 29-18b przedstawia natężenie pola elektrycznego dla tej samej powłoki kulistej. Zauważmy, że wewnątrz  $E$  równa się零. Stosując równanie (29-16) można dolną krzywą otrzymać z górnej przez różniczkowanie; posługując się równaniem (29-6) można górną krzywą otrzymać z dolnej przez całkowanie.

Rysunek 29-18 nie zmieni się, jeśli przewodnik będzie pełną kulą, a nie — jak zakładaliśmy — powłoką kulistą. Warto porównać rys. 29-18b (przewodząca powłoka kulista lub kula) z rys. 28-10, odnoszącym się do kuli *nieprzewodzącej*. Należy spróbować zrozumieć różnicę między tymi dwoma rysunkami, biorąc pod uwagę, że w pierwszym przypadku ładunek leży na powierzchni, podczas gdy w drugim jest równomiernie rozłożony w całej objętości kuli.

Ostatecznie stwierdzamy, że gęstość ładunku staje się duża na tych izolowanych przewodzących powierzchniach, których promień krzywizny jest mały. Na przykład, gęstość ładunku jest względnie duża na ostrych końcach, a względnie niska na płaskich obszarach przewodzącej powierzchni. Natężenie pola elektrycznego  $E$  w punktach leżących bezpośrednio nad naładowaną powierzchnią jest proporcjonalne do gęstości ładunku  $\sigma$ . Dlatego  $E$  może także osiągać bardzo duże wartości w pobliżu ostrych końców. Wyładowanie jarzeniowe z ostrych końców podczas burzy jest tego przykładem. Na tej zasadzie działają piorunochrony. Neutralizując naładowane chmury, zapobiegają uderzeniom pioruna.

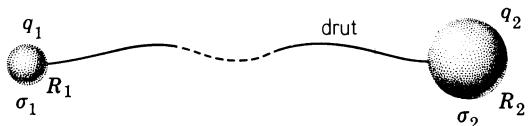
Możemy przebadać jakościowo zależność pomiędzy  $\sigma$  i krzywizną powierzchni w następującym szczególnym przypadku; rozważmy dwie kule o różnych promieniach połączone bardzo długim, cienkim przewodnikiem (rys. 29-19). Przypuśćmy, że cały ten układ ma pewien dowolny potencjał  $V$ . Potencjały (równe) obu kul na podstawie równania (29-8)\* wynoszą

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R_2},$$

co daje

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2}, \quad (29-18)$$

gdzie  $q_1$  jest ładunkiem na kuli o promieniu  $R_1$ , a  $q_2$  — ładunkiem na kuli o promieniu  $R_2$ .



Rys. 29-19. Dwie kule połączone długim, cienkim przewodnikiem

*Powierzchniowa gęstość ładunku* na kulach jest dana wzorami

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi R_1^2}, \quad \sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi R_2^2}.$$

Dzieląc te wielkości przez siebie otrzymamy

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{q_1}{q_2} \frac{R_2^2}{R_1^2},$$

a biorąc pod uwagę równanie (29-18) otrzymamy związek

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1},$$

który jest zgodny z naszą oceną podaną powyżej. Zauważmy, że większa kula ma większy ładunek całkowity, ale mniejszą gęstość ładunku.

\* Równanie (29-8) jest słuszne jedynie dla izolowanego ładunku punktowego albo kulisto-symetrycznego rozkładu ładunków. Kule muszą więc być położone daleko od siebie, aby ładunek jednej z nich nie wywierał dostrzegalnego wpływu na rozkład ładunku na drugiej.

Fakt, że  $\sigma$ , a więc i  $E$ , może być bardzo duże w pobliżu ostrzy, ma znaczenie przy projektowaniu sprzętu wysokonapięciowego. Jeśli przewodnik o wysokim potencjałe jest otoczony powietrzem, to na jego ostrzach może się pojawić *wyladowanie koronowe*. Normalnie powietrze jest uważane za izolator. Zawiera ono jednak niewielką liczbę jonów, wytworzonych, na przykład, przez promienie kosmiczne. Dodatnio naładowany przewodnik będzie przyciągał ujemne jony z otaczającego powietrza, a więc będzie się powoli rozładowywał.

Jeśli naładowany przewodnik ma ostrza, to wartość  $E$  w powietrzu w pobliżu ostrzy może być bardzo duża. Jeśli ta wartość będzie dostatecznie duża, to jony przyciągane do przewodnika będą otrzymywać tak duże przyspieszenie, że przez zderzenia z cząsteczkami powietrza będą wytwarzac olbrzymią liczbę dodatkowych jonów. Powietrze stanie się więc bardziej przewodzące i może nastąpić bardzo gwałtowne rozładowanie przewodnika, tzn. wyładowanie koronowe. Powietrze otaczające przewodzące ostrza może się nawet wyjątkowo jarzyć dzięki światu wysyłanemu przez cząsteczki powietrza podczas zderzeń.

## 29-9. Generator elektrostatyczny

Generator elektrostatyczny wynalazł w 1890 r. lord Kelvin, a zastosował go w praktyce, prawie we współczesnej postaci R. J. Van de Graaff w 1931 r. Jest to urządzenie do wytwarzania różnic potencjałów elektrycznych rzędu wielu milionów woltów. Jego główne zastosowanie w fizyce, to wykorzystanie tej różnicy potencjałów do przyspieszania naładowanych cząstek do wielkich energii. Otrzymane tym sposobem wiązki cząstek wysokoenergetycznych mogą być użyte w wielu doświadczeniach związanych z bombardowaniem atomów. Technika przyspieszania polega na tym, że naładowanej cząstce pozwala się spadać w polu o określonej różnicy potencjałów  $V$ , przy czym nabiera ona energię kinetyczną.

Niech cząstka o ładunku (dodatnim)  $q$  porusza się w próżni pod wpływem pola elektrycznego z punktu  $A$  do innego punktu  $B$ , którego potencjał elektryczny jest niższy o  $V$ . Elektryczna energia potencjalna maleje o  $qV$ , ponieważ taka jest praca, jaką powinien wykonać czynnik zewnętrzny, aby przywrócić układ do stanu początkowego. Ten ubytek energii potencjalnej pojawia się w postaci kinetycznej energii cząstek, czyli

$$K = qV. \quad (29-19)$$

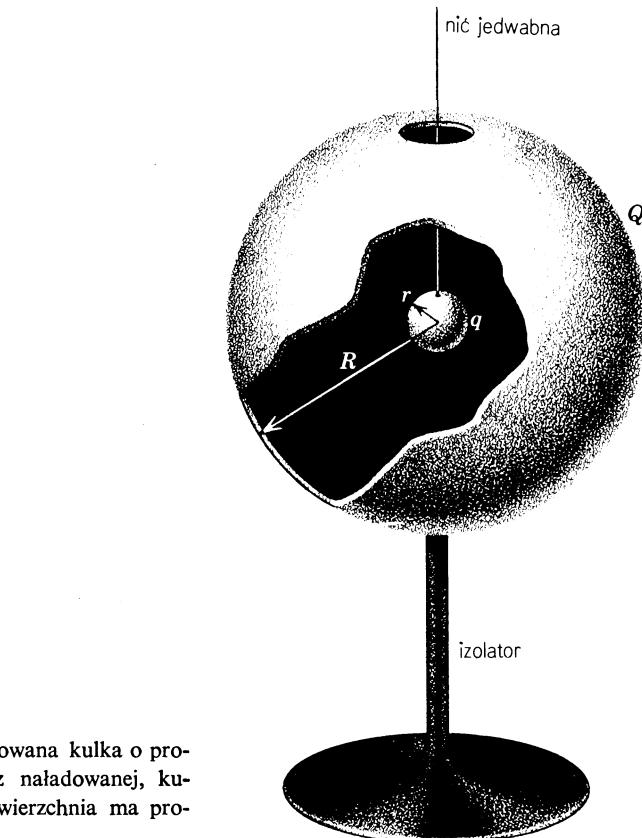
$K$  otrzymuje się w dżulach (J), jeśli  $q$  jest wyrażone w kulombach (C), a  $V$  — w woltach (V). Jeśli cząstką przyspieszaną jest elektron lub proton, to  $q$  będzie ładunkiem elementarnym  $e$ .

Jeśli ładunek elementarny  $e$  przyjmiemy jako jednostkę zamiast kulomba, to otrzymamy nową jednostkę energii, *elektronowolt* (eV), którą poprzednio szeroko używaliśmy w fizyce atomowej i jądrowej. Korzystając z równania (29-19) wyliczamy, że

1 eV = (1 ładunek elementarny) (1 V) =  $(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})(1,00 \text{ V}) = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ . Elektronowolt może być używany zamiast każdej innej jednostki energii. Tak więc można powiedzieć, że przedmiot o masie 10 g, poruszający się z prędkością 1000 cm/s, ma energię kinetyczną  $3,1 \cdot 10^{18}$  eV. Większość fizyków będzie wolała jednak wyrazić ten wynik jako 0,50 J; elektronowolt jest tu jednostką niewygodnie małą. Jednakże w fizyce atomowej, nuklearnej i cząstek elementarnych elektronowolt (eV) i jego wielokrotności

keV ( $= 10^3$  eV), MeV ( $= 10^6$  eV), i GeV ( $= 10^9$  eV) są najczęściej używanymi jednostkami energii\*.

**Przykład 12. Generator elektrostatyczny Van de Graaffa.** Rysunek 29-20, ilustrujący podstawową zasadę działania generatora elektrostatycznego, przedstawia małą kulę o promieniu  $r$  umieszczoną wewnątrz dużej powłoki kulistej o promieniu  $R$ . Te dwie kule mają odpowiednio ładunki  $q$  i  $Q$ . Obliczyć różnicę potencjałów kul.



Rys. 29-20. Przykład 12. Mała naładowana kula o promieniu  $r$  jest zawieszona wewnętrz naładowanej, kulistej powłoki, której zewnętrzna powierzchnia ma promień  $R$

Potencjał dużej kuli jest wywołyany częściowo jej własnym ładunkiem, a częściowo tym, że znajduje się ona w polu wytworzonym przez ładunek  $q$  małej kuli. Z równania (29-8) mamy

$$V_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{R} + \frac{q}{R} \right).$$

Potencjał małej kuli jest wywołyany częściowo przez jej własny ładunek oraz częściowo tym, że znajduje się ona wewnętrz dużej kuli, patrz rys. 29-18a. Z równania (29-8) mamy

$$V_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r} + \frac{Q}{R} \right).$$

Różnica potencjałów wynosi

$$V_r - V_R = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right).$$

\* Obowiązujące w Stanach Zjednoczonych przedrostki nazw jednostek wtórnych różnią się nieco od polskich. Wielokrotności elektronowolta są tam następujące: MeV =  $10^6$  eV, BeV =  $10^9$  eV i GeV =  $= 10^{12}$  eV (przyp. tłum.).

Zatem, zakładając że  $q$  jest dodatnie, wewnętrzna kula będzie miała zawsze wyższy potencjał niż zewnętrzna. Jeżeli kule zostaną połączone cienkim przewodnikiem, to cały ładunek  $q$  przeniesie się na kulę zewnętrzną, niezależnie od ładunku  $Q$ , który mógł istnieć na niej już wcześniej.

Wychodząc z innego punktu widzenia zauważmy, że odkąd połączone elektrycznie kule tworzą jeden przewodnik znajdujący się w równowadze elektrostatycznej, muszą one mieć jednakowy potencjał. To znaczy, że  $V_r - V_R = 0$ , co może się zdarzyć tylko wtedy, kiedy  $q = 0$ .

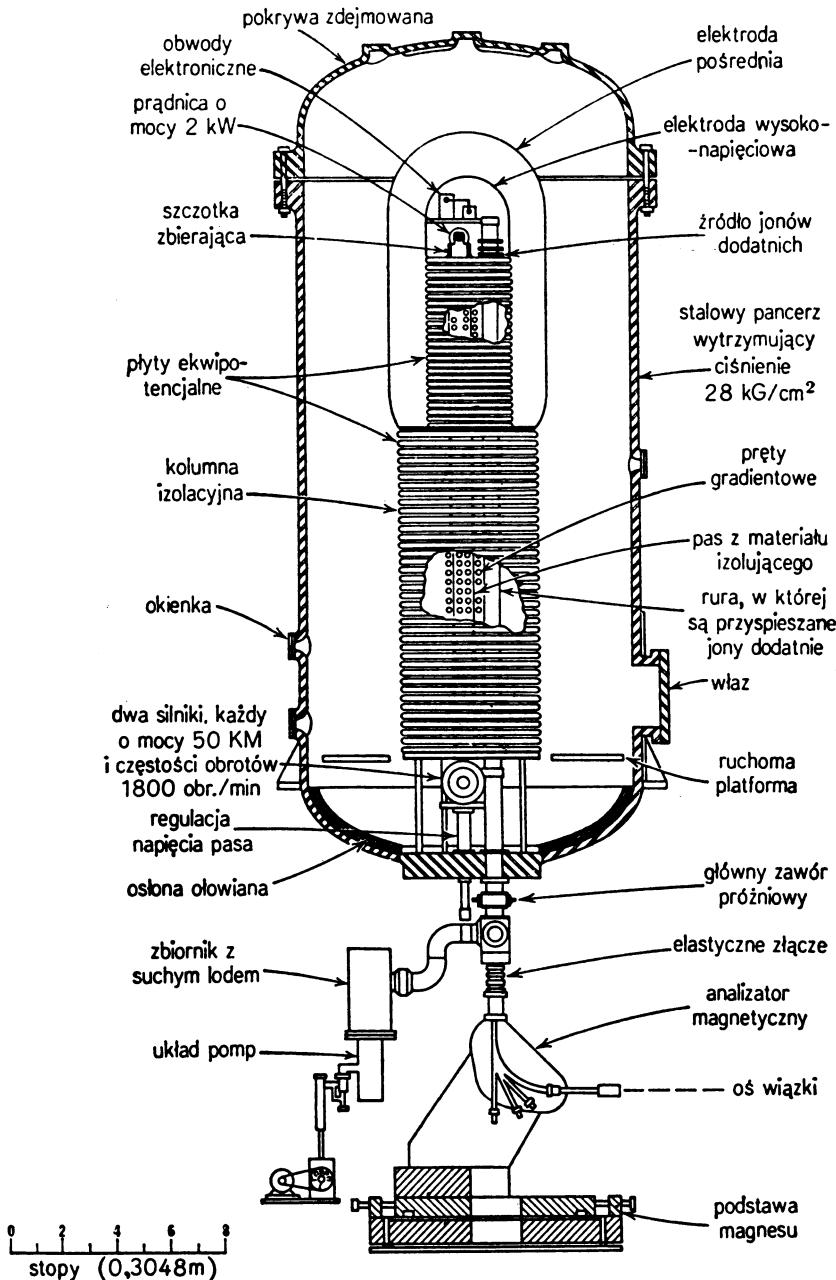
W realnie istniejących generatorach elektrostatycznych ładunek jest dostarczany do wnętrza powłoki przez szybko poruszające się pasy, wykonane z materiału izolacyjnego. Ładunek jest „napylany” na pasy, na zewnątrz powłoki, przez wyładowanie koronowe z szeregu ostrzy metalowych, podłączonych do źródła o umiarkowanie wysokiej różnicy potencjałów. Wewnątrz powłoki ładunek jest usuwany z pasów przez szereg podobnych ostrzy połączonych z powłoką. Na skalę handlową buduje się generatorы elektrostatyczne przyspieszające protony do energii 10 MeV, stosując jednokrotne przyspieszenie. Rysunek 29-21 przedstawia schemat generatora elektrostatycznego z MIT\*, który może wytwarzać protony o energii 9 MeV.

Można budować generatorы, w których przyspieszane cząstki są poddawane kolejnym przyspieszeniom. W generatorze elektrostatycznym skonstruowanym dla uniwersytetu w Pittsburghu cząstki poddawane są dwóm lub trzem kolejnym przyspieszeniom.

### Pytania

1. Czy wolno założyć, że potencjał Ziemi wynosi +100 V zamiast零? Jaki wpływ miałoby takie założenie na mierzone wartości: (a) potencjałów i (b) różnic potencjałów?
2. Co stałoby się z człowiekiem znajdującym się na izolującej podstawie, gdyby jego potencjał wzrósł o 10 000 V?
3. Czy elektrony dążą do obszarów o wysokim czy niskim potencjalnym?
4. Przypuśćmy, że Ziemia ma wypadkowy ładunek różny od zera. Czy można w tym wypadku uznać Ziemię za wzorcowy układ odniesienia dla potencjału i przypisać jej potencjał  $V = 0$ ?
5. Czy potencjał dodatnio naładowanego, izolowanego przewodnika, musi być dodatni? Podać przykład na dowód swego punktu widzenia.
6. Czy dwie różne powierzchnie ekwipotencjalne mogą się przecinać?
7. Pewien elektryk doznał przy pracy śmiertelnego porażenia prądem elektrycznym; w gazecie napisano: „Przypadkowo dotknął kabla o wysokim napięciu i 20 000 woltów elektryczności gwałtownie wstrząsnęło jego ciałem.” Omówić takie stwierdzenie.
8. Czy ilość pracy na jednostkę ładunku, jaką należy wykonać, aby przemieścić ładunek elektryczny z jednego punktu do drugiego w polu elektrostatycznym, zależy od ilości przemieszczanego ładunku?
9. Rady, jakich udziela się alpinistom na wypadek burz i błyskawic są następujące: (a) zejść natychmiast ze szczytów i grzbietów i (b) trzymać stopy razem i przysiadać, dotykając ziemi tylko stopami. Na czym opierają się te dobre rady?
10. Jeśli  $E = 0$  w danym punkcie, to czy  $V$  w tym punkcie też musi być równe zeru? Podać kilka przykładów na udowodnienie swego stanowiska.
11. Czy można obliczyć  $V$  w jakimś punkcie, znając  $E$  w tym punkcie? Jeżeli nie, to jaka informacja jest jeszcze potrzebna?
12. Czy pole elektryczne  $E$  na rys. 29-2 jest większe z lewej czy z prawej strony rysunku?
13. Czy na rys. 29-6 trzeba założyć, że  $A$ ,  $B$  i  $q$  leżą na jednej prostej, aby udowodnić, że równ. 39-8 jest prawdziwe?
14. Czy jednorodnie naładowana, nieprzewodząca tarcza z przykładu 6 jest powierzchnią stałego potencjału? Wyjaśnić to.

\* Massachusetts Institute of Technology (przyp. tłum.).



Rys. 29-21. Elektrostatyczny generator (znajdujący się w MIT) mogący wytwarzać protony o energii 9 MeV. Wiązka protonów jest przyspieszana pionowo w dół, a następnie odchylana od pionu do kierunku poziomego za pomocą magnetycznego analizatora pokazanego na dole. (Dzięki uprzejmości J. G. Trump)

15. Dlaczego izolowany atom nie może mieć trwałego elektrycznego momentu dipolowego?
16. Wewnątrz danego obszaru przestrzeni  $V$  jest stałe. Co można powiedzieć o  $E$  w tym obszarze?
17. W paragrafie 16-6 widzieliśmy, że natężenie pola grawitacyjnego wewnątrz kulistej powłoki materialnej wynosi zero. Natężenie pola elektrycznego równa się zeru nie tylko wewnątrz izolowanego, naładowanego przewodnika kulistego, lecz także wewnątrz izolowanego przewodnika o dowolnym kształcie.

Czy wewnętrz, powiedzmy, sześcienniej powłoki materialnej natężenie pola grawitacyjnego równe się zeru? Jeżeli nie, to pod jakim względem analogia jest niezupełna?

18. Jak można sprawdzić, czy potencjał elektryczny w danym obszarze przestrzeni ma stałą wartość?

19. Ładunek zostaje umieszczony na izolowanym przewodniku o kształcie idealnego sześcianu. Jak rozmieści się ten ładunek w sześcianie? Co stanie się z ładunkiem, jeśli sześcian znajduje się w powietrzu?

20. Widzieliśmy (rys. 29-18a), że potencjał wewnętrz cienkiej, przewodzącej, kulistej powłoki jest taki sam jak na powierzchni. (a) Co się dzieje, jeżeli powłoka jest wypełniona? (b) Co się dzieje, jeżeli jest wypełniona i ma nieregularny kształt? (c) A jeżeli jest wypełniona, ma nieregularny kształt i ma wewnętrz nieregularnie ukształtowaną wnękę? W szczególności, jakie jest  $V$  w wydrążonej wnęce? (d) Tak jak w (c), lecz gdy dodatkowo we wnęce umieszczony jest ładunek punktowy?

21. Zamknięte pudełko metalowe o kształcie piramidy jest umieszczone na izolującej podstawie i naładowane do potencjału  $+V$ . Czy średni potencjał wewnętrz piramidy jest: (a) większy niż  $V$ ; (b) równy  $V$ , (c) czy mniejszy niż  $V$ ?

22. Izolowana kulista powłoka przewodząca ma ujemny ładunek. Co się stanie, jeśli z wewnętrzna powierzchnią powłoki zetknemy dodatnio naładowany przedmiot metalowy? Założyć, że ładunek dodatni jest: (a) mniejszy, (b) równy i (c) większy co do wartości bezwzględnej od ładunku ujemnego.

23. Nienalałdowana kula metalowa, zawieszona na jedwabnej nici, znajduje się w zewnętrznym jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu  $E$ . Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego wewnętrz kuli? Czy odpowiedź ulegnie zmianie, jeśli kula ma ładunek?

## Zadania

### Paragraf 29-1

1. W typowym wyładowaniu atmosferycznym różnica potencjałów punktów, między którymi odbywa się wyładowanie, wynosi około  $10^9$  V, a przenoszona ilość ładunku — około 30 C. Ile lodu stopioby się w temperaturze  $0^\circ\text{C}$ , gdyby można było zużyć na to całą uwolioną energię?

Odp.: 99 ton.

2. Ładunek  $q$  jest rozłożony równomiernie wewnętrz nieprzewodzącej kuli o promieniu  $R$ . (a) Wykazać, że potencjał w odległości  $r$  od środka kuli, gdzie  $r < R$ , wyraża się następująco:

$$V = \frac{q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}.$$

(b) Czy wydaje się słuszne, że zgodnie z tym wyrażeniem potencjał  $V$  w środku kuli nie równa się零?

3. Jądro złota zawiera ładunek dodatni równy ładunkowi 79 protonów. Cząstka  $\alpha$  ( $Z = 2$ ), która znajdująca się daleko od jądra miała energię kinetyczną  $K$ , leci wprost na jądro. Zderzywszy się z powierzchnią jądra (z założenia kulistą) zmienia ona kierunek ruchu na przeciwny. (a) Wyliczyć  $K$  przyjmując, że promień jądra równy jest  $5,0 \cdot 10^{-15}$  m. (b) Rzeczywista energia cząstek  $\alpha$  użytych w doświadczeniach Rutherforda i jego współpracowników, wynosiła (patrz paragraf 28-9) 5,0 MeV. Co można stąd wywnioskować?

Odp.: (a) 45 MeV. (b) W tych ważnych doświadczeniach cząstki zbliżyły się, lecz nie „dotknęły” jądra złota.

4. (a) Jaką różnicę potencjałów musi przebyć elektron, aby — zgodnie z mechaniką Newtona — uzyskać prędkość  $v$  równą prędkości światła  $c$ ? (b) Mechanika Newtona zawodzi, gdy  $v \rightarrow c$ . Dlatego używając zamiast wyrażenia Newtona,  $K = \frac{1}{2}mv^2$ , poprawnego relatywistycznego wyrażenia na energię kinetyczną

$$K = mc^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1 \right],$$

wyznaczyć rzeczywistą prędkość elektronu osiągniętą po przebyciu różnicy potencjałów wyliczonej w (a). Wyrazić tę prędkość jako ułamek prędkości światła.

### Paragraf 29-2

5. Nieskończona płyta jest naładowana z powierzchniową gęstością ładunku  $\sigma = 1,0 \cdot 10^{-7}$  C/m<sup>2</sup>. W jakiej odległości od siebie znajdują się powierzchnie ekwipotencjalne, których potencjały różnią się o 5,0 V?

Odp.: 0,89 mm.

6. Dwie duże równoległe, przewodzące płyty znajdują się w odległości 10 cm i mają jednakowe, lecz o przeciwnych znakach ładunki na naprzeciwległych powierzchniach. Na elektron umieszczony w połowie drogi między dwiema płytami działa siła  $1,6 \cdot 10^{-15}$  N. Jaka jest różnica potencjałów między płytami?

7. W doświadczeniu Millikana z kropelkami oleju (patrz rys. 27-29) w warunkach równowagi między dwiema płytami odległymi o 1,50 cm istnieje pole elektryczne o natężeniu  $1,92 \cdot 10^5$  N/C. Znaleźć różnicę potencjałów obu płyt.

Odp.: 2900 V.

#### Paragraf 29-3

8. Rozpatrzyć ładunek punktowy  $q = 1,5 \cdot 10^{-8}$  C. (a) Jaki jest promień powierzchni ekwipotencjalnej o potencjale 30 V? (b) Czy powierzchnie, których potencjały różnią się o stałą wartość (powiedzmy o 1,0 V) są równolegle wzdłuż promieni?

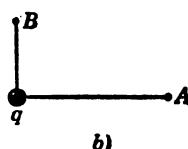
#### Paragraf 29-4

9. Rozważmy punktowy ładunek  $q = +1,0 \cdot 10^{-6}$  C. Weźmy pod uwagę punkt A odległy od tego ładunku o 2,0 m oraz punkt B, leżący po przeciwniej stronie ładunku, odległy od niego o 1,0 m (rys. 29-22a). (a) Jaka jest różnica potencjałów  $V_A - V_B$ ? (b) Powtórzyć rozważanie dla punktów A i B, rozmieszczonych jak na rysunku 29-22.

Odp.: (a)  $-4500$  V. (b) Tak jak (a), ponieważ potencjał jest wielkością skalarną.

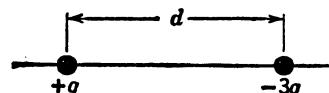


a)



b)

Rys. 29-22. Zadanie 9

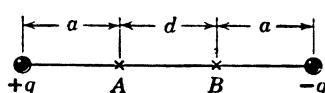


Rys. 29-23. Zadanie 10 i 11

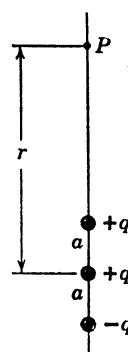
10. Na rysunku 29-23 znaleźć punkty, w których (a)  $V = 0$  i (b)  $E = 0$ . Rozważyć tylko punkty na osi i przyjąć  $d = 1,0$  m.

11. Na rysunku 29-23 (patrz zadanie 10) naszkicować: (a) linie sił i (b) przecięcia powierzchni ekwipotencjalnej z płaszczyzną rysunku. (Wskazówka: Rozpatrzyć pole tuż przy każdym z ładunków punktowych oraz w znaczących odległościach od pary ładunków.)

12. (a) Wyprowadzić wyrażenie na  $V_A - V_B$  w przypadku przedstawionym na rys. 29-24. (b) Czy wyrażenie to sprawdza się do oczekiwanej postaci, kiedy  $d = 0$ ? A kiedy  $q = 0$ ?



Rys. 29-24. Zadanie 12



Rys. 29-25. Zadanie 13

13. Wykazać, że dla układu ładunków przedstawionego na rys. 29-25 potencjał  $V(r)$  w punktach leżących na osi pionowej, przy założeniu  $r \gg a$ , wyraża się wzorem

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r} + \frac{2qa}{r^2} \right).$$

Czy wynik ten jest wynikiem oczekiwany? (Wskazówka: Takie rozmieszczenie ładunków można traktować jako izolowany ładunek plus dipol.)

#### Paragraf 29-5

14. Obliczyć moment dipolowy cząsteczki wody zakładając, że wszystkie (dziesięć) elektrony w cząstecze krążą symetrycznie wokół atomu tlenu, że odległość OH wynosi  $0,96 \cdot 10^{-8}$  cm oraz że kąt między dwoma wiązaniem OH wynosi  $104^\circ$ . Porównać z wartością podaną na stronie 84, patrz rysunek 29-11.

#### Paragraf 29-6

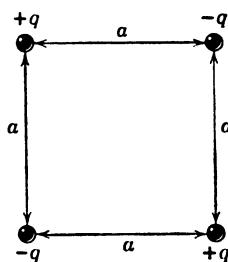
15. Cząstka o masie  $m$ , ładunku  $q > 0$  i początkowej energii kinetycznej  $K$  została wyrzucona (z „nieskończoności”) w kierunku ciężkiego jądra ładunku  $Q$ , który w naszym układzie odniesienia nie zmienia położenia. (a) Jeżeli cel jest „doskonały” (zderzenie centralne), jak blisko środka jądra jest cząstka, gdy chwilowo się zatrzymuje? (b) W przypadku wybranego zderzenia niecentralnego największe zbliżenie cząstki do jądra jest dwa razy większe od odległości ustalonej w (a). Określić prędkość cząstki w tej najmniejszej odległości zbliżenia.

Odp.: (a)  $qQ/4\pi\epsilon_0 K$ . (b)  $\sqrt{K/m}$ .

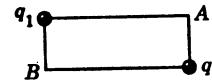
16. Wartości i współrzędne dwóch ładunków znajdujących się na płaszczyźnie  $xy$  wynoszą:  $q_1 = +3,0 \cdot 10^{-6}$  C,  $x = +3,5$  cm,  $y = +0,5$  cm i  $q_2 = -4,0 \cdot 10^{-6}$  C,  $x = -2,0$  cm,  $y = +1,5$  cm. (a) Znaleźć potencjał elektryczny w początku układu. (b) Jaką pracę należy wykonać, aby umieścić te ładunki w danych położeniach, startując z nieskończoności?

17. Wyprowadzić wyrażenie na pracę niezbędną do utworzenia z czterech ładunków układu przedstawionego na rys. 29-26.

Odp.:  $-0,21q^2/\epsilon_0 a$ .



Rys. 29-26. Zadanie 17



Rys. 29-27. Zadanie 20

18. Cząstka o ładunku  $Q$  jest trzymana w stałym położeniu w punkcie  $P$ , a druga cząstka o masie  $m$ , o tym samym ładunku  $Q$ , znajduje się początkowo w spoczynku w odległości  $r_1$  od  $P$ . Druga cząstka została puszczena i odepchnięta od pierwszej. Określić jej prędkość w chwili, gdy znajduje się w odległości  $r_2$  od  $P$ . Niech  $Q = 3,1 \cdot 10^{-6}$  C,  $m = 2,0 \cdot 10^{-5}$  kg,  $r_1 = 9,0 \cdot 10^4$  m, i  $r_2 = 25 \cdot 10^4$  m.

19. Jaką elektryczną energię potencjalną ma układ ładunków przedstawiony na rys. 29-7? Wartości liczbowe wziąć z przykładu 5.

Odp.:  $-6,4 \cdot 10^{-7}$  J.

20. W prostokącie przedstawionym na rys. 29-27, boki mają długości 5,0 cm i 15,0 cm,  $q_1 = -5,0 \cdot 10^{-6}$  C i  $q_2 = +2,0 \cdot 10^{-6}$  C. (a) Jaki jest potencjał elektryczny w punkcie  $B$  i w punkcie  $A$ ? (b) Jaką pracę należy wykonać, aby przemieścić trzeci ładunek  $q_3 = +3,0 \cdot 10^{-6}$  C z  $B$  do  $A$  po przekątnej prostokąta. (c) Czy w tym procesie praca zewnętrzna jest zamieniona na potencjalną energię elektrostatyczną czy na odwóź? Wyjaśnić to.

21. Dwa ładunki  $q (= +2,0 \cdot 10^{-6}$  C) umieszczone są w przestrzeni w odległości  $d$  (2,0 cm) od siebie jak na rys. 29-28. (a) Jaki jest potencjał elektryczny w punkcie  $C$ ? (b) Trzeci ładunek  $q (+2,0 \cdot 10^{-6}$  C)

zostaje sprowadzony bardzo wolno z nieskończoności do C. Jaką pracę należy wykonać? (c) Ile wynosi energia potencjalna U tego układu, gdy trzeci ładunek znajduje się już na miejscu?

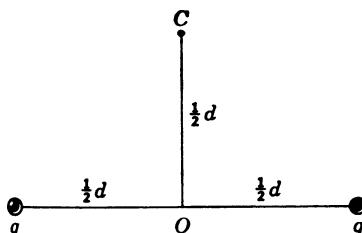
Odp.: (a)  $2,5 \cdot 10^6$  V. (b) 5,1 J. (c) 6,9 J.

22. Trzy ładunki o wielkości  $+0,1$  C każdy rozmieszczone są w wierzchołkach równobocznego trójkąta o boku 1,0 m. Ile trzeba dni, aby przenieść jeden z ładunków do środka odcinka łączącego dwa pozostałe ładunki, jeżeli energia jest dostarczana z mocą 1,0 kW?

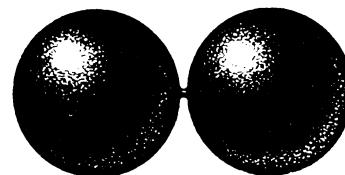
23. Dwa elektrony znajdują się w odległości 2,0 m od siebie. Trzeci elektron zostaje wystrzelony z nieskończoności i zatrzymuje się w połowie drogi między pozostałymi dwoma elektronami. Jaka musi być jego prędkość początkowa?

Odp.: 32 m/s.

24. Obliczyć: (a) potencjał elektryczny, wytworzony przez jądro atomu wodoru w średniej odległości krążącego elektronu ( $r = 5,3 \cdot 10^{-11}$  m), (b) elektryczną energię potencjalną atomu, gdy elektron znajduje się w tej odległości, (c) kinetyczną energię elektronu, zakładając, że porusza się on po orbicie kołowej o tym promieniu i o środku w jądrze, (d) ile potrzeba energii, aby zjonizować atom wodoru? Wszystkie energie wyrazić w elektronowoltach (eV).



Rys. 29-28. Zadanie 21



Rys. 29-29. Zadanie 27

25. Zakłada się, że cząstka o ładunku (dodatnim)  $Q$  umieszczona jest w  $P$ . Druga cząstka o masie  $m$  i (ujemnym) ładunku  $-q$  porusza się ze stałą prędkością po okręgu o promieniu  $r_1$  i środku w  $P$ . Wyrowadzić wzór na pracę  $W$ , którą musi wykonać czynnik zewnętrzny na drugiej cząstce, aby zwiększyć promień okręgu, po którym odbywa się ruch, ze środkiem w  $P$ , do  $r_2$ .

Odp.:  $W = \frac{qQ}{8\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]$ .

26. Wymyślić dla układu trzech ładunków punktowych znajdujących się w skończonych odległościach takie rozmieszczenie, przy którym elektryczna energia potencjalna układu równałaby się零.

27. Rysunek 29-29 przedstawia wyidealizowany model jądra  $^{238}\text{U}$  ( $Z = 92$ ) na granicy rozszczepienia. Obliczyć: (a) Siłę odpychania działającą na każdy z fragmentów. (b) Wzajemną elektryczną energię potencjalną obu fragmentów. Założyć, że fragmenty mają tę samą wielkość i ładunek, są kuliste i stykają się. Promień pierwotnego, kulistego jądra  $^{238}\text{U}$  wynosi  $8,0 \cdot 10^{-15}$  m. Założyć, że materiał, z którego są zbudowane jądra, ma stałą gęstość.

Odp.: (a)  $3,0 \cdot 10^3$  N. (b)  $3,8 \cdot 10^{-11}$  J lub 240 MeV.

#### Paragraf 29-7

28. Potencjał elektryczny zmienia się wzdłuż osi  $x$ , jak pokazano na wykresie rys. 29-30. Dla każdego z zaznaczonych przedziałów (pominąć zachowanie na końcu przedziałów) określi składową  $x$  pola elektrycznego i wykreślić  $E_x$  w zależności od  $x$ .

29. (a) Wykazać, że potencjał elektryczny w punkcie leżącym na osi naładowanego pierścienia o promieniu  $a$ , obliczony wprost z równania (29-10), wynosi

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

(b) Korzystając z tego wyrażenia obliczyć  $E$  w punktach na osi; porównać z bezpośrednim obliczeniem  $E$  w przykładzie 5, rozdział 27.

30. Jaki jest gradient potencjału, w V/m, na powierzchni jądra złota? Patrz zadanie 3.

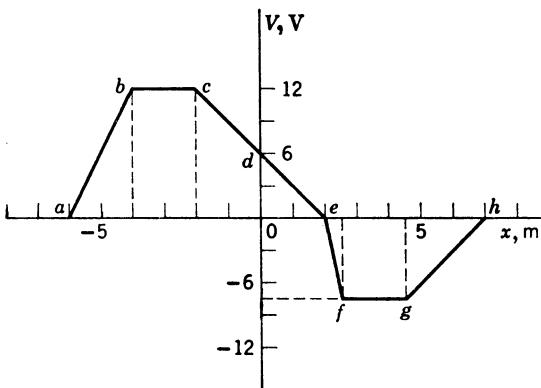
31. W przykładzie 6 wykazano, że potencjał w punkcie leżącym na osi naładowanego dysku wynosi

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{a^2+r^2} - r).$$

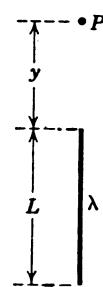
(a) Korzystając z tego pokazać, że  $E$  w punktach leżących na osi wyraża się wzorem

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{r}{\sqrt{a^2+r^2}} \right).$$

(b) Czy wyrażenie na  $E$  sprowadza się do oczekiwanej postaci dla  $r \gg a$  i dla  $r = 0$ ?



Rys. 29-30. Zadanie 28



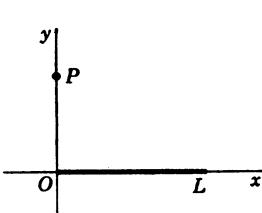
Rys. 29-31. Zadanie 33

32. (a) Wychodząc z równania (29-11) znaleźć wartość radialnej składowej  $E_r$  natężenia pola elektrycznego wytworzonego przez dipol. (b) Dla jakich wartości kąta  $\theta$  składowa  $E_r = 0$ ?

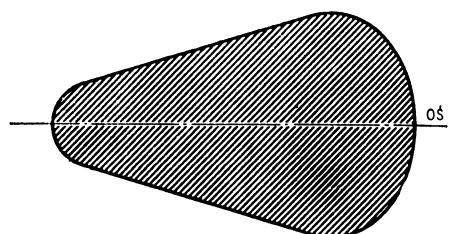
33. Ładunek na jednostkę długości  $\lambda$  jest rozmieszczony jednorodnie wzdłuż prostoliniowego segmentu o długości  $L$ . (a) Określić potencjał elektrostatyczny (w nieskończoności równy zero) w punkcie  $P$  leżącym na tej samej prostej w odległości  $y$  od jednego końca naładowanego segmentu (patrz rys. 29-31). (b) Zastosować wynik z (a) do obliczenia składowej pola elektrycznego w  $P$  w kierunku  $y$  (wzdłuż prostej). (c) Określić składową pola elektrycznego w  $P$  w kierunku prostopadłym do danej prostej.

Odp.: (a)  $\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{L+y}{y}$ , (b)  $\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{L}{y(L+y)}$ . (c) Zero.

34. Na cienkim pręcie o długości  $L$  leżącym na osi  $x$  jednym końcem w początku układu ( $x = 0$ ), jak na rys. 29-32, rozmieszczony jest ładunek o gęstości liniowej zadanej wzorem:  $\lambda = kx$ , gdzie  $k$  jest wielkością stałą. (a) Przyjmując potencjał elektrostatyczny w nieskończoności jako zero, znaleźć  $V$  w punkcie  $P$  na osi  $y$ . (b) Określić pionową składową  $E_y$  natężenia pola elektrycznego w  $P$  na podstawie wyniku z części (a), a także na podstawie bezpośrednich obliczeń. (c) Dlaczego  $E_x$ , składowej poziomej pola elektrycznego w  $P$  nie można obliczyć na podstawie wyniku z części (a)?



Rys. 29-32. Zadanie 34



Rys. 29-33. Zadanie 37

## Paragraf 29-8

35. Jaka jest gęstość ładunku  $\sigma$  na powierzchni przewodzącej kuli o promieniu 0,15 m, której potencjał wynosi 200 V?

Odp.:  $1,2 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}^2$ .

36. Naładowana kula o promieniu 1,5 m ma całkowity ładunek o wielkości  $3,0 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ . (a) Jakie jest pole elektryczne na powierzchni kuli? (b) Jaki jest potencjał elektryczny na powierzchni kuli? (c) W jakiej odległości od powierzchni kuli potencjał elektryczny jest mniejszy o 500 V niż na powierzchni?

37. Przedmiot metalowy na rys. 29-33 ma symetrię względem osi poziomej. Przedmiot jest naładowany ujemnie. Naszkicować w przybliżeniu kilka powierzchni ekwipotencjalnych i linii sił. Posłużyć się rozumowaniem fizycznym a nie analizą matematyczną.

38. Gdyby Ziemia miała wypadkowy ładunek równy 1 ładunkowi elektronowemu na  $1 \text{ m}^2$  pola powierzchni (bardzo sztuczne założenie), to: (a) Jaki byłby potencjał Ziemi? (b) Jakie byłyby natężenie pola elektrycznego, wytworzonego przez Ziemię tuż nad jej powierzchnią?

39. Ładunek  $10^{-8} \text{ C}$  można wytworzyć przez zwyczajne tarcie. Jaki potencjał będzie mieć izolowana, przewodząca kula o promieniu 10 cm, naładowana tym ładunkiem?

Odp.: 900 V.

40. Jaki jest stosunek natężeń pól elektrycznych przy powierzchniach kul przedstawionych na rys. 29-19?

41. Rozważyć cienką, izolowaną, przewodzącą, kulistą powłokę z jednorodnie rozmieszczenym ładunkiem o gęstości ładunku ( $\text{C/m}^2$ ). Jaka pracę należy wykonać, aby przenieść mały dodatni ładunek próbkowy  $q_0$  (a) z powierzchni powłoki do wnętrza, przez małą dziurkę; (b) z jednego punktu na powierzchni do drugiego bez względu na drogę; (c) z jednego punktu do drugiego wewnątrz powłoki i (d) z jakiegokolwiek punktu  $P$  na zewnątrz powłoki jakąkolwiek drogą, niezależnie od tego, czy przecina ona powłokę czy nie, z powrotem do  $P$ . (e) Dla podanych warunków, czy ma jakieś znaczenie fakt, że powłoka jest przewodząca lub nie jest?

Odp.: (a) Zero. (b) Zero. (c) Zero. (d) Zero. (e) Nie.

42. Cienka, kulista, przewodząca powłoka o promieniu  $R$  jest umieszczona na izolowanej podstawie i naładowana do potencjału  $-V$ . Elektron zostaje wystrzelony z punktu  $P$  odległego o  $r$  od środka powłoki ( $r \gg R$ ) z prędkością początkową  $v_0$  skierowaną radialnie do wewnętrz. Jaka jest wartość prędkości  $v_0$  wybranej tak, żeby elektron akurat dosięgnął powłoki?

43. Czy przewodząca kula o promieniu 10 cm może w powietrzu utrzymać bez przebicia ładunek  $4 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ ? Wytrzymałość dielektryczna (minimalna wartość natężenia pola wymagana do wywołania przebicia) powietrza pod ciśnieniem 1 Atm wynosi  $3 \cdot 10^6 \text{ V/m}$ .

Odp.: Nie.

44. Dwie cienkie izolowane, wspólnosrodkowe przewodzące kule o promieniach  $R_1$  i  $R_2$  mają ładunki  $q_1$  i  $q_2$ . Wyprowadzić wzory na  $E(r)$  i  $V(r)$ , gdzie  $r$  jest odległością od środka kul. Wykreślić  $E(r)$  i  $V(r)$  w przedziale od  $r = 0$  do  $r = 4,0 \text{ m}$  dla  $R_1 = 0,50 \text{ m}$ ,  $R_2 = 1,0 \text{ m}$ ,  $q_1 = +2,0 \cdot 10^{-6} \text{ C}$  i  $q_2 = +1,0 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ . Porównać z rys. 29-18.

45. Przestrzeń między dwiema wspólnosrodkowymi kulami o promieniach  $r_1$  i  $r_2$  jest wypełniona niewprowadzącym materiałem o jednorodnej gęstości ładunku  $\varrho$ . Znaleźć potencjał elektryczny  $V$  jako funkcję odległości  $r$  od środka kul, rozpatrując obszary (a)  $r > r_2$ , (b)  $r_2 > r > r_1$  i (c)  $r < r_1$ . (d) Czy te rozwiązania zgadzają się, gdy  $r = r_2$  i gdy  $r = r_1$ ?

Odp.: (a)  $\frac{\varrho}{3\epsilon_0} \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{r}$ . (b)  $\frac{\varrho}{3\epsilon_0} \left( \frac{3}{2} r_2^2 - \frac{r^2}{2} - \frac{r_1^2}{r} \right)$ , (c)  $\frac{\varrho}{2\epsilon_0} (r_2^2 - r_1^2)$ . (d) Tak.

46. Dwie metalowe kule o promieniu 3,0 cm mają ładunki równe  $+1,0 \cdot 10^{-8} \text{ C}$  i  $-3,0 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ . Zakładamy, że ładunki te są rozłożone równomiernie. Obliczyć: (a) potencjał w punkcie znajdującym się w połowie odległości między ich środkami, (b) potencjał każdej kuli. Odległość między środkami kul wynosi 2,0 m.

47. Dwie identyczne przewodzące kule o promieniu  $r = 0,15 \text{ m}$  oddalone są od siebie o  $a = 10,0 \text{ m}$ . Jaki ładunek ma każda kula, jeżeli potencjał jednej wynosi  $+1500 \text{ V}$ , a drugiej  $-1500 \text{ V}$ ?

Odp.:  $\pm 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ C}$

48. Dwie przewodzące kule o promieniach 6,0 cm i 12,0 cm mają ładunek o wartości  $3 \cdot 10^{-8} \text{ C}$  każda i znajdują się w bardzo dużej odległości od siebie. Jeżeli kule połączono by przewodzącym drutem,

znaleźć: (a) kierunek ruchu i wielkość przemieszczonego ładunku i (b) ostateczny ładunek i potencjał każdej z kul.

49. Na rysunku 29-19 przyjąć  $R_1 = 1,0$  cm i  $R_2 = 2,0$  cm. Przed połączeniem kul cienkim przewodnikiem na mniejszej kuli umieszczono ładunek  $2,0 \cdot 10^{-7}$  C, większa kula pozostała nienalażowana. Obliczyć: (a) ładunek, (b) powierzchniową gęstość ładunku i (c) potencjał każdej z kul po ich połączeniu.

Odp.: (a)  $q_1 = 0,67 \cdot 10^{-7}$  C,  $q_2 = 1,33 \cdot 10^{-7}$  C. (b)  $\sigma_1 = 2,1 \cdot 10^{-4}$  C/m<sup>2</sup>,  $\sigma_2 = 1,1 \cdot 10^{-4}$  C/m<sup>2</sup>. (c)  $V_1 = V_2 = 6,0 \cdot 10^4$  V.

50. Potencjał przy powierzchni kulistej kropli wody, mającej ładunek  $3 \cdot 10^{-11}$  C, wynosi 500 V.

(a) Jaki jest promień kropli? (b) Dwie takie krople o tym samym promieniu i ładunku łączą się tworząc pojedynczą kulistą kroplę. Jaki jest potencjał na powierzchni tak powstałej kropli?

#### Paragraf 29-9

51. (a) Jak duży ładunek jest potrzebny, aby potencjał izolowanej kuli metalowej o promieniu 1,0 m wzrósł do  $1,0 \cdot 10^6$  V? Powtórzyć to samo dla kuli o promieniu 1,0 cm. (b) Dlaczego w generatorze elektrostatycznym stosuje się dużą kulę, skoro ten sam potencjał można uzyskać za pomocą mniejszego ładunku umieszczonego na małej kuli?

Odp.: (a)  $1,1 \cdot 10^{-4}$  C;  $1,1 \cdot 10^{-6}$  C. (b) Z powodu większego pola  $E$  przy powierzchni mniejszej kuli (sprawdzić), ładunek upływałby szybciej.

52. Cząstka  $\alpha$  jest przyspieszana w generatorze elektrostatycznym za pomocą różnicy potencjałów  $10^6$  V. (a) Jaką energię kinetyczną uzyska ta cząstka? (b) Jaką energię kinetyczną w tych samych warunkach uzyskałby proton? (c) Która z cząstek, będących początkowo w spoczynku, osiągnie większą prędkość?

53. Niech różnica potencjałów między powłoką generatora elektrostatycznego i punktem, w którym ładunki są nazywane na poruszający się pas, będzie równa  $3,0 \cdot 10^6$  V. Jaką moc należy dostarczyć do napędzania pasa, jeżeli szybkość przenoszenia ładunku wynosi  $3,0 \cdot 10^{-3}$  C/s? Rozpatrywać wyłącznie siły elektryczne.

Odp.: 9,0 kW.

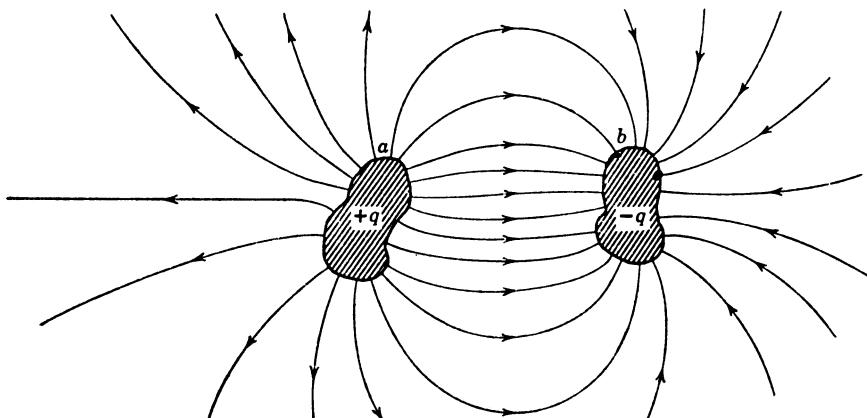
54. Elektroda wysokich napięć w generatorze elektrostatycznym jest naładowaną metalową kulistą powłoką o potencjale  $V(+9,0 \cdot 10^6$  V). (a) Wyładowanie elektryczne w gazie pojawia się w tym urządzeniu w polu  $E(1,0 \cdot 10^8$  V/m). Jaki warunek musi spełniać promień  $r$  tej powłoki, aby uniknąć takiego wyładowania? (b) Długi, poruszający się pas gumowy przenosi na powłokę ładunek  $3,0 \cdot 10^{-4}$  C/s, potencjał powłoki pozostaje stały z powodu upływności ładunku przez izolatory. Jaka minimalna moc wymagana jest do przeniesienia ładunku? (c) Pas ma szerokość  $w$  (0,5 m) i przesuwa się z prędkością  $v$  (30 m/s). Jaka jest powierzchniowa gęstość ładunku na pasie?

# 30. Kondensatory i dielektryki

## 30-1. Pojemność

Na rys. 30-1 pokazane są dwa obok siebie umieszczone przewodniki  $a$  i  $b$  mogące mieć dowolne kształty. Zakładamy, że są one całkowicie odizolowane od otoczenia i mają równe, lecz różnoimienne ładunki  $+q$  i  $-q$ . Każda linia sił, która zaczyna się na przewodniku  $a$ , kończy się na przewodniku  $b$ . Zakładamy ponadto, że tymczasowo przewodniki te otacza próżnia.

Kondensator z rys. 30-1 scharakteryzowany jest ładunkiem o wielkości  $q$  na każdym przewodniku i różnicą potencjałów między nimi o wielkości  $V$ . Podkreślamy, że (a)  $q$  nie jest wypadkowym ładunkiem na kondensatorze, gdyż ten równa się zeru, (b)  $V$  nie jest po-



Rys. 30-1. Dwa izolowane przewodniki całkowicie odizolowane od otoczenia o różnych, lecz różnoimennych ładunkach tworzą kondensator

tencjałem żadnego z przewodników — odnoszonym do potencjału zerowego w nieskończoności — lecz różnicą potencjałów między nimi.

Nie jest trudną rzeczą naładować równymi co do wartości, lecz przeciwnymi co do znaku ładunkami przewodniki takie jak na rys. 30-1. Nie musimy ładować ich oddzielnie.

Wszystko co należy zrobić, to tymczasowo połączyć przewodniki z przeciwnymi biegunami baterii. Równe i przeciwe ładunki ( $\pm q$ ) pojawią się automatycznie.

Na razie stwierdzamy bez dowodu, że  $q$  i  $V$  dla dowolnego kondensatora są do siebie proporcjonalne, czyli

$$q = CV, \quad (30-1)$$

gdzie  $C$  jest stałą proporcjonalności zwaną *pojemnością* kondensatora. Stwierdzamy — znowu na razie bez dowodu — że pojemność  $C$  zależy od kształtu i wzajemnego położenia przewodników. Pokażemy w paragrafie 30-2 dla trzech ważnych szczególnych przypadków, że  $C$  rzeczywiście zależy od tych zmiennych. Pojemność  $C$  zależy od ośrodka, który oddziela przewodniki (patrz paragraf 30-4).

W układzie SI jednostką pojemności, wynikającą z równania (30-1), jest  $C/V$ . Jednostka ta nazywana jest *faradem* na cześć Michaela Faradaya, który obok innych badań w dziedzinie fizyki zajmował się również pojęciem pojemności. Zatem

$$1F = 1 C/V.$$

W praktyce wygodniejszymi jednostkami są jednostki mniejsze: *mikrofarad* ( $1 \mu F = 10^{-6} F$ ) i *pikofarad* ( $1 pF = 10^{-12} F$ ).

Można przeprowadzić analogię między kondensatorem mającym ładunek  $q$  i sztywnym zbiornikiem o objętości  $V$ , zawierającym  $n$  moli gazu doskonałego.

Zgodnie z równaniem stanu gazu doskonałego (równ. (23-2)) w ustalonej temperaturze ciśnienie gazu  $p$  jest wprost proporcjonalne do  $n$ , czyli

$$n = \frac{V}{RT} p.$$

Dla kondensatora (równ. (30-1))

$$q = CV.$$

Porównując te dwa wyrażenia widzimy, że przy ustalonej temperaturze pojemność kondensatora dla gazu jest analogiczna do objętości  $V$  zbiornika.

Zauważmy, że ilość ładunku, jaka może być umieszczona na kondensatorze, podobnie jak ilość masy gazu, która może być umieszczona w zbiorniku, mają określone granice. Granice te odpowiadają: elektrycznemu przebiciu („iskrzenie”) w przypadku kondensatora i rozerwaniu łańcuków w przypadku zbiornika.

Kondensatory są bardzo pożytecznymi urządzeniami o dużym znaczeniu dla fizyków i inżynierów. Na przykład:

(1) W książce tej staramy się podkreślić znaczenie *pól* dla zrozumienia zjawisk fizycznych. Za pomocą kondensatora można wytworzyć żądaną konfigurację pól elektrycznych mających różne zastosowanie. W paragrafie 27-5 opisywaliśmy odchylenie wiązki elektronów w jednorodnym polu elektrycznym wytworzonym przez kondensator, chociaż nie używaliśmy tam nazwy kondensator. W dalszych paragrafach będziemy omawiać zachowanie się materiałów umieszczonych w polu elektrycznym (wytworzonym w łatwy sposób za pomocą kondensatora) i zobaczymy, jak można uogólnić prawa elektromagnetyzmu, uwzględniając obecnośćiał dielektrycznych.

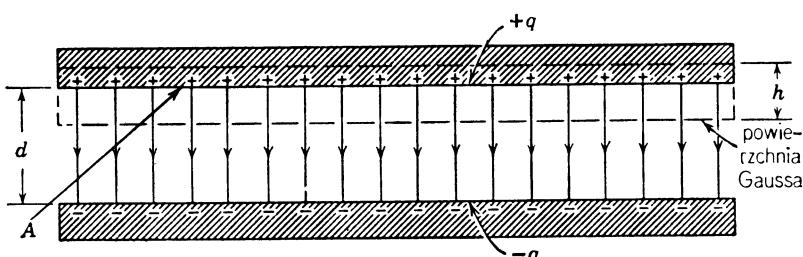
(2) Drugim pojęciem, często stosowanym w tej książce, jest *energia*. Rozpatrując naładowany kondensator wykażemy, że można uważać, że energia elektryczna jest zamagazynowana w polu elektrycznym między okładkami kondensatora i podobnie w każdym,

w dowolny inny sposób wytworzonym polu elektrycznym. Ponieważ kondensatory mogą wytwarzać silne pola elektryczne w małych objętościach, mogą one służyć jako pożyteczne urządzenia do magazynowania energii. W wielu elektronowych synchrotronach, będących urządzeniami podobnymi do cyklotronów i służących do przyspieszania elektronów, energia wytwarzana i magazynowana w ciągu względnie długiego czasu w dużych zespołach kondensatorów może być wykorzystywana w sposób nieciągły do przyspieszania elektronów przez rozładowywanie kondensatorów w czasie znacznie krótszym od czasu ładowania. Również w wielu badaniach i urządzeniach w fizyce plazmy wykorzystuje się gwałtowne wyładowania tak nagromadzonej energii.

(3) Era elektroniki nie mogłaby istnieć bez kondensatorów. W połączeniu z innymi urządzeniami używa się ich do zmniejszania wahań napięć w elektronowych zasilaczach, do przenoszenia sygnałów impulsowych, do wytwarzania i detekcji drgań elektromagnetycznych o częstotliwościach radiowych, do utrzymywania opóźnień czasowych i do wielu innych celów. W większości tych zastosowań różnica potencjałów okładek nie będzie stała, jak zakładamy w tym rozdziale, lecz będzie zmieniać się w czasie, często sinusoidalnie albo impulsowo. W dalszych rozdziałach rozpatrzmy niektóre zastosowania kondensatora użytego jako element obwodu z prądem.

### 30-2. Obliczanie pojemności

Rysunek 30-2 przedstawia *kondensator płaski*, w którym przewodniki z rysunku 30-1 tworzą układ złożony z dwóch równoległych okładek o powierzchni  $A$ , umieszczonych w odległości  $d$ . Jeśli chwilowo okładki połączymy z zaciskami baterii, to na jednej okładce automatycznie pojawi się ładunek  $+q$ , a na drugiej ładunek  $-q$ . Jeżeli  $d$  jest małe w porówn-



Rys. 30-2. Kondensator płaski z przewodnikami (okładkami) o powierzchni  $A$ . Przerywane linie przedstawiają powierzchnie Gaussa, których wysokość jest  $h$ , a część dolna i górna powierzchni mają kształt i wymiary okładek kondensatora

naniu z wymiarami okładek, to natężenie pola elektrycznego  $E$  między okładkami będzie jednorodne, co oznacza, że linie sił będą równoległe i równomiernie rozmieszczone. Prawa elektromagnetyzmu (patrz zadanie 14, rozdział 35) wymagają pewnego „rozproszenia” linii przy brzegach okładek, lecz przy dostatecznie małym  $d$  w naszych rozważaniach można to zaniedbać.

Chcemy obliczyć pojemność opisanego urządzenia posługując się prawem Gaussa, co będzie jeszcze jedną ilustracją użyteczności tego prawa w przypadkach prostej geometrii. Rysunek 30-2 przedstawia (linie przerywane) powierzchnię Gaussa o wysokości  $h$ , zamkniętą płaskimi powierzchniami  $A$ , o kształcie i wielkości okładek kondensatora. Strumień

wektora  $\mathbf{E}$  jest równy zeru dla pionowej części powierzchni Gaussa, która leży wewnątrz górnej okładki kondensatora, ponieważ wewnątrz przewodnika mającego ładunek stały nie istnieje pole elektryczne. Strumień wektora  $\mathbf{E}$  przez boczne ścianki powierzchni Gaussa jest równy zeru, ponieważ dzięki zaniedbaniu rozproszenia linii sił wektor  $\mathbf{E}$  leży w płaszczyźnie ścianki.

Pozostaje jedynie ta strona powierzchni Gaussa, która leży między okładkami. Tu wektor  $\mathbf{E}$  jest stały, a strumień  $\Phi_E$  wynosi po prostu  $EA$ . Prawo Gaussa daje więc

$$\epsilon_0 \Phi_E = \epsilon_0 EA = q. \quad (30-2)$$

Pracę potrzebną do przeniesienia ładunku prawnego  $q_0$  z jednej okładki na drugą można wyrazić albo jako  $q_0 V$  (patrz rów. (29-1)), albo jako iloczyn siły  $q_0 E$  i odległości  $d$ , czyli  $q_0 Ed$ . Wyrażenia te muszą być równe, czyli

$$V = Ed. \quad (30-3)$$

Formalnie równanie (30-3) jest specjalnym przypadkiem ogólnej zależności (rów. (29-5); patrz także przykład 1, rozdział 29)

$$V = - \int \mathbf{Edl},$$

gdzie  $V$  jest różnicą potencjałów okładek. Całka może być wzięta po dowolnej drodze zaczynającej się na jednej i kończącej na drugiej okładce, ponieważ każda okładka stanowi powierzchnię ekwipotencjalną i praca wykonana przez siłę elektrostatyczną nie zależy od drogi. Jakkolwiek najprostszą drogą między okładkami jest linia prosta, prostopadła do dwu okładek, równanie (30-3) jest słuszne bez względu na wybór drogi całkowania.

Jeśli do zależności  $C = q/V$  podstawimy równania (30-2) i (30-3), to otrzymamy

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\epsilon_0 EA}{Ed} = \frac{\epsilon_0 A}{d}. \quad (30-4)$$

Równanie (30-4) stosuje się tylko do kondensatorów płaskich; dla kondensatorów o innej geometrii obowiązują inne wzory. To równanie pokazuje dla konkretnego przypadku, że  $C$  rzeczywiście zależy od geometrii przewodników (okładek) jak zaznaczaliśmy w paragrafie 30-1. Zarówno  $A$  jak i  $d$  są czynnikami geometrycznymi.

W paragrafie 26-4 stwierdziliśmy, że  $\epsilon_0$ , które po raz pierwszy spotkaliśmy w związku z prawem Coulomba, nie było mierzone w oparciu o to prawo z powodu trudności eksperymentalnych. Równanie (30-4) sugeruje, że  $\epsilon_0$  można zmierzyć budując kondensator o dokładnie znanej powierzchni okładek i odległości między nimi oraz doświadczalnie określając jego pojemność z zależności  $C = q/V$  przez pomiar  $q$  i  $V$ . Równanie (30-4) można rozwiązać ze względu na  $\epsilon_0$ , znajdując wartość liczbową  $\epsilon_0$  jako funkcję mierzonych wielkości  $A$ ,  $d$  i  $C$ ; w ten sposób przeprowadzono dokładne pomiary  $\epsilon_0$ .

**Przykład 1.** Równolegle okładki wypełnionego powietrzem kondensatora płaskiego są odległe o 1 mm. Jaka musi być powierzchnia każdej z okładek, aby pojemność kondensatora była równa 1,0 F?

Z równania (30-4)

$$A = \frac{dC}{\epsilon_0} = \frac{1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 1,0 \text{ F}}{8,9 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)} = 1,1 \cdot 10^8 \text{ m}^2.$$

Jest to powierzchnia kwadratu o boku 10,5 km; widzimy, że farad jest rzeczywiście dużą jednostką.

**Przykład 2. Kondensator cylindryczny.** Kondensator cylindryczny składa się z dwóch współosiowych cylindrów (rysunek 30-3) o promieniach  $a$  i  $b$  oraz długości  $l$ . Jaka jest pojemność tego urządzenia? Za-

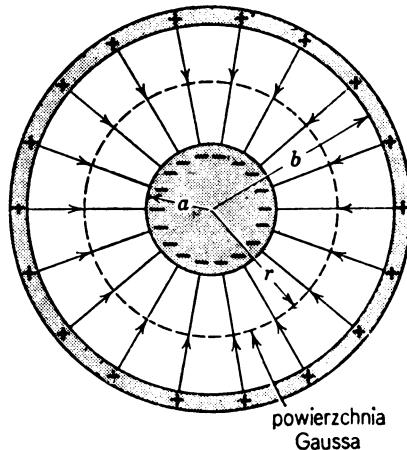
łóżmy, że kondensator jest bardzo długi (tzn.  $l \gg b$ ), tak że rozproszenie linii sił na końcach może być pominięte przy obliczaniu pojemności.

Jako powierzchnię Gaussa przyjmujemy umieszczony współosiowo z poprzednimi cylinder o promieniu  $r$  i długości  $l$ , zamknięty płaskimi podstawami. Z prawa Gaussa (równ. 28-6)  $\oint \mathbf{E} d\mathbf{s} = q$  otrzymujemy

$$\varepsilon_0 E 2\pi r l = q,$$

gdyż cały strumień przechodzi przez powierzchnię boczną cylindra, a nie przez jego podstawy.

Po przekształceniu otrzymujemy  $E = q/(2\pi\epsilon_0 rl)$ .



Rys. 30-3. Przykład 2. Przekrój poprzeczny kondensatora cylindrycznego. Przerywany okrąg jest przekrojem cylindrycznej powierzchni Gaussa o promieniu  $r$  i długości  $l$ .

Różnica potencjałów okładek dana jest równaniem (29-5); zauważmy że  $E$  i  $dl (= dr)$  są skierowane przeciwnie, czyli

$$V = - \int_a^b \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{E} dr = \int_a^b \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{b}{a}.$$

**Ostatecznie pojemność wynosi**

$$C = \frac{q}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(b/a)}.$$

Podobnie jak pojemność kondensatora płaskiego (równ. (30-4)) i ta pojemność zależy tylko od czynników geometrycznych  $l$ ,  $b$  i  $a$ .

**Przykład 3. Pojemość izolowanej kuli.** W paragrafie 29-8 pokazaliśmy, że potencjał izolowanej, przewodzącej kuli o promieniu  $R$ , niosącej ładunek  $q$  dany jest wyrażeniem

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}. \quad (30-5)$$

Możemy traktować tę kulę jako jedną płytę kondensatora, którego drugą płytą jest przewodząca kula o promieniu nieskończonym dużym i potencjał  $V = 0$  na powierzchni tej kuli.

Pojemność kuli o promieniu  $R$  jest zatem dana z równania (30-5) wyrażeniem

$$C = q/V = 4\pi\epsilon_0 R. \quad (30-6)$$

Pojawił się promień  $R$  jako jedyny czynnik geometryczny.

**Przykład 4. Kondensatory połączone równolegle.** Na rysunku 30-4 przedstawione są trzy kondensatory połączone równolegle. Jaką pojemność  $C$  musi mieć pojedynczy kondensator, aby była ona równoważna pojemności tego układu? „Równoważność” oznacza, że jeśli równolegle połączono kondensatory oraz

odpowiedni pojedynczy kondensator będą znajdować się w skrzynkach, podłączone przewodnikami  $a$  i  $b$  do zacisków, to przez pomiary elektryczne nie można będzie rozróżnić skrzynek.

*Różnica potencjałów na każdym kondensatorze (rys. 30-5) w połączeniu równolegim jest taka sama.* Wynika to stąd, że wszystkie górne okładki są połączone ze sobą i z zaciskiem  $a$ , podczas gdy wszystkie dolne okładki są połączone ze sobą i z zaciskiem  $b$ . Zastosowanie zależności  $q = CV$  do każdego kondensatora z osobna daje

$$q_1 = C_1 V, \quad q_2 = C_2 V, \quad q_3 = C_3 V.$$

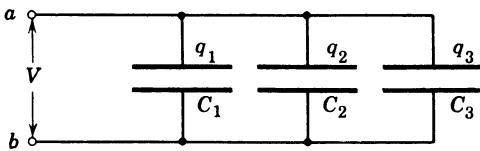
Całkowity ładunek układu jest równy

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = (C_1 + C_2 + C_3) V.$$

Równoważna pojemność  $C$  wynosi

$$C = \frac{q}{V} = C_1 + C_2 + C_3.$$

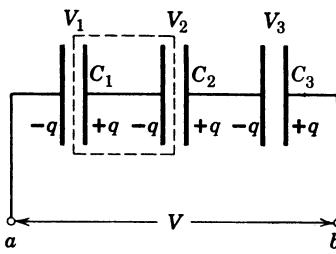
Wynik ten można łatwo rozszerzyć na dowolną liczbę kondensatorów połączonych równolegle.



Rys. 30-4. Przykład 4. Trzy kondensatory połączone równolegle. Dla uproszczenia wybrano dla kondensatora symbol ( $\dashv\vdash$ ). Mimo że symbol sugeruje kondensator płaski, oznacza on kondensator o dowolnej geometrii

**Przykład 5. Kondensatory połączone szeregowo.** Na rysunku 30-5 przedstawione są trzy kondensatory połączone szeregowo. Jaką pojemność  $C$  musi mieć pojedynczy kondensator, aby była ona „równoważna” (patrz przykład 4) pojemności tego układu?

*W kondensatorach połączonych szeregowo (rys. 30-5) wartość bezwzględna ładunku  $q$  na każdej płytce musi być ta sama.* Wynika to stąd, że wypadkowy ładunek na części obwodu objętej linią przerywaną na rys. 30-5 musi być równy zeru, ponieważ wypadkowy ładunek początkowy istniejący na tych okładkach



Rys. 30-5. Przykład 5. Trzy kondensatory połączone szeregowo

jest równy零, a podłączenie baterii do  $a$  i  $b$  spowoduje tylko rozdzielenie ładunków, pozostawiając wypadkowy ładunek na tych okładkach nadal równy zero. Jeśli założymy, że ani w  $C_1$ , ani w  $C_2$  nie ma „przebić”, to nie ma żadnego sposobu, aby ładunek mógł wejść albo wyjść z obszaru objętego linią przerywaną.

Zastosowanie zależności  $q = CV$  do każdego kondensatora daje

$$V_1 = \frac{q}{C_1}, \quad V_2 = \frac{q}{C_2}, \quad V_3 = \frac{q}{C_3}.$$

Wypadkowa różnica potencjałów przy połączeniu szeregowym wynosi

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right).$$

Równoważna pojemność

$$C = \frac{q}{V} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}},$$

czyli

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

Równoważna pojemność dla szeregowego połączenia kondensatorów jest zawsze mniejsza od najmniejszej pojemności w układzie.

### 30-3. Energia pola elektrycznego

W paragrafie 29-6 widzieliśmy, że wszystkie układy ładunków mają pewną, elektryczną energię potencjalną  $U$ , równą pracy  $W$  (dodatniej lub ujemnej), która musi być dostarczona na utworzenie ich z pojedynczych ładunków, przy założeniu, że pierwotnie ładunki te znajdują się nieskończenie daleko od siebie i spoczywają. Ta energia potencjalna przypomina energię potencjalną zgromadzoną w ściśniętej sprężynie lub grawitacyjną energię potencjalną, zawartą np. w układzie Ziemia-Księżyc.

Rozpatrzmy prosty przykład. Aby rozdzielić dwa różne, lecz różnoimienne ładunki, trzeba wykonać pracę. Związana z tą pracą energia jest zmagazynowana w układzie i może być zwrócona, jeśli pozwolić ładunkom znowu się zbliżyć. Podobnie naładowany kondensator przechowuje w sobie elektryczną energię potencjalną  $U$  równą pracy niezbędnej do naładowania go. Możemy unaoczyć tę pracę wyobrażając sobie, że jakiś czynnik zewnętrzny wyciąga elektrony z okładki dodatniej i przesuwa je na okładkę ujemną, powodując w ten sposób rozdzielenie ładunków; normalnie pracy potrzebnej do ładowania dostarcza bateria kosztem zapasu swej energii chemicznej.

Przypuśćmy, że w czasie  $t$  z jednej okładki na drugą został przeniesiony ładunek  $q'(t)$ . Różnica potencjałów  $V(t)$  między płytami po tym czasie wynosi  $q'(t)C$ . Aby przenieść dodatkową małą ilość ładunku  $dq'$ , trzeba wykonać małą dodatkową pracę, która będzie równa

$$dW = Vdq = \frac{q'}{C} dq'.$$

Jeżeli proces ten trwa tak długo, aż zostanie przeniesiony cały ładunek  $q$ , to całkowita praca wynosi

$$W = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}. \quad (30-7)$$

Na podstawie zależności  $q = CV$  możemy także napisać

$$W (= U) = \frac{1}{2} CV^2. \quad (30-8)$$

Rozsądnie jest przyjąć, że energia zgromadzona w kondensatorze jest umiejscowiona w polu elektrycznym. Na przykład, gdy w równaniach (30-7) i (30-8) wzrasta  $q$  lub  $V$ , wtedy wzrasta natężenie  $E$  pola elektrycznego; kiedy  $q$  i  $V$  są zerem, wtedy i  $E = 0$ .

Natężenie pola elektrycznego w kondensatorze płaskim, pomijając rozproszenie w pobliżu brzegów, ma tę samą wartość we wszystkich punktach między okładkami. Wobec tego gęstość energii  $u$ , która jest energią zawartą w jednostce objętości pola, winna być także stała;  $u$  (patrz równ. (30-8)) jest dane przez

$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{\frac{1}{2} CV^2}{Ad},$$

gdzie  $Ad$  jest objętością przestrzeni między okładkami. Podstawienie zależności  $C = \epsilon_0 A/d$  (równ. (30-4)) prowadzi do

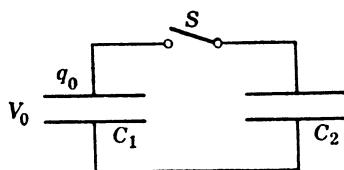
$$u = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{V}{d} \right)^2.$$

Ale  $V/d$  jest natężeniem  $E$  pola elektrycznego, tak że

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2. \quad (30-9)$$

Równanie to jest słuszne ogólnie, mimo że wyrowadzono je tylko dla specjalnego przypadku kondensatora płaskiego. Jeżeli w jakimkolwiek punkcie przestrzeni istnieje pole elektryczne o natężeniu  $E$ , to możemy uważać, że w punkcie tym jest zmagazynowana energia w ilości  $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$  na jednostkę objętości.

**Przykład 6.** Kondensator  $C_1$  ładowemy do różnicy potencjałów  $V_0$ . Następnie bateria ładowająca zostaje odłączona, a kondensator połączony, jak na rys. 30-6, z nienalożonym kondensatorem  $C_2$ .



Rys. 30-6. Przykład 6. Kondensator  $C_1$  jest ładowany do różnicy potencjałów  $V_0$ , a następnie dołączony do kondensatora  $C_2$  przez zamknięcie wyłącznika  $S$

(a) Jaka różnica potencjałów  $V$  ustali się w tym układzie? Pierwotny ładunek  $q_0$  jest teraz rozdzielony między dwa kondensatory. Zatem

$$q_0 = q_1 + q_2.$$

Zastosowanie zależności  $q = CV$  do każdego z wyrazów daje

$$C_1 V_0 = C_1 V + C_2 V,$$

skąd

$$V = V_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

Sugeruje to sposób pomiaru nieznanej pojemności (powiedzmy  $C_2$ ) przy pomocy znanej.

(b) Jaka jest energia układu przed i po zamknięciu przełącznika (rys. 30-6)? Na początku zgromadzona jest energia

$$U_0 = \frac{1}{2} C_1 V_0^2.$$

Na końcu

$$U = \frac{1}{2} C_1 V^2 + \frac{1}{2} C_2 V^2 = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) \left( \frac{V_0 C_1}{C_1 + C_2} \right)^2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U_0.$$

Tak więc  $U$  jest mniejsze od  $U_0$ . Dla  $C_1 = C_2$  w rzeczywistości,  $U = \frac{1}{2} U_0$ .

To nie jest złamanie zasady zachowania energii. W przykładzie zakłada się milcząco idealny (a nie rzeczywisty — laboratoryjny) obwód, w którym opór (rozdział 31) i indukcyjność (rozdział 36) przewodów łączących przyjęto jako zerowe.

W rzeczywistym obwodzie laboratoryjnym „brakująca” energia odnalazłaby się jako energia termiczna w przewodach albo jako energia wypromieniowana z obwodu w postaci promieniowania elektromagnetycznego (rozdział 4). Dokładną dyskusję tego zagadnienia można znaleźć w pracy: Camillo Cuvaj, On Conservation of Energy in Electric Circuits, *American Journal of Physics*, 1968.

**Przykład 7.** Izolowana przewodząca kula o promieniu  $R$  umieszczona w próżni ma ładunek  $q$ . (a) Obliczyć całkowitą energię elektrostatyczną nagromadzoną w otaczającej przestrzeni.

W dowolnej odległości  $r$  od środka kuli (zakładając, że  $r > R$ )  $E$  jest dane wzorem

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

Gęstość energii w dowolnej odległości  $r$  znajdujemy z równania (30-9), czyli

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4}.$$

Energia  $dU$  zawarta wewnętrz powłoki ograniczonej promieniami  $r$  i  $r+dr$ :

$$dU = 4\pi r^2 dr u = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2},$$

gdzie  $4\pi r^2 dr$  jest objętością powłoki. Całkowitą energię znajdujemy całkując powyższe wyrażenie, a więc

$$U = \int dU = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Zauważmy, że zależność ta wynika natychmiast z równania (30-7) ( $U = q^2/2C$ ), gdzie  $C$  (patrz przykład 3) jest pojemnością ( $= 4\pi\epsilon_0 R$ ) odosobnionej kuli o promieniu  $R$ .

(b) Jaki jest promień  $R_0$  takiej kulistej powierzchni, wewnętrz której zawiera się połowa całkowej energii?

W ostatnim równaniu zamiast  $U$  piszemy  $\frac{1}{2}U$ , skąd

$$\frac{1}{2} U = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_R^{R_0} \frac{dr}{r^2},$$

czyli

$$\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 R} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right).$$

Stąd po przekształceniu otrzymujemy

$$R_0 = 2R.$$

A więc najwięcej energii jest zmagazynowane w pobliżu kuli.

### 30-4. Kondensator płaski z dielektrykiem

Równanie (30-4) obowiązuje tylko dla kondensatora płaskiego, którego okładki znajdują się w próżni. Michael Faraday w 1837 r. po raz pierwszy badał, jaki wpływ wywarze zapełnianie przestrzeni między okładkami dielektrykiem, patrz tablica 30-1: przykłady dielektryków dzisiaj stosowanych. Faraday powiedział: „Pytanie może być postawione w ten sposób: przypuśćmy, że  $A$  jest naelektryzowaną płytą metalu, zawieszoną w powietrzu, a  $B$  i  $C$  — dwiema zupełnie podobnymi płytami umieszczonymi równolegle,

w różnych odległościach po obu stronach  $A$  i odizolowanymi;  $A$  będzie wtedy jednakowo wpływać na  $B$  i  $C$  (tzn. na tych płytach pojawią się równe ładunki). Jeżeli przy tym samym położeniu płytka między  $A$  i  $C$  zostanie wprowadzony jakiś inny dielektryk niż powietrze, np. szelak, to czy wzajemny wpływ płytka pozostanie taki sam? Czy wpływ  $C$  i  $B$  na  $A$  nie zmieni się, mimo różnicy w rodzajach dielektryków wstawionych między

Tablica 30-1. *Własności niektórych dielektryków\**

Materiał	Stała dielektryczna	Wytrzymałość na przebicie** (kV/mm)
próżnia	1,000 00	
powietrze	1,000 54	0,8
woda	78	—
papier	3,5	14
mika rubinowa	5,4	160
porcelana	6,5	4
kwarc topiony	3,8	8
szkło pyreksowe	4,5	13
bakelit	4,8	12
polietylen	2,3	50
bursztyn	2,7	90
polistyren	2,6	25
teflon	2,1	60
neopren	6,9	12
olej transformatorowy	4,5	12
dwutlenek tytanu	100	6

\* Własności te występują w temperaturze w przybliżeniu pokojowej i w takich warunkach, w których pole elektryczne  $E$  w dielektryku nie zmienia się w czasie.

\*\* Jest to maksymalny gradient potencjału, jaki może istnieć w dielektryku bez wystąpienia przebicia elektrycznego. Dielektryk często umieszcza się między przewodzącymi okładkami, aby można było przykładać do nich większe różnice potencjałów niż w przypadku powietrza jako dielektryka.

nie"? Faraday odpowiedział na to pytanie budując dwa identyczne kondensatory; w jednym z nich umieścił dielektryk, a w drugim pozostawił powietrze pod normalnym ciśnieniem, gdy oba kondensatory były naładowane *do tej samej różnicy potencjałów*. Faraday stwierdził doświadczalnie, że ładunek na kondensatorze zawierającym dielektryk był większy niż na kondensatorze bez dielektryka; patrz rys. 30-7a.

Ponieważ w obecności dielektryka  $q$  jest większe przy tym samym  $V$ , więc z zależności  $C = q/V$  wynika, że pojemność kondensatora wzrasta, jeżeli między okładkami umieszcza się dielektryk. Stosunek pojemności kondensatora z dielektrykiem\* do pojemności bez dielektryka nazywamy *stałą dielektryczną  $\kappa$*  (lub *względną przenikalnością elektryczną*) danego dielektryka, patrz tabl. 30-1.

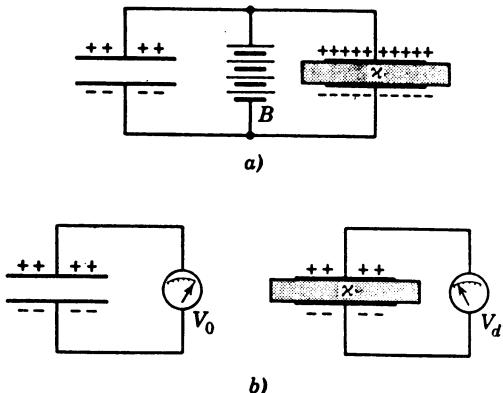
Zamiast podrzymywać tę samą różnicę potencjałów na obu kondensatorach, możemy umieścić na nich *jednakowe ładunki*, jak na rys. 30-7b. Doświadczenie wykazuje, że różnica

\* Przy założeniu, że dielektryk całkowicie wypełnia przestrzeń między okładkami.

potencjałów  $V_d$  na prawym kondensatorze jest mniejsza niż na lewym o czynnik  $1/\kappa$ , czyli

$$V_d = \frac{V_0}{\kappa}.$$

Doszliśmy znowu, na podstawie zależności  $C = q/V$ , do stwierdzenia, że dielektryk powoduje wzrost pojemności o czynnik  $\kappa$ .



Rys. 30-7. (a) Bateria  $B$  podtrzymuje tę samą różnicę potencjałów na każdym z kondensatorów; kondensator znajdujący się z prawej strony ma większy ładunek. (b) Oba kondensatory mają równe ładunki; na prawym jest mniejsza różnica potencjałów, co wskazują odpowiednie przyrządy

Dla kondensatora płaskiego możemy jako wynik doświadczalny napisać

$$C = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d}. \quad (30-10)$$

Równanie (30-4) jest specjalnym przypadkiem tej zależności, otrzymanym przez podstawienie  $\kappa = 1$ , odpowiadającym obecności próżni między okładkami. Doświadczenie pokazuje, że pojemność wszystkich typów kondensatorów wzrasta o czynnik  $\kappa$ , jeżeli przestrzeń między okładkami jest wypełniona dielektrykiem. W ten sposób pojemność dowolnego kondensatora można zapisać w postaci

$$C = \kappa \epsilon_0 L,$$

gdzie  $L$  zależy od geometrii kondensatora i ma wymiar długości. Dla kondensatora płaskiego (patrz równ. (30-4))  $L$  jest równe  $A/d$ ; dla kondensatora cylindrycznego (patrz przykład 2) wynosi  $2\pi l / \ln(b/a)$ .

**Przykład 8.** Kondensator płaski ma okładki o powierzchni  $A$ , odległe od siebie o  $d$ . Bateria ładuje okładki do różnicy potencjałów  $V_0$ . Następnie baterię odłączamy i między okładki wprowadzamy płytę dielektryczną o grubości  $d$ . Obliczyć energię zawartą w kondensatorze przed i po wprowadzeniu płytki i wyjaśnić, skąd bierze się różnica.

Energia  $U_0$  przed wprowadzeniem płytki jest równa

$$U_0 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2.$$

Po umieszczeniu płytki mamy

$$C = \kappa C_0, \quad V = \frac{V_0}{\kappa},$$

a więc

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \kappa C_0 \left( \frac{V_0}{\kappa} \right)^2 = \frac{1}{\kappa} U_0.$$

Energia po wprowadzeniu płytki jest mniejsza o czynnik  $1/\kappa$ . „Straconą” energię otrzymuje osoba wkładająca płytke. Będzie ona odczuwać „holowanie” przez płytke i musi się temu przeciwstawić, jeżeli chce włożyć płytke bez przyspieszenia. To znaczy, że musi ona wykonać pracę ujemną, albo odwrotnie, że układ kondensator + płytka wykona pracę dodatnią. Ta dodatnia praca wynosi

$$W = U_0 - U = \frac{1}{2} C_0 V_0^2 \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right).$$

Jak oczekiwano,  $W = 0$  dla  $\kappa = 1$ .

W następnym paragrafie omówimy szczegółowo, jak powstaje opisane powyżej „oddziaływanie” związane z przyciąganiem pomiędzy tzw. „wolnymi” ładunkami na płytach kondensatora a ładunkami „indukowanymi” na dielektryku.

Zwróćmy uwagę, że z zależności  $U = \frac{1}{2} CV^2$  (patrz równ. 30-8) możemy wyprowadzić wzór na gęstość energii  $u$  dla kondensatora płaskiego z dielektrykiem, czyli

$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{1}{Ad} \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{Ad} \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \kappa A}{d} V^2,$$

a ponieważ  $E = V/d$ , więc

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 \kappa E^2.$$

Zależność ta, chociaż wyprowadzona dla kondensatora płaskiego, podobnie jak w przypadku równania (30-9) obowiązuje również w przypadku ogólnym, tzn. w dowolnym punkcie  $P$  dielektryka o stałej  $\kappa$ .

Jak mogliśmy oczekwać dla  $\kappa = 1$ , ta nowa zależność redukuje się do równ. (30-9).

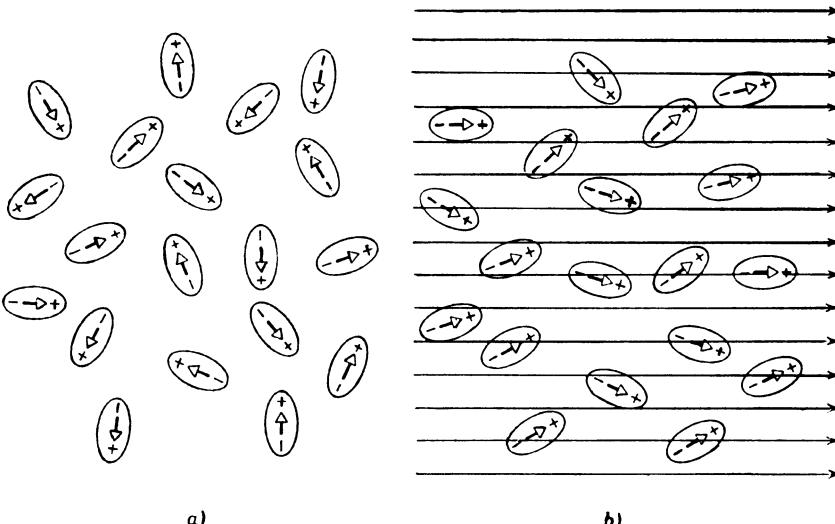
### 30-5. Dielektryki. Pogląd atomistyczny

Spróbujmy teraz zrozumieć z atomistycznego punktu widzenia, co się dzieje, kiedy dielektryk jest umieszczony w polu elektrycznym. Istnieją dwie możliwości. Cząsteczki niektórych dielektryków, np. wody (patrz rys. 29-11) mają trwałe elektryczne momenty dipolowe. W takich substancjach (zwanych *polarnymi*) elektryczne momenty dipolowe pączą do ustalenia się zgodnego z kierunkiem zewnętrznego pola elektrycznego, jak pokazano na rys. 30-8b (patrz także paragraf 27-6). Ponieważ cząsteczki znajdują się w nieustannym ruchu cieplnym, więc stopień uporządkowania jest niezupełny, lecz wzrasta, gdy wzrasta natężenie przykładanego pola lub gdy maleje temperatura.

Umieszczone w polu elektrycznym cząsteczki, niezależnie od tego czy mają trwały moment dipolowy, czy też nie, mogą uzyskać moment dipolowy przez *indukcję*. W paragrafie 29-5 widzieliśmy, że zewnętrzne pole elektryczne dąży do rozdzielenia ujemnego i dodatniego ładunku w atomie lub cząsteczce. Ten *indukowany elektryczny moment dipolowy* istnieje tylko w obecności pola elektrycznego. Jest on proporcjonalny do natężenia pola elektrycznego (przy umiarkowanych natężeniach pola) i wzrasta liniowo z natężeniem pola elektrycznego, jak to widać na rys. 29-12.

Posłużymy się płaskim kondensatorem, nie podłączonym do baterii i mającym określony ładunek  $q$  (patrz rys. 30-7b), do wytwarzania jednorodnego pola elektrycznego o natężeniu  $E_0$ , w którym umieścimy płytke dielektryczną. W wyniku indukcji i uporządkowania dipoli elektrycznych następuje niewielkie odsunięcie środka dodatniego ładunku całej płytke od środka ładunku ujemnego. Chociaż płytka jako całość pozostaje elektrycznie obojętna, staje się ona częściowo *spolaryzowana*, jak przedstawia rysunek 30-9b. W rezultacie dodatni ładunek gromadzi się na prawej ścianie płytki, a ujemny na lewej; w ele-

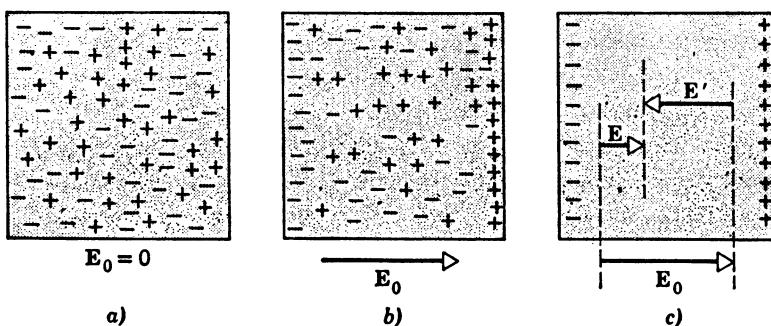
mentach objętości wewnętrz płytka nie pojawia się nadmiar ładunku. Ponieważ płytka jako całość pozostaje elektrycznie obojętna, więc dodatni, *indukowany ładunek powierzchniowy* musi być równy co do wielkości ujemnemu indukowanemu ładunkowi powierzchniowemu.



Rys. 30-8. (a) Bezładne ustawienie cząsteczek o trwałym momencie dipolowym, gdy nie ma zewnętrznego pola elektrycznego. (b) Przyłożone pole elektryczne powoduje częściowe uporządkowanie ustawienia dipoli. Ruch cieplny zapobiega zupełnemu uporządkowaniu

Zauważmy, że w tym procesie elektryny w dielektryku przemieszczają się ze swych położen równowagi na odległości znacznie mniejsze od średnicy atomu. Nie ma tu przenoszenia ładunku na odległości makroskopowe, jak przy przepływie prądu w przewodniku.

Rysunek 30-9c pokazuje, że indukowane ładunki powierzchniowe układają się zawsze w taki sposób, aby wytworzone przez nie pole elektryczne ( $E'$ ) przeciwstawało się zew-



Rys. 30-9. (a) Przestrzenny rozkład dodatnich i ujemnych ładunków w płytce dielektrycznej. (b) Zewnętrzne pole elektryczne  $E_0$ , wytworzone przez włożenie płytki między okładki płaskiego kondensatora (nie pokazanego na rysunku), odsuwa nieco środek ładunku dodatniego od środka ładunku ujemnego, powodując pojawienie się ładunków powierzchniowych. W żadnym elemencie objętości wewnętrz płytka nie istnieje wypadkowy, niezrównoważony ładunek. (c) Ładunki powierzchniowe wytworzą pole  $E'$ , skierowane przeciwnie niż zewnętrzne pole  $E_0$ , związane z ładunkami na okładkach kondensatora. Wypadkowe pole  $E (= E_0 + E')$  w dielektryku jest zatem mniejsze od  $E_0$

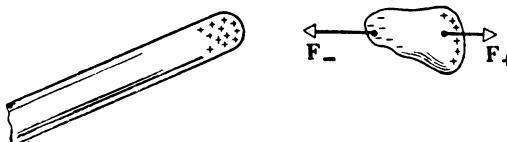
nętrznemu polu elektrycznemu  $E_0$ . Wypadkowe natężenie pola  $E$  w dielektryku jest wektorową sumą  $E_0$  i  $E'$ . Jest ono skierowane tak samo jak  $E_0$ , ale jest od niego mniejsze. Jeśli dielektryk jest umieszczony w polu elektrycznym, to pojawiają się indukowane ładunki powierzchniowe, które prowadzą do osłabienia pierwotnego pola wewnętrz dielektryka.

To osłabienie pola elektrycznego ujawnia się na rysunku 30-7b w postaci zmniejszenia się różnicy potencjałów na okładkach naładowanego odizolowanego kondensatora po wprowadzeniu pomiędzy jego okładki dielektryka. Zależność  $V = Ed$  dla kondensatora płaskiego (patrz równ. (30-3)) obowiązuje niezależnie od obecności dielektryka i stwierdza, że zmniejszenie się  $V$  przedstawione na rys. 30-7b wiąże się bezpośrednio ze zmniejszeniem się  $E$  przedstawionym na rys. 30-9. Ścisłe mówiąc, jeśli dielektryczna płytka jest umieszczona w izolowanym, naładowanym kondensatorze płaskim, to

$$\frac{E_0}{E} = \frac{V_0}{V_d} = \kappa, \quad (30-11)$$

przy czym symbole po lewej stronie równania odnoszą się do rys. 30-9, a symbole  $V_0$  i  $V_d$  do rys. 30-7b\*.

Powstawanie indukowanych ładunków powierzchniowych wyjaśnia najbardziej elementarne zjawisko z elektrostatyki — przyciąganie przez naładowany pręt nienalałowanych kawałków papieru. Na rysunku 30-10 przedstawiony jest kawałek papieru w polu naładowanego pręta. Ładunki powierzchniowe indukują się na papierze w pokazany sposób. Ujemnie naładowany koniec kawałka papieru jest przyciągany do pręta, a koniec



Rys. 30-10. Naładowany pręt przyciąga nienalałowany kawałek papieru, ponieważ na indukowane ładunki powierzchniowe działają niezrównoważone siły

naładowany dodatnio — odpychany. Te dwie siły nie są równe co do wielkości, ponieważ ujemny koniec, będąc bliżej pręta, znajduje się w silniejszym polu i doznaje działania większej siły. Rezultatem jest przyciąganie papieru. W jednorodnym polu elektrycznym na ciało dielektryczne nie działa żadna niezrównoważona siła.

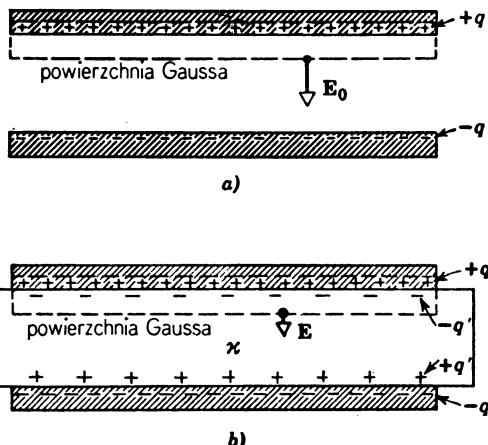
W przykładzie 8 zwróciliśmy uwagę na to, że jeżeli wprowadzimy dielektryczną płytke do płasko-równoległego kondensatora niosącego ładunek  $q$ , to pojawi się siła wciągająca tę płytke do wnętrza kondensatora. Siła ta wynika z przyciągania elektrostatycznego między ładunkami  $\pm q$  na płytach kondensatora a indukowanymi ładunkami  $\mp q'$  na płytce dielektrycznej. Kiedy płytka jest tylko częściowo wsunięta między okładki kondensatora, wtedy ani ładunek  $q$ , ani  $q'$  nie jest jednorodnie rozłożony. Proponujemy, aby czytelnik naszkicował jakościowo możliwy rozkład ładunków  $q$  i  $q'$  dla przypadku, kiedy płytka dielektryczna jest wsunięta do połowy między okładki kondensatora.

\* Równanie (30-11) nie obowiązuje, jeżeli podczas wprowadzania dielektryka do kondensatora jest podłączona bateria. W tym przypadku  $V$  (a więc i  $E$ ) nie może się zmienić. Natomiast ładunek  $q$  na okładkach kondensatora wzrośnie o czynnik  $\kappa$ , jak widzimy to na rys. 30-7a.

### 30-6. Dielektryki i prawo Gaussa

Dotychczas stosowaliśmy prawo Gaussa jedynie do przypadków, w których nie występował dielektryk. Zastosujmy teraz prawo do kondensatora płaskiego wypełnionego dielektrykiem o stałej dielektrycznej  $\kappa$ .

Rysunek 30-11 przedstawia kondensator z dielektrykiem i bez dielektryka. Zakładamy, że ładunek  $q$  na okładkach jest ten sam w obu przypadkach. Powierzchnie Gaussa poprowadzono tak samo jak na rys. 30-2.



Rys. 30-11. Kondensator płaski (a) bez dielektryka i (b) z dielektrykiem. Zakłada się, że ładunek  $q$  na okładkach w obu przypadkach jest ten sam

Gdy w kondensatorze nie ma dielektryka (rys. 30-11a), na podstawie prawa Gaussa (patrz równ. (30-5)) otrzymujemy

$$\varepsilon_0 \oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \varepsilon_0 E_0 A = q,$$

czyli

$$E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 A}. \quad (30-12)$$

Gdy w kondensatorze jest dielektryk (rys. 30-11b), na podstawie prawa Gaussa otrzymujemy

$$\varepsilon_0 \oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \varepsilon_0 E A = q - q',$$

czyli

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 A} - \frac{q'}{\varepsilon_0 A}, \quad (30-13)$$

gdzie  $-q'$  jest *indukowanym ładunkiem powierzchniowym*, który należy odróżnić od  $q$ , tzw. *swobodnego ładunku* na okładkach. Te dwa ładunki, oba leżące wewnątrz powierzchni Gaussa, mają przeciwnie znaki:  $q-q'$  jest niezrównoważonym ładunkiem znajdującym się wewnątrz powierzchni Gaussa.

Z równania (30-11) wynika, że (rys. 30-11)

$$E = \frac{E_0}{\kappa}.$$

Porównując to z równaniem (30-12) dostajemy

$$E = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{q}{\kappa \epsilon_0 A}. \quad (30-14)$$

Wstawienie tego do równania (30-13) daje

$$\frac{q}{\kappa \epsilon_0 A} = \frac{q}{\epsilon_0 A} - \frac{q'}{\epsilon_0 A}, \quad (30-15a)$$

czyli

$$q' = q \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right). \quad (30-15b)$$

Widać stąd wyraźnie, że indukowany ładunek powierzchniowy  $q'$  jest zawsze mniejszy od swobodnego ładunku  $q$  i jest równy zeru, gdy nie ma dielektryków, tzn. gdy  $\kappa = 1$ .

Napiszmy teraz, dla przypadku z rys. 30-11b, prawo Gaussa w postaci

$$\epsilon_0 \oint E dS = q - q', \quad (30-16)$$

gdzie  $q - q'$  jest znowu niezrównoważonym ładunkiem znajdującym się wewnątrz powierzchni Gaussa. Podstawiając  $q'$  z równania (30-13b), po pewnych przekształceniach otrzymamy

$$\epsilon_0 \oint \kappa E dS = q. \quad (30-17)$$

Ta ważna zależność, chociaż wprowadzona tylko dla kondensatora płaskiego, jest prawdziwa ogólnie i w tej postaci pisze się zwykle prawo Gaussa w przypadkach, gdy występują dielektryki. Zauważmy co następuje:

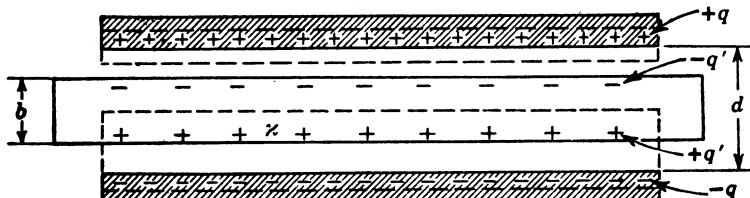
(1) Całkowity strumień zawiera teraz czynnik  $\kappa$ .

(2) Jako ładunek  $q$  zamknięty wewnątrz powierzchni Gaussa bierzymy *tylko ładunek swobodny*. Indukowany ładunek powierzchniowy jest rozmyślnie pominięty po prawej stronie tego równania, a uwzględniony po lewej stronie dzięki wprowadzeniu  $\kappa$ . Równania (30-16) i (30-17) stanowią całkowicie równoważne sformułowania.

**Przykład 9.** Rysunek 30-12 przedstawia płytę dielektryczną o grubości  $b$  i stałej dielektrycznej  $\kappa$ , umieszczoną między okładkami płaskiego kondensatora o powierzchni  $A$  i odległości  $d$ . Do kondensatora, przed wstawieniem płytki dielektrycznej, podłączamy baterię. Następnie odłączamy baterię i wstawiamy płytę dielektryczną. Przyjąć:  $A = 100 \text{ cm}^2$ ,  $d = 1,0 \text{ cm}$ ,  $b = 0,5 \text{ cm}$ ,  $\kappa = 7,0$  i  $V_0 = 100 \text{ V}$ . (a) Znaleźć pojemność  $C_0$  przed wstawieniem płytki.  $C_0$  znajdziemy z równania (30-4):

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{(8,9 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2))(10^{-2} \text{ m}^2)}{10^{-2} \text{ m}} = 8,9 \text{ pF}.$$

(b) Znaleźć ładunek swobodny  $q$ .



Rys. 30-12. Przykład 9. Płaski kondensator z płytą dielektryczną

Z równania (30-1) mamy

$$q = C_0 V_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot 100 \text{ V} = 8,9 \cdot 10^{-10} \text{ C.}$$

Dzięki technice użytej do ładowania kondensatora ładunek swobodny  $q$  nie zmienia się po wprowadzeniu płytki. Nie miałoby to miejsca, gdyby bateria ładująca nie została odłączona.

(c) Obliczyć natężenie pola elektrycznego w szczelinie. Stosując do powierzchni Gaussa przedstawionej na rys. 30-12 (górną okładka) prawo Gaussa w postaci danej równaniem (30-17) otrzymujemy

$$\epsilon_0 \oint \kappa E dS = \epsilon_0 E_0 A = q,$$

czyli

$$E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 A} = \frac{8,9 \cdot 10^{-10} \text{ C}}{(8,9 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2))(10^{-2} \text{ m}^2)} = 1,0 \cdot 10^4 \text{ V/m.}$$

Zauważmy, że przyjęliśmy  $\kappa = 1$ , ponieważ powierzchnia, dla której obliczamy całkę strumienia, nie przekształca się przez dielektryk. Zauważmy także, że  $E_0$  nie zmienia się na skutek wprowadzenia płytki; obliczając  $E_0$  nie uwzględnialiśmy obecności dielektryka.

(d) Obliczyć natężenie pola elektrycznego w dielektryku. Stosując równanie (30-17) powierzchni Gaussa z rys. 30-12 (dolna okładka) otrzymamy

$$\epsilon_0 \oint \kappa E dS = \epsilon_0 \kappa E A = q.$$

Zauważmy, że tu występuje  $\kappa$ , ponieważ powierzchnia przecina dielektryk, a po prawej stronie równania występuje tylko ładunek swobodny. W ten sposób otrzymujemy

$$E = \frac{q}{\kappa \epsilon_0 A} = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{1,0 \cdot 10^4 \text{ V/m}}{7,0} = 0,14 \cdot 10^4 \text{ V/m.}$$

(e) Obliczyć różnicę potencjałów na kondensatorze.

Stosując równanie (29-5) na prostej prostopadłej drodze od dolnej okładki ( $D$ ) do górnej ( $G$ ) otrzymujemy

$$V = - \int_D^G E dl = - \int_D^G E \cos 180^\circ dl = \int_D^G E dl = E_0(d-b) + Eb.$$

Liczbowo

$$V = (1,0 \cdot 10^4 \text{ V/m})(5 \cdot 10^{-3} \text{ m}) + (0,14 \cdot 10^4 \text{ V/m})(5 \cdot 10^{-3} \text{ m}) = 57 \text{ V.}$$

Wartość ta różni się od pierwotnie przyłożonej różnicy potencjałów 100 V; porównać z rysunkiem 30-7b.

(f) Obliczyć pojemność kondensatora z płytą dielektryczną.

Z równania (30-1) mamy

$$C = \frac{q}{V} = \frac{8,9 \cdot 10^{-10} \text{ C}}{57 \text{ V}} = 16 \text{ pF.}$$

Po wprowadzeniu płytki dielektrycznej różnica potencjałów spada od 100 do 57 V, a pojemność rośnie od 8,9 do 16 pF, czyli o czynnik 1,8. Gdyby płyta dielektryczna całkowicie wypełniała kondensator, to pojemność wzrosłaby o czynnik  $\kappa (= 7,0)$  do 62 pF.

### 30-7. Trzy wektory elektryczne

Dla wszystkich przypadków, jakie rozpatrujemy w tej książce, to co powiedzieliśmy o zachowaniu się dielektryków w polu elektrycznym jest wystarczające. Jednakże zagadnienia omawiane tutaj, takie jak np. prostokątna płyta umieszczona prostopadłe do jednorodnego, zewnętrznego pola elektrycznego, są bardzo proste. W trudniejszych zagadnieniach, takich jak np. znajdowanie  $E$  w środku dielektrycznej elipsoidy umieszczonej w zewnętrznym, niejednorodnym polu elektrycznym, bardzo upraszcza pracę i pozwala na lepsze zrozumienie natury zjawisk, wprowadzenie nowego formalizmu.

Przepiszemy równanie (30-15a), które stosuje się do płaskiego kondensatora z dielektrykiem, w postaci

$$\frac{q}{A} = \epsilon_0 \frac{q}{\kappa \epsilon_0 A} + \frac{q'}{A}. \quad (30-18)$$

Wielkość w nawiasie (patrz rów. (30-14)) jest po prostu natężeniem  $E$  pola elektrycznego w dielektryku. Ostatni wyraz w równaniu (30-18) jest *indukowanym ładunkiem powierzchniowym na jednostkę powierzchni*. Nazywamy go *polaryzacją elektryczną*  $P$ , czyli

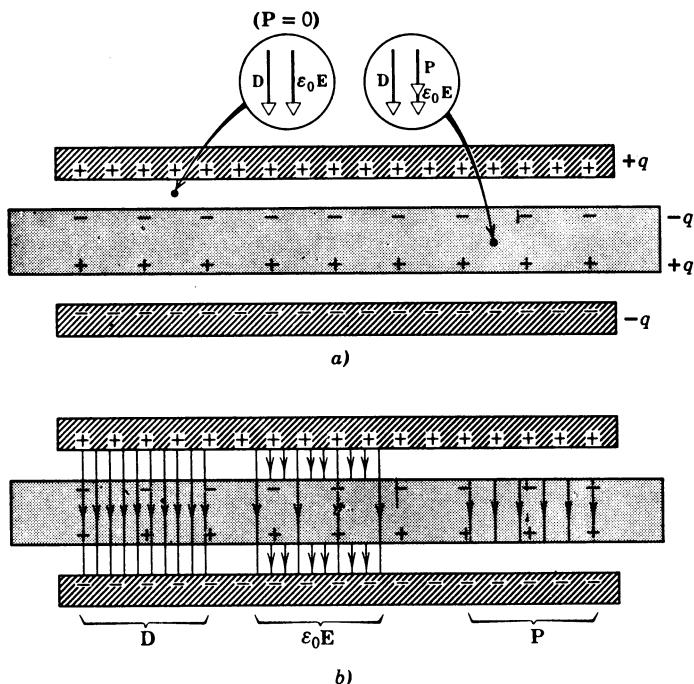
$$P = \frac{q'}{A}. \quad (30-19)$$

Nazwa ta jest odpowiednia, ponieważ indukowany ładunek powierzchniowy  $q'$  (zwany także ładunkiem polaryzacji) pojawia się podczas polaryzacji dielektryka.

Polaryzację elektryczną  $P$  można określić w sposób równoważny, mnożąc licznik i mianownik w równaniu (30-19) przez  $d$  — grubość płytki dielektrycznej przedstawionej na rys. (30-11),

$$P = \frac{q'd}{Ad}, \quad (30-20)$$

Licznik jest iloczynem  $q'd$ , tzn. wielkości ładunków polaryzacyjnych (równych i przeciwnego znaku) i odległości między nimi. Jest to więc elektryczny indukowany moment dipolowy płytki dielektrycznej. Ponieważ mianownik  $Ad$  jest objętością płytki, widzimy, że polaryzację elektryczną można inaczej zdefiniować jako indukowany, elektryczny moment dipolowy na jednostkę objętości dielektryka. Definicja sugeruje, że polaryzacja elektryczna jest wektorem o wartości  $P$ , ponieważ elektryczny moment dipolowy jest wektorem. Wektor  $P$  ma zwrot od ujemnego do dodatniego ładunku indukowanego, jak w każdym dipolu. Na rysunku 30-13, który przedstawia kondensator z płytą dielektryka wypełniającą połowę przestrzeni między okładkami,  $P$  ma zwrot w dół.



Rys. 30-13. (a) Wektory  $D$ ,  $\epsilon_0 E$  i  $P$  w dielektryku (kółko z prawej strony) i w szczelinie powietrznej (kółko z lewej strony) płaskiego kondensatora. (b) Przykłady linii związkowych z polami wektorów:  $D$  (ładunek swobodny),  $\epsilon_0 E$  (wszystkie ładunki) i  $P$  (ładunek polaryzacyjny)

Możemy teraz przepisać równanie (30-18) w postaci

$$\frac{q}{A} = \epsilon_0 E + P. \quad (30-21)$$

Wielkość występująca z prawej strony równania pojawia się tak często w problemach elektrostatycznych, że dajemy jej specjalną nazwę *indukcji elektrycznej* (lub *przesunięcia elektrycznego*)  $D$ , czyli

$$D = \epsilon_0 E + P, \quad (30-22a)$$

gdzie

$$D = \frac{q}{A}. \quad (30-22b)$$

Nazwa ta ma tylko historyczne znaczenie.

Ponieważ  $E$  i  $P$  są wektorami, to  $D$  także musi być wektorem, wobec czego w ogólniejszym przypadku mamy

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (30-23)$$

Na rysunku 30-13 wszystkie trzy wektory są zwrócone w dół i każdy z nich ma stałą wielkość w każdym punkcie dielektryka, a także w każdym punkcie szczeliny powietrznej. W tym przypadku wektorowa postać równania (30-23) jest bez znaczenia. Jednakże w bardziej skomplikowanych problemach wektory  $E$ ,  $P$  i  $D$  mogą od punktu do punktu zmieniać swoją wielkość i kierunek.

Z definicji tych wektorów wynika, że

1. Wektor  $\mathbf{D}$  (patrz równ. (30-22b)) wiąże się wyłącznie z *ładunkiem swobodnym*. Możemy przedstawić pole wektora  $D$  z pomocą *linii D*, tak jak przedstawiamy pole wektora  $E$  za pomocą linii sił. Na rysunku 30-13b widzimy, że linie wektora  $D$  zaczynają się i kończą na ładunkach swobodnych.

2. Wektor  $\mathbf{P}$  (patrz równ. (30-19)) wiąże się wyłącznie z *ładunkiem polaryzacyjnym*. Jego pole wektorowe można także przedstawić za pomocą odpowiednich linii. Na rysunku 30-13b widzimy, że linie wektora  $P$  zaczynają się i kończą na ładunkach polaryzacyjnych.

3. Wektor  $\mathbf{E}$  jest związany z całkowitym, aktualnie istniejącym ładunkiem, zarówno swobodnym jak i polaryzacyjnym. Linie wektora  $E$ , jak widzimy na rys. 30-13b, odzwierciedlają obecność obu rodzajów ładunków. Zauważmy (równ. (30-19) i (30-22b)), że jednostki  $P$  i  $D$  [ $C/m^2$ ] różnią się od jednostek  $E$  [ $N/C$ ].

Wektor pola elektrycznego  $E$ , określający siłę działającą na odpowiednio umieszczony ładunek próbny, zachowuje swoje podstawowe znaczenie.  $D$  i  $P$  są wektorami pomocniczymi, użytecznymi przy rozwiązywaniu zagadnień bardziej skomplikowanych niż zagadnienie przedstawione na rys. 30-13.

Wektory  $D$  i  $P$  można wyrazić za pomocą samego tylko wektora  $E$ . Wygodnym punktem wyjścia jest tożsamość

$$\frac{q}{A} = \kappa \epsilon_0 \frac{q}{\kappa \epsilon_0 A}.$$

Korzystając z równań (30-14) i (30-22b) możemy napisać następujące równanie na  $D$ , w postaci wektorowej:

$$\mathbf{D} = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E}.$$

Również polaryzację (patrz równ. (30-19) i (30-15b)) można zapisać w postaci

$$P = \frac{q'}{A} = \frac{q}{A} \left( 1 - \frac{1}{\kappa} \right).$$

Ponieważ  $q/A = D$ , więc możemy posługując się równaniem (30-24) i przedstawiając wynik w postaci wektorowej, przepisać to równanie jako

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 (\kappa - 1) \mathbf{E}. \quad (30-25)$$

Widac stąd wyraźnie, że w próżni ( $\kappa = 1$ ) wektor polaryzacji równa się zeru\*.

\* Niektóre rodzaje wosku, po spolaryzowaniu ich w stanie stopionym zachowują trwałą polaryzację po zestaleniu się, nawet po wyłączeniu polaryzującego pola zewnętrznego. Wykonane w ten sposób elektrety są elektrostatycznymi analogonami magnesów trwałych, pod tym względem, że mają bardzo trwały elektryczny moment dipolowy. Materiały, z których mogą być wytwarzane elektrety, nazywają się *ferroelektrykami*. Elektrety nie podlegają równaniu (30-25), ponieważ mają nieznikającą wartość  $P$ , nawet gdy  $E = 0$ .

Z równań (30-24) i (30-25) wynika, że w materiałach izotropowych, którym można przypisać pojedynczą stałą dielektryczną  $\kappa$ , zarówno  $\mathbf{D}$  jak i  $\mathbf{P}$  mają w dowolnym punkcie ten sam zwrot co  $\mathbf{E}$ .

Definicja wektora  $\mathbf{D}$ , dana równaniem (30-24), upoważnia do napisania równania (30-17), tzn. prawa Gaussa w obecności dielektryków, w postaci

$$\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = q, \quad (30-26)$$

gdzie, jak poprzednio,  $q$  przedstawia wyłącznie ładunek swobodny z pominięciem indukowanych ładunków powierzchniowych.

**Przykład 10.** Rozważmy rys. 30-13. Posługując się danymi z przykładu 9, obliczyć  $E$ ,  $D$  i  $P$ : (a) w dielektryku i (b) w szczelinie powietrznej.

(a) Natężenie pola elektrycznego w dielektryku, wyliczone w przykładzie 9, wynosi  $1,43 \cdot 10^3 \text{ V/m}$ . Z równania (30-24)

$$D = \kappa \epsilon_0 E = 7,0 \cdot (8,9 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)) (1,43 \cdot 10^3 \text{ V/m}) = 8,9 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}^2,$$

a z równania (30-25)

$$P = \epsilon_0 (\kappa - 1) E = (8,9 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)) (7,0 - 1) (1,43 \cdot 10^3 \text{ V/m}) = 7,5 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}^2.$$

(b) Natężenie  $E_0$  pola elektrycznego w szczelinie powietrznej, wyliczone w przykładzie 9, wynosi  $1,00 \cdot 10^4 \text{ V/m}$ . Z równania (30-24)

$$D_0 = \kappa \epsilon_0 E_0 = (1) (8,9 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)) (1,00 \cdot 10^4 \text{ V/m}) = 8,9 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}^2,$$

a z równania (30-25) pamiętając, że w szczelinie powietrznej  $\kappa = 1$ ,

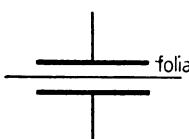
$$P_0 = \epsilon_0 (\kappa - 1) E_0 = 0.$$

Zauważmy, że  $\mathbf{P}$  znika na zewnątrz dielektryka,  $\mathbf{D}$  ma tę samą wartość w dielektryku i w szczelinie, a  $\mathbf{E}$  ma różne wartości w dielektryku i w szczelinie. Łatwo sprawdzić, że równanie (30-23) ( $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ ) obowiązuje zarówno w szczelinie, jak i w dielektryku.

Na podstawie równań Maxwella można wykazać, że niezależnie od rodzaju zagadnienia składowa  $\mathbf{D}$ , normalna do powierzchni dielektryka, ma zawsze tę samą wartość po obu stronach powierzchni. W powyższym zadaniu samo  $\mathbf{D}$  jest normalne do powierzchni i nie ma innej składowej prócz normalnej. Można także wykazać, że składowa  $\mathbf{E}$ , styczna do powierzchni dielektryka, ma zawsze tę samą wartość po obu stronach powierzchni. Ten ostatni warunek brzegowy, podobnie jak warunek dla  $\mathbf{D}$ , jest w naszym zagadnieniu trywialny, gdyż obie składowe styczne równają się zeru. W bardziej złożonych zagadnieniach warunki brzegowe na  $\mathbf{D}$  i  $\mathbf{E}$  są bardzo ważne. Tablica 30-2 podsumowuje własności wektorów elektrycznych  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  i  $\mathbf{P}$ .

### Pytania

1. Kondensator jest podłączony do baterii. (a) Dlaczego każda z okładek otrzymuje ładunek o dokładnie takiej samej wielkości? (b) Czy jest to słuszne również wtedy, gdy okładki są różnej wielkości?
2. Czy dwa blisko siebie leżące przewodniki mające równe ładunki dodatnie mogą mieć różne potencjały?
3. Zależność  $\sigma \propto 1/R$ , gdzie  $R$  jest promieniem krzywizny (patrz paragraf 29-8), sugeruje, że ładunek umieszczony na odosobnionym przewodniku zbiera się na ostrzach, a unika płaskich powierzchni, gdzie  $R = \infty$ . Jak pogodzimy to z rys. 30-2, na którym ładunek znajduje się wyłącznie na płaskiej powierzchni obu okładek?
4. Arkusz folii aluminiowej o nieznacznej grubości umieszczono między okładkami kondensatora (rys. 30-14). Jak wpływa to na pojemność kondensatora, jeżeli (a) folia jest elektrycznie izolowana i (b) folia jest połączona z górną płytka?



Rys. 30-14. Pytanie 4

Tablica 30-2. Wektory elektryczne

Nazwa	Symbol	Z czym jest związany wektor	Warunek brzegowy
näteżenie pola elektrycznego indukcja elektryczna polaryzacja (elektryczny moment dipolowy na jednostkę objętości)	E D P	wszystkie ładunki tylko ładunki swobodne tylko ładunki polaryzacyjne	ciągła składowa styczna ciągła składowa normalna znika w próżni
równanie definicyjne dla E		$F = qE$	równanie (27-2)
ogólny związek między trzema wektorami		$D = \epsilon_0 E + P$	równanie (30-23)
prawo Gaussa w obecności ośrodków dielektrycznych		$\oint D dS = q$ ( $q$ = wyłącznie ładunek swobodny)	równanie (30-26)
empiryczne związki dla pewnych materiałów dielektrycznych*		$D = \alpha \epsilon_0 E$ $P = (\alpha - 1) \epsilon_0 E$	równanie (30-24) równanie (30-25)

\* Ogólnie prawdziwe, z  $\alpha$  niezależnym od E, z wyjątkiem pewnych materiałów zwanych ferroelektrykami: patrz nota na str. 123.

5. Dane są dwa kondensatory,  $C_1$  i  $C_2$ , przy czym  $C_1 \gg C_2$ . Czy  $C_1$  zawsze może być bardziej naładowany od  $C_2$ ? Wyjaśnić to.

6. Założmy, że a i b na rys. 30-1 nie są przewodnikami i że ładunek jest rozmieszczony dowolnie na ich powierzchniach. (a) Czy równ. (30-1) ( $q = CV$ ) byłoby prawdziwe, gdyby C było niezależne od rozmieszczenia ładunku? (b) Jak należałoby zdefiniować V w tym przypadku?

7. W związku z równ. (30-1) ( $q = CV$ ) mówiliśmy, że C jest stałe. Następnie wykaźaliśmy (patrz równ. (30-4)), że C zależy od geometrii (a także, jak zobaczyliśmy później, od ośrodka). Jeżeli C jest rzeczywiście stałe, to względem których zmiennych?

8. Jeżeli A jest skończone, to czy dla  $d \rightarrow \infty$  równ. (30-4) ( $C = \epsilon_0 A/d$ ) jest prawdziwe? Jeżeli nie, to dlaczego?

9. Założmy, że w przykładzie 4 trzy kondensatory są identycznymi kondensatorami płaskimi o kwadratowych okładkach mających taką samą powierzchnię A i taki sam odstęp między okładkami d. Udowodnić, opierając się na równ. (30-4) ( $C = \epsilon_0 A/d$ ), że pojemność zastępcza jest trzy razy większa od pojemności indywidualnej, zgodnie z przewidywaniami z przykładu 4.

10. Dany jest w próżni kondensator płaski o kwadratowych okładkach mających powierzchnię A i oddalonych o d. Jak zmieni się, jakościowo, pojemność w każdym z wymienionych przypadków? (a) Zredukowanie d. (b) Umieszczenie między okładkami miedzianej płyty nie dotykającej ich. (c) Podwojenie powierzchni obu okładek. (d) Podwojenie powierzchni tylko jednej okładki. (e) Przesunięcie jednej z okładek równolegle do drugiej, tak aby wystawała połowę swej powierzchni. (f) Podwojenie różnicy potencjałów między okładkami. (g) Przechylenie jednej okładki, tak aby na jednym końcu kondensatora odległość nadal wynosiła d, a na drugim  $\frac{1}{2}d$ .

11. Przedyskutować podobieństwa i różnice wynikłe z umieszczenia między okładkami płaskiego kondensatora (a) płytka dielektrycznej i (b) płytka przewodzącej. Przyjąć, że grubość płytka równa jest połowie odległości między okładkami.

12. Należało zaprojektować płaski kondensator olejowy o pojemności C, który pracowałby bezpiecznie, bez przebicia, aż do pewnej maksymalnej różnicy potencjałów  $V_m$ . Jednakże projektant nie wywiązał się z zadania i kondensator czasem przebiął. Jak można przekonstruować kondensator, zachowując niezmienione C i  $V_m$  oraz posługując się tym samym dielektrykiem?

13. Czy stała dielektryczna substancji zawierających trwałe cząsteczowe dipole elektryczne będzie zmieniać się wraz z temperaturą?

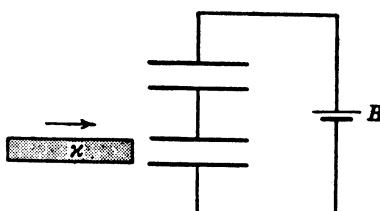
14. Odosobnioną kulę przewodzącą naładowano dodatnio. Czy masa kuli wzrośnie, zmaleje, czy też nie zmieni się?

15. Płytkę dielektryczną wstawiono jednym końcem do naładowanego kondensatora płaskiego (okładki poziome, bateria ładująca odłączona) i puszczone swobodnie. Opisać, co się będzie działo. Tarcie zaniechbać.

16. Kondensator naładowano za pomocą baterii, którą potem odłączono. Następnie między jego okładki wsuwamy płytke dielektryczną. Opisać jakościowo, co dzieje się z ładunkiem, pojemnością, różnicą potencjałów, natężeniem pola elektrycznego i nagromadzoną energią.

17. Płytkę dielektryczną wsuwamy między okładki kondensatora połączonego z baterią. Opisać jakościowo, co dzieje się z ładunkiem, pojemnością, różnicą potencjałów i zgromadzoną energią. Czy wstawienie płytki wymaga pracy?

18. Dwa identyczne kondensatory są połączone ze sobą i z baterią, jak pokazano na rys. 30-15. Płytkę dielektryczną wsuwamy między okładki jednego z kondensatorów, pozostawiając baterię podłączoną. Opisać jakościowo, co dzieje się z ładunkiem, pojemnością, różnicą potencjałów, natężeniem pola elektrycznego i energią nagromadzoną w każdym z kondensatorów.



Rys. 30-15. Pytanie 18

19. Wykazać, że stała dielektryczna przewodnika może być przyjęta za nieskończoność wielką.

20. Czy kondensator z dielektrykiem, przy zadanej różnicy potencjałów, nagromadzi więcej, czy też mniej ładunku niż kondensator bez dielektryka (próżnia)? Wyjaśnić to posługując się mikroskopowym obrazem sytuacji.

21. W tym rozdziale założyliśmy warunki elektrostatyczne, tzn. różnicę potencjału  $V$  między okładkami kondensatora pozostaje stała. Przypuśmy jednak, jak to się często zdarza w praktyce, że  $V$  zmienia się z czasem sinusoidalnie z częstotliwością kątową  $\omega$ . Czy należy zatem oczekwać, że stała dielektryczna będzie się zmieniała z  $\omega$ ?

22. Nawiązując do paragrafu 30-7, opisać własnymi słowami różnice między  $D$ ,  $E$  i  $P$  w równaniu (30-23).

## Zadania

### Paragraf 30-2

1. Kondensator o pojemności 100 pF naładowano do różnicy potencjałów 50 V i odłączono baterię. Następnie kondensator połączono równolegle z drugim kondensatorem początkowo nienalaowanym (rys. 30-14). Jaka jest pojemność drugiego kondensatora, jeżeli mierzona różnica potencjałów zmalała do 35 V?

Odp.: 43 pF.

2. Różnicę potencjałów 300 V przyłożono do połączonych szeregowo kondensatorów: 2,0  $\mu\text{F}$  i 8,0  $\mu\text{F}$ .  
(a) Jaki jest ładunek i różnica potencjałów na każdym z kondensatorów? (b) Naładowane kondensatory rozłączono i połączono razem ich dodatnie okładki oraz razem ujemne, nie przykładając żadnego napięcia zewnętrznego. Jaki jest ładunek i różnica potencjałów na każdym z kondensatorów? (c) Naładowane kondensatory z punktu (a) rozłączono i połączono ze sobą okładki o przeciwnych znakach. Jaki jest ładunek i różnica potencjałów na każdym z kondensatorów?

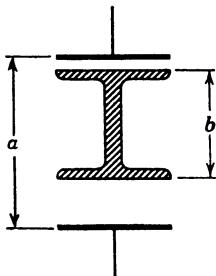
3. Jeśli rozwiążemy równanie (30-4) ze względu na  $\epsilon_0$ , to widzimy, że jednostką  $\epsilon_0$  w układzie SI jest F/m. Pokazać, że jednostka ta jest równoważna wcześniej otrzymanej jednostce dla  $\epsilon_0$ , a mianowicie  $\text{C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$ .

4. Płaski kondensator ma kołowe okładki o promieniu 8,0 cm, odległe o 1,0 mm. Jaki ładunek pojawi się na tych okładkach po przyłożeniu różnicy potencjałów 100 V?

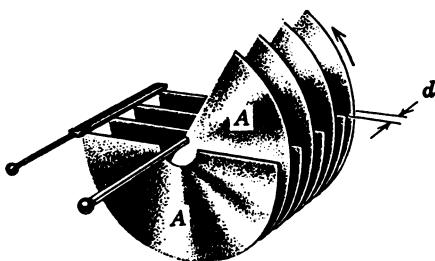
5. Na rysunku 30-16 są przedstawione dwa kondensatory połączone szeregowo. Sztywna część środkowa o długości  $b$  może być przemieszczona w kierunku pionowym. Wykazać, że równoważna pojemność połączenia szeregowego nie zależy od położenia części środkowej i jest dana przez

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{a-b}.$$

6. Na rysunku 30-17 pokazano kondensator powietrzny o zmiennej pojemności używany w radioodbiornikach. Kolejne nieparzyste i kolejne parzyste płytki są połączone razem; jeden zespół płyt jest nieruchomy, drugi może się obracać. Przyjąć, że każdy z tych zespołów ma  $n$  płyt o powierzchni  $A$ , oddalonych od sąsiednich płyt o  $d$ .



Rys. 30-16. Zadanie 5



Rys. 30-17. Zadanie 6

Wykazać, że maksymalna pojemność tego kondensatora wynosi

$$C = \frac{(n-1)\epsilon_0 A}{d}.$$

7. Kondensator o pojemności  $6,0 \mu\text{F}$  jest połączony szeregowo z kondensatorem o pojemności  $4,0 \mu\text{F}$ . Do układu przyłożono różnicę potencjałów 200 V. (a) Jaki jest ładunek każdego kondensatora? (b) Jaka jest różnica potencjałów na każdym kondensatorze?

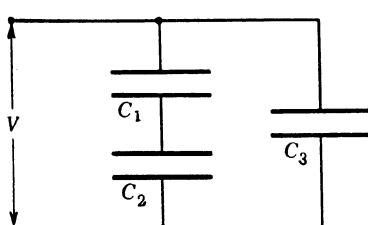
Odp.: (a)  $4,8 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ . (b)  $V_4 = 120 \text{ V}$ ;  $V_6 = 80 \text{ V}$ .

8. Rozwiązać poprzednie zadanie dla dwóch kondensatorów połączonych równolegle.

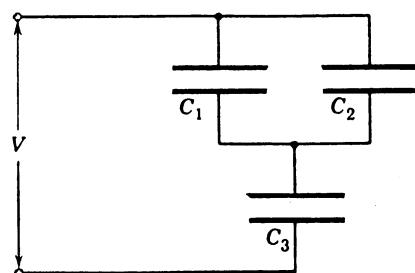
9. Ile kondensatorów o pojemności  $1,0 \mu\text{F}$  należało połączyć równolegle, aby zmagażynować ładunek  $1,0 \text{ C}$  na kondensatorach przy napięciu 300 V?

Odp.: 3300.

10. Znaleźć zastępczą pojemność dla połączenia z rys. 30-18. Założyć, że  $C_1 = 10 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 5 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 4 \mu\text{F}$ .



Rys. 30-18. Zadanie 10



Rys. 30-19. Zadanie 11, 12 i 31

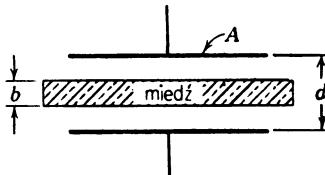
11. Znaleźć zastępczą pojemność dla połączenia z rys. 30-19. Przyjąć  $C_1 = 10 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 5 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 4 \mu\text{F}$ .

Odp.:  $3,2 \mu\text{F}$ .

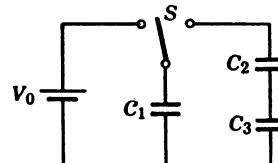
12. Przyjąć, że kondensator  $C_3$  z rys. 30-19 ulega przebiemu, wskutek czego zaczyna przewodzić prąd. Jakie zmiany to spowoduje (a) w ładunku i (b) w różnicy potencjałów na kondensatorze  $C_1$ ? Przyjąć  $V = 100 \text{ V}$ .

13. Płytki miedziane o grubości  $b$  jest umieszczona dokładnie w połowie odległości między okładkami płaskiego kondensatora (rys. 30-20). Jaka jest pojemność (a) przed i (b) po umieszczeniu płytki?

Odp.: (a)  $\epsilon_0 A/d$ . (b)  $\epsilon_0 A/(d-b)$ .



Rys. 30-20. Zadanie 13



Rys. 30-21. Zadanie 14

14. Gdy przełącznik  $S$  jest przerzucony na lewo na rys. 30-21, okładki kondensatora  $C_1$  zyskują różnicę potencjałów  $V_0$ .  $C_2$  i  $C_3$  są początkowo nienalożone. Przełącznik jest teraz przerzucony na prawo. Jakie będą ostatecznie ładunki  $q_1$ ,  $q_2$  i  $q_3$  na odpowiadających im kondensatorach?

15. Ładunki  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  znajdują się na kondensatorach o pojemności odpowiednio  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  połączonych szeregowo jak na rys. 30-22. Zamknięto przełącznik  $S$ . Jakie są ostatecznie ładunki  $q'_1$ ,  $q'_2$ ,  $q'_3$  na kondensatorach?

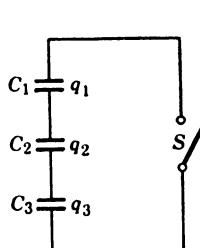
Odp.:

$$(a) q'_1 = \frac{(C_1 C_2 + C_1 C_3) q_1 - C_1 C_3 q_2 - C_1 C_2 q_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3}.$$

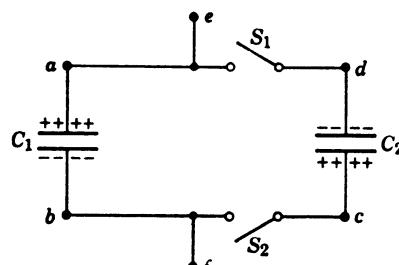
$$(b) q'_2 = \frac{(C_1 C_2 + C_2 C_3) q_2 - C_1 C_2 q_3 - C_2 C_3 q_1}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3}.$$

$$(c) q'_3 = \frac{(C_1 C_3 + C_2 C_3) q_3 - C_1 C_3 q_2 - C_2 C_3 q_1}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3}.$$

16. Mając materiał wystarczający do skonstruowania dwóch kondensatorów płaskich o łącznej powierzchni okładek  $A$ , jak należałoby podzielić tę powierzchnię na dwa kondensatory, aby otrzymać maksymalną całkowitą pojemność, jeżeli zamierza się je połączyć (a) równolegle i (b) szeregowo.



Rys. 30-22. Zadanie 15

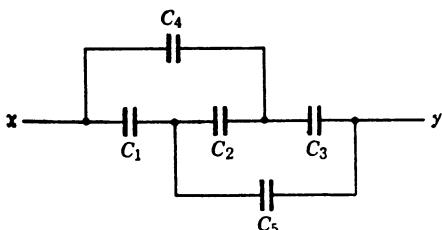


Rys. 30-23. Zadanie 17

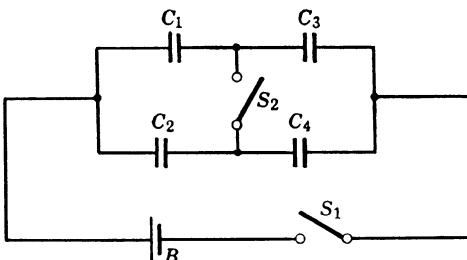
17. Kondensatory  $C_1(1,0 \mu\text{F})$  i  $C_2(3,0 \mu\text{F})$  są naładowane do potencjału  $V(100 \text{ V})$  każdy, ale przeciwnego znaku, tak że punkty  $a$  i  $c$  znajdują się na stronie dodatnich okładek  $C_1$  i  $C_2$ , a punkty  $b$  i  $d$  znajdują się na stronie okładek ujemnych (patrz rys. 30-23). Przełączniki  $S_1$  i  $S_2$  są teraz zamknięte. (a) Jaka jest różnica potencjałów między punktami  $e$  i  $f$ ? (b) Jaki jest ładunek na  $C_1$ ? (c) Jaki jest ładunek na  $C_2$ ?

Odp.: (a)  $50 \text{ V}$ . (b)  $0,50 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ . (c)  $1,5 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ .

18. Znaleźć zastępczą pojemność między punktami  $x$  i  $y$  na rys. 30-24. Założyć, że  $C_2 = 10 \mu\text{F}$ , a wszystkie pozostałe pojemności są równe  $4,0 \mu\text{F}$ . (Wskazówka: Przyłożyć różnicę potencjałów  $V$  między punktami  $x$  i  $y$  oraz wypisać wszystkie zależności, w których występują ładunki i różnice potencjałów na poszczególnych kondensatorach.)



Rys. 30-24. Zadanie 18



Rys. 30-25. Zadanie 19

19. Bateria  $B$  na rysunku 30-25 dostarcza napięcia 12 V. (a) Znaleźć ładunek na każdym kondensatorze, kiedy wyłącznik  $S_1$  jest zamknięty i (b) kiedy później wyłącznik  $S_2$  jest także zamknięty. Przyjąć  $C_1 = 1 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 2 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 3 \mu\text{F}$  i  $C_4 = 4 \mu\text{F}$ .

Odp.: (a)  $q_1 = 90 \mu\text{C}$ ,  $q_2 = 16 \mu\text{C}$ ;  $q_3 = 90 \mu\text{C}$ ,  $q_4 = 16 \mu\text{C}$ .

(b)  $q_1 = 8,4 \mu\text{C}$ ,  $q_2 = 17 \mu\text{C}$ ,  $q_3 = 11 \mu\text{C}$ ,  $q_4 = 14 \mu\text{C}$ .

20. Mając kilka kondensatorów po  $2,0 \mu\text{F}$ , z których każdy wytrzymuje 200 V bez przebicia, obmyślić połączenie mające pojemność zastępczą: (a)  $0,40 \mu\text{F}$  i (b)  $1,2 \mu\text{F}$ , a wytrzymujące bez przebicia 1000 V.

21. Wyliczyć pojemność Ziemi, przyjmując, że jest ona przewodnikiem kulistym o promieniu 6400 km.

Odp.:  $710 \mu\text{F}$ .

22. Kondensator kulisty składa się z dwu koncentrycznych kulistych powłok o promieniach  $a$  i  $b$ , przy czym  $b > a$ . (a) Wykazać, że jego pojemność jest równa

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}.$$

- (b) Czy to redukuje się (gdy  $a = R$ ) do wyniku z przykładu 3, gdy  $b \rightarrow \infty$ ?

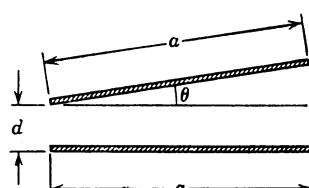
23. Przypuśćmy, że dwie powłoki kondensatora kulistego mają prawie równe promienie. W tych warunkach urządzenie to jest zbliżone do kondensatora płaskiego o  $d = b - a$ . Wykazać, że w tym przypadku wzór z zadania 22 rzeczywiście sprowadza się do równania (30-4).

24. Dwie kule metaliczne, o promieniach  $a$  i  $b$ , są połączone cienkim drutem. Ich oddalenie jest duże w porównaniu z ich rozmiarami. Do układu doprowadzono ładunek  $Q$ , a następnie odłączono drut. (a) Jaki ładunek znajduje się na każdej kuli? (b) Zastosować definicję pojemności dla wykazania, że pojemność tego układu wynosi  $C = 4\pi\epsilon_0(a+b)$ .

25. Kondensator ma kwadratowe okładki o boku  $a$ , tworzące ze sobą kąt, jak na rys. 30-26. Wykazać, że jego pojemność wynosi

$$C = \frac{\epsilon_0 a^2}{d} \left(1 - \frac{a\theta}{2d}\right).$$

(Wskazówka: Kondensator można podzielić na wąskie paski w przybliżeniu równolegle.)



Rys. 30-26. Zadanie 25

### Paragraf 30-3

26. Płaski kondensator powietrzny o powierzchni okładek  $A$  ( $40 \text{ cm}^2$ ) i odstępie ( $1,0 \text{ mm}$ ) jest naładowany do napięcia  $V$  ( $600 \text{ V}$ ). Znaleźć: (a) pojemność, (b) wielkość ładunku na każdej okładce, (c) zmaganizowaną energię, (d) pole elektryczne między okładkami i (e) gęstość energii między okładkami.

27. Jaka pojemność byłaby wymagana do zgromadzenia energii  $U$  ( $10 \text{ kW} \cdot \text{h}$ ) przy różnicy potencjałów  $V$  ( $1000 \text{ V}$ )?

Odp.:  $72 \text{ F}$ .

28. Dwa kondensatory ( $2,0 \mu\text{F}$  i  $4,0 \mu\text{F}$ ) połączono równolegle i naładowano do różnicy potencjałów  $300 \text{ V}$ . Obliczyć całkowitą energię zgromadzoną w tym układzie.

29. Do zmaganizowania energii elektrycznej użyto  $2000$  połączonych równolegle kondensatorów o pojemności  $5 \mu\text{F}$  każdy. Ile kosztuje naładowanie tego układu do  $50\,000 \text{ V}$ , jeżeli cena za  $1 \text{ kWh}$  wynosi  $90 \text{ gr}$ ?

Odp.:  $3 \text{ zł } 15 \text{ gr}$ .

30. Płaski kondensator powietrzny ma pojemność  $100 \text{ pF}$ . (a) Jaka jest jego energia, jeśli różnica potencjałów wynosi  $50 \text{ V}$ ? (b) Czy można obliczyć gęstość energii w punktach między okładkami?

31. Dla układu przedstawionego na rys. 30-19 obliczyć: (a) ładunek, (b) różnicę potencjałów i (c) energię każdego kondensatora. Przyjmując wartości liczbowe z zadania 11,  $V = 100 \text{ V}$ .

Odp.: (a)  $q_1 = 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ ;  $q_2 = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ ;  $q_3 = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ .

(b)  $V_1 = V_2 = 21 \text{ V}$ ;  $V_3 = 79 \text{ V}$ .

(c)  $U_1 = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ J}$ ;  $U_2 = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ J}$ ;  $U_3 = 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ J}$ .

32. Obliczyć energię kondensatorów z zadania 2 dla trzech różnych połączeń (a), (b) i (c). Porównać odpowiedzi i wyjaśnić różnice.

33. Kondensator płaski z okładkami o powierzchni  $A$  odległymi o  $d$  jest naładowany do różnicy potencjałów  $V$ . Następnie bateria ładująca zostaje odłączona, a płytki rozsunięte na odległość  $2d$ . Wyprowadzić w zależności od  $A$ ,  $d$  i  $V$  wyrażenia na: (a) nową różnicę potencjałów, (b) początkową i końcową energię i (c) pracę potrzebną do oddzielenia okładek.

Odp.: (a)  $V_{\text{konc}} = 2 \text{ V}$ . (b)  $U_{\text{pocz}} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A V^2}{d}$ ,  $U_{\text{konc}} = 2U_{\text{pocz}}$ , (c)  $W = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A V^2}{d}$ .

34. Biorąc pod uwagę początkową pojemność  $C$  znaleźć pracę, jaką wykonano umieszczając międziana płytę o grubości  $d/2$  z zadania 13, jeżeli (a) różnica potencjałów jest stała i jeżeli (b) ładunek jest stały.

35. Odosobniona kula metalowa o średnicy  $10 \text{ cm}$  ma potencjał  $8000 \text{ V}$ . Jaka jest gęstość energii przy powierzchni kuli?

Odp.:  $0,11 \text{ J/m}^3$ .

36. (a) Jeżeli podwoi się różnica potencjałów w cylindrycznym kondensatorze, to jak zmieni się energia zmaganizowana w kondensatorze? (b) Jeżeli podwoi się promień wewnętrznego i zewnętrznego cylindra, utrzymując stały ładunek, to jak zmieni się zmaganizowana energia?

37. Kondensator cylindryczny ma promienie  $a$  i  $b$ , jak na rys. 30-3. Wykazać, że połowa zgromadzonej elektrycznej energii potencjalnej jest zawarta wewnątrz cylindra o promieniu

$$r = \sqrt{ab}.$$

38. Wykazać, że okładki płaskiego kondensatora przyciągają się wzajemnie z siłą

$$F = \frac{q^2}{2\epsilon_0 A}.$$

Sprawdzić to, obliczając pracę potrzebną do zwiększenia odległości okładek z  $x$  do  $x + dx$ .

39. Stosując wynik zadania 38 wykazać, że siła na jednostkę powierzchni (naprężenie elektrostatyczne) działająca na jedną z okładek kondensatora jest dana następująco:  $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ . W rzeczywistości wynik ten jest prawdziwy ogólnie, dla przewodnika o jakimkolwiek kształcie z polem elektrycznym  $E$  na jego powierzchni.

40. Bańce mydlanej o promieniu  $R_0$  powoli nadano ładunek  $q$ . Z powodu wzajemnego odpchania się ładunków powierzchniowych promień wzrasta nieco do  $R$ . Ciśnienie powietrza wewnątrz bańki spada, z powodu jej zwiększenia, do  $p(V_0/V)$ , gdzie  $p$  jest ciśnieniem atmosferycznym,  $V_0$  objętością początkową i  $V$  objętością końcową. Wykazać, że

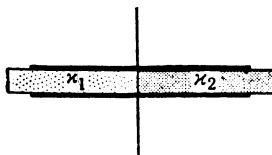
$$q_2 = 32\pi^2 \epsilon_0 p R (R^3 - R_0^3).$$

(Wskazówka: Wyobrazić sobie, że bańka powiększa się o dalsze  $dR$ . Rozpatrzyć zmiany energii związane z (a) spadkiem energii nagromadzonej w polu elektrycznym, (b) pracą ( $= p dV$ ) wykonaną dla zmniejszenia ciśnienia i (c) pracą, jaką wykonyuje gaz w bańce. Zastosować zasadę zachowania energii. Pominąć napięcie powierzchniowe.)

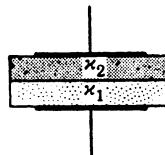
#### Paragraf 30-4

41. Pewna substancja ma stałą dielektryczną 2,8 i wytrzymałość na przebicie  $18 \cdot 10^6$  V/m. Jaką minimalną powierzchnię muszą mieć okładki kondensatora płaskiego, w którym jako dielektryka użyto tej substancji, aby pojemność jego była równa  $7 \cdot 10^{-2}$   $\mu\text{F}$  i aby kondensator wytrzymywał bez przebicia różnicę potencjałów 4000 V?

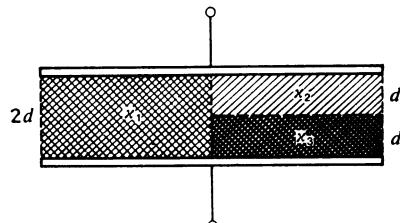
Odp.:  $0,63 \text{ m}^2$ .



Rys. 30-27. Zadanie 42



Rys. 30-28. Zadanie 43



Rys. 30-29. Zadanie 44

42. Płaski kondensator jest wypełniony dwoma dielektrykami, jak pokazano na rys. 30-27. Wykazać, że pojemność jego jest dana wzorem

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \left( \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \right).$$

Sprawdzić ten wzór we wszystkich przypadkach granicznych, jakie można wymyślić. (Wskazówka: Czy można traktować ten układ jak dwa kondensatory połączone równolegle?)

43. Kondensator płaski jest wypełniony dwoma dielektrykami, jak na rys. 30-28. Wykazać, że pojemność jego jest dana wzorem

$$C = \frac{2\epsilon_0 A}{d} \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2}.$$

Sprawdzić ten wzór we wszystkich przypadkach granicznych, jakie można wymyślić. (Wskazówka: Czy można traktować ten układ jak dwa kondensatory połączone szeregowo?)

44. Jaka jest pojemność kondensatora na rys. 30-29? Powierzchnia okładek wynosi  $A$ .

45. Należy zbudować kondensator mając do dyspozycji dwie płytki miedziane, arkusz miki (grubość = 0,10 mm,  $\kappa = 6$ ), płytę szklaną (grubość = 2,0 mm,  $\kappa = 7$ ) i płytę parafiny (grubość = 1,0 cm,  $\kappa = 2$ ). Który, albo które z podanych materiałów należy umieścić między płytami miedzianymi, aby otrzymać największą pojemność?

Odp.: Arkusz miki.

#### Paragraf 30-6

46. Kondensator płaski o pojemności 100 pF i powierzchni okładki  $100 \text{ cm}^2$  zawiera mikę jako dielektryk ( $\kappa = 5,4$ ). Przy różnicy potencjałów na okładkach równej 50 V obliczyć: (a) natężenie  $E$  w miksie, (b) swobodny ładunek na okładkach i (c) indukowany ładunek powierzchniowy.

47. Dwie równoległe płytki o powierzchni  $100 \text{ cm}^2$  mają równe, lecz różnoimienne ładunki  $8,9 \cdot 10^{-7} \text{ C}$ . Gdy przestrzeń między płytami wypełnia materiał dielektryczny, natężenie pola elektrycznego wynosi  $1,4 \cdot 10^6 \text{ V/m}$ . (a) Znaleźć stałą dielektryczną tego materiału. (b) Wyznaczyć wielkość ładunku indukowanego na każdej z powierzchni dielektryka.

Odp.: (a) 7,1. (b)  $7,7 \cdot 10^{-7} \text{ C}$ .

48. W przykładzie 9 przyjąć, że podczas wprowadzania płytki dielektrycznej jest podłączona bateria dająca napięcie 100 V. Obliczyć: (a) ładunek na okładkach kondensatora, (b) natężenie pola elektrycznego w szczelinie, (c) natężenie pola elektrycznego w płytce i (d) pojemność kondensatora. Podać

wartości liczbowe wszystkich tych wielkości przed i po wprowadzeniu płytki. Porównać te wyniki z wynikami z przykładu 9, sporządzając odpowiednią tabelkę.

49. Kondensator płaski ma okładki o powierzchni  $0,12 \text{ m}^2$  i odległość 1,2 cm. Bateria ładuje okładki do różnicy potencjałów 120 V, po czym zostaje odłączona. Płytki z dielektryka o grubości 0,4 cm i stałej dielektrycznej 4,8 zostaje następnie umieszczone symetrycznie między okładkami. (a) Znaleźć pojemność przed umieszczeniem płytki. (b) Jaka jest pojemność po umieszczeniu tej płytki? (c) Ile wynosi wolny ładunek  $q$  przed i po umieszczeniu płytki? (d) Ustalić pole elektryczne w przestrzeni między okładkami i dielektrykiem. (e) Jakie jest pole elektryczne w dielektryku? (f) Jaka jest różnica potencjałów na okładkach, gdy płytka umieszczona jest między nimi? (g) Jaką pracę należy wykonać umieszczając płytke między okładkami kondensatora?

Odp.: (a) 89 pF. (b) 120 pF. (c)  $1,1 \cdot 10^{-8}$  C;  $1,1 \cdot 10^{-8}$  C. (d)  $10^4$  V/m. (e)  $2,1 \times 10^3$  V/m. (f) 88 V. (g)  $1,7 \cdot 10^{-7}$  J.

50. W kondensatorze z przykładu 9 płytka dielektryczna wypełnia połowę przestrzeni między okładkami. (a) Jaki procent energii jest zawarty w szczelinie powietrznej? (b) Jaki procent energii jest zawarty w płytce?

51. Płytkę dielektryczną o grubości  $b$  umieszczono między okładkami płaskiego kondensatora odległymi o  $d$ . Wykazać, że pojemność kondensatora wynosi

$$C = \frac{\pi \epsilon_0 A}{\pi d - b(\pi - 1)}.$$

(Wskazówka: wyprowadzić wzór posługując się rysunkiem z przykładu 9.) Czy wzór ten daje poprawny wynik liczbowy dla przykładu 9? Czy wzór ten wydaje się słuszny dla przypadków szczególnych:  $b = 0$ ,  $\pi = 1$  i  $b = d$ ?

52. W przykładzie 8, jak ma się do siebie gęstość energii między okładkami przed i po wsunięciu między nie płytka dielektryka.

# 31. Natężenie i opór prądu elektrycznego

## 31-1. Natężenie i gęstość prądu elektrycznego

Swobodne elektrony w odośnionym przewodniku metalicznym, np. w kawałku drutu miedzianego, znajdują się w ciągłym i bezładnym ruchu podobnie jak cząsteczki gazu zamkniętego w zbiorniku. Wzdłuż drutu nie występuje żaden wypadkowy ruch. Jeśli przeprowadzimy przez drut hipotetyczną płaszczyznę, to liczba elektronów przechodzących przez tę płaszczyznę w jednostce czasu z prawej strony na lewą będzie taka sama, jak liczba elektronów przechodzących z lewej strony na prawą; wypadkowa szybkość przechodzenia będzie równa zeru\*.

Jeśli końce drutu połączymy z baterią, to w każdym punkcie wewnętrz drutu ustali się pole elektryczne. Jeśli różnica potencjałów podtrzymywana przez baterię wynosi 10 V i jeśli drut (jednorodny) ma długość 5 m, to natężenie pola w każdym punkcie będzie 2 V/m. Pole  $E$  będzie działać wtedy na elektrony i nadawać im wypadkowy ruch w kierunku —  $E$ . Mówimy, że ustalił się *prąd elektryczny* o natężeniu  $i$ ; jeśli ładunek  $q$  przechodzi przez dowolny przekrój przewodnika w ciągu czasu  $t$ , to natężenie prądu, z założenia stałe, jest równe

$$i = \frac{q}{t}. \quad (31-1)$$

Odpowiednimi jednostkami w układzie SI są: amper (A) dla  $i$ , kulomb (C) dla  $q$  i sekunda (s) dla  $t$ . Przypominamy (paragraf 26-4), że równanie (31-1) jest równaniem definicyjnym kulomba i że jeszcze nie podaliśmy definicji ampera; uczynimy to w parafagie 34-4.

\* W rzeczywistości, ponieważ liczba elektronów jest skończona, będą miały miejsce małe statystyczne fluktuacje tej liczby, a przewodnik będzie zawierał mały, szybko fluktuujący prąd, mimo że uśredniony po odpowiednio długim czasie prąd wypadkowy jest równy零. Jest to jeden z aspektów łatwo mierzalnego elektrycznego szumu, tak dobrze znanego tym, którzy wiedzą cokolwiek o elektronice.

Jeśli szybkość przepływu ładunku nie jest stała w czasie, prąd zmienia się w czasie i jest dany przez różniczkową granicę równania (31-1), czyli

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (31-2)$$

W dalszej części tego rozdziału będziemy rozważać wyłącznie prądy stałe\*.

Natężenie prądu  $i$  jest takie samo dla wszystkich przekrojów przewodnika, nawet jeśli pole przekroju jest różne w różnych punktach. Tak samo ilość wody przepływającej przez dowolny przekrój rury w jednostce czasu przy założeniu, że jest ona nieściśliwa, jest jednakowa nawet wtedy, kiedy przekrój się zmienia. Woda płynie przedże tam, gdzie rura jest węższa i wolniej tam, gdzie jest szeroka, tak że szybkość przepływu, mierzona np. w 1/min, pozostaje nie zmieniona. Ta stałość prądu elektrycznego wynika z konieczności zachowania ilości ładunku; w warunkach założonej równowagi nie może on ani gromadzić się, ani wypływać z żadnego punktu przewodnika. Stosując terminologię wprowadzoną w paragrafie 18-3 możemy powiedzieć, że nie ma żadnych „źródeł” ani miejsc „wypływu” ładunku.

Istnienie pola elektrycznego wewnętrz przewodnika nie jest sprzeczne z paragrafem 28-6, w którym twierdziliśmy, że  $E$  równa się zeru wewnętrz przewodnika. W tamtym paragrafie, dotyczącym stanu, w którym nie istniał wypadkowy ruch ładunków (elektrostatyka), zakładaliśmy, że przewodnik był odosobniony i że między jego dwoma dowolnymi punktami nie podtrzymywano żadnej różnicy potencjałów, np. za pomocą baterii. W tym rozdziale, który dotyczy ładunków w ruchu, opuszczamy to zastrzeżenie.

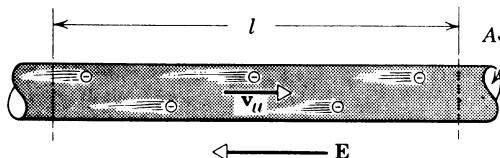
Pole elektryczne działa na elektrony w przewodniku siłą równą  $-eE$ , ale siła ta nie nadaje im wypadkowego przyspieszenia, ponieważ elektrony zderzają się z atomami (ściślej — jonami  $Cu^+$  w miedzi) tworzącymi przewodnik. Ten zbiór jonów powiązanych ze sobą silnymi sprężystymi siłami natury elektromagnetycznej nazywamy *siecią* (patrz rys. 21-5). Ostatecznym wynikiem tych zderzeń jest zamiana energii kinetycznej przyspieszanych elektronów na energię drgań sieci. Elektrony uzyskują stałą, średnią *prędkość unoszenia  $v_u$*  w kierunku  $-E$ . Zachodzi tu bliska analogia do kulki łyżyskowej spadającej w jednorodnym polu grawitacyjnym  $g$  ze stałą końcową szybkością w lepkim oleju. Siła grawitacyjna ( $mg$ ) działająca na spadającą kulkę nie powiększa jej energii kinetycznej (która jest stała), lecz powoduje zderzenia z molekułami cieczy prowadzące do niewielkiego wzrostu temperatury.

Jakkolwiek w metalach nośnikami ładunku są elektrony, w elektrolitach lub przewodnikach gazowych plazmy mogą nimi być dodatnie lub ujemne jony albo jedne i drugie. Konieczna jest umowa dotycząca oznaczania kierunków prądów, ponieważ ładunki przeciwnego znaku poruszają się w danym polu w przeciwnych kierunkach. Wszystkie zewnętrzne skutki wywołane przez dodatni ładunek poruszający się w pewnym kierunku są równoważne skutkom wywołanym przez ładunek ujemny poruszający się w przeciwnym kierunku. Stąd dla prostoty i ułatwienia opisu zakładamy, że *wszystkie nośniki ładunku są dodatnie i rysujemy strzałki prądu w kierunku, w którym poruszałyby się takie ładunki*. Jeśli nośniki ładunku są ujemne, to po prostu poruszają się one przeciwnie do kierunku strzałki prądu (rys. 31-1). Kiedy rozważamy przypadek, w którym znak nośników ładunku

\* Znacznie mniej wyizolowanym z otoczenia przykładem przepływu ładunku jest błyskawica. Patrz: Richard E. Orville, The Lightning Discharge, *The Physics Teacher*, January 1976.

powoduje różnice w zjawiskach zewnętrznych (np. *zjawisko Halla*; patrz paragraf 33-5), wówczas odrzucamy powyższą umowę i bierzemy pod uwagę aktualną sytuację.

Natężenie prądu  $i$  jest charakterystyczne dla danego przewodnika. Jest to wielkość makroskopowa, podobnie jak masa przedmiotu, objętość przedmiotu czy też długość pręta. Związaną z nią wielkością mikroskopową jest gęstość prądu  $j$ . Jest to wektor charakterystyczny raczej dla punktów wewnętrz przewodnika niż dla przewodnika w całości.



Rys. 31-1. Elektrony są unoszone w przewodniku w kierunku przeciwnym do kierunku pola elektrycznego

Jeśli rozkład prądu na przekroju przewodnika o powierzchni  $A$  (jak na rys. 31-1) jest równomierny, to wartość gęstości prądu we wszystkich punktach tego przekroju jest równa

$$j = \frac{i}{A}. \quad (31-3)$$

Wektor  $j$  w dowolnym punkcie ma taki kierunek, jaki miałby w tym punkcie dodatni nośnik ładunku. Elektron w danym punkcie będzie poruszał się w kierunku  $-j$ . Na rys. 31-1  $j$  jest stałym wektorem, ma zwrot w lewo, elektrony płyną na prawo.

Ogólna zależność między  $j$  i  $i$  jest taka, że dla dowolnej powierzchni w przewodniku (która nie musi być płaszczyzną)  $i$  jest strumieniem wektora  $j$  przez tę powierzchnię, czyli

$$i = \int j dS, \quad (31-4)$$

gdzie  $dS$  jest elementem powierzchni, a całkowanie odbywa się po rozważanej powierzchni. Równanie (31-3) (zapisane jako  $i = jA$ ) jest specjalnym przypadkiem równania (31-4), w którym powierzchnia całkowania jest poprzecznym przekrojem przewodnika, a  $j$  jest stałe na tej powierzchni i prostopadłe do niej. Jednak równanie (31-4) można stosować do dowolnej powierzchni, dla której chcemy znać natężenie przepływającego prądu. Z równania (31-4) wynika wyraźnie, że  $i$  jest skalarem, ponieważ wyrażenie podcałkowe  $j dS$  jest skalarem.

Strzałka stawiana często nad natężeniem prądu nie oznacza, że prąd jest wektorem, lecz jedynie wskazuje kierunek przepływu ładunków. Dodatnie nośniki ładunku poruszają się w pewnym kierunku wzdłuż drutu lub też w kierunku przeciwnym; te dwie możliwości przedstawione są w równaniach algebraicznych przez + albo -. Zauważmy, że: (a) prąd w drucie nie zmienia się, jeśli drut jest zgięty, związanego w węzeł albo w inny sposób zdeformowany i (b) strzałki przedstawiające kierunek prądów nie spełniają praw dodawania wektorów. A więc prądy nie mogą być wektorami.

Predkość unoszenia  $v_u$  nośników ładunku w przewodniku można obliczyć na podstawie gęstości prądu  $j$ . Na rysunku 31-1 przedstawione są elektrony przewodnictwa w przewodniku, poruszające się w prawą stronę ze stałą — z założenia — predkością unoszenia  $v_u$ . Liczba elektronów przewodnictwa w drucie wynosi  $nAl$ , gdzie  $n$  jest liczbą elektronów przewodnictwa w jednostce objętości, a  $Al$  — objętością drutu. Ładunek o wielkości  $q = (nAl)e$  przepływa przez prawy koniec drutu w czasie  $t$ , danym przez

$$t = \frac{l}{v_u}.$$

Natężenie prądu  $i$  wynosi

$$i = \frac{q}{t} = \frac{nAle}{l/v_u} = nAev_u.$$

Rozwiążując równanie (31-3) względem  $v_u$  i pamiętając, że  $j = i/A$  otrzymujemy

$$v_u = \frac{i}{nAe} = \frac{j}{ne}. \quad (31-5)$$

**Przykład 1.** Drut aluminiowy o średnicy 2,54 mm jest połączony z drutem miedzianym o średnicy 1,63 mm. Przez tak złączone druty przepływa prąd o natężeniu 10 A. Jaka jest gęstość prądu w każdym z drutów?

Prąd rozkłada się równomiernie w przekrojach obu drutów z wyjątkiem otoczenia złącza, co znaczy, że gęstość prądu jest stała we wszystkich punktach we wnętrzu każdego drutu. Pole powierzchni przekroju drutu aluminiowego wynosi  $0,0503 \text{ cm}^2$ . Zatem z równania (31-3)

$$j_{Al} = \frac{i}{A} = \frac{10 \text{ A}}{0,0503 \text{ cm}^2} = 198 \text{ A/cm}^2.$$

Pole powierzchni przekroju drutu miedzianego wynosi  $0,0208 \text{ cm}^2$ . Zatem

$$j_{Cu} = \frac{i}{A} = \frac{10 \text{ A}}{0,0208 \text{ cm}^2} = 480 \text{ A/cm}^2.$$

Fakt, że druty są z różnych materiałów, nie ma wpływu na nasze rozważania.

**Przykład 2.** Jaką wartość ma  $v_u$  w drucie miedzianym z przykładu 1?

Gęstość prądu w drucie miedzianym wynosi  $480 \text{ A/cm}^2$ . Aby obliczyć  $n$ , korzystamy z faktu, że na jeden atom miedzi przypada jeden swobodny elektron. Liczba atomów w jednostce objętości jest  $dN_0/M$ , gdzie  $d$  jest gęstością,  $N_0$  — liczbą Avogadra, a  $M$  — ciężarem atomowym. Zatem liczba swobodnych elektronów w jednostce objętości wynosi

$$n = \frac{dN_0}{M} = \frac{(9,0 \text{ g/cm}^3)(6,0 \cdot 10^{23} \text{ atom/mol})(1 \text{ elektron/atom})}{64 \text{ g/mol}} = 8,4 \cdot 10^{22} \text{ elektron/cm}^3.$$

Ostatecznie na podstawie równania (31-5) mamy

$$v_u = \frac{j}{ne} = \frac{480 \text{ A/cm}^2}{(8,4 \cdot 10^{22} \text{ elektron/cm}^3)(1,6 \cdot 10^{19} \text{ C/elektron})} = 3,6 \cdot 10^{-2} \text{ cm/s.}$$

Na przebycie w drucie odległości 1,0 cm elektrony potrzebują 28 s. Czy można było przypuszczać, że  $v_u$  jest takie małe? Pędkości unoszenia elektronów nie można mylić z pędkością przemieszczania się wzdłuż drutu zmian w konfiguracji pola elektrycznego, która to pędkość jest zbliżona do pędkości światła. Kiedy na jednym końcu długiej, wypełnionej wodą rury zwiększymy ciśnienie, to fala ciśnienia rozchodzi się natychmiast wzdłuż rury. Jednakże pędkość, z jaką woda porusza się przez rurę, jest o wiele mniejsza.

### 31-2. Opór, opór właściwy i przewodnictwo właściwe

Przyłożenie tej samej różnicy potencjałów do końców geometrycznie podobnych przewodów miedzianego i drewnianego wywołuje zupełnie inne prądy. Ujawnia się tu charakterystyczna dla przewodników wielkość, jaką jest ich *opór*. Opór między dwoma punktami przewodnika (zwanego często *opornikiem*; symbol  $\sim\!\!\!WW\!\!\sim$ ) określamy za pomocą przyłożonej różnicy potencjałów  $V$  między tymi punktami i przepływającego prądu  $i$ :

$$R = \frac{V}{i}. \quad (31-6)$$

Jeśli  $V$  jest wyrażone w woltach (V), a  $i$  w amperach (A), to opór  $R$  wyrazi się w omach ( $\Omega$ ).

Przepływ ładunku przez przewodnik jest często porównywany z przepływem wody przez rurę, wywołanym różnicą ciśnień na końcach rury, wytworzoną np. za pomocą pomp. Tę różnicę ciśnień można porównać z różnicą potencjałów, wytworzoną przez baterię na końcach opornika. Szybkość przepływu wody ( $\text{m}^3/\text{s}$ ) porównuje się z natężeniem prądu ( $\text{C/s}$  albo  $\text{A}$ ). Szybkość przepływu wody przez rurę przy danej różnicy ciśnień jest zależna od rodzaju tej rury. Czy jest ona dłuża, czy krótka? Wąska czy szeroka? Pusta czy wypełniona, np. żywrem? Te wielkości charakteryzujące rurę są analogiczne do oporu przewodnika.

Pierwotnymi wzorcami oporu, przechowywanymi w Narodowym Biurze Wzorców USA, są szpulki drutu, których opory zostały bardzo dokładnie zmierzane. Ponieważ opór zmienia się wraz z temperaturą, wzorce te przed użyciem są umieszczone w kąpieli olejowej o regulowanej temperaturze. Wykonane są one ze specjalnego stopu, zwanego manganinem, którego opór bardzo mało zmienia się wskutek zmian temperatury. Są one również dokładnie wyżarzone, aby usunąć naprężenia, które także wpływają na opór. Te pierwotne wzorce oporu stosuje się głównie do kalibrowania wtórnego wzorców używanych w laboratoriach.

Do mierzenia oporów pierwotnych wzorców nie używa się równania (31-6), lecz mierzy się je przy pomocy pośredniej metody, wykorzystującej pole magnetyczne. Równanie (31-6) wykorzystujemy natomiast do pomiaru potencjału  $V$  przez wytworzenie prądu o znanym natężeniu  $i$  (przy pomocy *metody równoważenia prądów*; patrz paragraf 34-4) w oporniku o znanym oporze  $R$ . Ta metoda pomiaru różnicy potencjałów (napięcia) jest ogólnie stosowana zamiast metody wynikającej z definicji wprowadzonej w paragrafie 29-1, w której mierzy się pracę potrzebną do przesunięcia między dwoma punktami ładunku probnego.

Tablica 31-1. Własności metali jako przewodników

Metal	Opór właściwy (przy $20^\circ\text{C}$ ), $10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$	Temperaturowy współczynnik oporu właściwego*, $\alpha$ na $^\circ\text{C}$ ( $\times 10^{-5}$ )
srebro	1,6	380
miedź	1,7	390
glin	2,8	390
wolfram	5,6	450
nikiel	6,8	600
żelazo	10	500
stal	18	300
mangan	44	1,0
węgiel**	3500	-50

\* Wielkość ta, zdefiniowana jako

$$\alpha = \frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{dT} \quad (31-7)$$

jest względną zmianą oporu właściwego ( $d\varrho/\varrho$ ) przypadającą na jednostkową zmianę temperatury,  $\alpha$  zależy od temperatury; podane tu wartości odnoszą się do  $20^\circ\text{C}$ . Dla miedzi ( $\alpha = 3,9 \cdot 10^{-3}/^\circ\text{C}$ ) opór właściwy wzrasta o 0,39% przy wzroście temperatury o  $1^\circ\text{C}$  w pobliżu  $20^\circ\text{C}$ . Zauważmy, że dla węgla  $\alpha$  jest ujemne, co znaczy, że opór właściwy maleje ze wzrostem temperatury.

\*\* Węgiel, jako niemetal, został włączony do tablicy dla porównania.

Z oporem wiąże się *opór właściwy*  $\varrho$ , który charakteryzuje sam materiał, a nie zależy od kształtu i rozmiarów próbki wykonanej z tego materiału; dla materiałów izotropowych\*

\* Są to materiały, których własności (w tym przypadku elektryczne) są niezależne od kierunku w materiale.

jest on określony zależnością

$$\rho = \frac{E}{j}. \quad (31-8a)$$

Opór właściwy miedzi wynosi  $1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ ; topionego kwarcu około  $10^{16} \Omega \cdot \text{m}$ . Niewiele własności fizycznych daje się mierzyć w takim zakresie wartości. Tablica 31-1 podaje wartości kilku różnych wielkości dla najbardziej rozpowszechnionych metali.

Często lepiej jest mówić o *przewodnictwie właściwym* ( $\sigma$ ) materiału niż o jego oporze właściwym. Są to wielkości odwrotne, a mianowicie

$$\sigma = \frac{1}{\rho}. \quad (31-8b)$$

Jednostką  $\sigma$  w układzie SI jest  $(\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ .

Rozważmy przewodnik w kształcie walca o przekroju  $A$  i długości  $l$ , przewodzący stały prąd o natężeniu  $i$ . Przyłożmy do jego końców różnicę potencjałów  $V$ . Jeśli przekroje walca na obu końcach przewodnika są powierzchniami ekwipotencjalnymi, natężenie pola elektrycznego i gęstość prądu będą stałe we wszystkich punktach wewnętrz walca i będą miały wartość

$$E = \frac{V}{l}, \quad j = \frac{i}{A}.$$

Opór właściwy  $\rho$  można zatem napisać w postaci

$$\rho = \frac{E}{j} = \frac{V/l}{i/A}.$$

Ale  $V/i$  jest oporem  $R$ , co prowadzi do

$$R = \rho \frac{l}{A}. \quad (31-9)$$

$V, i$  oraz  $R$  są to wielkości *makroskopowe*, odnoszące się do konkretnego ciała albo określonej części tego ciała. Odpowiadające im wielkości *mikroskopowe* to  $E, j$  oraz  $\rho$ ; ich wartości są określone w każdym punkcie ciała. Własności makroskopowe są związane ze sobą równaniem (31-6) ( $V = iR$ ), a mikroskopowe równaniem (31-8a), które można zapisać w postaci wektorowej jako  $E = j\rho$ .

Makroskopowe wielkości można znajdować przez całkowanie wielkości mikroskopowych, posługując się podanymi poprzednio zależnościami, a mianowicie

$$i = \int j dS, \quad (31-4)$$

$$V_{ab} = - \int_a^b E dl. \quad (29-5)$$

Całka w równaniu (31-4) jest całką powierzchniową, obliczoną po dowolnym przekroju przewodnika. Całka w równaniu (29-5) jest całką krzywoliniową, liczoną po dowolnej krzywej poprowadzonej wzdłuż przewodnika i łączącej dwie dowolne powierzchnie ekwipotencjalne przechodzące przez punkty  $a$  i  $b$ . W długim drucie podłączonym do baterii, za powierzchnię ekwipotencjalną odpowiadającą  $a$  można przyjąć przekrój drutu w pobliżu dodatniego bieguna baterii, a dla  $b$  — przekrój w pobliżu ujemnego bieguna.

Opór przewodnika między punktami  $a$  i  $b$  można wyrazić za pomocą wielkości mikroskopowych, dzieląc przez siebie te dwa równania, czyli

$$R = \frac{V_{ab}}{i} = \frac{- \int_a^b E dl}{\int j dS}.$$

Jeśli przewodnik jest długim walcem o przekroju  $A$  i długości  $l$  i jeśli punkty  $a$  i  $b$  znajdują się na jego końcach, poprzednie równanie na  $R$  (patrz równ. (31-8a)) sprowadza się do równania (31-9)

$$R = \frac{El}{jA} = \varrho \frac{l}{A}.$$

Makroskopowe wielkości  $V$ ,  $i$  oraz  $R$  mają podstawowe znaczenie, kiedy wykonujemy pomiary elektryczne na konkretnych przedmiotach przewodzących. Są to wielkości bezpośrednio odczytywane na miernikach. Wielkości mikroskopowe  $E$ ,  $j$  i  $\varrho$  mają istotne znaczenie, kiedy zajmujemy się podstawowymi właściwościami materii (a nie określonego przedmiotu), jak to zwykle czynimy w badaniach dotyczących *fizyki ciała stałego*. Zatem paragraf 31-4 dotyczy atomistycznego poglądu na *opór właściwy* metalu, a nie na *opór* konkretnych przewodników metalicznych. Wielkości mikroskopowe są także ważne, kiedy interesujemy się właściwościami przedmiotów przewodzących o nieregularnych kształtach.

**Przykład 3.** Prostokątna sztabka węglowa ma wymiary  $1,0 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$ . a) Jaki będzie opór mierzony między kwadratowymi ściankami sztabki? (b) Między dwiema przeciwnymi prostokątnymi ściankami? Opór właściwy węgla w  $20^\circ\text{C}$  wynosi  $3,5 \cdot 10^{-5} \Omega \cdot \text{m}$ .

(a) Pole kwadratowej ścianki sztabki jest równe  $1,0 \text{ cm}^2$ , czyli  $1,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ . Z równania (31-9) na opór między kwadratowymi ściankami otrzymujemy wyrażenie

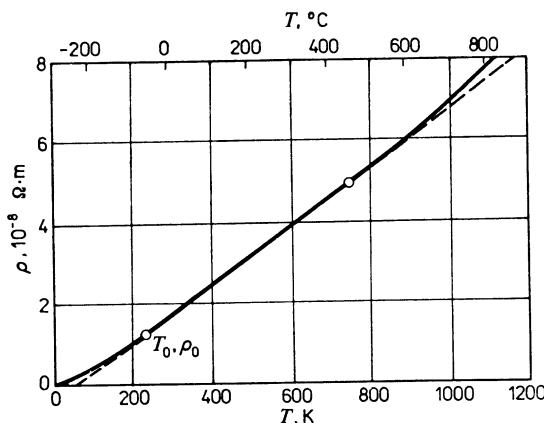
$$R = \varrho \frac{l}{A} = \frac{(3,5 \cdot 10^{-5} \Omega \cdot \text{m})(0,50 \text{ m})}{1,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 0,18 \Omega.$$

(b) Między przeciwnymi, prostokątnymi ściankami (powierzchnia  $= 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ ) występuje opór

$$R = \varrho \frac{l}{A} = \frac{(3,5 \cdot 10^{-5} \Omega \cdot \text{m})(10^{-2} \text{ m})}{5,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2} = 7,0 \cdot 10^{-5} \Omega.$$

Zatem opór danego przewodnika może być w zależności od tego różny, jak przyłożymy do niego określoną różnicę potencjałów. Stosunek oporów w powyższych dwóch przypadkach wynosi 2600. W każdym z tych przypadków zakładamy, że różnica potencjałów jest przykładowana do sztabki w ten sposób, że powierzchnie, między którymi obliczamy opór, są ekwipotencjalne. W innym przypadku równanie (31-9) nie byłoby słusne.

Na rysunku 31-2 przedstawione są (krzywa ciągła) zmiany oporu właściwego miedzi w zależności od temperatury. Czasem dla użytku praktycznego, takie dane przedstawia się w postaci równania. Jeśli interesuje nas jedynie ograniczony zakres temperatur, rozciągający się — powiedzmy — od 0 do  $500^\circ\text{C}$ , możemy do krzywej z rys. 31-2 dopasować linię prostą, przeprowadzając ją przez dwa dowolnie wybrane punkty; patrz linia przerywana. Wybieramy punkt oznaczony na rysunku przez  $T_0$ ,  $\varrho_0$  jako punkt odniesienia



Rys. 31-2. Opór właściwy miedzi jako funkcja temperatury. Linia przerywana zastępuje odcinek krzywej między dwoma punktami zaznaczonymi na rysunku w postaci kółek. Punkt oznaczony  $T_0$ ,  $\varrho_0$  wybrano jako punkt odniesienia

sienia;  $T_0$  w tym przypadku wynosi  $0^\circ\text{C}$ , a  $\varrho_0$  jest równe  $1,56 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ . Opór właściwy  $\varrho$  w dowolnej temperaturze  $T$  można znaleźć z empirycznego równania linii prostej na rys. 31-2, które ma postać

$$\varrho = \varrho_0 [1 + \bar{\alpha}(T - T_0)]. \quad (31-10)$$

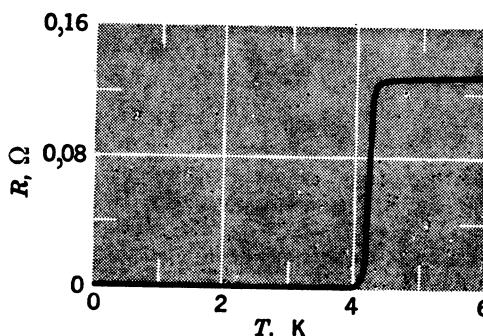
Z zależności tej wyraźnie widać, że  $\varrho \rightarrow \varrho_0$ , gdy  $T \rightarrow T_0$ .

Jeśli równanie (31-10) rozwiążemy ze względu na  $\bar{\alpha}$ , otrzymamy

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\varrho_0} \frac{\varrho - \varrho_0}{T - T_0}.$$

Porównując to z równaniem (31-8) widzimy, że  $\bar{\alpha}$  jest średnim współczynnikiem temperaturowym oporu właściwego, a nie temperaturowym współczynnikiem oporu właściwego w określonej temperaturze, który z definicji jest równy  $\alpha$ . Dla większości praktycznych zastosowań równanie (31-10) daje dostatecznie dokładne wyniki.

Krzywa na rys. 31-2 nie dąży do zera przy bezwzględnym zerze temperatury, choć na rysunku trudno to zauważyc. Szcątkowy opór właściwy w tej temperaturze wynosi  $0,02 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ . Dla wielu substancji jednak w pewnych niskich temperaturach opór rzeczywiście staje się zerowy. Rysunek 31-3 przedstawia opór próbki rtęci w temperaturach poniżej 6 K. Przy zmianie temperatury o około 0,05 K\* opór gwałtownie spada do niemierzalnie malej wartości. Zjawisko to, zwane nadprzewodnictwem\*\*, odkrył Kamerlingh



Rys. 31-3. Opór właściwy rtęci znika dla temperatur niższych od około 4 K

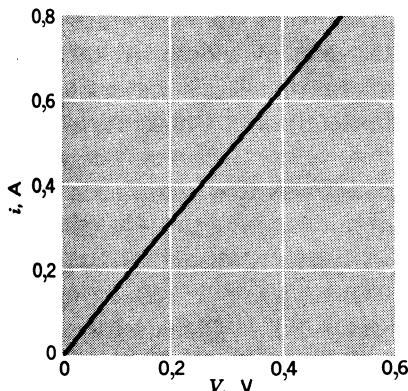
Onnes w Holandii w 1911 r. Opór materiałów w stanie nadprzewodzącym zdaje się być naprawdę równy零u; prądy, raz ustanowione w zamkniętych nadprzewodzących obwodach, nie zmniejszały się w ciągu tygodni, chociaż w obwodzie nie było baterii. Jeśli temperatura wzrasta nieco powyżej punktu nadprzewodnictwa, lub jeżeli zastosuje się wystarczająco duże pole magnetyczne, prądy te gwałtownie maleją do zera.

### 31-3. Prawo Ohma

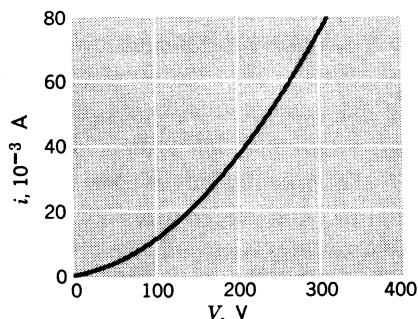
Przykładamy zmienną różnicę potencjałów  $V$  do końca zwojnice zrobionej z drutu miedzianego o długości 30,5 m i średnicy 0,10 mm. Dla każdej przyłożonej różnicy potencjałów mierzymy natężenie prądu  $i$  i wykreślmy je jako funkcję  $V$ , jak na rys. 31-4. Linia prosta przedstawiająca otrzymane wyniki oznacza, że opór rozważanego przewodnika jest zawsze taki sam, niezależnie od wielkości napięcia przyłożonego w celu zmierzenia go. Ten ważny wynik, który obowiązuje dla przewodników metalicznych, jest znany jako prawo Ohma. Zakładamy, że temperatura przewodnika jest stała w czasie pomiarów.

\* W zakresie od 4,5 K do 4 K (przyp. tłum.).

\*\* Patrz: (a) *Akceleratory, reaktory, lasery*, B. T. Matthias, Nadprzewodnictwo, Warszawa 1964, PWN; (b) B. T. Matthias, The Search for High-Temperature Superconductors, *Physics Today*, August 1971; (c) Brian B. Schwartz i Simon Foner, Large-Scale Applications of Superconductivity, *Physics Today*, July 1977.



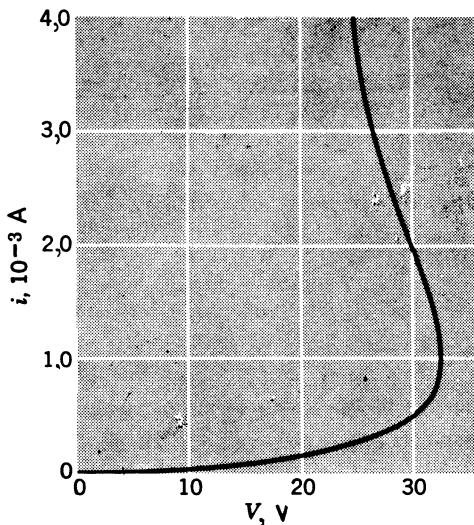
Rys. 31-4. Natężenie prądu w pewnym przewodniku miedzianym jako funkcja różnicy potencjałów. Przewodnik spełnia prawo Ohma



Rys. 31-5. Natężenie prądu w lampie próżniowej typu 2A3 jako funkcja różnicy potencjałów. Ten przewodnik nie podlega prawu Ohma

Wiele przewodników nie spełnia prawa Ohma. Rysunek 31-5, na przykład, przedstawia wykres  $i$ ,  $V$  dla lampy próżniowej typu 2A3. Wykres nie jest prostą i opór zależy od wielkości użytego przy pomiarze napięcia. Ponadto, jeśli znak przykładanej różnicy potencjałów zostaje zmieniony, to natężenie prądu staje się znikomo małe. W przewodnikach metalicznych prąd zmienia kierunek na przeciwny, gdy zmienia się znak różnicy potencjałów, ale wartość natężenia się nie zmienia.

Rysunek 31-6 przedstawia typowy wykres  $i$ ,  $V$  dla innego, nie spełniającego prawa Ohma, urządzenia — *termistora*. Jest to półprzewodnik (patrz paragraf 26-3) o dużym, ujemnym, temperaturowym współczynniku oporu właściwego  $\alpha$  (patrz tablica 31-1), który bardzo zmienia się wraz z temperaturą. Zauważmy, że dwa różne natężenia prądu w termistorze mogą odpowiadać tej samej różnicy potencjałów na jego końcach. Termistory są często używane do mierzenia ilości energii przenoszonej przez wiązki mikrofal. Wiązka mikrofal pada na termistor i ogrzewa go. Względnie mały, wytworzony w ten



Rys. 31-6. Wykres natężenia prądu w zależności od różnicy potencjałów dla termistora (Western Electric 1-B). Krzywa pokazuje jak zmienia się napięcie na termistorze. Ten przewodnik także nie podlega prawu Ohma. Za kształt krzywej jest odpowiedzialny duży, ujemny współczynnik temperaturowy oporu właściwego materiału, z którego wykonano termistor

sposób przyrost temperatury, powoduje dosyć dużą zmianę oporu, która służy jako miara mocy mikrofal. Nowoczesna elektronika zależy w fundamentalny sposób od faktu, że liczne przewodniki, takie jak lampy próżniowe i tranzystory nie podlegają prawu Ohma.

Podkreślamy, że zależność  $V = iR$  nie jest stwierdzeniem prawa Ohma. Przewodnik spełnia to prawo tylko wtedy, jeśli jego wykres  $i, V$  jest liniowy, tzn. jeśli  $R$  nie zależy od  $V$  i  $i$ . Zależność  $R = V/i$  jest ogólną definicją oporu przewodnika słuszną bez względu na to, czy przewodnik ten spełnia prawo Ohma, czy nie.

Mikroskopowym odpowiednikiem zależności  $V = iR$  jest równanie (31-8a), czyli  $E = \varrho j$ . Mówiąc się, że przewodzący materiał spełnia prawo Ohma, jeśli wykres  $E$  jako funkcja  $j$  jest liniowy, tzn. jeśli opór właściwy  $\varrho$  nie zależy od  $E$  i  $j$ . Prawo Ohma jest specjalną własnością pewnych materiałów i nie stanowi ogólnego prawa elektromagnetyzmu, jak na przykład prawo Gaussa.

Istnieje ścisła analogia między przepływem ładunku spowodowanym różnicą potencjałów i przepływem ciepła spowodowanym różnicą temperatur. Rozważmy cienką, elektrycznie przewodzącą płytę o grubości  $\Delta x$  i powierzchni  $A$ . Niech pomiędzy przeciwległymi ścianami płytki będzie utrzymywana różnica potencjałów  $\Delta V$ . Natężenie prądu  $i$  jest dane równaniem (31-6) ( $i = V/R$ ) i (31-9) ( $R = \varrho l/A$ ), czyli

$$i = \frac{V_a - V_b}{R} = \frac{(V_a - V_b)A}{\varrho l} = - \frac{(V_b - V_a)A}{\varrho \Delta x}.$$

W granicznym przypadku płytki o grubości  $dx$  daje to

$$i = \frac{1}{\varrho} A \frac{dV}{dx},$$

czyli

$$\frac{dq}{dt} = -\sigma A \frac{dV}{dx}, \quad (31-11)$$

gdzie  $\sigma (= 1/\varrho)$  jak już widzieliśmy (równ. (31-8b)) jest *przewodnictwem właściwym* materiału. Ponieważ ładunek ujemny płynie w kierunku malejącego  $V$ , wprowadzamy do równania (31-11) znak minus, tzn.  $dq/dt$  jest dodatnie, kiedy  $dV/dx$  jest ujemne.

Analogicznym równaniem przepływu ciepła (patrz paragraf (22-4)) jest

$$\frac{dQ}{dt} = -kA \frac{dT}{dx}. \quad (31-12)$$

Z porównania widać, że  $k$  — współczynnik przewodnictwa cieplnego, odpowiada współczynnikowi  $\sigma$ , a  $dT/dx$  — gradient temperatury, odpowiada  $dV/dx$  — gradientowi potencjału. Jest to nie tylko formalna, matematyczna analogia równań (31-11) i (31-12). Zarówno energia cieplna, jak i ładunek są przenoszone w metalu za pośrednictwem swobodnych elektronów; z doświadczenia wiemy, że dobry przewodnik elektryczności (powiedzmy srebro) jest także prawie zawsze dobrym przewodnikiem ciepła i odwrotnie.

### 31-4. Prawo Ohma — pogląd atomistyczny

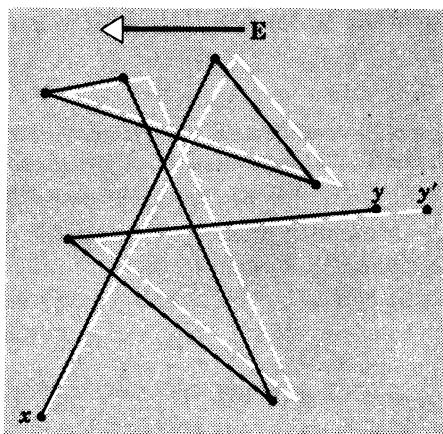
Jak już powiedzieliśmy wcześniej, prawo Ohma nie jest fundamentalnym prawem elektromagnetyzmu, ponieważ zależy ono od własności ośrodka przewodzącego. Ma ono bardzo prostą formę i jest rzeczą ciekawą, że tak wiele przewodników spełnia je tak dobrze, podczas gdy inne przewodniki nie stosują się do niego w ogóle (patrz rys. 31-4, 31-5 i 31-6). Postarajmy się zrozumieć, dlaczego metale stosują się do prawa Ohma, które zapiszemy (patrz równ. (31-8a)) w formie mikroskopowej  $E = \varrho j$ .

Elektrony walencyjne w metalu nie są przywiązane do poszczególnych atomów, lecz poruszają się swobodnie wewnątrz sieci\*. Nazywamy je *elektronami przewodnictwa*. W miedzi np. na 1 atom przypada jeden taki elektron, pozostałe 28 elektronów są związane z jądrem miedzi tworząc rdzenie jonowe. Mimo że rozkład prędkości elektronów przewodnictwa może być poprawnie opisany jedynie na gruncie fizyki kwantowej, dla naszych celów wystarczy *klasyczny model wolnego elektronu*. Należy rozważyć tylko odpowiednio zdefiniowaną prędkość średnią  $\bar{v}$ ; dla miedzi  $\bar{v} = 1,6 \cdot 10^8$  cm/s. W nieobecności pola elektrycznego elektrony (wolne lub przewodzące) poruszają się zupełnie chaotycznie, podobnie jak cząsteczki gazu zamkniętego w zbiorniku.

Elektrony zderzają się ciągle z rdzeniami jonowymi przewodnika, tzn. oddziałując z siecią, często zmieniają nagle prędkość i kierunek. Zderzenia te przypominają nam zderzenia cząsteczek gazu zamkniętych w zbiorniku. Podobnie jak w przypadku cząsteczek zderzenia elektronów z siecią możemy opisywać przy pomocy średniej drogi swobodnej  $\lambda$ , gdzie  $\lambda$  jest średnią drogą swobodną, jaką przebywa elektron między zderzeniami\*\*.

W doskonałym krysztale metalicznym w 0 K nie będzie zderzeń elektronów z siecią, zgodnie z przewidywaniami fizyki kwantowej, tzn. w doskonałych kryształach  $\lambda \rightarrow \infty$ , gdy  $T \rightarrow 0$  K. Przyczyny występowania zderzeń w rzeczywistych kryształach są następujące: (a) rdzenie jonowe w każdej temperaturze  $T$  drążą chaotycznie wokół swych położen równowagi, (b) mogą występować domieszki, tj. obce atomy, (c) kryształ może posiadać defekty sieciowe, takie jak szeregi brakujących atomów i przemieszczonych atomów. Z tego punktu widzenia nie jest niespodzianką, że opór właściwy metalu można zwiększyć: (a) zwiększając jego temperaturę, (b) dodając małe ilości domieszek, (c) naprężając go silnie, np. przeciągając przez oczko, aby zwiększyć liczbę defektów sieciowych.

Kiedy do metalu przyłożone jest pole elektryczne, chaotyczny ruch elektronów modyfikuje się w ten sposób, że są one powoli unoszone w kierunku przeciwnym do kierunku pola ze średnią prędkością unoszenia  $v_u$ . Prędkość ta jest dużo mniejsza (o czynnik ok.  $10^{10}$ ) od rozważanej wyżej (patrz przykład 2) efektywnej średniej prędkości  $\bar{v}$ . Rysunek 31-7 przedstawia zależność między tymi dwiema prędkościami. Linie ciągłe przedstawiają kolejne odcinki drogi przebytej przez elektron w nieobecności pola elektrycznego; elek-



Rys. 31-7. Krzywa ciągła przedstawia ruch, od punktu  $x$  do  $y$ , elektronu doznającego po drodze sześciu zderzeń. Linia przerywana pokazuje, jaka mogłyby być droga elektronu w obecności pola elektrycznego  $E$ . Zauważmy ciągłe unoszenie elektronu w kierunku  $-E$ .

\* Utworzonej z dodatnich jonów (przyp. tłum.).

\*\* Można wykazać, że zderzenia między elektronami zdarzają się rzadko i mają mały wpływ na opór właściwy.

tron przechodzi z  $x$  do  $y$ , zderzając się sześć razy na tej drodze. Linie przerywane pokazują jak przebiegałoby to samo zdarzenie, gdyby było przyłożone pole elektryczne o natężeniu  $E$ . Zwracamy uwagę, że elektron unoszony jest ciągle w prawą stronę, kończąc drogę w  $y'$  a nie w  $y$ . Podczas wykonywania rys. 31-7 założono, że prędkość unoszenia  $v_u$  wynosi  $0,02\bar{v}$ ; w rzeczywistości stanowi ona około  $10^{-10}\bar{v}$ , tak że „unoszenie” pokazane na rysunku jest bardzo przesadzone.

Prędkość unoszenia  $v_u$  można wyliczyć w zależności od przyłożonego pola elektrycznego  $E$  oraz  $\bar{v}$  i  $\lambda$ . Początkowo spoczywający elektron, po przyłożeniu pola elektrycznego, będzie doznawał działania siły  $eE$ , która będzie nadawała mu przyspieszenie  $a$  dane drugą zasadą Newtona

$$a = \frac{eE}{m}.$$

Rozpatrzmy zachowanie się elektronu zaraz po jego zderzeniu się z jonom. Na ogólny zderzenie chwilowo uniemożliwia unoszenie elektronu i po zderzeniu porusza się on w zupełnie przypadkowym kierunku. Do następnego zderzenia prędkość elektronu będzie zmieniona średnio o  $a(\lambda/\bar{v})$  lub  $a\tau$ , gdzie  $\tau$  jest średnim czasem między zderzeniami. Wielkość tę nazywamy prędkością unoszenia  $v_u$ , czyli

$$v_u = a\tau = \frac{eE\tau}{m}. \quad (31-13)$$

Ruch elektronu przez przewodnik jest podobny do spadania ze stałą końcową prędkością kamienia w wodzie. Sile grawitacyjnej  $F_g$  działającej na kamień przeciwstawia się sila tarcia wewnętrznego wody, która jest proporcjonalna do prędkości kamienia

$$F_g = mg = bv,$$

gdzie  $b$  jest współczynnikiem lepkości (patrz paragraf 15-9). Zatem końcowa, stała prędkość kamienia jest równa

$$v = \frac{1}{b} F_g.$$

Równanie (31-13) możemy przepisać w postaci

$$v_u = \frac{\tau}{m} F_g.$$

gdzie  $F_g (= eE)$  jest siłą elektryczną. Porównując te równania widzimy, że równoważny „współczynnik lepkości” dla ruchu elektronu w jakimś przewodniku wynosi  $m/\tau$ . Jeśli jest małe, przewodnik wywiera większą „lepkość” na ruch elektronu, a prędkość unoszenia  $v_u$  jest proporcjonalnie mniejsza.

Mogliśmy wyrazić  $v_u$  przez gęstość prądu (równ. (31-15)) i łącząc je z równaniem (31-13) otrzymać

$$v_u = \frac{j}{ne} = \frac{eE\tau}{m}.$$

Połączenie ostatniej zależności z równaniem (31-8a) ( $\rho = E/j$ ) prowadzi ostatecznie do\*

$$\rho = \frac{m}{ne^2\tau}. \quad (31-14)$$

\* Pełne omówienie tego problemu — patrz: Donald E. Tilley, Drift Speed and Collision Time, *American Journal of Physics*, June 1976.

Równanie (31-14) może być sprawdzianem, że metale podlegają prawu Ohma, jeżeli możemy wykazać, że  $\tau$  nie zależy od natężenia  $E$  przyłożonego pola elektrycznego. W tym przypadku  $\varrho$  nie będzie zależeć od  $E$ , co stanowi kryterium (patrz paragraf 31-3), że materiał podlega prawu Ohma. Wielkość  $\tau$  zależy od rozkładu prędkości elektronów przewodnictwa. Widzieliśmy, że na rozkład ten bardzo mało wpływa przyłożenie nawet względnie silnego pola elektrycznego, ponieważ  $\bar{v}$  jest rzędu  $10^8 \text{ cm/s}$ , a  $v_u$  (patrz przykład 2) zaledwie rzędu  $10^{-2} \text{ cm/s}$  (stosunek wynosi  $10^{10}$ ). Możemy być pewni, że jaka by nie była wartość  $\tau$  (powiedzmy, dla miedzi przy  $20^\circ\text{C}$ ) w nieobecności pola elektrycznego, pozostały one zasadniczo nie zmienione po przyłożeniu pola. Zatem prawa strona równania (31-14) nie zależy od  $E$  (co znaczy, że  $\varrho$  nie zależy od  $E$ ), a materiał podlega prawu Ohma.

**Przykład 4.** Jakie są: a) średni czas  $\tau$  między zderzeniami i b) średnia droga swobodna dla swobodnych elektronów w miedzi?

(a) Z równania (31-14) (patrz także przykład 2) mamy

$$\tau = \frac{m}{ne^2\varrho} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}{(8,4 \cdot 10^{28}/\text{m}^3)(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}} = 2,5 \cdot 10^{-14} \text{ s},$$

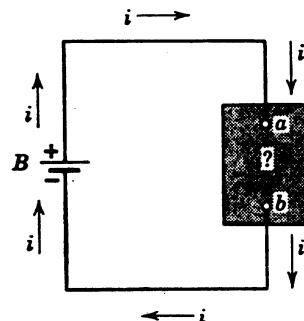
(b) Średnia droga swobodna

$$\lambda = \tau \bar{v} = (2,5 \cdot 10^{-14} \text{ s})(1,6 \cdot 10^8 \text{ cm/s}) = 4,0 \cdot 10^{-6} \text{ cm}.$$

Jest to około 220 średnic jonowych\*.

### 31-5. Przemiany energii w obwodzie elektrycznym

Rysunek 31-8 przedstawia obwód składający się z baterii  $B$  połączonej z „czarną skrzynką”. W przewodach łączących płynie stały prąd o natężeniu  $i$ , a na zaciskach  $a$  i  $b$  istnieje ustalona różnica potencjałów  $V_{ab}$ . Skrzynka może zawierać między innymi opornik silnik albo akumulator.



Rys. 31-8. Bateria  $B$  wytwarza prąd w obwodzie zawierającym „czarną skrzynkę”, tzn. skrzynkę, której zawartość jest nam nieznana

Zacisk  $a$ , połączony z dodatnimi biegunami baterii, ma wyższy potencjał niż zacisk  $b$ . Jeśli ładunek  $dq$  porusza się poprzez skrzynkę od  $a$  do  $b$ , to ładunek ten będzie zmniejszał swoją elektryczną energię potencjalną o  $dqV_{ab}$  (patrz paragraf 29-6). Zasada zachowania energii mówi nam, że energia ta jest przekształcana w skrzynce z elektrycznej energii potencjalnej w jakąś inną postać energii. Jaka będzie ta inna postać, zależy od tego, co znajduje się w skrzynce. W czasie  $dt$  energia  $dU$  przemieniona wewnątrz skrzynki wyniesie

$$dU = dqV_{ab} = idtV_{ab}.$$

\* Patrz przypis str. 144.

Dzieląc to przez czas znajdujemy szybkość przemiany energii  $P$ :

$$P = \frac{dU}{dt} = iV_{ab}. \quad (31-15)$$

Jeśli urządzeniem znajdującym się w skrzynce jest silnik, to energia w większości zamienia się na pracę mechaniczną wykonywaną przez ten silnik; jeśli urządzeniem tym jest akumulator, który jest ładowany, energia w większości zamienia się na energię chemiczną, zmagazynowaną w tym akumulatorze.

Jeśli w skrzynce znajduje się opornik, twierdzimy, że energia zamienia się na energię cieplną wydzieloną w oporniku. Aby to sprawdzić, rozważmy kamień o masie  $m$  spadający z wysokości  $h$ . Zmniejsza on swą grawitacyjną energię potencjalną o  $mgh$ . Jeśli kamień spada w próżni albo — jak to bywa w praktyce — w powietrzu, energia ta przekształca się w kinetyczną energię kamienia. Jeśli jednak kamień spada w głębinie oceanu, jego prędkość po pewnym czasie staje się stała, co oznacza, że energia kinetyczna przestaże wzrastać. Potencjalna energia, która się ciągle zużywa podczas spadania kamienia, zmienia się wtedy na energię cieplną w kamieniu i w otaczającej wodzie. Występuje tu lepki, podobny do tarcia, opór wody przy powierzchni kamienia, który przeciwstawia się przyspieszeniu kamienia i wskutek tego na tej powierzchni wytwarza się energia cieplna.

Ruch elektronów w oporniku jest bardzo podobny do ruchu kamienia w wodzie. Elektryny wędrują ze stałą prędkością unoszenia  $v_u$  i nie nabywają energii kinetycznej. Elektryczna energia potencjalna, którą tracą, zamieniana jest w oporniku na energię cieplną. W skali mikroskopowej można to rozumieć w ten sposób, że wskutek zderzeń elektronów z siecią (patrz rys. 21-5) wzrasta amplituda drgań cieplnych sieci; w skali makroskopowej odpowiada to wzrostowi temperatury. Następnie może zachodzić wypływ ciepła z oporu, jeżeli otoczenie ma niższą temperaturę niż opór.

Dla opornika możemy połączyć równanie (31-15) i (31-6) ( $R = V/i$ ) i otrzymać albo

$$P = i^2 R, \quad (31-16)$$

albo

$$P = \frac{V^2}{R}. \quad (31-17)$$

Zwracamy uwagę, że równanie (31-15) stosuje się do wszystkich rodzajów przemian energii elektrycznej; równania (31-16) i (31-17) stosują się tylko do przemiany energii elektrycznej w oporniku na energię cieplną. Równania (31-16) i (31-17) są znane jako *prawo Joule'a*. Prawo to jest w szczególny sposób zapisaną zasadą zachowania energii dla potencjalnego przypadku, w którym energia elektryczna jest zamieniana na energię cieplną (energię Joule'a).

Jednostką mocy wynikającą z równania (31-15) jest volt · amper ( $V \cdot A$ ). Jednostkę tę można również zapisać jako

$$1 \text{ V} \cdot \text{A} = \left(1 \frac{\text{J}}{\text{C}}\right) \left(1 \frac{\text{C}}{\text{s}}\right) = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}}.$$

Pierwszy czynnik przekształcenia (w nawiasie) pochodzi z definicji volta (V) (równ. (29-1)), drugi — z definicji kulomba (C). J/s jest tak rozpowszechnioną jednostką, że dano jej własną, specjalną nazwę — *wat* (W) (patrz paragraf 7-7). Oczywiście, moc nie

jest pojęciem wyłącznie elektrycznym i w watach możemy wyrażać moc ( $= Fv$ ) dostarczoną przez dowolny czynnik, który działa siłą  $F$  podczas ruchu z prędkością  $v$ .

**Przykład 5.** Mamy około 6 m drutu grzejnego, wykonanego ze specjalnego stopu — chromonikieliu. Drut ten ma opór 24  $\Omega$ . Czy więcej ciepła można otrzymać nawijając jedną spirale, czy dzieląc drut na pół i nawijając dwie oddzielne spirale? W obu przypadkach spirale będą podłączone osobno do sieci o napięciu 110 V.

Moc  $P$  dla pojedynczej spirali, z równania (31-17), wynosi

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{(110 \text{ V})^2}{24\Omega} = 500 \text{ W.}$$

Moc dla spirali o połowę krótszej

$$P' = \frac{(110 \text{ V})^2}{12 \Omega} = 1000 \text{ W.}$$

Ponieważ mamy dwie mniejsze spirale, całkowita moc otrzymana przez przecięcie drutu na pół wynosi 2000 W, czyli cztery razy więcej niż dla pojedynczej spirali. To zdaje się sugerować, że moglibyśmy kupić 500 W spiralę grzejną, przeciąć ją na pół i przewinąć, aby uzyskać 2000 W. Dlaczego pomysł ten jest niepraktyczny?

### Pytania

1. Wymienić wielkości fizyczne, które — podobnie jak prąd — są skalarami mającymi kierunek, zaznaczony na rysunkach strzałką.

2. Jakie wnioski można wyciągnąć, stosując równanie (31-4) do zamkniętej powierzchni, przez którą w przypadkowych kierunkach przechodzi szereg drutów przewodzących stałe prądy o różnych natężeniach? Czy można tu zastosować prawo Gaussa?

3. Różnicę potencjałów  $V$  przyłożono do drutu miedzianego o średnicy  $d$  i długości  $l$ . Jak wpływa na prędkość unoszenia elektronów: (a) podwojenie,  $V$ , (b) podwojenie  $l$ , (c) podwojenie  $d$ ?

4. Dlaczego żarówki w pokoju zaczynają jasno świecić prawie natychmiast po zamknięciu wyłącznika, skoro prędkości unoszenia elektronów w przewodniku w zwykłych warunkach są tak małe (patrz przykład 2)?

5. Czy można mierzyć prędkość unoszenia elektronów za pomocą pomiaru czasu ich wędrówki wzdłuż przewodnika?

6. Dana jest bateria dołączona do miedzianego sześcianu w dwóch rogach znajdujących się na jego przekątnej. Dana jest płaszczyzna przechodząca całkowicie przez sześcian, nachylona pod dowolnym kątem. (a) Czy prąd  $i$  przepływający przez płaszczyznę zależy od jej ustawienia i nachylenia? (b) Czy istnieje takie ustawienie i nachylenie płaszczyzny, dla którego wartość lub kierunek  $j$  lub obie te wielkości jednocześnie byłyby stałe? (c) Czy równanie (31-4) jest słusne dla wszystkich nachyleń płaszczyzny? (d) Czy jest ono słusne dla zamkniętej powierzchni o dowolnym kształcie, która będzie się znajdowała całkowicie lub częściowo wewnętrz sześcianu? Jeżeli nie, to dlaczego? Jeżeli tak, to co oznacza?

7. Na podstawie przyjętej konwencji określania kierunku prądu (a) czy byłoby to bardziej wygodne lub nawet możliwe, gdyby przyjąć wszystkie nośniki ładunku za ujemne? (b) Czy byłoby to bardziej wygodne lub nawet możliwe, gdyby oznaczyć elektron jako dodatni, proton jako ujemny, itd.?

8. Wyjaśnić własnymi słowami, dlaczego możemy mieć  $E \neq 0$  w przewodniku w tym rozdziale, jeżeli узнаliśmy, że  $E = 0$  w rozdziale 28 (patrz, na przykład, paragraf 28-6).

9. Do kołowego walca węglowego, połączonego z dwiema miedzianymi elektrodami (również w kształcie walca) przyłożono różnicę potencjałów  $V$  (rys. 31-9). Omówić trudności, jakie mogą wystąpić przy obliczaniu oporu walca za pomocą zależności  $R = \rho L/A$ .

10. Jak można by zmierzyć opór przewodnika w kształcie obwarzanka? Podać szczegóły pomysłu.

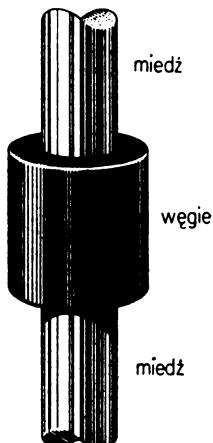
11. Omówić trudności, jakie mogą wystąpić przy badaniu, czy włókno żarówki spełnia prawo Ohma.

12. Dany jest okrągły cylinder z aluminium, o promieniu 1 cm i wysokości 2 cm. Jak należałoby ustawić aparaturę laboratoryjną, aby zmierzyć opór między dwoma ekwipotencjalnymi podstawami stojącymi równ. (31-9) ( $R = \rho l/A$ )?

13. Dany jest sześciian aluminiowy i dostęp do dwóch zacisków baterii. Jak należałoby połączyć zaciski z sześciianem, aby zapewnić (a) maksymalny, i (b) minimalny opór?

14. Czy zależność  $V = iR$  stosuje się do oporników nie spełniających prawa Ohma?

15. Temperaturowy współczynnik oporu termistora jest ujemny i zmienia się silnie z temperaturą. Opisać jakościowo kształt krzywej  $i$  w funkcji  $V$  dla termistora z rys. 31-6.



Rys. 31-9. Pytanie 9

16. Dlaczego białe linie na rys. 31-6 są lekko zakrzywione?

17. Prąd o natężeniu  $i$  wchodzi przez wierzchołek miedzianej kuli o promieniu  $R$  i wychodzi w punkcie diametralnie przeciwnego. Czy wszystkie części kuli jednakowo rozpraszają energię cieplną?

18. Jakie cechy charakterystyczne muszą posiadać: (a) drut grzejny i (b) drut topikowy?

19. Równanie (31-16) ( $P = i^2 R$ ) zdaje się sugerować, że szybkość wzrostu ilości energii cieplnej w oporniku zmniejsza się, jeśli zmniejszy się opór; równanie (31-17) ( $P = V^2/R$ ) zdaje się sugerować coś wręcz przeciwnego. Jak można wyjaśnić tę pozorną sprzeczność?

20. Czy opór włókna żarówki 500 W jest większy czy mniejszy od oporu włókna żarówki 100 W? Obie żarówki są przeznaczone do pracy pod napięciem 100 V.

21. Pięć drutów o tej samej długości i średnicy włączamy po kolej między dwa punkty o stałej różnicy potencjałów. W którym drucie będzie się najszybciej wydziełać ciepło Joule'a (a) o najmniejszym czy (b) o największym oporze?

22. Uzwojenie motoru (obciążone) ma opór  $1 \Omega$ . Jeżeli zastosujemy różnicę potencjałów 100 V, to czy natężenie prądu w motorze będzie równe  $100 \text{ V}/1 \Omega = 100 \text{ A}$ ?

23. Na lące znajduje się człowiek i krowa. W pobliżu uderza piorun. Dlaczego bardziej prawdopodobne jest porażenie krowy niż człowieka? Zjawisko za to odpowiedzialne nazywa się *napięciem krokowym*.

## Zadania

### Paragraf 31-1

1. Prąd o natężeniu 5 A płynie w przewodniku o oporze  $10 \Omega$  przez 4 min. (a) Ile kulombów i (b) ile elektronów przechodzi w tym czasie przez poprzeczny przekrój przewodnika?

Odp.: (a)  $1,2 \cdot 10^3 \text{ C}$ , (b)  $7,5 \cdot 10^{21}$  elektronów.

2. Jeśli do dwóch elektrod w rurze do wyładowań jest przyłożona dostatecznie duża różnica potencjałów, w gazie ustala się przepływ prądu. Gaz jonizuje się; elektrony poruszają się w kierunku dodatniej, a dodatnie jony w kierunku ujemnej elektrody. Jaka jest wielkość i kierunek prądu w rurze do wyładowań napełnionej wodorem, w której przez poprzeczny przekrój przechodzi w ciągu sekundy  $3,1 \cdot 10^{18}$  elektronów i  $1,1 \cdot 10^{18}$  protonów?

3. Równomierna wiązka cząstek alfa ( $q = 2e$ ) o stałej energii kinetycznej 20 MeV przenosi prąd

o natężeniu  $0,25 \cdot 10^{-6}$  A. (a) Jeżeli wiązka zostanie skierowana prostopadle do płaskiej powierzchni to ile cząstek alfa zderzy się z tą powierzchnią w ciągu 3 sekund? (b) W dowolnej chwili, ile cząstek alfa znajduje się w danym odcinku wiązki o długości 20 cm? (c) Jaka różnica potencjałów może przyspieszyć każdą cząstkę alfa od zera nadając jej energię 20 MeV?

Odp.: (a)  $2,3 \cdot 10^{12}$ , (b)  $5,0 \cdot 10^3$ , (c)  $10^7$  V.

4. Mamy  $2 \cdot 10^8$  podwójnie naładowanych dodatnich jonów na  $\text{cm}^3$ , poruszających się na północ z prędkością  $1 \cdot 10^7$  cm/s. (a) Jaka jest gęstość prądu  $j$ , jego wartość i kierunek? (b) Czy można obliczyć całkowite natężenie  $i$  w tej wiązce jonów? Jeżeli nie, to dlaczego?

5. Mały, lecz mierzalny prąd o natężeniu  $10^{-10}$  A płynie w przewodniku miedzianym o średnicy 2,54 mm. Obliczyć prędkość unoszenia elektronów.

Odp.:  $1,5 \cdot 10^{-15}$  m/s.

6. Pas generatora elektrostatycznego ma szerokość 50 cm i porusza się z prędkością 30 m/s. Pas przekonduje ładunek do wnętrza kuli z szybkością odpowiadającą  $10^{-4}$  A. Obliczyć powierzchniową gęstość ładunku na pasie.

7. Prąd o natężeniu  $i$  wpływający przez jeden róg kwadratowego arkusza miedzianego i wypływa przez przeciwny róg. Naszkicować w różnych punktach kwadratu strzałki, przedstawiające względne wartości  $j$ . Posłużyć się intuicją, a nie szczegółową analizą matematyczną.

8. Dana jest przewodząca kula o promieniu 10 cm. Jeden przewód wprowadza do niej prąd o natężeniu 1,0000020 A, inny przewód odprowadza prąd o natężeniu 1,0000000 A. Ile czasu trzeba, by potencjał kuli wzrósł o 1000 V?

### Paragraf 31-2

9. Stalowe przewody elektrycznego wagonu mają powierzchnię przekroju poprzecznego  $45,81 \text{ cm}^2$ . Jaki jest opór 16 km pojedynczego przewodu? Opór właściwy stali jest  $6,0 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot \text{m}$ .

Odp.: 2,1  $\Omega$ .

10. Kwadratowy pręt aluminiowy ma długość 1,0 m i krawędź 5,0 mm. (a) Jaki jest opór między jego końcami? (b) Jaką średnicę musiałby mieć kołowy pręt miedziany o długości 1,0 m, aby miał taki sam opór?

11. Do drutów miedzianego i żelaznego o tej samej długości przykłada się tę samą różnicę potencjalową. (a) Jaki musi być stosunek ich promieni, aby natężenie prądu było to samo? (b) Czy przez odpowiedni dobór promieni można zrównać gęstości prądów?

Odp.: (a) 2,4, drut żelazny ma promień większy. (b) Nie.

12. Drut o oporze  $6,0 \Omega$  został rozciągnięty tak, że jego nowa długość jest trzy razy większa od początkowej. Znaleźć opór dłuższego drutu, zakładając, że opór właściwy i gęstość materiału nie zmieniły się podczas rozciągania.

13. Drut z chromonikieliną (niklowo-aluminiowy stop często używany w elementach grzejnych) o długości 1,0 m i o powierzchni przekroju poprzecznego  $1,0 \text{ mm}^2$  przenosi prąd o natężeniu 4,0 A, jeżeli na jego końcach przyłożona jest różnica potencjałów 2,0 V. Jakie jest przewodnictwo właściwe  $\sigma$  chromonikielin?

Odp.:  $2,0 \cdot 10^6 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ .

14. Pręt z pewnego metalu ma długość 1,00 m i średnicę 0,550 cm. Opór między jego końcami ( $20^\circ\text{C}$ ) wynosi  $2,87 \cdot 10^{-3} \Omega$ . Z tego samego metalu utworzono okrągły dysk o średnicy 2,00 cm i grubości 1,00 mm. (a) Jaki jest opór między przeciwnymi ekwiwotencjalnymi powierzchniami kołowymi dysku? (b) Jaki to metal?

15. Dwa przewodniki wykonane są z tego samego materiału i mają tę samą długość. Przewodnik  $A$  jest drutem o średnicy 1,0 mm. Przewodnik  $B$  jest wydrążoną tubą o zewnętrznej średnicy 2,0 mm i wewnętrznej średnicy 1,0 mm. Jaki jest stosunek oporów  $R_A/R_B$  mierzonych między ich końcami.

Odp.: 3,0.

16. Dziewięć miedzianych drutów o długości  $l$  i średnicy  $d$  połączono równolegle i powstał w ten sposób jeden złożony przewodnik o oporze  $R$ . Jaka musi być średnica  $D$  pojedynczego miedzianego drutu o długości  $l$ , jeżeli ma mieć ten sam opór?

17. Druty miedziany i żelazny o równej długości  $l$  i średnicy  $d$  połączono ze sobą i do końców tak złączonego drutu przyłożono różnicę potencjałów  $V$ . Obliczyć (a) różnicę potencjałów w każdym drucie.

Przyjąć, że  $l = 10 \text{ m}$ ,  $d = 2,0 \text{ mm}$  i  $V = 100 \text{ V}$ . (b) Obliczyć także gęstość prądu w każdym drucie i (c) pole elektryczne w każdym drucie.

Odp.: (a)  $15 \text{ V}$  (miedź);  $85 \text{ V}$  (żelazo). (b)  $8,5 \cdot 10^7 \text{ A/m}^2$ . (c)  $1,5 \text{ V/m}$  (miedź);  $8,5 \text{ V/m}$  (żelazo).

18. Opór drutu żelaznego jest 5,9 raza większy od oporu drutu miedzianego o tych samych wymiarach. Jaka musi być średnica drutu żelaznego, jeżeli ma on mieć taki sam opór jak drut miedziany o średnicy  $0,12 \text{ cm}$ , przy czym oba druty mają taką samą długość?

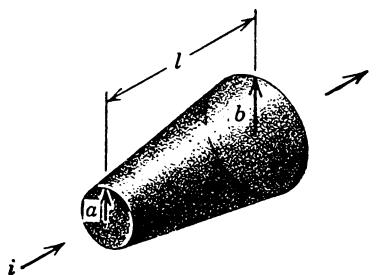
19. Okrągłe, cylindryczne pręty aluminiowy i miedziany mają taką samą długość i powinny mieć taki sam opór. Opór właściwy miedzi jest 0,61 razy większy od oporu właściwego aluminium, ale jego gęstość jest 3,3 raza większa od aluminium. Jaki jest stosunek masy pręta aluminiowego do masy pręta miedzianego?

Odp.: 0,50.

20. Przewodniki  $A$  i  $B$  o równych długościach  $40 \text{ m}$  i powierzchni przekroju poprzecznego równej  $0,10 \text{ m}^2$  są połączone szeregowo. Do końcowych punktów połączonych drutów przyłożono napięcie  $60 \text{ V}$ . Oporы drutów wynoszą odpowiednio  $40 \Omega$  i  $20 \Omega$ . Określić: (a) opory właściwe obu drutów; (b) wielkość pola elektrycznego w każdym drucie; (c) gęstość prądu w każdym drucie; (d) różnicę potencjałów przyłożoną do każdego przewodnika.

21. Opornik ma kształt stożka ściętego (rys. 31-10). Promienie podstaw wynoszą  $a$  i  $b$ , wysokość stożka wynosi  $l$ . Jeżeli stożkowatość jest mała, można przyjąć, że gęstość prądu jest jednorodna w dowolnym przekroju poprzecznym. (a) Obliczyć opór tego przedmiotu. (b) Wykazać, że odpowiedź redukuje się do  $\rho(l/A)$  dla szczególnego przypadku stożkowatości zerowej ( $a = b$ ).

Odp.: (a)  $R = \rho(1/\pi ab)$ .



Rys. 31-10. Zadanie 21

22. (a) W jakiej temperaturze opór przewodnika miedzianego będzie dwa razy większy od oporu w temperaturze  $0^\circ\text{C}$ ? (b) Czy dla wszystkich przewodników miedzianych, bez względu na ich kształt i wielkość, temperatura będzie ta sama?

23. Miedziane uzwojenia silnika mają w temperaturze  $20^\circ\text{C}$ , kiedy silnik jest wyłączony, opór  $50 \Omega$ . Po kilkugodzinnej pracy opór wzrasta do  $58 \Omega$ . Jaka jest temperatura uzwojeń?

Odp.:  $61^\circ\text{C}$ .

24. Podczas nagrzewania pręta zmienia się nie tylko jego opór, ale także jego długość i pole przekroju poprzecznego. Zależność  $R = \rho l/A$  sugeruje, że przy pomiarach  $\rho$  w różnych temperaturach winny być brane pod uwagę wszystkie te (trzy) czynniki. (a) O ile procent zmienia się  $R$ ,  $l$  i  $A$  dla przewodnika miedzianego, jeśli temperatura zmienia się o  $1,0^\circ\text{C}$ ? (b) Jaki można stąd wyciągnąć wniosek? Współczynnik rozszerzalności liniowej miedzi wynosi  $1,7 \cdot 10^{-5}/^\circ\text{C}$ .

### Paragraf 31-3

25. Wyszczególnić w formie tablicy różnice i podobieństwa zachodzące między przepływem ładunku przez przewodnik, przepływem wody przez poziomą rurę i przewodzeniem ciepła przez płytę. Rozważyć co powoduje przepływ, co go utrudnia, jakie cząstki elementarne w nim uczestniczą (jeżeli uczestniczą) i jednostki jakimi przepływ można zmierzyć.

26. (a) Posługując się danymi z rysunku 31-5, wykreślić opór lampy próżniowej w funkcji przykładowej różnic potencjałów. (b) Powtórzyć to samo dla termistora z rysunku 31-6.

### Paragraf 31-4

27. Wyjaśnić, dlaczego pęd, jaki przewodzące elektrony przenoszą na jony w przewodniku metalowym, nie powoduje pojawienia się wypadkowej siły działającej na przewodnik.

Odp.: Ze względu na trzecie prawo Newtona nie ma siły wypadkowej działającej na przewodnik (elektrony+jony).

### Paragraf 31-5

28. Podczas przepływu prądu o natężeniu 3,0 A w oporniku wydziela się energia cieplna z szybkością 100 W. Jaki jest jego opór w  $\Omega$ ?

29. Lampa rentgenowska pobiera prąd o natężeniu 7,0 mA i pracuje przy różnicy potencjałów 80 kV. Ile mocy w watach ulega rozproszeniu?

Odp.: 560 W.

30. Do miedzianego drutu o długości 30,48 m i średnicy 1,0 mm przyłożono różnicę potencjałów 1,0 V. Obliczyć: (a) natężenie prądu, (b) gęstość prądu, (c) natężenie pola elektrycznego, (d) szybkość wytwarzania w drucie energii cieplnej.

31. Ze względów bezpieczeństwa maksymalne natężenie prądu w drucie miedzianym o średnicy 2,54 mm izolowanym za pomocą gumy zostało ustalone na 25 A. Przy tym natężeniu prądu znaleźć: (a) gęstość prądu, (b) natężenie pola elektrycznego, (c) różnicę potencjałów na odcinku 300 m drutu, (d) moc z jaką jest wytwarzana energia cieplna na odcinku 300 m drutu.

Odp.: (a)  $4,9 \cdot 10^6$  A/m<sup>2</sup>. (b)  $8,3 \cdot 10^{-2}$  V/m. (c) 25 V. (d) 630 W.

32. Wiązka deuteronów o energii 16 MeV, wychodząca z cyklotronu, pada na blok miedziany. Wiązka jest równoważna prądowi o natężeniu  $15 \cdot 10^{-6}$  A. (a) Z jaką częstością deuterony uderzają w blok? (b) Z jaką mocą jest wytwarzana w bloku energia cieplna?

33. Grzałkę o mocy 500 W zanurzono w garnku zawierającym 2,0 l wody o temperaturze 20°C. (a) Po jakim czasie woda zacznie wrzeć przy założeniu, że pochłania ona 80% wydzielanej energii? (b) O ile dłużej potrwa wyparowanie połowy wody?

Odp.: (a) 28 min. (b) 1,6 godz.

34. 500 W grzejnik ma pracować w sieci o napięciu 115 V. (a) O ile procent zmniejszy się ilość wydzielanego ciepła, jeśli napięcie w sieci spadnie do 110 V? Założyć, że opór nie zmienia się. (b) Czy, jeżeli uwzględnimy zależność oporu od temperatury, zmiana ilości wydzielanego ciepła będzie większa czy mniejsza od wyliczonej w punkcie (a)?

35. Grzejnik promiennikowy o mocy 1250 W jest skonstruowany do pracy przy napięciu 115 V. (a) Jakie jest natężenie prądu w grzejniku? (b) Jaki jest opór spirali grzejnej? (c) Ile kilokalorii gromadzi grzejnik w ciągu jednej godziny?

Odp.: (a) 11 A. (b)  $11 \Omega$ . (c) 1100 kcal.

36. Grzejnik z chromonikieliny rozprasza w ciągu sekundy energię 500 W przy różnicy potencjałów 110 V i temperaturze drutu 800°C. Jaką moc rozpraszałyby grzejnik, gdyby drut utrzymywano w temperaturze 200°C przez zanurzenie w chłodzącej kąpieli olejowej? Różnica potencjałów pozostaje ta sama;  $\bar{\alpha}$  dla chromonikliny wynosi około  $4 \cdot 10^{-4}/^\circ\text{C}$ .

37. (a) Wyprowadzić wzory  $P = j^2\rho$  i  $P = E^2/\rho$ , gdzie  $P$  = moc na jednostkę objętości w oporniku. b) Cylindryczny opornik o promieniu 0,50 cm i długości 2,0 cm ma opór właściwy  $3,5 \cdot 10^{-5} \Omega \cdot \text{m}$ . Jakie są: gęstość prądu i różnica potencjałów, jeżeli rozproszenie mocy wynosi 1,0 W?

Odp.: (b)  $j = 1,3 \cdot 10^5$  A/m<sup>2</sup>;  $V = 0,094$  V.

38. Należy wykonać długi przewodnik w kształcie walca, dla którego temperaturowy współczynnik oporu właściwego w temperaturze 20°C będzie dokładnie równy零. (a) Gdyby taki przewodnik utworzyć przez ułożenie na przemian krążków żelaznych i węglowych, to jaki byłby stosunek grubości krążka węglowego do grubości krążka żelaznego? Założyć, że temperatura każdego krążka jest taka sama. (b) Jaki byłby stosunek energii cieplnej wydzielonej w krążku węglowym i żelaznym? [Patrz tablica 31-1].

39. Liniowy akcelerator elektronowy wytwarza wiązkę elektronów. Natężenie impulsu równe jest 0,50 A, a czas jego trwania 0,10  $\mu\text{s}$ . (a) Ile elektronów zostaje przyspieszonych w czasie jednego impulsu? (b) Jakie jest średnio natężenie prądu dla urządzenia pracującego przy 500 impulsach na sekundę. (c) Jeżeli przyspieszone elektrony uzyskują energię 50 MeV, to ile wynoszą moce wyjściowe z akceleratora: przeciętna i szczytowa?

Odp.: (a)  $3,1 \cdot 10^{11}$ . (b) 25  $\mu\text{A}$ . (c) 1200 W (przeciętna);  $2,5 \cdot 10^7$  W (szczytowa).

# 32. Siła elektromotoryczna a obwody z prądem

## 32-1. Siła elektromotoryczna

Istnieją w przyrodzie pewne urządzenia, takie jak baterie i prądnice, które są zdolne do wytwarzania różnic potencjałów pomiędzy dwoma punktami. Urządzenia te nazywamy źródłami *siły elektromotorycznej* (symbol  $\mathcal{E}$ ; w skrócie SEM). W rozdziale tym nie będziemy omawiali ich wewnętrznej budowy ani dokładnego sposobu działania, ale ograniczymy się do podania ogólnych elektrycznych własności tych urządzeń oraz zbadamy możliwość ich zastosowania w obwodach elektrycznych.

Na rysunku 32-1a przedstawione jest źródło SEM  $B$ , reprezentowane przez baterię połączoną z oporem  $R$ . Jeden z zacisków źródła jest dodatni, a drugi ujemny, co pokazują znaki  $+i-$ . W obwodzie na zewnątrz  $B$  zachodzi przemieszczanie się dodatnich ładunków w taki sposób, jak pokazują strzałki z literą  $i$ . Innymi słowy — kierunek prądu w obwodzie jest zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara.

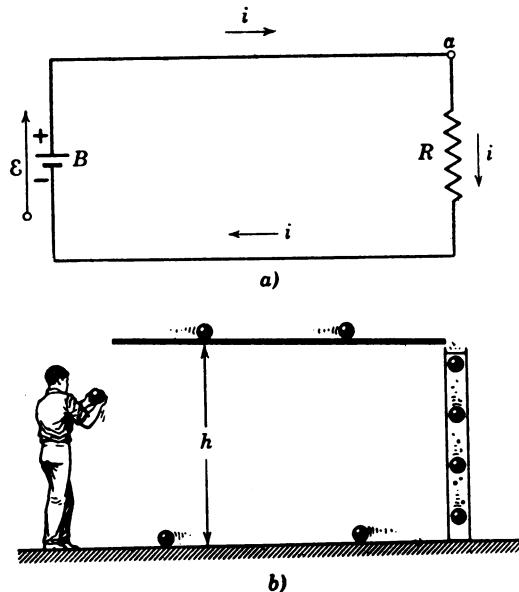
SEM przedstawiamy za pomocą strzałki narysowanej w pobliżu źródła. Jej ostrze reprezentuje sposób włączania źródła, od którego zależy kierunek ruchu ładunków dodatnich w obwodzie zewnętrznym. Małe kółko zostało narysowane na końcu strzałki związanej z SEM po to, aby nie myliła się ona ze strzałką wskazującą kierunek prądu.

Źródło SEM musi być zdolne do wykonania pracy na przesunięcie ładunków, które do niego dopływają. W obwodzie na rys. 32-1a na przykład źródło powoduje ruch dodatnich ładunków od punktu o niższym potencjale (zacisk ujemny) poprzez źródło do punktu o wyższym potencjale (zacisk dodatni). Działanie to podobne jest do działania pompy,

\* Poza bateriami istnieje wiele źródeł siły elektromotorycznej. Między innymi są to generatory (patrz rozdział 39), urządzenia pobudzane różnicą temperatur (termoogniwa), urządzenia pobudzane przez światło (patrz: Bruce Chalmers, The Photovoltaic Generation of Electricity *Scientific American*, October 1976); serce człowieka (patrz: Pierre Lafrance, The Electrocardiograph — Teaching Physics to Premeds *The Physics Teacher*, November 1972), niektóre ryby (patrz: T. H. Bullock, Seeing the World Through a New Sense: Electoreception in Fish *American Scientist*, May-June 1973).

która powoduje przepływ wody z miejsca o niższym potencjale grawitacyjnym do miejsca o wyższym potencjale.

Na rysunku 32-1a ładunek  $dq$  przepływa przez dowolny przekrój w czasie  $dt$ . W szczególności ładunek ten wpływa do źródła SEM poprzez zacisk o niższym potencjale i opuszcza go ośrodek SEM poprzez zacisk o wyższym potencjale.



Rys. 32-1. (a) Prosty obwód elektryczny i (b) jego grawitacyjny odpowiednik

za źródło poprzez zacisk o potencjał wyższym. Źródło musi wykonać pracę  $dW$  nad dodatkowymi ładunkami zmuszając je do ruchu w stronę punktu o wyższym potencjału. SEM  $\mathcal{E}$  źródła jest zdefiniowana następująco:

$$\mathcal{E} = \frac{dW}{dq}. \quad (32-1)$$

Jednostką SEM jest J/C (patrz równ. (29-1)), albo inaczej wolt (V). Można powiedzieć, że bateria ma SEM wynoszącą 1 V, jeżeli wytwarza ona pomiędzy swymi zaciskami różnicę potencjałów 1 V. Jest to prawdziwe tylko w szczególnych warunkach, które zostaną omówione w paragrafie 32-4.

Równanie 32-1 wskazuje także na to, że siła elektromotoryczna nie jest w rzeczywistości siłą, tzn. nie można jej mierzyć w niutonach. Nazwa pochodzi z wczesnego okresu zajmowania się tym zagadnieniem.

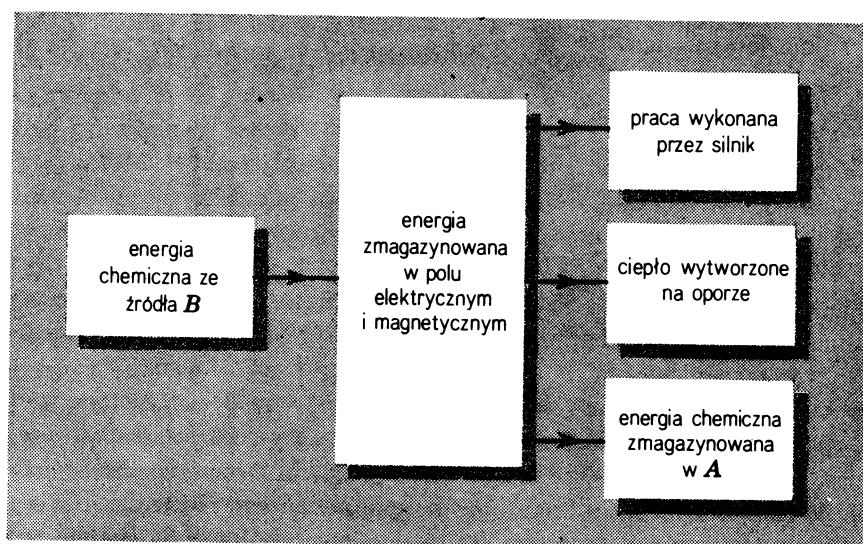
Jeżeli źródło wykonuje pracę nad ładunkami, musi ono dostarczać energię. W baterii np. energia chemiczna jest przekształcona na energię elektryczną. Tak więc można powiedzieć, że źródłem SEM jest urządzenie, w którym chemiczna, mechaniczna albo inne rodzaje energii są przekształcane (odwracalnie) w energię elektryczną. Energia chemiczna dostarczana przez baterię (rys. 32-1a) jest przekształcana na energię pola elektrycznego i magnetycznego\*, które otaczają obwód. Ilość energii zmagazynowanej w tych polach nie wzrasta nieskończonym, ponieważ ulega ona rozpraszaniu na skutek prze-

\* Prąd płynący w przewodzie jest otoczony polem magnetycznym. Pole to, podobnie jak pole elektryczne, może być traktowane jako magazyn energii (patrz paragraf 36-4).

kształcenia się na energię Joule'a (cieplną) w oporze, w miarę jak jest dostarczana. Pole elektryczne i magnetyczne odgrywają rolę pośrednika w procesie przekształcania energii, działając jako magazyn.

Rysunek 32-1b przedstawia grawitacyjny odpowiednik obwodu z rys. 32-1a. Na wyższym rysunku źródło SEM *B* wykonuje pracę nad ładunkami. Uzyskana w ten sposób w przepływie energia, zmagazynowana chwilowo w polu magnetycznym przekształca się ostatecznie na energię cieplną w oporze *R*. Na niższym rysunku człowiek podnoszący kule z podłogi na półkę wykonuje nad nimi pracę. Uzyskana w ten sposób w przepływie energia magazynowana jest chwilowo jako energia pola grawitacyjnego. Kule toczą się wolno i jednostajnie wzdłuż półki i wpadają po prawej stronie do cylindra wypełnionego olejem. Następnie spadają na ogół ze stałą prędkością wewnątrz cylindra, przechodzą przez nie-widoczne na rysunku wyjście w pobliżu dna i toczą się z powrotem w lewą stronę. Energia dostarczona do układu przez człowieka przekształca się ostatecznie na energię cieplną wydzieloną w oleju (ciecz lepka), co objawia się wzrostem temperatury. Energia dostarczana przez człowieka pochodzi z jego własnego, wewnętrznego zapasu energii (chemicznej). Obieg ładunków na rys. 32-1a zostanie zatrzymany, jeżeli bateria *B* nie zostanie ponownie naładowana; obieg kul na rys. 32-1b zostanie zatrzymany, jeżeli człowiek nie będzie uzupełniał swego wewnętrznego zapasu energii.

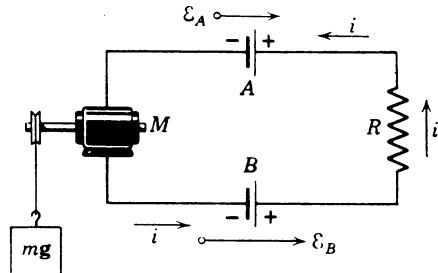
Rysunek 32-2 przedstawia obwód zawierający dwie (idealne) baterie *A* i *B*, opór *R* i (idealny) silnik elektryczny używany do podnoszenia ciężarów. Baterie są połączone tak, że powodują one przemieszczenie się ładunków wokół obwodu w przeciwnie strony; rzeczywisty kierunek prądu jest wyznaczony przez baterię *b*, która wytwarza większą różnicę potencjałów. Przekazywanie energii w tym obwodzie odbywa się następująco:



Z baterii *B* jest stopniowo pobierana energia chemiczna, która zamienia się na trzy rodzaje energii pokazane po prawej stronie rysunku. Bateria *A* jest naładowana, natomiast bateria *B* jest rozładowywana. Tu również pola elektryczne i magnetyczne, otaczające obwód, odgrywają rolę pośrednika w procesie przekształcania energii.

Już w samej definicji zawarte jest stwierdzenie, że procesy przekształcania energii są *odwracalne*, przynajmniej teoretycznie. Przypominamy, że procesami odwracalnymi nazywamy takie procesy, które przebiegają poprzez kolejne stany równowagi; ich bieg można odwrócić wykonując nieskończenie małe zmiany w otoczeniu układu; patrz paragraf 25-2. Bateria np. może być naładowana albo rozładowana; prądnica może być napędzana mechanicznie, produkując energię elektryczną, może również działać „odwrotnie” jako silnik. Występujące tutaj przekształcenia energii (odwracalne) to:

$$\begin{aligned} \text{energia elektryczna} &\rightleftharpoons \text{energia chemiczna}, \\ \text{energia elektryczna} &\rightleftharpoons \text{energia mechaniczna}. \end{aligned}$$



Rys. 32-2. Dwie baterie, opór i silnik tworzą obwód składający się z jednego oczka. Zakładamy, że  $\mathcal{E}_B > \mathcal{E}_A$

Przekształcenie energii elektrycznej na energię cieplną jest procesem nieodwracalnym. Możemy łatwo podnieść temperaturę przewodnika dostarczając do niego energię elektryczną, ale niemożliwe jest wytworzenie prądu w zamkniętej miedzianej pętli podnosząc temperaturę tej pętli w sposób równomierny. Ponieważ nie istnieje tu odwracalność, nie stawiamy znaku równości między SEM a efektem Joule'a, tzn. przekształceniami energii związanymi z równaniami (31-16) i (31-17).

### 32-2. Obliczanie natężenia prądu

W ciągu czasu  $dt$  w oporze na rys. 32-1a wydziela się w postaci ciepła Joule'a ilość energii równa  $i^2 R dt$ . W tym samym czasie poprzez źródło SEM będzie przepływał ładunek  $dq$  ( $= idt$ ). Źródło wykonuje nad tym ładunkiem pracę (patrz równ. (32-1)) określona równaniem

$$dW = \mathcal{E} dq = \mathcal{E} idt.$$

Z zasady zachowania energii wynika, że praca wykonana przez źródło musi być równa wydzielonej energii, co zapisujemy jako

$$\mathcal{E} idt = i^2 R dt.$$

Rozwiązuje powyższe równanie względem  $i$  otrzymujemy

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (32-2)$$

Równanie (32-2) możemy także otrzymać w innym sposobie: zwracając uwagę na to, że jeżeli potencjał elektryczny ma mieć jakieś znaczenie, to wartość potencjału w danym punkcie obwodu może mieć w danej chwili tylko jedną wartość. Jeżeli wyruszmy z dowolnego punktu na obwodzie z rys. 32-1a i w myśli okrążymy obwód w jednym z dwóch możliwych kierunków, dodając algebraicznie „napotykane” potencjały, to gdy powrócimy do punktu wyjściowego, musimy osiągnąć tę samą wartość potencjału. Innym słowy, *algebraiczna suma zmian potencjału napotykanych przy całkowitym obiegu obwodu musi być równa zeru*.

Na rysunku 32-1a zaczynamy „start” z punktu  $a$  o potencjale  $V_a^*$  i poruszamy się zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Przy przejściu przez opór następuje zmiana potencjału o  $-iR$ . Znak minus wskazuje, że początek oporu ma wyższy potencjał aniżeli koniec, co musi być prawdą, ponieważ swobodny ruch dodatnich ładunków odbywa się w kierunku od potencjału wyższego do niższego. Przy przechodzeniu przez barierę w kierunku od dołu do góry wartość potencjału wzrośnie o  $+\mathcal{E}$ , ponieważ bateria wykonuje (dodatnią) pracę nad ładunkami przesuwając je od punktu o niższym potencjałe do punktu o potencjałe wyższym. Dodając algebraicznie te zmiany potencjału do potencjału początkowego  $V$  musimy otrzymać znowu wartość  $V_a$ , co zapiszemy w postaci

$$V_a - iR + \mathcal{E} = V_a \quad \text{albo} \quad -iR + \mathcal{E} = 0.$$

Ostatni związek jest niezależny od wartości  $V_a$  i wykazuje *explicite*, że algebraiczna suma zmian potencjału dla zamkniętego obiegu wokół obwodu wynosi zero. Ze związku tego otrzymujemy bezpośrednio równanie (32-2).

Podane dwie metody znajdowania natężenia prądu w obwodzie zamkniętym, metoda oparta na zasadzie zachowania energii oraz metoda posługującą się pojęciem potencjału, są zupełnie równoważne, ponieważ różnica potencjałów jest zdefiniowana przy pomocy takich wielkości, jak praca i energia (paragraf 29-1). Twierdzenie, że suma zmian potencjału napotykanych przy dokonywaniu obiegu wokół dowolnego zamkniętego obwodu (oczka) jest równa zeru, nosi nazwę *drugiego prawa Kirchhoffa*; nazywamy je również *twierdzeniem o oczkach sieci elektrycznej*. Powinniśmy zawsze pamiętać, że twierdzenie to jest po prostu szczególną postacią zasady zachowania energii dla prądów elektrycznych.

Przygotowując się do omawiania bardziej złożonych obwodów elektrycznych zwróćmy uwagę na reguły pozwalające znajdować odpowiednie różnice potencjałów; reguły te wynikają z poprzednich rozważań. Nie należy uczyć się ich na pamięć, ale raczej starać się dobrze je zrozumieć, a wtedy w razie potrzeby będzie można łatwo je odtworzyć.

1. Gdy „przechodzimy” przez opór w kierunku zgodnym z kierunkiem płynięcia prądu, wówczas zmiana potencjału wynosi  $-iR$ ; gdy opór jest „przebywany” w kierunku przeciwnym, zmiana ta wynosi  $+iR$ .

2. Gdy źródło SEM jest „przebywane” w kierunku SEM, zmiana potencjału jest równa  $+\mathcal{E}$ ; gdy obrany jest kierunek przeciwny, wówczas zmiana ta wynosi  $-\mathcal{E}$ .

### 32-3. Inne proste obwody zamknięte (o jednym oczku)

Na rysunku 32-3a jest przedstawiony obwód, na którym zaznaczono, że wszystkie źródła SEM mają opór wewnętrzny  $r$ . Opór ten zawsze istnieje, chociaż na ogół będziemy go zaniedbywać. Jest on nieodłączną cechą źródła. Na rysunku opór wewnętrzny  $r$  i SEM są rozdzielone, w rzeczywistości zajmują one ten sam obszar przestrzeni. Jeżeli zastosujemy drugie prawo Kirchhoffa, zaczynając obieg z punktu  $b$  i poruszając się wzdłuż obwodu zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, otrzymamy

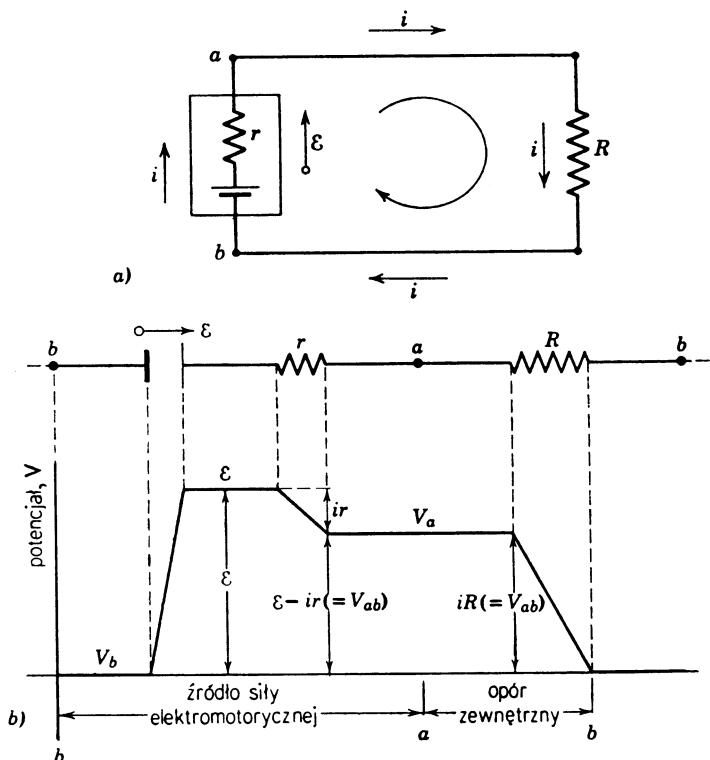
$$V_b + \mathcal{E} - ir - iR = V_b \quad \text{albo} \quad +\mathcal{E} - ir - iR = 0.$$

---

\* Wartość  $V_a$  zależy od założeń przyjętych w definicji potencjału (patrz paragraf 29-1). Liczbowa wartość  $V_a$  nie jest ważna, ponieważ, jak w większości zagadnień dotyczących obwodów elektrycznych, interesują nas tylko różnice potencjałów. Punkt  $a$  na rys. 32-1a (albo jakikolwiek inny punkt na tym rysunku) można połączyć z ziemią (symbol  $\perp$ ) i przypisać mu potencjał  $V_a = 0$ , co jest powszechnie praktykowane.

Otrzymane wyrażenie można porównać z rys. 32-3b, który przedstawia graficznie odpowiednie zmiany potencjału. Zauważmy, że pisząc powyższe równania, opory  $r$  i  $R$  przebyliśmy zgodnie z kierunkiem płynięcia prądu, a  $\mathcal{E}$  w kierunku zgodnym z SEM. Identyczne równania otrzymamy, jeżeli zaczniemy obieg z jakiegokolwiek innego punktu obwodu, albo gdy dokonamy obiegu w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Rozwiązujeć ostatnie równanie względem  $i$  otrzymujemy

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R+r}. \quad (32-3)$$



Rys. 32-3. (a) Obwód składający się z jednego oczka. Prostokąt przedstawia źródło SEM o oporze wewnętrzny  $r$ . (b) Ten sam obwód przedstawiony dla wygody w postaci linii prostej. Poniżej pokazano zmiany wartości potencjałów napotykanych przy obieganiu obwodu zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, począwszy od punktu  $b$ . Należy zauważyć, że dwa punkty oznaczone przez  $b$  na górze rysunku to jeden i ten sam punkt

**Przykład 1. Szeregowo połączenie oporów.** Oporы są wtedy połączone w szereg, gdy koniec każdego oporu jest połączony z początkiem następnego, tak jak na rys. 32-4. Jaki jest opór zastępczy dla tego szeregowego połączenia? Oporem zastępczym nazywamy taki pojedynczy opór  $R$ , który wprowadzony między zaciski  $a$  i  $b$ , zamiast oporów połączonych szeregowo, pozostawiłby niezmienione natężenie  $i$  prądu.

Stosując drugie prawo Kirchhoffa (idąc zgodnie z ruchem wskazówek zegara od punktu  $a$ ) otrzymamy

$$-iR_1 - iR_2 - iR_3 + \mathcal{E} = 0$$

albo

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

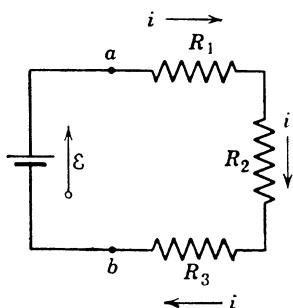
Dla oporu zastępczego  $R$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R},$$

skąd

$$R = R_1 + R_2 + R_3. \quad (32-4)$$

Ostatnią zależność możemy w oczywisty sposób rozszerzyć na więcej niż trzy opory.



Rys. 32-4. Przykład 1. Trzy opory połączone szeregowo pomiędzy za-

### 32-4. Różnice potencjałów

Często potrzebujemy obliczyć różnicę potencjałów pomiędzy dwoma punktami obwodu. Rozpatrzymy np. rys. 32-3a. Jaki jest związek pomiędzy różnicą potencjałów  $V_{ab}$  ( $= V_a - V_b$ ), panującą między punktami  $b$  i  $a$  oraz ustalonymi parametrami obwodu  $\mathcal{E}$ ,  $r$  i  $R$ ? Aby znaleźć ten związek, zaczynamy obieg obwodu od punktu  $b$  i poruszamy się wzdłuż obwodu do punktu  $a$ , mijając po drodze opór  $R$  przeciwnie do kierunku prądu. Jeżeli  $V_b$  i  $V_a$  są odpowiednio potencjałami w punkcie  $b$  i  $a$ , to mamy

$$V_b + iR = V_a,$$

ponieważ przy przejściu oporu przeciwnie do strzałki oznaczającej kierunek prądu obserwujemy wzrost potencjału. Przepiszmy ten związek w postaci

$$V_{ab} = V_a - V_b = +iR,$$

z której widać, że różnica potencjałów  $V_{ab}$  pomiędzy punktami  $a$  i  $b$  jest równa wartości  $iR$  oraz że punkt  $a$  ma wyższy potencjał aniżeli punkt  $b$ . Łącząc ostatnie równanie z równaniem (32-3) otrzymujemy

$$V_{ab} = \mathcal{E} \frac{R}{R+r}. \quad (32-5)$$

Podsumowując: Aby znaleźć różnicę potencjałów pomiędzy dwoma dowolnymi punktami obwodu, zaczynamy obieg obwodu od jednego z tych punktów i poruszamy się wzdłuż obwodu do następnego punktu idąc w dowolnym kierunku\* i dodając algebraicznie natykane zmiany potencjałów. Postępowanie to jest podobne do tego, jakie stosujemy, znajdując natężenie prądu w obwodzie zamkniętym, z tą różnicą, że tutaj dodajemy tylko potencjały dla części obwodu, a nie dla całego obwodu.

\* Należy przypomnieć sobie (patrz paragraf 29-1), że niezależność od drogi jest główną cechą konsepcji potencjału.

Różnica potencjałów pomiędzy dwoma dowolnymi punktami może mieć tylko jedną wartość; tak więc musimy otrzymać jednakową odpowiedź dla wszystkich dróg, które łączą te punkty. Jeżeli rozważymy dwa punkty znajdujące się na zboczu góry, to zmierzona różnica potencjałów grawitacyjnych między nimi jest jednakowa bez względu na to, jaką drogę przebywamy przy przechodzeniu od jednego punktu do drugiego. Obliczymy także  $V_{ab}$  dla punktów  $a$  i  $b$  z rys. 32-3a idąc drogą przechodzącą przez źródło SEM. Możemy napisać

$$V_b + \mathcal{E} - ir = V_a$$

albo (patrz także rys. 33-3b)

$$V_{ab} = V_a - V_b = +\mathcal{E} - ir.$$

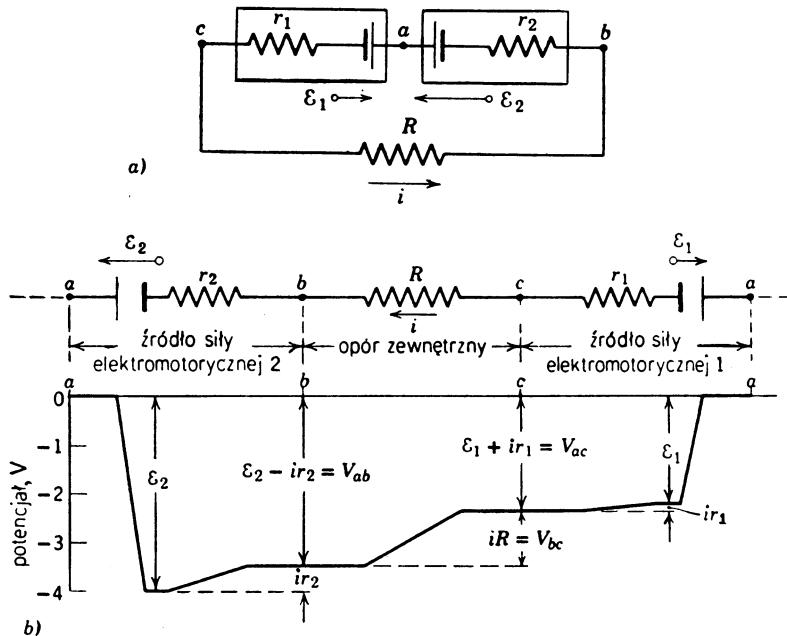
Łącząc powyższe równanie z równaniem (32-3) otrzymujemy ponownie równanie (32-5).

Różnica potencjałów  $V_{ab}$  na zaciskach baterii, jak pokazuje równanie (32-5) jest mniejsza od  $\mathcal{E}$ , chyba że bateria nie ma oporu wewnętrznego ( $r = 0$ ), albo jeżeli obwód jest otwarty ( $R = \infty$ ); dla tych przypadków  $V_{ab}$  jest równe  $\mathcal{E}$ . Tak więc SEM źródła jest równa różnicy potencjałów na jego zaciskach przy *otwartym obwodzie*.

**Przykład 2.** Niech na rysunku 32-5a  $\mathcal{E}_1$  i  $\mathcal{E}_2$  wynoszą odpowiednio 2,0 V i 4,0 V, niech opory  $r_1$ ,  $r_2$  i  $R$  będą odpowiednio równe 1,0  $\Omega$ ; 2,0  $\Omega$  i 5,0  $\Omega$ . Ile wynosi natężenie prądu?

Siły elektromotoryczne  $\mathcal{E}_1$  i  $\mathcal{E}_2$  są skierowane przeciwnie, ponieważ jednak  $\mathcal{E}_2$  jest większe, wyznacza ono kierunek przepływu prądu. Tak więc prąd  $i$  będzie płynął zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Z drugiego prawa Kirchhoffa, poruszając się zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, otrzymujemy

$$-\mathcal{E}_2 + ir_2 + iR + ir_1 + \mathcal{E}_1 = 0.$$



Rys. 32-5. (a) Obwód składający się z jednego oczka. (b) Ten sam obwód przedstawiony w postaci linii prostej. Poniżej pokazano różnice potencjałów napotykane przy obieganiu obwodu zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, poczawszy od punktu  $a$ . Dla uproszczenia przyjęto, że potencjał punktu  $a$  na tym rysunku jest równy零. Należy zauważyć, że dwa punkty oznaczone na rysunku przez  $a$  stanowią jeden w tym samym punkcie.

Czytelnik powinien sprawdzić, że taki sam wynik otrzyma przy obiegu obwodu przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara oraz porównać otrzymane równanie z rys. 32-5b, który przedstawia graficzną zmianę potencjału.

Rozwiążując powyższe równanie względem  $i$  otrzymujemy

$$i = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{R + r_1 + r_2} = \frac{4,0 \text{ V} - 2,0 \text{ V}}{5,0 \Omega + 1,0 \Omega + 2,0 \Omega} = 0,25 \text{ A.}$$

Nie musimy znać z góry rzeczywistego kierunku prądu. Pokażemy to przyjmując, że prąd na rys. 32-5a płynie zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, co — jak wiemy — nie jest prawdą. Na podstawie drugiego prawa Kirchhoffa (obieg zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, począwszy od punktu a) otrzymujemy

$$-\mathcal{E}_2 - ir_2 - iR - ir_1 + \mathcal{E}_1 = 0$$

albo

$$i = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2}.$$

Podstawiając wartości liczbowe (patrz wyżej) otrzymujemy dla natężenia prądu wartość  $-0,25 \text{ A}$ . Znak minus mówi, że kierunek prądu jest przeciwny do kierunku przyjętego przez nas.

W zadaniach z bardziej złożonymi obwodami zawierającymi wiele oczek i gałęzi często jest niemożliwe znać z góry dokładne kierunki prądów we wszystkich częściach obwodu. Możemy przyjąć wówczas dowolne kierunki dla prądów. Te prądy, dla których otrzymamy dodatnie wartości liczbowe, będą miały kierunki zgodne z przyjętymi; te, dla których otrzymamy ujemne wartości, będą miały kierunki przeciwe do przyjętych. We wszystkich przypadkach otrzymane wartości liczbowe będą poprawne.

**Przykład 3.** Jaka jest różnica potencjałów: a) Pomiędzy punktami b i a na rys. 32-5a? b) Pomiędzy punktami a i c?

(a) Zaczynamy obieg obwodu od punktu b i idziemy wzduł obwodu do punktu a otrzymując

$$v_{ab} (= V_a - V_b) = -ir_2 + \mathcal{E}_2 = -0,25 \text{ A} \cdot 2,0 \Omega + 4,0 \text{ V} = +3,5 \text{ V.}$$

Tak więc wartość potencjału w punkcie a jest wyższa aniżeli w punkcie b, a różnica potencjałów ( $3,5 \text{ V}$ ) jest mniejsza aniżeli SEM ( $4,0 \text{ V}$ ); patrz rys. 32-5b.

(b) Zaczynamy obieg obwodu od punktu c i idziemy wzduł obwodu do punktu a, otrzymując

$$V_{ac} (= V_a - V_c) = +\mathcal{E}_1 + ir_1 = 2,0 \text{ V} + 0,25 \text{ A} \cdot 1,0 \Omega = +2,25 \text{ V.}$$

Wynik ten wskazuje na to, że punkt a ma wyższy potencjał aniżeli c. Różnica potencjałów na zaciskach baterii  $\mathcal{E}_1$  ( $2,25 \text{ V}$ ) jest większa aniżeli SEM ( $2,0 \text{ V}$ ); patrz rys. 32-5b. Jeżeli  $\mathcal{E}_1$  jest SEM baterii akumulatorów, to bateria ładuje się kosztem  $\mathcal{E}_2$ .

Sprawdzimy pierwszy wynik przechodząc od b do a po innej drodze, a mianowicie poprzez  $R$ ,  $r_1$  i  $\mathcal{E}_1$ . Mamy wówczas

$$V_{ab} = iR + ir_1 + \mathcal{E}_1 = 0,25 \text{ A} \cdot 5,0 \Omega + 0,25 \text{ A} \cdot 1,0 \Omega + 2,0 \text{ V} = +3,5 \text{ V,}$$

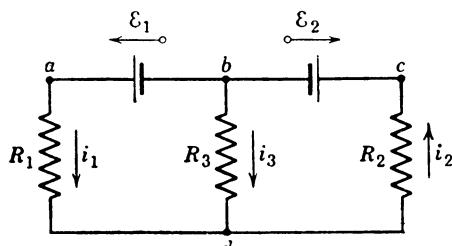
co jest identyczne z wynikiem uzyskanym poprzednio.

### 32-5. Obwody złożone (o wielu oczkach)

Na rysunku 32-6 przedstawiony jest obwód składający się z dwu oczek. Dla uproszczenia zaniedbujemy opory wewnętrzne baterii. W obwodzie tym są dwa węzły b i d oraz trzy gałęzie łączące te węzły. Rozróżniamy lewą gałąź bad, prawą gałąź bcd i środkową gałąź bd. Jeżeli siły elektromotoryczne i opory są znane, to jakie będą natężenia prądów w tych gałęziach?

Oznaczmy prądy w gałęziach przez  $i_1$ ,  $i_2$  i  $i_3$ , jak pokazano na rysunku. Prąd o natężeniu  $i_1$  ma jednakową wartość we wszystkich punktach gałęzi lewej, zawartych pomiędzy punktami d i b. Podobnie prąd o natężeniu  $i_2$  ma tę samą wartość we wszystkich

punktach gałęzi prawej, a  $i_3$  w gałęzi środkowej. Kierunki prądów zostały wybrane umownie. Uważny czytelnik zauważa na pewno, że prąd  $i_3$  powinien mieć kierunek przeciwny do przedstawionego. Specjalnie przyjęliśmy fałszywy kierunek dla tego prądu, aby pokazać, że obliczenia matematyczne wykażą tę nieprawidłowość.



Rys. 32-6. Obwód składający się z kilku oczek

Każdy z trzech prądów  $i_1$ ,  $i_2$  i  $i_3$  niesie ładunek albo w kierunku węzła  $d$ , albo w kierunku przeciwnym. Ładunek nie może się gromadzić w węźle  $d$ , ani nie może tam znikać, ponieważ prąd jest z założenia stacjonarny. Tak więc prądy wypływające z węzła muszą odprowadzić taką samą ilość ładunku, jaka jest do niego doprowadzona. Jeżeli umownie nazwiemy prąd wpływający do węzła dodatnim a wypływający ujemnym, to

$$i_1 + i_3 - i_2 = 0.$$

Równanie powyższe wyraża ogólne prawo dla obwodów składających się z wielu oczek: *W dowolnym węźle algebraiczna suma prądów musi być równa zeru.* To twierdzenie o węzłach jest także znane jako *pierwsze prawo Kirchhoffa*. Zauważmy, że jest to po prostu prawo zachowania ładunku. Tak więc nasze podstawowe narzędzie służące do obliczania obwodów to: (a) prawo zachowania energii (patrz str. 155) i (b) prawo zachowania ładunku.

Dla obwodu z rys. 32-6 twierdzenie o węzłach daje tylko jeden związek pomiędzy trzema niewiadomymi. Stosując to twierdzenie do węzła  $b$  otrzymujemy dokładnie to samo równanie co dla węzła  $d$  — co łatwo można sprawdzić. Dla znalezienia trzech niewiadomych musimy mieć jeszcze dwa niezależne równania; można je znaleźć przy pomocy drugiego prawa Kirchhoffa.

W obwodach składających się z jednego oczka istnieje tylko jeden kontur, do którego stosujemy II prawo Kirchhoffa. Prąd jest jednakowy we wszystkich częściach tego konturu. W obwodach składających się z wielu oczek prąd w ogólności nie będzie jednakowy we wszystkich częściach konturu danego oczka.

Jeżeli przyjmiemy, że w lewym oczku na rys. 32-6 kierunek obiegu jest przeciwny do kierunku ruchu wskazówek zegara, to z drugiego prawa Kirchhoffa mamy

$$\mathcal{E}_1 - i_1 R_1 + i_3 R_3 = 0. \quad (32-6)$$

Dla prawego oczka otrzymujemy

$$-i_3 R_3 - i_2 R_2 - \mathcal{E}_2 = 0. \quad (32-7)$$

Te dwa równania, łącznie ze związkiem wyprowadzonym wcześniej z twierdzenia o węzłach, są układem trzech równań koniecznych do znalezienia niewiadomych  $i_1$ ,  $i_2$  i  $i_3$ . Rozwiązując je otrzymujemy

$$i_1 = \frac{\mathcal{E}_1(R_2 + R_3) - \mathcal{E}_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}, \quad (32-8a)$$

$$i_2 = \frac{\mathcal{E}_1 R_3 - \mathcal{E}_2 (R_1 + R_3)}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}, \quad (32-8b)$$

$$i_3 = \frac{-\mathcal{E}_1 R_2 - \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}. \quad (32-8c)$$

Opuszczone rachunki czytelnik powinien sam uzupełnić. Z równania (32-8c) widać, że bez względu na to, jakie wartości liczbowe przyjmiemy dla SEM i oporów, natężenie prądu  $i_3$  będzie zawsze wartością ujemną. Znaczy to, że prąd ten na rys. 32-6 będzie płynął w góre, a nie w dół, jak to umownie przyjęliśmy. Prądy  $i_1$  i  $i_2$  mogą mieć różne kierunki, zależnie od przyjętych wartości liczbowych.

Czytelnik powinien sprawdzić, że w szczególnych przypadkach równania (32-8) redukują się dając oczekiwane wyniki. Na przykład dla  $R_3 = \infty$  znajdujemy, że

$$i_1 = i_2 = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2}, \quad i_3 = 0.$$

Co wynika z tych równań, gdy  $R_2 = \infty$ ?

Drugie prawo Kirchhoffa można zastosować również do dużego oczka utworzonego przez założnięty kontur  $abcta$  (rys. 32-6). Fakt ten nasuwa myśl, że istnieje więcej równań niż nam potrzeba, gdyż mamy tylko trzy niewiadome, a napisaliśmy już trzy równania, w których one występują. Jednak na podstawie drugiego prawa Kirchhoffa dla tego oczka otrzymujemy równanie

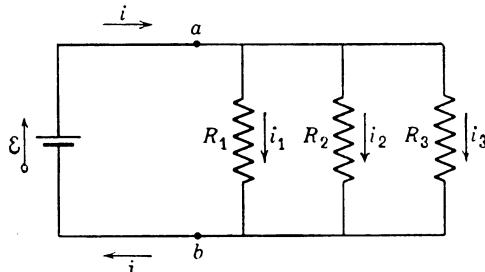
$$-i_1 R_1 - i_2 R_2 - \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1 = 0,$$

które nie jest niczym innym jak sumą równań (32-6) i (32-7). Z tego powodu duże oczka nie daje nowego, niezależnego równania. Rozwiązuje obwody składające się z wielu oczek nigdy nie spotkamy się z występowaniem większej liczby niezależnych równań aniżeli zmiennych.

**Przykład 4. Równoległe połączenie oporów.** Rysunek 32-7 pokazuje trzy opory połączone z tym samym źródłem SEM. Mówimy, że opory, do których jest dołączona ta sama różnica potencjałów, są połączone równolegle. Jaki jest opór zastępczy  $R$  takiego równoległego połączenia? Oporem zastępczym nazywamy pojedynczy opór, który wprowadzony zamiast oporów połączonych równolegle pomiędzy zaciski  $a$  i  $b$ , pozostawi natężenie prądu  $i$  niezmienione.

Prądy płynące w trzech gałęziach są następujące:

$$i_1 = \frac{V}{R_1}, \quad i_2 = \frac{V}{R_2}, \quad i_3 = \frac{V}{R_3},$$



Rys. 32-7. Przykład 4. Trzy opory, połączone równolegle, pomiędzy zaciskami  $a$  i  $b$

gdzie  $V$  jest różnicą potencjałów istniejących między punktami  $a$  i  $b$ . Całkowite natężenie prądu  $i$  znajdujemy przez zastosowanie pierwszego prawa Kirchhoffa do węzła  $a$ , co daje

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = V \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right).$$

Jeżeli wprowadzimy opór zastępczy zamiast połączenia równoległego, to mamy

$$i = \frac{V}{R}.$$

Łącząc ze sobą te dwa równania dostajemy

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}. \quad (32-9)$$

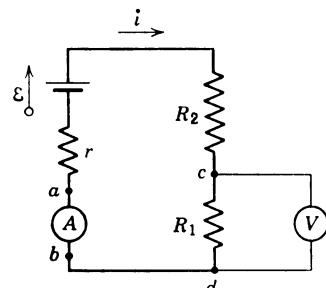
Wzór ten można łatwo uogólnić na więcej niż trzy opory. Zauważmy, że opór zastępczy połączenia równoległego jest mniejszy od każdego z oporów tworzących to połączenie.

### 32-6. Pomiary natężen prądów i różnic potencjalów

Przyrząd służący do pomiaru natężenia prądu nazywamy *amperomierzem* (albo *miliampерометром*, albo *mikroampерометром* itd. zależnie od wartości natężenia prądu, jaki może mierzyć). Aby wyznaczyć natężenie prądu w przewodzie, trzeba w tym przewodzie zrobić przerwę i włączyć w tym miejscu amperomierz, tak aby prąd, którego natężenie chcemy zmierzyć, przepływał poprzez przyrząd pomiarowy (patrz rys. 32-8)\*.

Istotne jest to, aby opór  $R_A$  amperomierza był *mały* w porównaniu z innymi oporami w obwodzie. W przeciwnym przypadku sama obecność przyrządu pomiarowego będzie zmieniała wartość natężenia prądu, którą chcemy wyznaczyć. Idealny amperomierz powinien mieć opór równy零u. W obwodzie przedstawionym na rys. 32-8 przy założeniu, że voltmierz nie jest podłączony, żądamy np. spełnienia warunku

$$R_A \ll r + R_1 + R_2.$$



Rys. 32-8. Amperomierz ( $A$ ) podłączony w celu znalezienia natężenia prądu w obwodzie. Voltomierz ( $V$ ) podłączony w celu znalezienia różnicy potencjałów na oporze  $R_1$

Przyrząd mierzący różnicę potencjałów nazywamy *woltomierzem* (albo *miliwoltomierzem*, albo *mikrowoltomierzem*). Aby znaleźć różnicę potencjałów między dwoma punktami w obwodzie, należy dołączyć każdy z zacisków woltomierza odpowiednio do jednego z tych punktów nie przerywając obwodu (patrz rys. 32-8)\*\*.

\* Przyrząd pomiarowy podłączamy w taki sposób, aby prąd wpływał ( zakładając, że nośniki ładunku są dodatnie) do przyrządu poprzez zacisk opatrzony znakiem +.

\*\* Zacisk woltomierza ze znakiem + musi być połączony z punktem o wyższym potencjałe. W przeciwnym przypadku wskazówka przyrządu pomiarowego będzie się wychylała w kierunku przeciwnym do tego, w jakim powinna.

Istotne jest to, aby opór woltomierza  $R_V$  był duży w stosunku do każdego z oporów obwodu, do których będziemy ten woltomierz równolegle dołączać. W przeciwnym przypadku sam przyrząd pomiarowy stanie się elementem obwodu, którego nie będzie można zaniedbać i który zmieni natężenie prądu oraz mierzoną różnicę potencjałów. Idealny woltomierz powinien mieć opór nieskończony wielki. Dla obwodu przedstawionego na rys. 32-8 wymagamy np. żeby spełniony był warunek

$$R_V \gg R_1.$$

Do mierzenia różnicy potencjałów w obwodach elektronicznych, gdzie efektywny opór obwodu może być rzędu  $10^6 \Omega$  albo wyższy, jest rzeczą niezbędną użycie woltomierza elektronowego, czyli lampy elektronowej lub tranzystora, tak skonstruowanego, aby między jego zaciskami wejściowymi znajdował się wyjątkowo wysoki efektywny opór.

### 32-7. Uklad kompensacyjny

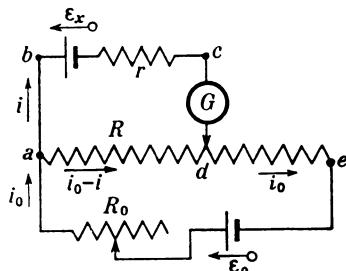
Rysunek 32-9 przedstawia elementy *układu kompensacyjnego* służącego do pomiaru nieznanej SEM  $\mathcal{E}_x$ . Natężenia prądów i wartości SEM zaznaczono na rysunku. Stosując drugie prawo Kirchhoffa do konturu  $abcd$  otrzymujemy

$$-\mathcal{E}_x - ir + (i_0 - i)R = 0,$$

gdzie  $i_0 - i$  jest natężeniem prądu w oporze  $R$ , co wynika z zastosowania pierwszego prawa Kirchhoffa do węzła  $a$ . Rozwiązuje powyższe równanie względem  $i$  otrzymujemy

$$i = \frac{i_0 R - \mathcal{E}_x}{R + r},$$

gdzie  $R$  jest opornikiem zmiennym.



Rys. 32-9. Elementy układu kompensacyjnego. Długi opornik w środku rysunku ma opór  $R$  między punktami  $a$  i  $e$

Z zależności tej widać, że jeżeli  $R$  jest dostosowane do wartości  $R_x$ , gdzie

$$i_0 R_x = \mathcal{E}_x, \quad (32-10)$$

to natężenie prądu  $i$  w gałęzi  $abcd$  staje się równe zeru. Aby zrównoważyć w ten sposób układ, musimy dopytać zmieniać opór  $R$ , dopóki czuły galwanometr  $G$  nie wskaże zera.

Wartość SEM można otrzymać z równania (32-10), jeżeli znane jest natężenie prądu  $i_0$ . Jednakże w praktyce na miejsce  $\mathcal{E}_x$  wstawiamy wzorcową SEM  $\mathcal{E}_s$  i ponownie zmieniamy  $R$  dotąd, aż osiągnemy warunek prądu zerowego. Wówczas przyjmując, że prąd  $i_0$  pozostaje niezmieniony, możemy napisać

$$i_0 R_s = \mathcal{E}_s.$$

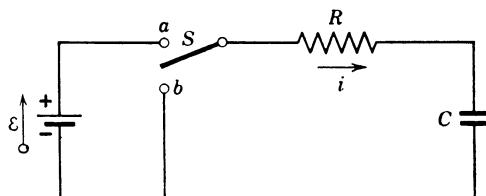
Łącząc ostatnie dwa równania dostajemy

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_s \frac{R_x}{R_s}, \quad (32-11)$$

co pozwala na dokładne porównywanie sił elektromotorycznych. Zauważmy, że opór wewnętrzny  $r$  siły elektromotorycznej nie odgrywa tutaj żadnej roli. W praktyce do pomiaru SEM stosujemy gotowe, obudowane przyrządy zawierające wzorcowe źródło, które po wycechowaniu służy jako wygodny wzorzec znanej siły elektromotorycznej  $\mathcal{E}_s$ . Często dołączane są również przełączniki służące do zamiany nieznanej SEM przez wzorcową oraz urządzenia zapewniające stałość prądu  $i_0$ .

### 32-8. Obwody RC

W poprzednich paragrafach mieliśmy do czynienia z obwodami, których elementy stanowiły opory i w których natężenia prądów nie zmieniały się w czasie. Teraz do elementów obwodu dołączymy kondensator i zaczniemy zajmować się prądami zmieniającymi się w czasie. Niech przełącznik  $S$  na rys. 32-10 będzie ustawiony w położeniu  $a$ . Jaki prąd ustali się w tak utworzonym obwodzie składającym się z jednego oczka? Zastosujmy zasadę zachowania energii.



Rys. 32-10. Obwód  $RC$

W czasie  $dt$  poprzez dowolny przekrój przepływa ładunek  $dq$  ( $= idt$ ). Praca wykonana przez źródło SEM ( $= \mathcal{E}dq$ ; patrz równanie (32-1)) musi być równa energii, która w czasie  $dt$  pojawia się jako energia cieplna ( $= i^2 R dt$ ) na oporze plus przyrost energii  $U$  zgromadzonej w kondensatorze ( $= dU = dq^2/2C$ ; patrz równ. (30-7)]. Zapisujemy to równaniem

$$\mathcal{E}dq = i^2 R dt + d\left(\frac{q^2}{2C}\right) \quad \text{albo} \quad \mathcal{E}dq = i^2 R dt + \frac{q}{C} dq.$$

Po podzieleniu przez  $dt$  otrzymujemy

$$\mathcal{E} \frac{dq}{dt} = i^2 R + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt}.$$

Ale  $dq/dt$  jest po prostu natężeniem prądu  $i$ , a więc ostatecznie

$$\mathcal{E} = iR + \frac{q}{C}. \quad (32-12)$$

Równanie to można również wyprowadzić inaczej korzystając z drugiego prawa Kirchhoffa. Jest to zrozumiałe, ponieważ prawo to wynika z zasady zachowania energii. Wychodząc z punktu  $x$  i obiegając kontur zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara obserwujemy wzrost potencjału przy przechodzeniu przez źródła SEM i obniżanie potencjału przy przechodzeniu przez opór i kondensator. Możemy to zapisać w postaci

$$\mathcal{E} - iR - \frac{q}{C} = 0,$$

która jest identyczna z równaniem (32-12).

Równania (32-12) nie możemy rozwiązywać bezpośrednio, ponieważ zawiera ono dwie zmienne  $q$  oraz  $i$ , które jednakże są ze sobą związane zależnością

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (32-13)$$

Podstawiając powyższą zależność zamiast  $i$  do równania (32-12) otrzymujemy

$$\mathcal{E} = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}. \quad (32-14)$$

Naszym zadaniem jest teraz znalezienie funkcji  $q(t)$ , która spełniałaby to *równanie różniczkowe*. Chociaż równanie to nie jest trudne do rozwiązania, aby uniknąć matematycznych przekształceń, podamy gotowe rozwiązanie, które ma postać

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}). \quad (32-15)$$

Możemy się łatwo przekonać, czy funkcja ta jest prawdziwym rozwiązaniem równania (32-14) przez podstawienie jej do tego równania i sprawdzenie, czy otrzymamy tożsamość. Różniczkując równanie (32-15) względem czasu otrzymamy

$$\frac{dq}{dt} (= i) = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC}. \quad (32-16)$$

Podstawiając  $q$  (równ. (32-15)) i  $dq/dt$  (równ. (32-16)) do równania (32-14) otrzymujemy tożsamość, co czytelnik może łatwo sprawdzić. Tak więc równanie (32-15) jest rozwiązaniem równania (32-14).

Rysunek 32-11 przedstawia wykresy równań (32-15) i (32-16) dla szczególnego przypadku. Z wykresów tych oraz odpowiadających im równań widać, że (a) w chwili  $t = 0$ ,  $q = 0$ ,  $i = \mathcal{E}/R$  oraz (b) gdy  $t \rightarrow \infty$ , wtedy  $q \rightarrow \infty C\mathcal{E}$ ,  $i \rightarrow 0$ , co oznacza, że natężenie prądu w chwili początkowej wynosi  $\mathcal{E}/R$ , a w chwili końcowej zero; ładunek na okładkach kondensatora jest w chwili początkowej równy零, a w chwili końcowej  $C\mathcal{E}$ .

Wielkość  $RC$  w równaniach (32-15) oraz (32-16) ma wymiar czasu (ponieważ wykładnik musi być bezwymiarowy) i jest nazywana *stałą czasową obwodu*. Jest ona równa czasowi, w jakim ładunek na kondensatorze powiększa się o czynnik  $(1 - e^{-1}) (\cong 63\%)$  jego wartości w stanie równowagi. Pokażemy to przyjmując, że w równaniu (32-15)  $t = RC$ , co daje

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-1}) = 0,63C\mathcal{E}.$$

$C\mathcal{E}$  jest to ładunek znajdujący się na kondensatorze w stanie równowagi, odpowiadającym  $t \rightarrow \infty$ , a więc twierdzenie zostało dowiedzione.

**Przykład 5.** Po jakim czasie (przyjmując za jednostkę stałą czasową) energia zawarta w kondensatorze na rys. 32-10 osiągnie połowę wartości, jaką ma w stanie równowagi?

Energia ta jest dana równaniem (30-7), czyli

$$U = \frac{1}{2C} q^2.$$

Energia w stanie równowagi  $U_\infty$  wynosi  $(1/2C)(C\mathcal{E})^2$ . Za pomocą równania (32-15) możemy przedstawić energię jako

$$U = \frac{1}{2C} (C\mathcal{E})^2 (1 - e^{-t/RC})^2 \quad \text{albo} \quad U = U_\infty (1 - e^{-t/RC})^2.$$

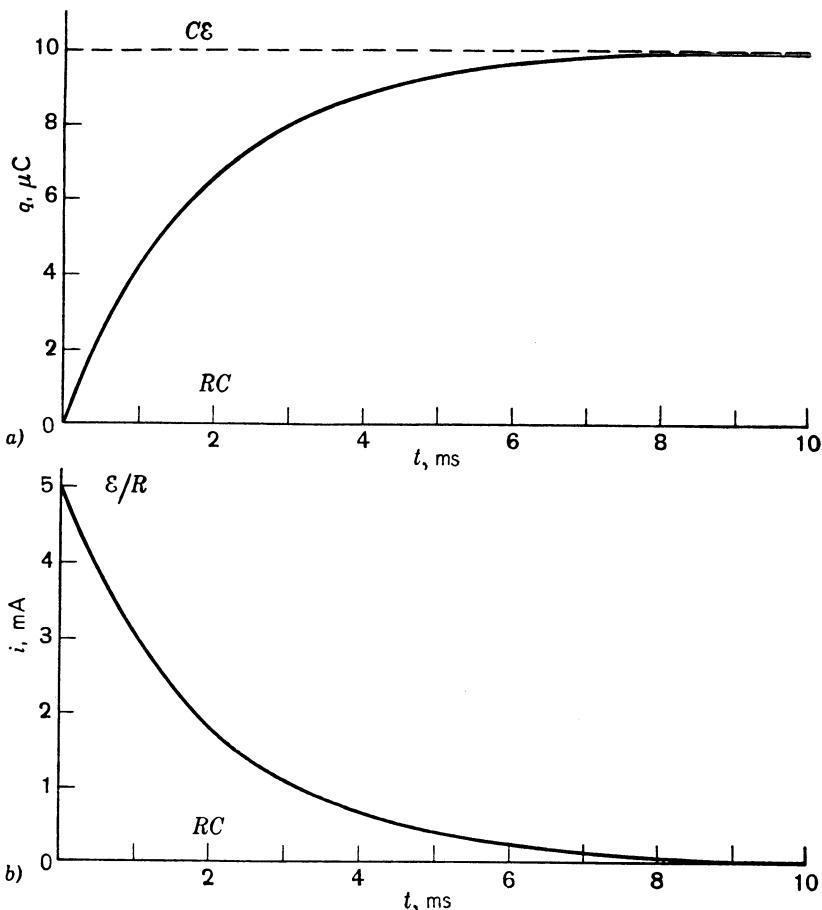
Przyjmując  $U = \frac{1}{2}U_\infty$  dostajemy

$$\frac{1}{2} = (1 - e^{-t/RC})^2$$

i rozwiązując ten związek względem  $t$  otrzymujemy ostatecznie

$$t = 1,22RC = 1,22 \text{ stałych czasowych.}$$

Z wykresu przedstawionego na rys. 32-11 widzimy, że jeżeli w obwodzie znajduje się opór, szybkość gromadzenia się ładunku na kondensatorze, aż do osiągnięcia końcowej wartości w stanie równowagi, jest w określony sposób „hamowana” zależnie od wielkości stałej czasowej  $RC$ . Gdy w obwodzie nie ma



Rys. 32-11. Gdy założymy, że na rys. 32-10 opór  $R = 2000 \Omega$ ,  $C = 1,0 \mu\text{F}$  i  $\mathcal{E} = 10 \text{ V}$ , wówczas krzywa z rys. a) pokazuje zmianę  $q$  w zależności od  $t$  w procesie ładowania, a krzywa z rys. b) zmianę  $i$  w zależności od  $t$ . Stała czasowa  $RC = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ s}$

oporu ( $RC = 0$ ), ładunek natychmiast osiąga swoją wartość końcową w stanie równowagi. Chociaż pokazaliśmy już, że opóźnienie to jest wynikiem drugiego prawa Kirchhoffa zastosowanego do obwodu  $RC$ , chcemy, aby czytelnik dokładnie zrozumiał jego fizyczne przyczyny.

Kiedy za pomocą przełącznika  $S$  (rys. 32-10) zamykamy obwód w punkcie  $a$ , do oporu zostaje natychmiast przyłożone napięcie  $\mathcal{E}$  i zaczyna płynąć prąd o początkowej wartości natężenia  $\mathcal{E}/R$ . Ponieważ początkowy ładunek na okładkach kondensatora wynosi零, różnica potencjałów na kondensatorze będzie również równa零, gdyż dana jest ona wyrażeniem  $q/C$ . Ładunek płynący przez opór zaczyna ładować kondensator, co wywołuje szereg efektów. Przede wszystkim obecność ładunku na kondensatorzetworzy tam różnicę potencjałów ( $= q/C$ ); a to z kolei spowoduje, że różnica potencjałów na oporze zmalaє o tę samą wartość, ponieważ suma obu różnic potencjałów musi być zawsze równa  $\mathcal{E}$ . Spadek różnicy potencjałów na oporze  $R$  powoduje, że natężenie prądu ładującego ulega zmniejszeniu. Tak więc ładunek na okładkach kondensatora zwiększa się, a natężenie prądu ładującego maleje dotąd, aż kondensator zostanie całkowicie naładowany. Od tej chwili napięcie na kondensatorze wynosi  $\mathcal{E}$  i nie ma już żadnego spadku potencjału ( $iR = 0$ ) na oporze. Jest to dokładne odwrócenie stanu początkowego. Czytelnik powinien przejrzeć dokładne wyprowadzenie równań (32-15) i (32-16) oraz wykresy z rys. 32-11 pamiętając o rozważaniach przeprowadzonych w tym paragrafie.

Przymijmy teraz, że przełącznik  $S$  na rys. 32-10 znajduje się w położeniu  $a$  przez czas  $t$

taki, że  $t \gg RC$ . Kondensator zostanie wówczas całkowicie naładowany i może służyć do różnych praktycznych celów. Przesuniemy następnie przełącznik  $S$  do położenia  $b$ . Jak będą się zmieniały w czasie ładunek na kondensatorze oraz natężenie prądu?

Gdy przełącznik  $S$  zamyka obwód w punkcie  $b$ , wtedy w obwodzie nie ma SEM i równanie (32-12) dla obwodu z  $\mathcal{E} = 0$  przyjmuje postać

$$iR + \frac{q}{C} = 0. \quad (32-17)$$

Przyjmując, że  $i = dq/dt$ , otrzymujemy równanie różniczkowe obwodu w postaci (porównać z równ. (32-14))

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (32-18a)$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$q = q_0 e^{-t/RC}, \quad (32-18b)$$

co łatwo można sprawdzić przez podstawienie,  $q_0$  jest początkowym ładunkiem na kondensatorze. W wyrażeniu na rozładowanie kondensatora występuje stała czasowa  $RC$ , podobnie jak w wyrażeniu na proces ładowania (równ. (32-15)). Widzimy, że w czasie  $t = RC$  ładunek kondensatora zmniejsza się do  $q_0 e^{-1}$ , co wynosi 37% ładunku początkowego  $q_0$ .

Natężenie prądu podczas rozładowywania znajdujemy różniczkując równanie (32-18b)

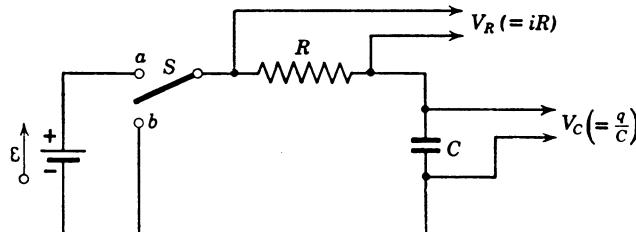
$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{RC} e^{-t/RC}. \quad (32-19)$$

Znak minus pokazuje, że prąd ma kierunek przeciwny do przedstawionego na rys. 32-10. Oczywiście tak powinno być, ponieważ kondensator jest teraz rozładowywany, a nie ładowany. Ponieważ  $q_0 = \mathcal{E}C$ , równanie (32-19) możemy napisać w postaci

$$i = -\frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC},$$

gdzie stała  $\mathcal{E}/R$  jest początkowym natężeniem prądu odpowiadającym czasowi  $t = 0$ . Jest to zrozumiałe, ponieważ początkowa różnica potencjałów dla całkowicie naładowanego kondensatora wynosi  $\mathcal{E}$ .

Zachowanie się obwodu  $RC$ , przedstawionego na rys. 32-10, podczas ładowania i rozładowywania może być badane za pomocą oscyloskopu katodowego. Na ekranie tego dobrze znanego przyrządu można obserwować krzywe zmian potencjału w czasie. Na rysunku 32-12 przedstawiony jest obwód z rys. 32-10



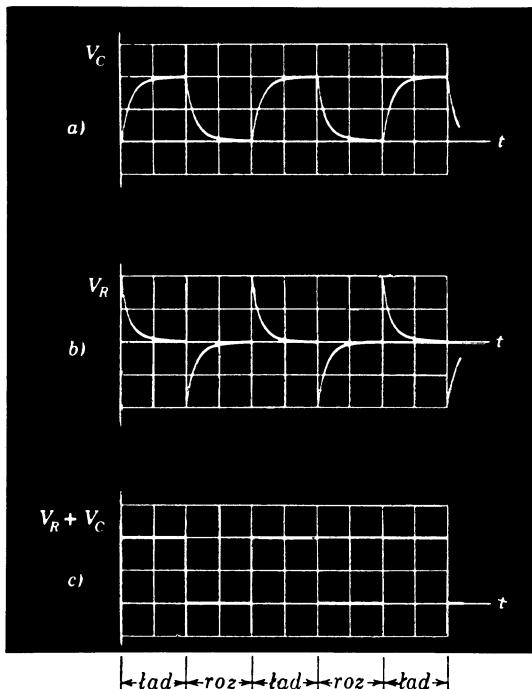
Rys. 32-12. Obwód z rys. 32-10 zaopatrzony w wyprowadzenia pozwalające na zbadanie zmian potencjału na oporze i kondensatorze za pomocą oscylografu

z wyprowadzeniami wykonanymi w celu zbadania: (a) różnicy potencjałów  $V_C$  na kondensatorze i (b) różnicy potencjałów  $V_R$  na oporze, jako funkcji czasu.  $V_C$  oraz  $V_R$  dane są wzorami

$$V_C = \frac{1}{C}q, \quad V_R = Ri.$$

Z pierwszego wzoru wynika, że  $V_C$  jest wprost proporcjonalne do ładunku, a z drugiego, że  $V_R$  jest wprost proporcjonalne do natężenia prądu.

Na rysunku 32-13 przedstawione są wykresy  $V_C$  i  $V_R$  obserwowane na ekranie oscylografu, podczas gdy przełącznik  $S$  na rys. 32-10 jest „przerzucany” periodycznie tam i z powrotem między położeniami  $a$  i  $b$ , pozostając w każdym położeniu przez okres czasu równy pewnej ilości stałych czasowych. Przedziały czasu, w których ładunek na kondensatorze narasta, oznaczone są symbolami  $\text{lad}$ , a te, podczas których maleje, symbolem  $\text{roz}$ .



Rys. 32-13. Przełącznik  $S$  na rys. 32-10 jest „przerzucany” pomiędzy punktami  $a$  i  $b$  za pomocą urządzenia elektrycznego. Wykresy przedstawiają zmiany w czasie różnic potencjałów (a) na kondensatorze (ładowanie kondensatora — krzywa rosnąca, rozładowywanie — krzywa malejąca) i (b) na oporze, tak jak to wygląda na ekranie oscylografu katodowego. (c) Obraz uzyskiwany na ekranie wtedy, gdy oscylograf jest podłączony tak, że pokazuje sumy napięć  $V_R$  i  $V_C$ . (Dzięki uprzejmości: E. K. Hege, Instytut Politechniczny Rensselaer)

„Ładowanie” na krzywej  $a$  (patrz równ. (32-15)) jest przedstawione wzorem

$$V = \left(\frac{1}{C}\right)q = \mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}),$$

a „rozładowywanie” (patrz równ. (32-18b))

$$V = \left(\frac{1}{C}\right)q = \mathcal{E}e^{-t/RC}.$$

Zauważmy, że prądy przedstawione na wykresie 32-12b podczas ładowania i rozładowywania kondensatora są względem siebie przeciwnie skierowane. Jest to zgodne z równaniami (32-16) i (32-19).

Dla otrzymania krzywej przedstawionej na rys. 32-13c oscylograf podłączono tak, aby pokazywał algebraiczną sumę krzywych z wykresu *a* i *b*. Zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa suma ta jest równa  $\mathcal{E}$  w czasie ładowania kondensatora i wynosi zero w czasie rozładowywania, kiedy bateria jest wyłączona z obwodu, czyli

$$V_R + V_C = \mathcal{E} \text{ podczas ładowania (patrz równ. (32-12))},$$

$$V_R + V_C = 0 \text{ podczas rozładowywania (patrz równ. (32-17))}.$$

Wykres *c* dokładnie zgadza się z tym, czego oczekiwaliśmy.

### **Pytania**

1. Czy kierunek SEM baterii zależy od kierunku prądu płynącego przez baterię?
2. Omówić, jakie zmiany pojawiłyby się na rys. 32-2, gdybyśmy zwiększyli masę *m* o tyle, że silnik zmieniłby kierunek i stałby się generatorem, tzn. źródłem SEM.
3. Przedyskutować dokładnie twierdzenie: zasada zachowania energii i drugie prawo Kirchhoffa, stosowane do rozwiązywania obwodów, są całkowicie równoważne.
4. Przez pocieranie grzebienia kieszonkowego o wełnę można wytworzyć różnicę potencjałów wynoszącą 10 000 V. Dlaczego to wysokie napięcie nie jest niebezpieczne, podczas gdy o wiele niższe napięcie wytwarzane przez zwykły prąd elektryczny, np. w kontakcie, jest bardzo niebezpieczne?
5. Podać sposób pomiaru SEM i oporu wewnętrznego baterii.
6. Prąd płynący przez baterię o SEM równej  $\mathcal{E}$  i oporze wewnętrznym *r* jest zmniejszany przy pomocy środków zewnętrznych. Czy w związku z tym koniecznie zmniejszy się lub zwiększy różnica potencjałów między zaciskami baterii? Wyjaśnić to.
7. Obliczając  $V_{ab}$  obwodu jak na rys. 32-3a, czy można uwzględnić drogę od *a* do *b*, która nie leży na tym obwodzie?
8. Żarówka o mocy 25 W wymagająca napięcia 110 V świeci normalnie po połączeniu z baterią. Żarówka o mocy 500 W wymagająca napięcia 110 V żarzy się tylko, gdy połączona jest z tą samą baterią. W jaki sposób to tłumaczymy?
9. Jakie warunki muszą być spełnione, aby różnica potencjałów na zaciskach baterii mogła przewyższać jej SEM?
10. Jaka jest różnica między SEM i różnicą potencjałów?
11. Porównać wzory dla zastępczych wartości (a) pojemności i (b) oporów przy połączeniach szeregowych i równoległych.
12. Od jakich praw fizycznych zależy: (a) pierwsze prawo Kirchhoffa, (b) drugie prawo Kirchhoffa?
13. Na rys. 32-6  $i_3$  narysowano w złym kierunku. Zrobiono to celowo, aby zwrócić na coś uwagę. Na co?
14. Wyjaśnić własnymi słowami, dlaczego opór amperomierza powinien być bardzo mały, podczas gdy opór woltomierza powinien być bardzo duży?
15. W potencjometrze opór wewnętrzny *r* SEM nie odgrywa żadnej roli. Dlaczego?
16. Czy czas potrzebny na to, aby ładunek na kondensatorze w obwodzie *RC* wzrósł do danego ułamka jego wartości w stanie równowagi, zależy od wartości stosowanej SEM?
17. Zastanowić się, jak można by zastosować obwód *RC* do pomiaru bardzo dużych oporów.
18. Przypuśćmy, że na rys. 32-10 przełącznik *S* został zamknięty w *a*. Wyjaśnić dlaczego, biorąc pod uwagę fakt, że ujemny zacisk baterii nie jest połączony z oporem *R*, początkowe natężenie w *R*, przy  $t = 0$ , powinno być równe  $\mathcal{E}/R$ , o czym świadczy rów. (32-16).
19. Przypuśćmy, że na rys. 32-10 przełącznik *S* został zamknięty w *a*. Dlaczego ładunek na kondensatorze *C* nie wzrasta natychmiast do  $q = C\mathcal{E}$ , skoro dodatni zacisk baterii jest połączony do jednej okładki *C*, a ujemny zacisk do drugiej okładki.
20. Wykazać, że iloczyn *RC* w równaniach 32-15 i 32-16 ma wymiar czasu, tj. że 1 sekunda = 1 om·1 farad.
21. Jak można przeprowadzić analogię rozładowania kondensatora, posługując się przepływem wody oraz np. dwoma biuretami zamiast okładek kondensatora i długą rurką włoskową zamiast opornika? Patrz wyczerpujące omówienie w: Ernest L. Madsen, A Water Flow Analogy to Capacitor Discharge, *The Physics Teacher*, April 1976.

## Zadania

### Paragraf 32-1

1. W obwodzie zewnętrznym płynie prąd o natężeniu 5,0 A, pod napięciem 6 V wytwarzany przez baterię akumulatorów. O ile zmniejszy się energia chemiczna baterii po upływie 6 min?

Odp.:  $1,1 \cdot 10^4$  J.

2. Pewien akumulator samochodowy (12 V) gromadzi ładunek początkowy  $Q$  (120 A · h). Przyjmując, że napięcie między zaciskami pozostaje stałe, dopóki akumulator nie zostanie całkowicie rozładowany, przez ile czasu będzie on dostarczał moc  $P$  (100 W)?

### Paragraf 32-2

3. Natężenie prądu w obwodzie złożonym z oporu i źródła prądu wynosi 5 A. Kiedy wprowadzono dodatkowy opór równy  $2 \Omega$ , natężenie prądu spadło do 4 A. Jaki był opór w obwodzie pierwotnym?

Odp.:  $8,0 \Omega$ .

4. Bateria o SEM  $\mathcal{E}$  (2,0 V) i oporze wewnętrznym  $r$  ( $1,0 \Omega$ ) napędza silnik. Silnik podnosi ciężar  $W$  (2,0 N) ze stałą prędkością  $v$  (0,50 m/s). Przyjmując, że nie ma strat mocy, znaleźć (a) natężenie prądu  $i$  w obwodzie i (b) różnicę potencjałów  $V$  między zaciskami silnika.

### Paragraf 32-3

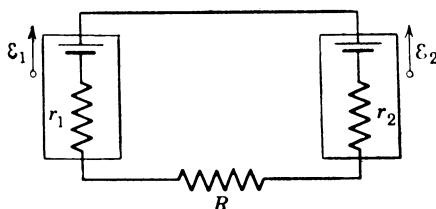
5. Na oporze o wartości  $0,10 \Omega$  jest wytwarzana energia cieplna o mocy 10 W. Opór jest połączony z baterią, której SEM wynosi 1,5 V. (a) Jaki jest opór wewnętrzny baterii? (b) Jaka jest różnica potencjałów na oporze?

Odp.: (a)  $0,050 \Omega$ . (b) 1,0 V.

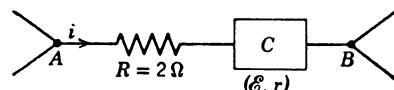
6. Przewodnik o oporze  $5,0 \Omega$  połączono z baterią o SEM wynoszącej 2,0 V i oporze wewnętrznym  $1,0 \Omega$ . (a) Ile energii chemicznej przekształci się w energię elektryczną  $i$ , (b) ile energii pojawi się w tym przewodniku jako energia cieplna w czasie 2,0 min? (c) Obliczyć różnicę energii między (a) i (b).

7. (a) Pokazać dla obwodu z rys. 32-3a, że moc związana z energią cieplną wydzielaną na oporze  $R$  osiąga wartość maksymalną, gdy  $R$  jest równe oporowi wewnętrznemu baterii  $r$ . (b) Pokazać, że ta maksymalna moc wynosi  $P = \mathcal{E}^2/4r$ .

8. (a) Jaką wartość musi mieć  $R$  na rys. 32-14, jeżeli natężenie prądu w obwodzie wynosi 0,001 A? Przyjąć, że  $\mathcal{E}_1 = 2,0$  V,  $\mathcal{E}_2 = 3,0$  V i  $r_1 = r_2 = 3,0 \Omega$ . (b) Jaka jest szybkość wytwarzania energii cieplnej na oporze  $R$ ?



Rys. 32-14. Zadanie 8



Rys. 32-15. Zadanie 13

9. Niech na rys. 32-2a  $\mathcal{E} = 2,0$  V i  $r = 100 \Omega$ . Wykreślić (a) natężenie i (b) różnicę potencjałów jako funkcje  $R$  w przedziale od 0 do 500  $\Omega$ . Oba wykresy wykonać w jednym układzie współrzędnych. (c) Wykonać trzeci wykres mnożąc przez siebie, dla każdej wartości  $R$ , wartości natężenia i różnic potencjałów wzięte z obu wykreślonych krzywych. Jakie jest fizyczne znaczenie tego wykresu?

10. Dana jest pewna ilość oporników o oporze  $10 \Omega$ , z których każdy może rozproszyć tylko 1,0 W. Jaka minimalna ilość takich oporników należy połączyć szeregowo lub równolegle, aby powstał opornik o oporze  $10 \Omega$  rozpraszający 5,0 W.

### Paragraf 32-4

11. Obliczyć różnicę potencjałów między punktami  $a$  i  $c$  (rys. 32-5a) idąc po drodze zawierającej  $R$  i  $\mathcal{E}_2$ .

Odp.: 2,25 V, jak można oczekiwać. Patrz przykład 3.

12. W przykładzie 2 do obwodu włączono amperomierz, którego opór wynosi  $0,05 \Omega$ . Jaka jest procentowa zmiana natężenia prądu w obwodzie spowodowana obecnością tego przyrządu?

13. Odcinek obwodu  $AB$  (rys. 32-15) pobiera moc  $P = 50,0 \text{ W}$ . Przepływa przezń prąd o natężeniu  $i = 1,0 \text{ A}$  we wskazanym kierunku. (a) Jaka jest różnica potencjałów między  $A$  i  $B$ ? (b) Jeżeli element  $C$  nie ma oporu wewnętrznego, to jaka jest jego SEM? (c) Jaki jest jej znak?

Odp.: (a)  $50 \text{ V}$ . (b)  $48 \text{ V}$ . (c)  $B$  jest ujemnym zaciskiem.

14. Dwie baterie o jednakowej SEM równej  $\mathcal{E}$ , ale różnych wewnętrznych oporach  $r_1$  i  $r_2$  podłączono szeregowo do zewnętrznego oporu  $R$ . Znaleźć wartość  $R$ , dla której różnica potencjałów między zaciskami pierwszej baterii jest równa零.

15. Dwie żarówki, jedna o oporze  $R_1$  i druga o oporze  $R_2$  ( $R_2 < R_1$ ) połączono (a) równolegle i (b) szeregowo. Która żarówka jest jaśniejsza?

Odp.: (a)  $R_2$ . (b)  $R_1$ .

16. Dwie baterie o SEM równej  $\mathcal{E}$  i oporze wewnętrznym  $r$  połączono równolegle oporem  $R$  jak na rys. 32-18b. (a) Dla jakiej wartości  $R$  energia cieplna wydzielana na oporze jest maksymalna? (b) Ile wynosi maksymalne rozproszenie energii?

17. Obliczyć różnicę potencjałów pomiędzy punktami  $c$  i  $d$  (rys. 32-6), idąc po wszystkich możliwych drogach. Założyć, że  $\mathcal{E}_1 = 4,0 \text{ V}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 1,0 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = 10 \Omega$  i  $R_3 = 5 \Omega$ .

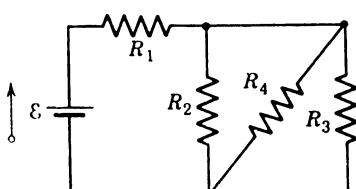
Odp.:  $V_d - V_c = +0,25 \text{ V}$ , po wszystkich możliwych drogach.

18. Dwa opory  $R_1$  i  $R_2$  mogą być połączone szeregowo albo równolegle i dołączone do baterii (nie mającej oporu wewnętrznego) o SEM równej  $\mathcal{E}$ . Żądamy, aby energia cieplna dla połączenia równoległego była pięciokrotnie większa niż dla połączenia szeregowego? Ile wynosi  $R_2$ , jeżeli opór  $R_1$  jest równy  $100 \Omega$ ?

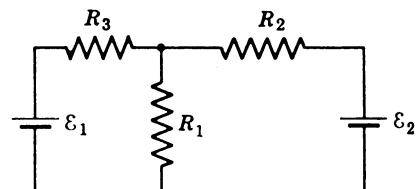
19. (a) Jaki jest opór zastępczy dla sieci pokazanej na rys. 32-16? (b) Jakie prądy płyną przez każdy z oporów? Przyjąć:  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = R_3 = 50 \Omega$ ,  $R_4 = 75 \Omega$  i  $\mathcal{E} = 6,0 \text{ V}$ .

Odp.: (a)  $120 \Omega$ , przy czym  $R_2$ ,  $R_3$  i  $R_4$  są połączone równolegle. (b)  $i_1 = 50 \text{ mA}$ ;  $i_2 = i_3 = 20 \text{ mA}$ ;  $i = 13 \text{ mA}$ .

20. Drut miedziany o promieniu  $a$  ( $0,25 \text{ mm}$ ) osłonięty jest z zewnątrz aluminium o zewnętrznym promieniu  $b$  ( $0,38 \text{ mm}$ ). (a) Jeżeli całkowite natężenie prądu w drucie wynosi  $i$  ( $2,0 \text{ A}$ ), znaleźć natężenie prądu w obu materiałach. (b) Jaka jest długość drutu, jeżeli istnieje różnica potencjałów  $V$  ( $12 \text{ V}$ )?



Rys. 32-16. Zadanie 19



Rys. 32-17. Zadanie 23

21. Używając tylko dwu opornic: pojedynczo, połączonych szeregowo oraz równolegle — możemy otrzymać opory  $3$ ,  $4$ ,  $12$  i  $16 \Omega$ . Jaki są opory tych opornic?

Odp.:  $4,0 \Omega$  i  $12 \Omega$ .

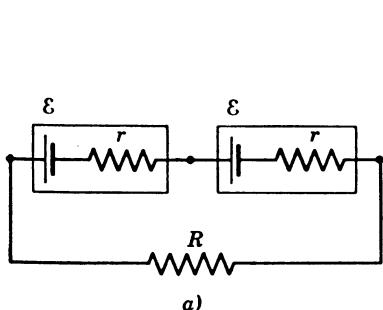
22. Cztery spirale grzejne, każda o mocy  $100 \text{ W}$ , łączone są na wszystkie możliwe sposoby (szeregowo-równolegle) i dołączane do sieci o napięciu  $100 \text{ V}$ . Jakie szybkości rozpraszania ciepła Joule'a można uzyskać w ten sposób?

23. (a) Z jaką szybkością jest wydzielana energia cieplna na oporze  $R_1$  (rys. 32-17)? Na oporze  $R_2$ ? Na oporze  $R_3$ ? (b) Jaka moc jest dostarczona przez  $\mathcal{E}_1$  oraz przez  $\mathcal{E}_2$ ? (c) Omówić warunki równowagi energetycznej w tym obwodzie. Przyjąć, że  $\mathcal{E}_1 = 3,0 \text{ V}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 1,0 \text{ V}$ ,  $R_1 = 5,0 \Omega$ ,  $R_2 = 2,0 \Omega$  i  $R_3 = 4,0 \Omega$ .

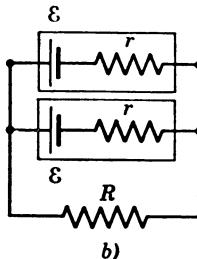
Odp.: (a)  $0,35 \text{ W}$ ;  $0,050 \text{ W}$ ;  $0,71 \text{ W}$ . (b)  $1,3 \text{ W}$ ,  $-0,16 \text{ W}$ .

24. Mamy dwie baterie, każda o SEM  $\mathcal{E}$  i oporze wewnętrznym  $r$ . Mogą być one połączone ze sobą szeregowo albo równolegle i użyte do wytwarzania prądu w oporze  $R$  (rys. 32-18). (a) Znaleźć wyrażenia na natężenie prądu dla obu tych połączeń. (b) Które z połączeń daje większe natężenie prądu, gdy  $R > r$  i gdy  $R < r$ ?

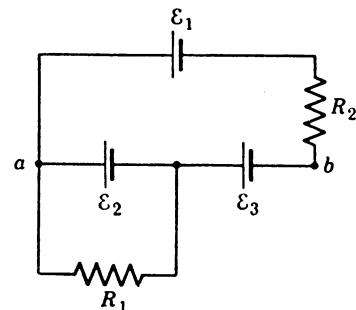
25. Znaleźć natężenie prądów w każdym z oporów i różnicę potencjałów pomiędzy punktami *a* i *b* dla obwodu z rys. 32-19. Przyjąć  $\mathcal{E}_1 = 6,0$  V,  $\mathcal{E}_2 = 5,0$  V i  $\mathcal{E}_3 = 4,0$  V oraz  $R_1 = 1000 \Omega$  i  $R_2 = 50 \Omega$ .  
*Odp.*:  $i_1 = 50$  mA, na prawo;  $i_2 = 60$  mA, w dół,  $V_{ab} = 9,0$  V.



a)



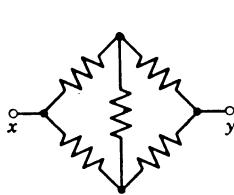
b)



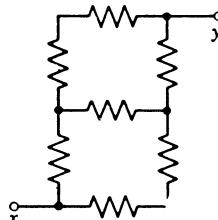
Rys. 32-19. Zadanie 25

Rys. 32-18. Zadanie 16, 24

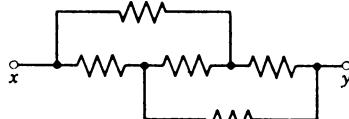
26. Jaki jest opór zastępczy, który należy włączyć między zaciski *x* i *y* dla obwodu pokazanego na:  
(a) rys. 32-20a, (b) rys. 32-20b oraz (c) rys. 32-20c? Przyjąć, że wartość każdego z oporów wynosi  $10 \Omega$ . Czy istnieje jakieś podobieństwo między rys. 32-20a i c?



a)



b)



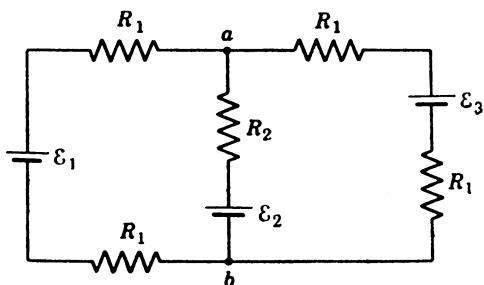
c)

Rys. 32-20. Zadanie 26

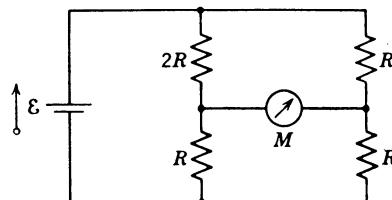
27. (a) Znaleźć trzy natężenia prądów z rysunku 32-21. (b) Znaleźć  $V_{ab}$ . Przyjąć, że  $R_1 = 1,0 \Omega$ ,  $R_2 = 2,0 \Omega$ ,  $\mathcal{E}_1 = 2,0$  V i  $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 = 4,0$  V.

*Odp.*: (a) Odgałęzienie lewe, 0,67 A, w dół; odgałęzienie środkowe, 0,33 A, w góre; odgałęzienie prawe, 0,33 A, w góre, (b) 3,3 V.

28. Jaki prąd wyrażony przez  $\mathcal{E}$  i  $R$  pokazuje miernik *M* na rys. 32-22? Przyjąć, że *M* nie ma oporu.



Rys. 32-21. Zadanie 27



Rys. 32-22. Zadanie 28

29. (a) Dwie baterie o SEM i oporze wewnętrznym  $\mathcal{E}_1$ ,  $r_1$  i  $\mathcal{E}_2$ ,  $r_2$  są połączone równolegle. Wykazać, że efektywna SEM tego równoległego układu wynosi

$$\mathcal{E} = r \left( \frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} \right),$$

gdzie  $r$  jest zdefiniowane następująco

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}.$$

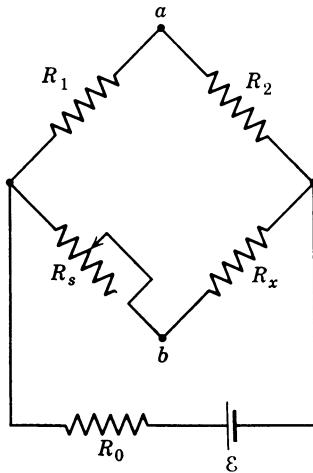
Rozszerzenie tego zagadnienia dla nieskończonej liczby baterii — patrz: J. S. Wallingford, H. W. Janes Batteries Connected in Parallel, *American Journal of Physics*, 36, 639 (1968).

30.  $N$  identycznych baterii o SEM równej  $\mathcal{E}$  i oporze wewnętrznym  $r$  można połączyć szeregowo lub równolegle. Wykazać, że każde połączenie da taki sam prąd w oporniku zewnętrznym  $R$ , jeżeli  $R = r$ .

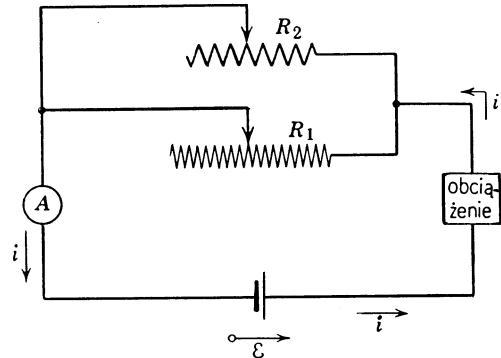
31. Mostek Wheatstone'a. Na rysunku 32-23 wartość oporu  $R_x$  jest dobrana tak dugo, dopóki punkty  $a$  i  $b$  nie osiągną jednakowego potencjału (warunek ten można sprawdzić włączając na chwilę między punktami  $a$  i  $b$  czuły przyrząd pomiarowy; jeżeli punkty te mają jednakowy potencjał, wskazówka przyrządu nie wychyli się). Pokazać, że gdy to jest spełnione, zachodzi następujący związek:

$$R_x = R_s \frac{R_2}{R_1}.$$

Przy pomocy tego urządzenia noszącego nazwę mostka Wheatstone'a możemy mierzyć nieznane opory ( $R_x$ ) w jednostkach oporu wzorcowego ( $R_s$ ).



Rys. 32-23. Zadanie 31



Rys. 32-24. Zadanie 33

32. Pokazać, że jeżeli punkty  $a$  i  $b$  na rys. 32-23 są połączone przewodnikiem o oporze  $r$ , to natężenie prądu w tym przewodniku wynosi

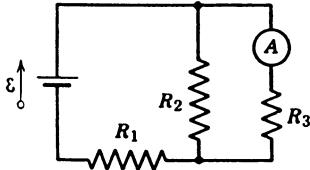
$$i = \frac{\mathcal{E}(R_s - R_x)}{(R+2r)(R_s + R_x) + 2R_s R_x},$$

gdzie  $\mathcal{E}$  jest SEM baterii. Zakładamy, że  $R_1$  i  $R_2$  są sobie równe ( $R_1 = R_2 = R$ ), a  $R_0$  jest równe zero. Czy wzór ten nie jest sprzeczny z wynikiem zadania 31?

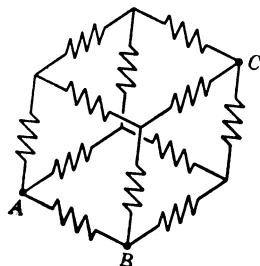
33. Aby móc regulować natężenie prądu w obwodzie, używamy równolegle połączonych oporów z kontaktami ślizgowymi tak, jak to przedstawia rys. 32-24, gdzie  $R_1 = 20R_2$ . (a) Jakie czynności należy wykonać, aby ustalić żądaną wartość prądu? (b) Dlaczego połączenie równolegle jest lepsze niż pojedynczy, zmienny opór? (c) Czy można rozszerzyć tę technikę dla trzech oporników połączonych równolegle?

Odp.: (a) Umieścić  $R_1$  mniej więcej w środku tego przedziału, dostosować prąd w przybliżeniu do  $R_2$ ; dokładnie dostosować do  $R_1$ . (b) Względnie duże procentowe zmiany w  $R_1$  powodują jedynie małe procentowe zmiany oporu połączenia równoleglego; dzięki temu umożliwiają ustalenie żądanego prądu. Stosunek wynosi 1:21.

34. (a) Rysunek 32-25 przedstawia amperomierz włączony w gałąź zawierającą opór  $R_3$ . Co odczytamy na tym amperomierzu, jeśli  $\mathcal{E} = 5,0 \text{ V}$ ,  $R_1 = 2,0 \Omega$ ,  $R_2 = 4,0 \Omega$  i  $R_3 = 6,0 \Omega$ ? (b) Wykazać, że gdy zamienimy miejscami źródło SEM i amperomierz, wyniki odczytywane na amperomierzu nie ulegną zmianie.



Rys. 32-25. Zadanie 34



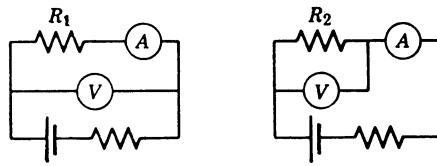
Rys. 32-26. Zadanie 35

35. Dwanaście oporników, każdy o oporze  $R$  omów tworzy sześcian (rys. 32-26). (a) Znaleźć  $R_{AB}$ , zastępczy opór na krawędzi. (b) Znaleźć  $R_{BC}$ , zastępczy opór przekątnej ściany. (c) Znaleźć  $R_{AC}$ , zastępczy opór przekątnej figury.

Odp.: (a)  $\frac{7}{12}R$ . (b)  $\frac{3}{4}R$ . (c)  $\frac{5}{6}R$ .

#### Paragraf 32-6

36. Do określenia dwóch nieznanych oporów  $R_1$  i  $R_2$  używa się woltomierza i amperomierza. Określa się je obiema metodami pokazanymi na rys. 32-27. Opór woltomierza wynosi  $307 \Omega$ , a opór amperomierza wynosi  $3,62 \Omega$ . Przy zastosowaniu metody (a) amperomierz wykazuje  $0,317 \text{ A}$ , a woltomierz wykazuje  $28,1 \text{ V}$ , natomiast przy zastosowaniu metody (b) amperomierz wykazuje  $0,356 \text{ A}$ , a woltomierz  $23,7 \text{ V}$ . Obliczyć  $R_1$  i  $R_2$ .



Rys. 32-27. Zadanie 36

37. *Pomiar oporu.* Woltomierz (o oporze  $R_V$ ) i amperomierz (o oporze  $R_A$ ) są połączone w celu pomiaru oporu  $R$  tak, jak na rys. 32-28a. Wartość oporu dana jest zależnością  $R = V/i$ , gdzie  $V$  jest wskazaniem woltomierza, a  $i$  — natężeniem prądu w oporze  $R$ . Część prądu rejestrowanego przez amperomierz ( $i'$ ) przechodzi przez woltomierz tak, że stosunek wartości odczytywanych na tych przyrządach ( $= V/i'$ ) daje tylko *pozorną* wartość oporu  $R'$ . Pokazać, że  $R$  i  $R'$  są związane w następujący sposób

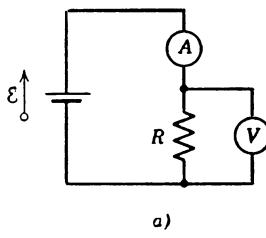
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R'} - \frac{1}{R_V}.$$

Zauważmy, że jeżeli  $R_V \gg R$ , to  $R \approx R'$ .

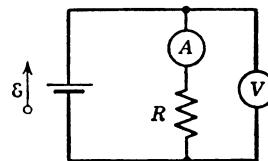
**38. Pomiar oporu.** Przyrządy służące do pomiaru oporu można takżełączyć w sposób pokazany na rys. 32-28b. W tym wypadku również stosunek wartości odczytyanych na przyrządach pomiarowych daje tylko pozorną wartość oporu  $R'$ . Pokazać, że  $R'$  jest związanego z  $R$  zależnością

$$R = R' - R_A,$$

gdzie  $R_A$  jest oporem amperomierza. Zauważmy, że jeżeli  $R_A \ll R$ , to  $R \approx R'$ .



a)



b)

Rys. 32-28. Zadanie 37, 38

**39. Zakładamy,** że na rys. 32-8  $\mathcal{E} = 5,0 \text{ V}$ ,  $r = 2,0 \Omega$ ,  $R_1 = 5,0 \Omega$  oraz  $R_2 = 4,0 \Omega$ . Jaki błąd (w procentach) popełnimy przy odczycie natężenia prądu, jeżeli  $R_a = 0,10 \Omega$ ? Zakładamy, że woltomierz jest wyłączony.

Odp.: 0,9%.

40. Przyjmujemy, że na rys. 32-8  $\mathcal{E} = 5,0 \text{ V}$ ,  $r = 20 \Omega$ ,  $R_1 = 50 \Omega$  i  $R_2 = 40 \Omega$ . Jaki błąd (w procentach) popełnimy przy odczycie różnicy potencjałów na oporze  $R_1$ , jeżeli  $R_V = 10^3 \Omega$ ? Obecność amperomierza zaniedbujemy.

#### Paragraf 32-8

41. Po jakim czasie (przyjmując za jednostkę stałą czasową) kondensator w obwodzie  $RC$  uzyska ładunek wynoszący 1,0% wartości ładunku w stanie równowagi?

Odp.: 4,6.

42. Opornik o oporze  $10\,000 \Omega$  i kondensator połączono szeregowo i przyłożono nagłe napięcie  $10 \text{ V}$ . Jeżeli napięcie na kondensatorze wzrosnie do  $5,0 \text{ V}$  w czasie  $1,0 \mu\text{s}$ , to jaka jest pojemność kondensatora?

43. Różnica potencjałów między okładkami uszkodzonego kondensatora  $C$  ( $2,0 \mu\text{F}$ ) spada z  $V_0$  do  $V$  ( $\frac{1}{4}V_0$ ) w czasie  $t$  ( $2,0 \text{ s}$ ). Jaki jest zastępco opór między okładkami kondensatora?

Odp.:  $7,2 \cdot 10^5 \Omega$ .

44. Obwód  $RC$  rozładowano zamkając przełącznik w chwili  $t = 0$ . Początkowa różnica potencjałów w kondensatorze wynosi  $100 \text{ V}$ . Jeżeli różnica potencjałów zmalała do  $1,0 \text{ V}$  po 10 sekundach to (a) jaka będzie różnica potencjałów po 20 sekundach od  $t = 0$ ? (b) Jaka jest stała czasowa obwodu?

45. Udowodnić, że kiedy przełącznik  $S$  na rys. 32-10 zostaje „przerzucony” od  $a$  do  $b$ , cała energia zgromadzona w kondensatorze ulega przekształceniu na energię cieplną na oporze. Przyjąć, że zanim zaczęliśmy „przerzucać” przełącznik, kondensator był całkowicie naładowany.

46. Kondensator o pojemności  $C = 1,0 \mu\text{F}$  i zmagazynowanej początkowo energii  $U_0 = 0,50 \text{ J}$  rozładowano przez opór  $R = 1,0 \cdot 10^6 \Omega$ . (a) Jaki jest początkowy ładunek kondensatora? (b) Jaki prąd płynie przez opornik, gdy zaczyna się rozładowanie? (c) Wyrazić  $V_C$ , napięcie na kondensatorze, i  $V_R$ , napięcie na oporniku, jako funkcje czasu. (d) Wyrazić tempo gromadzenia energii cieplnej w oporniku jako funkcję czasu.

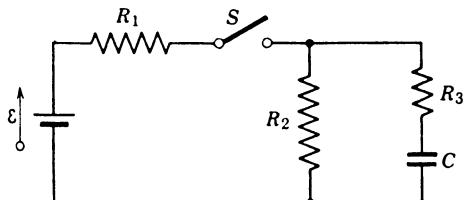
47. Opór wynoszący  $3,0 \cdot 10^6 \Omega$ , kondensator o pojemności  $1,0 \mu\text{F}$  oraz SEM równa  $\mathcal{E} = 4,0 \text{ V}$  tworzą obwód składający się z pojedynczego oczka. (a) Jak szybko wzrasta ładunek na kondensatorze? (b) Jak szybko wzrasta energia gromadzona w kondensatorze? (c) Jak szybko wzrasta energia cieplna wydzielająca się na oporze? (d) Jaka jest szybkość dostarczania energii przez źródło SEM po upływie  $1,0 \text{ s}$  od chwili zamknięcia obwodu?

Odp.: (a)  $9,6 \cdot 10^{-7} \text{ C/s}$ . (b)  $1,1 \cdot 10^{-6} \text{ W}$ . (c)  $2,8 \cdot 10^{-6} \text{ W}$ . (d)  $3,8 \cdot 10^{-6} \text{ W}$ .

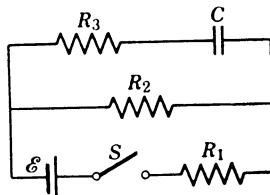
48. Przez opory  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , w obwodzie z rys. 32-29 przepływają odpowiednio prądy  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$ . Niech  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  i  $V_C$  będą odpowiednio różnicami potencjałów na oporach i kondensatorze  $C$ . (a) Dla wymienionych powyżej prądów i napięć naszkicować zależność od czasu po zamknięciu przełącznika  $S$ .

(b) Po upływie czasu równego dużej liczbie stałych czasowych przełącznik  $S$  zostaje ponownie otwarty. Naszkicować zależność wymienionych powyżej prądów i napięć od czasu po otworzeniu przełącznika  $S$ .

49. W obwodzie na rys. 32-30,  $\mathcal{E} = 1200 \text{ V}$ ,  $C = 6,50 \mu\text{F}$ ,  $R_1 = R_2 = R_3 = 7,30 \cdot 10^5 \Omega$ . Przy  $C$  całkowicie rozładowanym zamknięto nagle przełącznik  $S$  ( $t = 0$ ). (a) Ustalić natężenie prądu płynącego przez każdy opornik dla  $t = 0$  i  $t = \infty$ . (b) Narysować jakościowo wykres spadku potencjału  $V_2$  na  $R_2$  od  $t = 0$  do  $t = \infty$ . (c) Jakie są liczbowe wartości  $V_2$  dla  $t = 0$  i  $t = \infty$ . (d) Podać fizyczne znaczenie „ $t = \infty$ ” i określić w przybliżeniu liczbową dolną granicę w sekundach dla „ $t = \infty$ ” w tym przypadku.



Rys. 32-29. Zadanie 48



Rys. 32-30. Zadanie 49

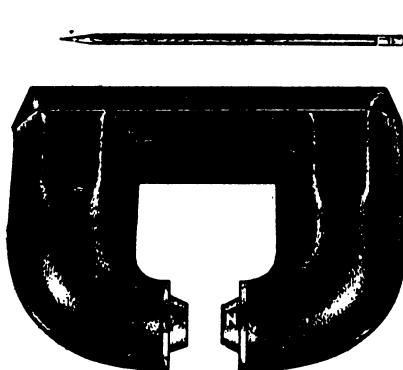
Odp.: (a) Gdy  $t = 0$ ,  $i_1 = 1,1 \text{ mA}$ ,  $i_2 = i_3 = 0,55 \text{ mA}$ ; gdy  $t = \infty$ ,  $i_1 = i_2 = 0,82 \text{ mA}$ ,  $i_3 = 0$ .  
 (c) Gdy  $t = 0$ ,  $V_2 = 400 \text{ V}$ ; gdy  $t = \infty$ ,  $V_2 = 600 \text{ V}$ . (d) Stała czasowa wynosi  $7,1 \text{ s}$ .

# 33. Pole magnetyczne

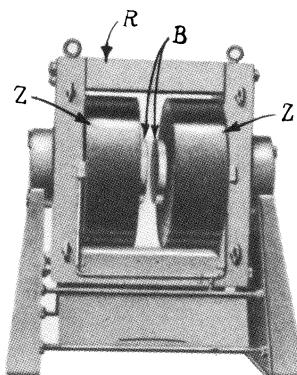
## 33-1. Pole magnetyczne

Nauka o magnetyzmie powstała w wyniku obserwacji pewnych „kamieni” (magnetyków) przyciągających kawałki żelaza. Słowo *magnetyzm* wywodzi się od nazwy okręgu Magnesia w Azji Mniejszej, który jest jednym z miejsc, gdzie kamienie te znajdowano. Rysunek 33-1 przedstawia współczesny magnes stały, który jest w prostej linii potomkiem tych naturalnych magnesów. Innym naturalnym magnesem jest sama Ziemia, której działanie orientujące igłę magnetyczną kompasu znane jest od czasów starożytnych.

W roku 1820 Oersted jako pierwszy odkrywa, że prąd płynący w przewodzie może także wywoływać efekty magnetyczne, a mianowicie może on zmieniać orientację igły



Rys. 33-1. Magnes stały. Linie indukcji magnetycznej wychodzą z bieguna północnego oznaczonego literą N i wchodzą do bieguna południowego, po przeciwniej stronie przerwy powietrznej



Rys. 33-2. Elektromagnes używany do prac badawczych. Widoczna jest żelazna rama R i bieguni magnesu B oraz uzwojenia Z. Nabiegunki mają średnicę 30 cm. (Dzięki uprzejmości Varian Associates)

kompasu\*. W paragrafie 26-1 pokazaliśmy jak to niezwykle ważne odkrycie powiązało ze sobą zupełnie niezależne wówczas nauki o magnetyzmie i elektryczności. Działanie magnetyczne prądu płynącego w przewodzie może być wzmacnione przez utworzenie z tego przewodu cewki o wielu zwojach i nałożenie jej na rdzeń żelazny. Na rysunku 33-2 przedstawiono wygląd wielkiego elektromagnesu powszechnie używanego do badania zagadnień magnetyzmu.

Przestrzeń otaczającą magnes albo przewodnik z prądem nazywamy *polem magnetycznym*, podobnie jak przestrzeń w pobliżu naładowanego pręta nazywaliśmy polem elektrycznym. Podstawowy wektor pola magnetycznego  $\mathbf{B}$ , który określmy w następnym paragrafie, nosi nazwę *indukcji magnetycznej*\*\*. Wielkość ta może być reprezentowana przez *linie indukcji* tak, jak pole elektryczne reprezentowane było przez linie sił. Podobnie jak dla pola elektrycznego (patrz paragraf 27-3) wektor pola magnetycznego jest związany z liniami indukcji w następujący sposób:

1. Styczna do linii indukcji w dowolnym punkcie daje *kierunek* wektora  $\mathbf{B}$  w tym punkcie.

2. Linie indukcji rysuje się w ten sposób, że ich liczba na jednostkę powierzchni przekroju poprzecznego (prostopadłego do linii) jest proporcjonalna do *wartości bezwzględnej*  $B$ . Tam gdzie linie są blisko siebie,  $B$  przyjmuje duże wartości, a tam gdzie daleko — małe.

Podobnie jak w przypadku pola elektrycznego wektor pola  $\mathbf{B}$  jest szczególnie ważną wielkością. Linie indukcji pokazują bezpośrednio, w sposób graficzny, jak zmienia się  $\mathbf{B}$  w ścisłe określonym obszarze przestrzeni. *Strumień indukcji*  $\Phi_B$  dla pola magnetycznego można zdefiniować zupełnie analogicznie jak strumień  $\Phi_E$  dla pola elektrycznego, a mianowicie

$$\Phi_B = \int \mathbf{B} d\mathbf{S},$$

gdzie całkowanie wykonuje się po powierzchni (zamkniętej albo otwartej), dla której chcemy określić  $\Phi_B$ .

### 33-2. Definicja indukcji magnetycznej $\mathbf{B}^{***}$

W paragrafie tym nie będziemy omawiać przyczyn powodujących powstanie pola magnetycznego, zajmiemy się tym w następnym rozdziale. Teraz zajmiemy się: (a) *zdefiniowaniem* operacyjnym wartości bezwzględnej i kierunku wektora  $\mathbf{B}$  w dowolnym

\* W 1878 H. A. Rowland (Johns Hopkins University) odkrył, że poruszający się naładowany przedmiot (w jego przypadku, szybko obracający się naładowany krążek) także powoduje efekty magnetyczne. W rzeczywistości, nie jest to takie oczywiste, żeby poruszający się ładunek był równoważny prądowi płynącemu w przewodzie. Patrz: John D. Miller, Rowland's Physics, *Physics Today*, July 1976 — naukowa biografia wybitnego amerykańskiego fizyka, zawierająca także szczegółowe omówienie tego eksperymentu.

\*\* Bardziej odpowiednią nazwą dla  $\mathbf{B}$  byłoby *natężenie pola magnetycznego*, ale nazwa ta z powód historycznych została zarezerwowana dla innego wektora związanego z polem magnetycznym (patrz paragraf 37-7).

\*\*\* Definicja i metoda pomiaru  $\mathbf{B}$  podane w tym paragrafie, mimo, że zasadniczo prawidłowe i odpowiadające naszemu obecnemu celowi, nie są stosowane w praktyce, ze względu na trudności laboratoryjne. Kolejny paragraf wyjaśni, jak można w laboratorium w bardziej dogodny sposób mierzyć  $\mathbf{B}$ .

punkcie  $P$  w pobliżu np. magnesu, przewodnika z prądem albo poruszającego się ładunku i (b) określeniem *oddziaływania* pola magnetycznego na poruszające się ładunki.

Podobnie jak w przypadku pola elektrycznego rozważmy ładunek  $q_0$  jako ciało próbne. Umieścimy to ciało próbne będące w *spoczynku* w punkcie  $P$  w pobliżu np. stałego magnesu przedstawionego na rys. 33-1. Można sprawdzić eksperymentalnie, że w takim układzie żadna siła nie działa na ładunek  $q_0$  (biorąc pod uwagę tylko obecność, albo nieobecność magnesu). Jeżeli jednak wystrzelimy ładunek próbny  $q_0$  z szybkością  $v$ , to zauważymy występowanie *bocznej siły*  $F$  przy obecności magnesu. Przez siłę boczną rozumiemy siłę o kierunku prostopadłym do kierunku szybkości  $v$ .

Zdefiniujemy wielkość wektorową  $\mathbf{B}$  w punkcie  $P$  przy pomocy wielkości  $F$ ,  $v$  i  $q_0$ .

Jeżeli zmienimy kierunek  $v$  w punkcie  $P$ , pozostawiając wartość  $v$  nie zmienioną, zobaczymy, że chociaż  $F$  zawsze będzie tworzyć kąt prosty z  $v$ , to jednak na ogół wartość  $F$  będzie się zmieniała. Dla pewnego kierunku  $v$  (a także dla  $-v$ ) siła  $F$  jest równa零. Kierunek ten z definicji jest *kierunkiem B, zwrot wektora B* określmy później podając bardziej dokładną definicję  $\mathbf{B}$ .

Mając znaleziony kierunek  $\mathbf{B}$  możemy zorientować  $v$  w taki sposób, aby ładunek próbny poruszał się pod kątem prostym do  $\mathbf{B}$ . Przekonamy się, że siła  $F$  jest wówczas maksymalna i zdefiniujemy wielkość  $\mathbf{B}$  poprzez zmierzoną wartość tej siły  $F_{\perp}$  jako

$$B = \frac{F_{\perp}}{q_0 v}. \quad (33-1)$$

Skorzystajmy z tej definicji  $\mathbf{B}$  (w której mamy określoną wielkość i kierunek, ale nie określony zwrot), aby, jak poprzednio, podać pełną wektorową definicję tej wielkości: *Jeżeli dodatni ładunek próbny  $q_0$  porusza się w stronę punktu P z prędkością v i jeżeli na ten ładunek działa siła F, to w punkcie P istnieje pole magnetyczne o indukcji B, gdzie B jest wektorem spełniającym związek*

$$\mathbf{F} = q_0 \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (33-2)$$

$v$ ,  $q_0$  i  $F$  są wielkościami mierzonymi. Wielkość magnetycznej siły odchylającej  $F$ , zgodnie z regułami mnożenia wektorów, określona jest wzorem\*

$$F = q_0 v B \sin \theta, \quad (33-3)$$

gdzie  $\theta$  jest kątem zawartym pomiędzy  $v$  i  $\mathbf{B}$ .

Rysunek 33-3 przedstawia związki pomiędzy tymi wektorami. Widzimy, w równaniu (33-2), że wektor  $\mathbf{F}$ , który jest prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez  $v$  i  $\mathbf{B}$ , zawsze będzie prostopadły do  $v$  (a także do  $\mathbf{B}$ ) i z tego powodu  $\mathbf{F}$  zawsze będzie siłą odchylającą. Z równania (33-2) wynika, że: (a) Siła magnetyczna znika, jeżeli  $v \rightarrow 0$ , (b) siła magnetyczna znika, jeżeli  $v$  jest albo równoległe, albo antyrównoległe do kierunku  $\mathbf{B}$  (w tych przypadkach  $\theta = 0$  albo  $180^\circ$  i  $\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$ ) i (c) jeżeli  $v$  jest prostopadłe do  $\mathbf{B}$  ( $\theta = 90^\circ$ ), siła odchylająca osiąga maksymalną wartość daną równaniem (33-1), czyli  $q_0 v B$ .

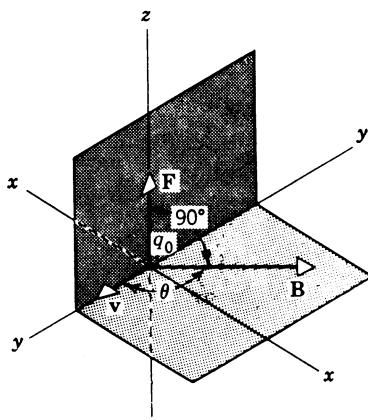
Podana definicja  $\mathbf{B}$  jest podobna, chociaż bardziej złożona, do definicji natężenia pola elektrycznego  $\mathbf{E}$ , którą możemy sformułować następująco: *Jeżeli na dodatni, nieruchomy ładunek próbny  $q_0$  umieszczony w punkcie P działa pewna (elektryczna) siła F, to w punkcie P istnieje pole elektryczne o natężeniu E, gdzie E jest wektorem spełniającym związek*

$$\mathbf{F} = q_0 \mathbf{E},$$

---

\* Potrzebne wiadomości o mnożeniu wektorów czytelnik znajdzie w paragrafie 2-4.

$q_0$  i  $\mathbf{F}$  są wielkościami mierzonymi. W definicji  $\mathbf{E}$  występuje tylko jeden kierunek, jest to kierunek działania siły elektrycznej  $\mathbf{F}_E$  na dodatni ładunek próbny; przyjmujemy, że kierunek  $\mathbf{E}$  jest taki sam, jak kierunek  $\mathbf{F}_E$ . W definicji  $\mathbf{B}$  występują dwa charakterystyczne kierunki, są to — kierunek  $\mathbf{v}$  oraz kierunek siły magnetycznej  $\mathbf{F}_B$ ; tworzą one ze sobą zawsze kąt prosty. Mimo, że możemy z łatwością rozwiązać równanie dla  $\mathbf{E}$ , nie możemy rozwiązać równ. (33-2) dla  $\mathbf{B}$ . Dlaczego?



Rys. 33-3. Ilustracja wyrażenia  $\mathbf{F} = q_0 \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  (równ. (33-2)).  
Ladunek próbny  $q_0$  wychodzi z początku układu z prędkością  $\mathbf{v}$

Rysunek 33-4 przedstawia wnętrze komory pęcherzykowej, w której w punkcie  $P$  powstał pozyton (dodatni elektron) i elektron. Pole magnetyczne jest prostopadłe do komory i skierowane przed płaszczyznę rysunku (symbol  $\odot$ )\*. Ze związku  $\mathbf{F} = q_0 \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  (równanie (33-2)) wynika, że siły odchylające, działające na obie cząstki są takie, jak przedstawia rysunek. Siły te powodują widoczne zakrzywienie torów.

Jednostką  $\mathbf{B}$ , która wynika z równania (33-3) jest  $(\text{N/C})(\text{m/s})$ . Ma ona nazwę *tesla* (T) lub  $\text{weber/m}^2$  ( $\text{Wb/m}^2$ )\*\*. Ponieważ  $\text{C/s} = \text{A}$ , mamy

$$1 \text{ T} = 1 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = \frac{1 \text{ N}}{\text{C}(\text{m/s})} = \frac{1 \text{ N}}{\text{A} \cdot \text{m}}.$$

Wcześniejszą jednostką  $\mathbf{B}$ , dotychczas powszechnie używaną, jest *gaus* (Gs); związek między tymi jednostkami jest następujący

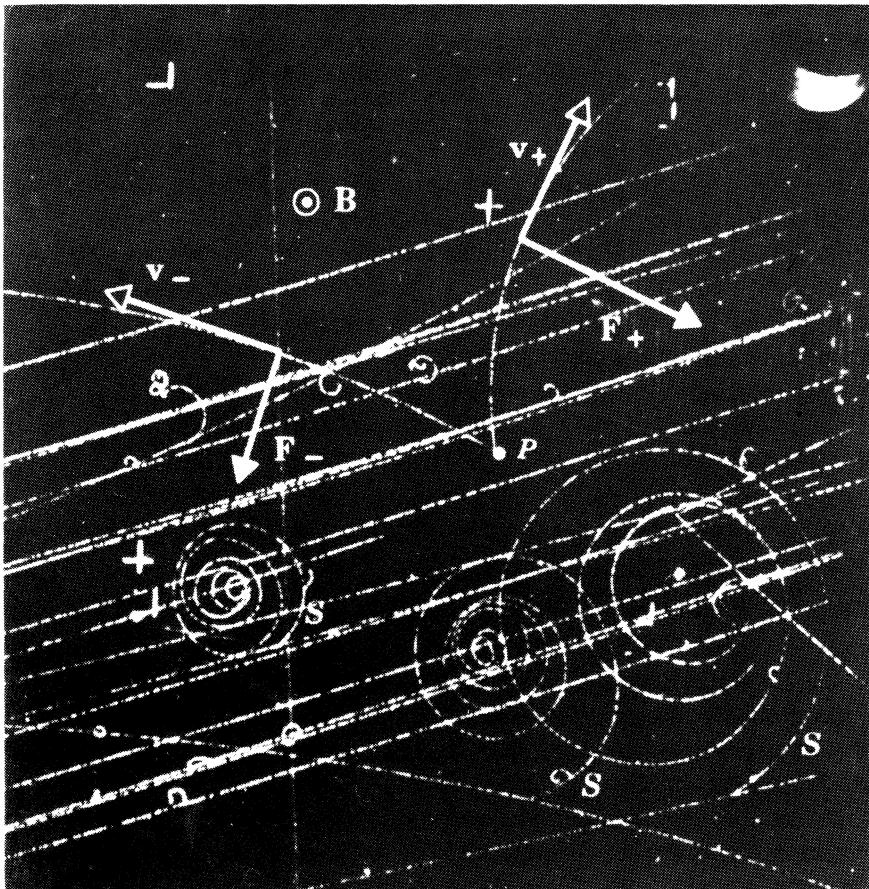
$$1 \text{ T} = 1 \text{ Wb/m}^2 = 10^4 \text{ Gs}***.$$

Fakt, że siła magnetyczna jest zawsze skierowana prostopadle do kierunku ruchu cząstki, oznacza, że (przynajmniej dla stałych pól magnetycznych) praca wykonana przez tę siłę nad cząstką wynosi zero. Dla elementu toru cząstki o długości  $dl$  praca ta,  $dW$ , wynosi  $\mathbf{F}_B dl$ ; jest ona równa zeru, ponieważ  $\mathbf{F}_B$  i  $dl$  są zawsze prostopadłe. Z tego powodu

\* Symbol  $\otimes$  wskazuje, że wektor jest skierowany za płaszczyznę rysunku; znak  $\times$  traktujemy jako część tylnej strzałki; symbol  $\odot$  wskazuje, że wektor jest skierowany przed płaszczyzną kartki, kropkę traktujemy jako ostrze strzałki.

\*\* Weber używany jest jako jednostka strumienia magnetycznego, zagadnienie to omówione będzie w następnych rozdziałach. Patrz także paragraf 33-1.

\*\*\* Patrz: C. M. Fowler, Megagauss Physics, *Science*, April 1973, znakomite zestawienie właściwości takich ogromnych pól.



Rys. 33-4. Komora pęcherzykowa jest urządzeniem pozwalającym oglądać, dzięki powstającym w niej małym pęcherzykom, tory cząstek naładowanych, przechodzących poprzez komorę. Rysunek przedstawia fotografię wykonaną przy użyciu takiej komory umieszczonej w polu magnetycznym o indukcji  $B$  i naświetlanej promieniowaniem z wielkiego cyklotronu. Krzywa o kształcie litery  $V$  przechodząca przez punkt  $P$  jest utworzona przez tory dodatniego i ujemnego elektronu, które w polu magnetycznym są odchylane w przeciwnie strony. Spirale  $S$  są śladami trzech niskoenergetycznych elektronów. (Dzięki uprzejmości E. O. Lawrence'a, Radiation Laboratory, University of California)

statyczne pole magnetyczne nie może zmienić energii kinetycznej poruszającego ładunku, może ono tylko odchylać go\*.

Jeżeli naładowana cząstka porusza się w obszarze, w którym istnieje zarówno pole magnetyczne, jak i elektryczne, siłę wypadkową działającą na tę cząstkę otrzymujemy z połączenia równań (27-2) i (33-2):

$$\mathbf{F} = q_0 \mathbf{E} + q_0 \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (33-4)$$

Wzór ten nazywamy czasami *wzorem Lorentza* dla uczczenia pamięci H. A. Lorentza,

\* W rzeczywistości  $\mathbf{F}_B$  jest zawsze skierowana prostopadle do  $\mathbf{v}$ , nawet jeśli  $\mathbf{B}$  zmienia się w czasie. Jednakże w tym przypadku według szczególnej teorii względności pojawi się pole elektryczne  $\mathbf{E}$  i będzie oddziaływało na naładowaną cząstkę tak, aby wykonać na niej pracę. Patrz: Robert Resnick, *Introduction to Special Relativity*, John Wiley & Sons, 1968 (paragraf 4.2) — szczegółowe omówienie.

który w znacznym stopniu przyczynił się do rozwoju i wyjaśnienia pojęć pola elektrycznego i magnetycznego.

**Przykład 1.** Jednorodne pole o indukcji magnetycznej  $\mathbf{B}$  skierowane jest poziomo z południa na północ; wartość  $B$  wynosi 1,5 T. Jaka siła będzie działała na proton o energii 5,0 MeV poruszający się pionowo w dół w tym polu?

Kinetyczna energia protonu wynosi

$$K = (5,0 \cdot 10^6 \text{ eV})(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}) = 8,0 \cdot 10^{-13} \text{ J},$$

prędkość jego może być znaleziona ze związku  $K = \frac{1}{2}mv^2$ , skąd

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,0 \cdot 10^{-13} \text{ J}}{1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} = 3,1 \cdot 10^7 \text{ m/s.}$$

Z równania (33-3) mamy

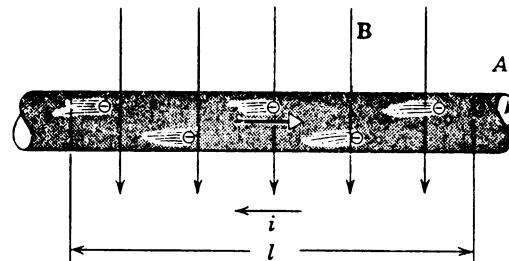
$$F = qvB\sin\theta = (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})(3,1 \cdot 10^7 \text{ m/s})(1,5 \text{ T})\sin 90^\circ = 7,4 \cdot 10^{-12} \text{ N.}$$

Możemy pokazać, że siła ta jest około  $4 \cdot 10^{14}$  razy większa aniżeli ciężar protonu.

Ze związku  $F = qv \times \mathbf{B}$  wynika, że siła odchylająca skierowana jest na wschód. Gdyby cząstka miała ujemny ładunek, odchylana byłaby na zachód. Wynika to automatycznie z równania (33-2), jeżeli podstawimy  $-e$  zamiast  $q_0$ .

### 33-3. Działanie pola magnetycznego na przewodnik z prądem

Prąd jest zbiorem poruszających się ładunków. Ponieważ pole magnetyczne wywiera działanie odchylające na poruszający się ładunek, spodziewamy się, że będzie ono także odchylało przewodnik, w którym płynie prąd. Rysunek 33-5 pokazuje drut o długości  $l$ , w którym płynie prąd o natężeniu  $i$ , umieszczony w polu o indukcji magnetycznej  $\mathbf{B}$ . Dla uproszczenia drut jest tak zorientowany, że wektor gęstości prądu  $j$  tworzy kąt prosty z  $\mathbf{B}$ .



Rys. 33-5. Przewodnik, w którym płynie prąd o natężeniu  $i$  jest umieszczony prostopadle do pola magnetycznego o indukcji  $\mathbf{B}$ . Rysunek przedstawia jedynie prędkość unoszenia elektronów, a nie ich przypadkowe ruchy

Prąd  $i$  w metalowym przewodniku jest przenoszony przez swobodne elektrony (elektrony przewodnictwa). Niech  $n$  będzie ilością takich elektronów przypadającą na jednostkę objętości drutu. Wielkość średniej siły działającej na pojedynczy elektron jest dana przez równanie (33-3), w którym  $\theta = 90^\circ$ , czyli

$$F' = q_0 v B \sin \theta = ev_u B,$$

gdzie  $v_u$  jest prędkością unoszenia. Korzystając ze związku  $v_u = j/ne$  (równ. (31-5)) mamy

$$F' = e \frac{j}{ne} B = \frac{jB}{n}.$$

Drut o długości  $l$  zawiera  $nAl$  swobodnych elektronów, gdzie  $Al$  jest objętością części

drutu o przekroju  $A$ , którą bierzemy pod uwagę. Całkowita siła działająca na swobodne elektrony w drucie, a więc i na sam drut jest równa

$$F = (nAl)F' = nAl \frac{jB}{n}.$$

Ponieważ  $jA$  jest to natężenie  $i$  prądu płynącego w drucie, otrzymujemy, że

$$F = ilB. \quad (33-5)$$

Ujemne ładunki, które poruszają się w drucie (rys. 33-5) w prawą stronę, są równoważne dodatnim ładunkom poruszającym się w lewą stronę, tzn. zgodnie z kierunkiem strzałki prądu. Dla takiego dodatniego ładunku prędkość  $v$  jest skierowana w lewą stronę i siła działająca na drut dana jest równaniem (33-2) ( $F = q_0 v \times B$ ); siła ta zwrocona jest od płaszczyzny kartki w stronę patrzącego. Taki sam wynik otrzymamy, jeżeli rozważymy rzeczywiste, ujemne nośniki ładunku, dla których  $v$  jest skierowane w prawą stronę, ale  $q_0$  ma znak ujemny. Tak więc przez pomiar odchylającej siły magnetycznej działającej na drut przewodzący prąd  $i$  umieszczony w polu magnetycznym nie możemy roztrzysnąć, czy nośnikami prądu są ujemne ładunki poruszające się w danym kierunku, czy też do datnie ładunki poruszające się w kierunku przeciwnym.

Równanie (33-5) jest prawdziwe tylko wtedy, gdy drut tworzy kąt prosty z wektorem  $B$ . W ogólnym przypadku siła  $F$  byłaby dana zależnością

$$\mathbf{F} = il \times \mathbf{B}, \quad (33-6a)$$

gdzie  $\mathbf{l}$  jest wektorem o wartości równej długości drutu, o kierunku wyznaczonym przez (prosty) drut i zwrocie określonym przez kierunek prądu. Równanie (33-6a) jest równoważne związkowi  $\mathbf{F} = q_0 \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  (równ. (33-2)); jedno i drugie można traktować jako równania definiujące  $\mathbf{B}$ . Zwracamy uwagę, że wektor  $\mathbf{l}$  na rys. 33-5 jest skierowany w lewo i że siła magnetyczna  $\mathbf{F} (= il \times \mathbf{B})$  jest skierowana przed płaszczyzną kartki. Jest to zgodne z wynikiem otrzymanym przez analizę sił działających na pojedyncze nośniki ładunku.

Jeżeli rozważymy różniczkowy element przewodnika o długości  $dl$ , siła  $d\mathbf{F}$  działająca na ten element może być znaleziona przez analogię do równania (33-6a) z zależności

$$d\mathbf{F} = idl \times \mathbf{B}. \quad (33-6b)$$

Całkując ten wzór w odpowiedni sposób możemy znaleźć siłę  $\mathbf{F}$  działającą na dowolny przewodnik nieprostoliniowy.

**Przykład 2.** Drut wygięty jak na rys. 33-6, przewodzący prąd  $i$  jest umieszczony w jednorodnym polu o indukcji magnetycznej  $\mathbf{B}$ , skierowanym przed płaszczyznę rysunku. Obliczyć siłę działającą na drut. Pole magnetyczne jest przedstawione przez linie indukcji wychodzące z płaszczyzny rysunku. Kropki oznaczają, że wektor  $\mathbf{B}$  zwrocony jest w stronę patrzącego na rysunek.

Siła działająca na każdy prostoliniowy odcinek drutu, według równania (33-6a), wynosi

$$F_1 = F_3 = ilB$$

i zwrocona jest w dół, jak pokazują strzałki na rysunku.

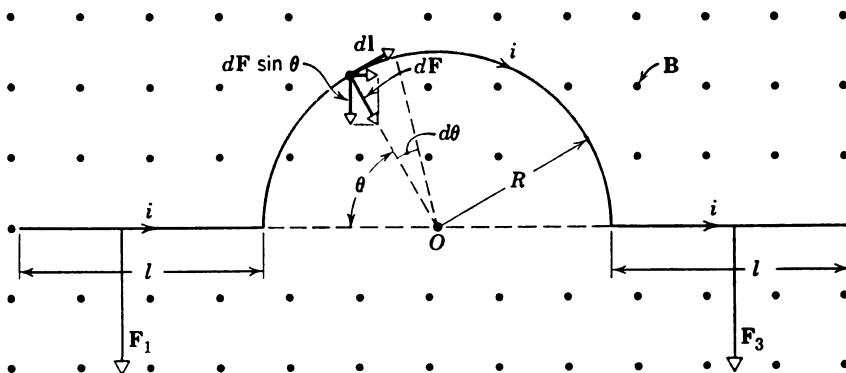
Na element drutu o długości  $dl$ , będący częścią łuku, działa siła  $d\mathbf{F}$ , której wielkość wynosi

$$dF = iBdl = iBRd\theta$$

i która jest skierowana radialnie do środka łuku  $O$ . Jedynie skierowana do dołu składowa tej siły ma dla nas znaczenie, gdyż składowa pozioma redukuje się z przeciwnie skierowaną składową pochodzącą od

symetrycznie położonego elementu luku znajdującego się po przeciwej stronie  $O$ . Wobec tego całkowita siła działająca na drut w kształcie półokręgu o środku w punkcie  $O$  skierowana jest do dołu i wynosi

$$F_2 = \int_0^\pi dF \sin \theta = \int_0^\pi iBRd\theta \sin \theta = iBR \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2iBR.$$



Rys. 33-6. Przykład 2

Siła wypadkowa działająca na cały drut jest więc równa

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = 2ilB + 2iBR = 2iB(l+R).$$

Zauważmy, że siła ta jest taka sama, jak siła działająca na prosty drut o długości  $2l+2R$ .

Rysunek 33-7 przedstawia układ używany przez Thomasa, Driscolla i Hippela w 1949 r. z Narodowego Biura Wzorców USA do pomiaru indukcji magnetycznej pola wytworzonego przez magnes laboratoryjny, taki jak pokazano na rys. 33-2. Równoległy bok jest to cewka złożona z dziewięciu zwojów o szerokości  $a$  i długości  $b$ , równych odpowiednio około 10 cm i około 70 cm. Dolny koniec cewki umieszczony jest w polu magnetycznym o indukcji  $B$ , a górny koniec zawieszony na ramieniu wagi.  $\mathbf{B}$  jest skierowane prostopadle do płaszczyzny rysunku, za tę płaszczyznę.

W cewce płynie ustalony prąd  $i$  o natężeniu około 0,10 A w kierunku wskazanym na rysunku. Na prawej szalce wagi kładziemy odważnik, tak aby osiągnąć równowagę. Siła magnetyczna  $\mathbf{F} (= il \times \mathbf{B})$ ; patrz równ. (33-6a)) działająca na dolny koniec cewki skierowana jest w góre, jak pokazuje rysunek. Z równania (33-5) widać, że siła działająca na dolną część każdego zwoju cewki jest równa  $iaB$ . Ponieważ zwojów jest dziewięć, całkowita siła działająca na dolny koniec cewki wynosi  $9iaB$ . Siły działające na boki cewki ( $= il \times \mathbf{B}$ ) skierowane są w bok; ponieważ są one równe co do wielkości, lecz mają przeciwnie znaki, więc znoszą się nie dając żadnego wpływu.

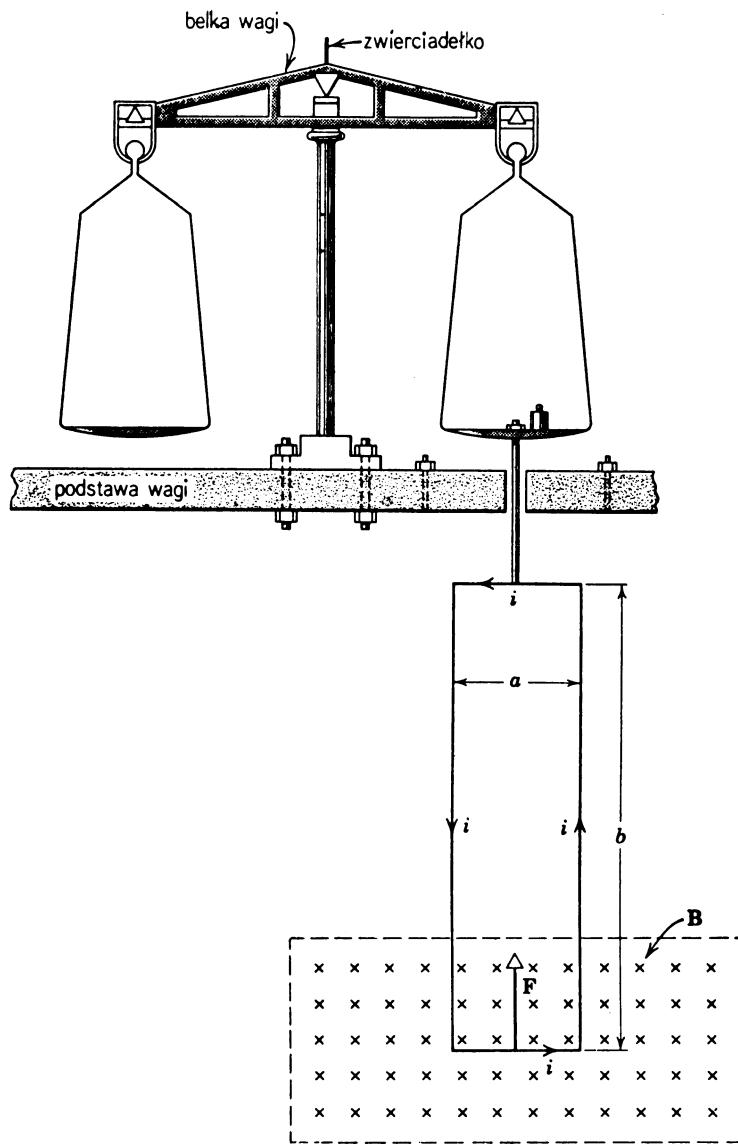
Po zrównoważeniu układu zmieniamy kierunek prądu, wskutek czego zmienia się znak wszystkich sił magnetycznych, działających na cewkę. W szczególności siła  $\mathbf{F}$  działa wówczas do dołu, naruszając równowagę układu. Aby doprowadzić układ do poprzedniego stanu równowagi, trzeba na lewą szalkę wagi położyć ciężarek o masie około 9,78 g. Zmiana siły spowodowana przez zmianę kierunku prądu równa jest  $2F$  i tyle musi ważyć ciężarek położony na lewą szalkę, czyli

$$mg = 2(9iaB) = 18iaB.$$

Stąd otrzymujemy

$$B = \frac{mg}{18ai} = \frac{8,78 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 9,80 \text{ m/s}^2}{18 \cdot 0,10 \text{ m} \cdot 0,10 \text{ A}} = 0,48 \text{ T} = 4800 \text{ Gs}.$$

Pracownicy Biura Wzorców wykonali opisane pomiary z dużo większą dokładnością, niż podana wyżej. W jednej z serii pomiarów znaleźli oni na przykład indukcję magnetyczną 4697,55 Gs (dzięki tej i innym metodom, możliwa jest dziś nawet większa dokładność).

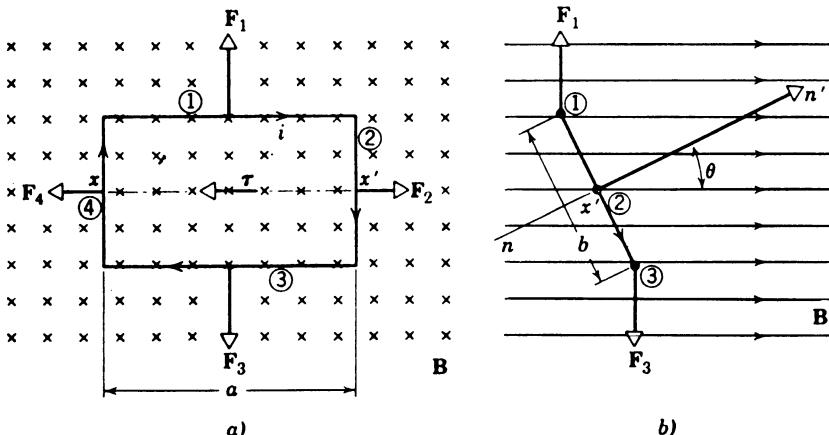


Rys. 33-7. Układ używany do pomiaru indukcji magnetycznej  $\mathbf{B}$ . Punkt zerowy położenia wagi obserwujemy przy pomocy światła odbitego od zwierciadłka przymocowanego do ramienia wagi

### 33-4. Moment sil działających na zamknięty obwód z prądem (moment skręcający)

Rysunek 33-8 przedstawia utworzony z drutu zamknięty obwód mający kształt prostokątnej ramki o bokach  $a$  i  $b$ . Ramka umieszczona jest w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\mathbf{B}$ , tak że boki 1 i 3 są prostopadłe do kierunku pola. Normalna  $nn'$  do płaszczyzny obwodu tworzy kąt  $\theta$  z kierunkiem  $\mathbf{B}$ .

Załóżmy, że prąd ma kierunek taki, jak pokazano na rysunku. Oczywiście muszą istnieć przewody doprowadzające prąd do obwodu i odprowadzające go. Jeżeli są one umieszczone blisko siebie, na taką parę przewodów nie będą działać żadne siły magnetyczne, ponieważ prądy płynące w nich mają przeciwny kierunek. Wobec tego przewody te można zaniedbać. Trzeba również określić sposób podtrzymywania obwodu. Wyobraźmy sobie, że jest on zawieszony na długim sznurku przywiązanym w środku masy obwodu. W ten sposób obwód może swobodnie obracać się, przynajmniej o małe kąty, wokół dowolnej osi przechodzącej przez jego środek masy. Z drugiej strony, możemy sobie wyobrazić wykonanie doświadczenia w satelicie ziemskim (np. Skylab), w którym efektywna wartość g wynosi 0.



Rys. 33-8. Prostokątny, zamknięty obwód z prądem umieszczony w jednorodnym, zewnętrznym polu magnetycznym

Wypadkowa siła działająca na obwód jest sumą sił działających na jego cztery boki. Kierunek prądu płynącego przez bok 2 wskazuje wektor  $\mathbf{l}$  o długości  $b$ . Kąt pomiędzy  $\mathbf{l}$  i  $\mathbf{B}$  (rys. 33-8b) jest równy  $90^\circ - \theta$ , wobec tego siła działająca na ten bok wynosi

$$F_2 = ibB\sin(90^\circ - \theta) = ibB\cos\theta.$$

Ze związku  $\mathbf{F} = i\mathbf{l} \times \mathbf{B}$  (równ. (33-6a)), znajdujemy, że siła  $F_2$  jest skierowana za płaszczyznę rys. 33-8b. Czytelnik łatwo może się przekonać, że siła  $F_4$ , działająca na bok 4, ma tę samą wartość bezwzględną co  $F_2$ , lecz przeciwny kierunek. Wobec tego siły  $F_2$  i  $F_4$  wzięte razem nie wpływają na ruch obwodu. Wypadkowa tych sił jest równa zeru, a ponieważ działają one wzdłuż tej samej linii, ich wypadkowy moment skręcający też jest równy零.

Wspólna wartość bezwzględna sił  $F_1$  i  $F_3$  wynosi  $iaB$ . Siły te również są przeciwnie skierowane, wobec czego nie przesuwają one obwodu jako całości. Jednakże, jeżeli układ znajduje się w pozycji przedstawionej na rys. 33-8b, nie działają one wzdłuż tej samej linii i powstaje wypadkowy moment skręcający, który obraca obwód zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, wokół osi  $xx'$ . Wobec tego obwód możemy umocować na sztywnej osi przechodzącej wzdłuż  $xx'$  bez ograniczenia swobody jego ruchów. Kierunek momentu skręcającego można przedstawić na rys. 33-8b za pomocą wektora przechodzącego przez punkt  $x'$  i skierowanego za płaszczyznę rysunku, albo na rys. 33-8a za pomocą wektora skierowanego wzdłuż osi  $xx'$  od strony prawej do lewej.

Wielkość momentu skręcającego  $\tau'$  znajdujemy obliczając moment siły  $F_1$  względem

osi  $xx'$  i mnożąc go przez dwa, ponieważ siła  $F_3$  ma taki sam moment względem osi  $xx'$  jak  $F_1$ . Wobec tego

$$\tau' = 2iaB \left( \frac{b}{2} \right) \sin \theta = iabB \sin \theta.$$

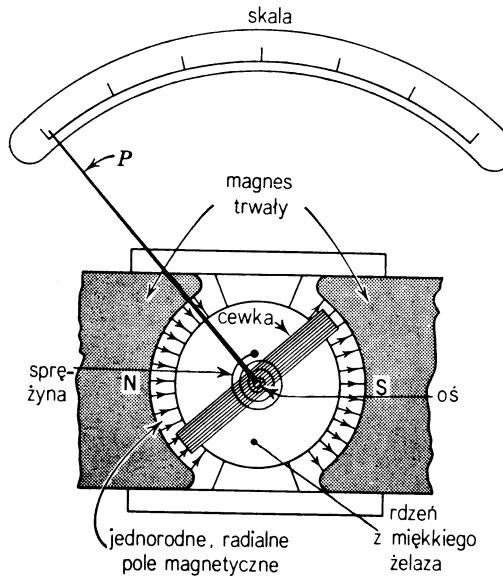
Taki sam moment skręcający działa na każdy zwój cewki złożonej z kilku zwojów. Jeżeli ilość zwojów wynosi  $N$ , wielkość wypadkowego momentu skręcającego jest równa

$$\tau = N\tau' = NiabB \sin \theta = NiAB \sin \theta, \quad (33-7)$$

gdzie  $A = ab$  jest powierzchnią jednego zwoju.

Można pokazać, że równanie (33-7) jest słuszne dla *dowolnego, płaskiego obwodu o powierzchni A niezależnie od jego kształtu*. Własność skręcania zamkniętego obwodu z prądem została wykorzystana przy budowie silników elektrycznych oraz w większości przyrządów pomiarowych, służących do mierzenia natężenia prądu i różnicy potencjałów.

**Przykład 3. Galwanometr.** Rysunek 33-9 przedstawia zasadnicze elementy galwanometru, przyrządu służącego do pomiaru natężenia prądu będącego główną częścią składową amperomierzy i woltomierzy. Cewka ma 2,0 cm wysokości i 1 cm szerokości; składa się ona z 250 zwojów i jest tak osadzona, że może obracać się wokół pionowej osi w jednorodnym, *radialnym* polu magnetycznym o indukcji  $B = 2000$  Gs.



Rys. 33-9. Przykład 3. Elementy galwanometru: cewka, spiralna sprężyna oraz wskaźówka  $P$

Moment sił sprężystych powstający w sprężynie równoważy moment sił magnetycznych powodując trwałe odchylenie cewki o kąt  $\varphi$ , jeżeli płynie przez nią prąd o natężeniu  $i$ . Czemu równa się stała skręcania  $\kappa$  i sprężynki (patrz równ. (15-21)), jeżeli prąd o natężeniu  $1,0 \cdot 10^{-4}$  A powoduje wychylenie cewki o kąt  $\varphi = 30^\circ$ ?

Przyrównując moment sił magnetycznych do momentu sił sprężystych (patrz równ. (33-7)) otrzymujemy

$$\tau = NiAB \sin \theta = \kappa \varphi,$$

skąd

$$\kappa = \frac{NiAB \sin \theta}{\varphi} = \frac{250 \cdot 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ A} \cdot 2,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 (0,20 \text{ Wb/m}^2) \cdot \sin 90^\circ}{30^\circ} = 3,3 \cdot 10^{-8} \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{stopień}}.$$

Zauważmy, że normalna do płaszczyzny cewki (tzn. wskazówka  $P$ ) jest zawsze prostopadła do (radialnego) pola magnetycznego, tak że  $\theta = 90^\circ$ .

Zamknięty obwód z prądem, obracający się w zewnętrznym polu magnetycznym, przypomina swoim zachowaniem się igłę kompasu. Jedna powierzchnia obwodu zachowuje się jak biegun północny igły\*, druga jak południowy. Można uważać, że igła kompasu, magnes sztabkowy i obwód z prądem są to *dipole magnetyczne*. Pokażemy to na przykładzie obwodu z prądem, rozumując analogicznie jak przy *dipolach elektrycznych*.

Układ nazywamy dipolem elektrycznym, jeżeli (a) układ ten umieszczony w *zewnętrznym* polu elektrycznym obraca się pod wpływem momentu skręcającego (wzór (27-11))

$$\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E}, \quad (33-8)$$

gdzie  $\mathbf{p}$  jest elektrycznym momentem dipolowym oraz (b) jeżeli sam układ wytwarza pole, które w dużych odległościach daje się przedstawić jakościowo przez linie sił takie jak na rys. 29-10, a ilościowo przez równanie (29-11). Oba te wymagania nie są niezależne; jeżeli jedno jest spełnione, drugie automatycznie również jest spełnione.

Wartość bezwzględna momentu skręcającego danego równaniem (33-8) wynosi

$$\tau = pE\sin\theta, \quad (33-9)$$

gdzie  $\theta$  jest kątem zawartym między  $\mathbf{p}$  i  $\mathbf{E}$ . Porównajmy podane wyrażenie z równaniem (33-7) na wielkość momentu skręcającego, działającego na zamknięty obwód z prądem:

$$\tau = NiAB\sin\theta. \quad (33-7)$$

W obu wypadkach mamy do czynienia z tą samą składową właściwego pola ( $E$  lub  $B$ ) daną przez  $\sin\theta$ . Z porównania widać, że wyrażenie  $NiA$  w równaniu (33-7) można traktować jako *magnetyczny moment dipolowy*  $\mu$  odpowiadający momentowi  $p$  z równania (33-9), czyli

$$\mu = NiA. \quad (33-10)$$

Równanie (33-7) sugeruje nam, żeby moment skręcający sił działających na zamknięty obwód z prądem napisać w postaci wektorowej, analogicznej do równania (33-8), tzn.

$$\tau = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}. \quad (33-11)$$

Kierunek magnetycznego momentu dipolowego  $\boldsymbol{\mu}$  musi pokrywać się z osią prostopadłą do płaszczyzny obwodu, jego zwrot określony jest następującą regułą: jeżeli palcami prawej ręki będziemy obracać śrubę prawoskrętną zgodnie z kierunkiem prądu, jej ruch wskaże zwrot wektora  $\boldsymbol{\mu}$ . Czytelnik powinien sprawdzić, że jeżeli  $\boldsymbol{\mu}$  jest zdefiniowane w ten sposób, równania (33-10) i (33-11) poprawnie opisują moment skręcający sił działających na obwód z prądem umieszczony w zewnętrznym polu magnetycznym (rys. 33-8).

Ponieważ na obwód z prądem, lub inny dipol magnetyczny umieszczony w zewnętrznym polu magnetycznym, działają momenty skręcające, aby spowodować zmianę orientacji takiego dipola, siły zewnętrzne muszą wykonywać pracę (dodatnią lub ujemną). Wobec tego dipol magnetyczny ma *energię potencjalną* związaną z jego orientacją w zewnętrznym polu magnetycznym. Można przyjąć, że energia ta jest zerowa dla dowolnego umownie przyjętego położenia dipola. Analogicznie do założeń poczynionych w para-

---

\* Północnym biegunem igły kompasu nazywamy ten koniec igły, który wskazuje północ geograficzną.

grafie 27-6 dla dipola elektrycznego przyjmujemy, że energia magnetyczna  $U$  wynosi zero, kiedy  $\mu$  i  $\mathbf{B}$  są skierowane prostopadle względem siebie, tzn. kiedy  $\theta = 90^\circ$ . Wybór położenia, w którym energia jest zerowa, został dokonany umownie, ponieważ interesują nas jedynie zmiany energii podczas obrotu dipola.

Magnetyczna energia potencjalna dla dowolnego położenia scharakteryzowanego przez kąt  $\theta$  jest, z definicji, równa pracy, jaką muszą wykonać siły zewnętrzne, aby obrócić dipol z położenia, w którym ma on zerową energię potencjalną ( $\theta = 90^\circ$ ) do położenia opisanego przez kąt  $\theta$ . Stąd

$$U = \int_{90^\circ}^{\theta} \tau d\theta = \int_{90^\circ}^{\theta} NiAB \sin \theta d\theta = \mu B \int_{90^\circ}^{\theta} \sin \theta d\theta = -\mu B \cos \theta,$$

przy czym zamiast  $\tau$  podstawiliśmy równanie (33-7). Używając zapisu wektorowego, związek ten możemy przedstawić w postaci

$$U = -\mu \mathbf{B}, \quad (33-12)$$

analogicznej do równania (27-13), przedstawiającego energię dipola elektrycznego w zewnętrznym polu elektrycznym

$$U = -\mathbf{pE}.$$

**Przykład 4.** W cewce mającej kształt koła o promieniu efektywnym  $a$ , składającej się z  $N$  zwojów, płynie prąd o natężeniu  $i$ . Jaką pracę trzeba wykonać, aby obrócić tę cewkę w zewnętrznym polu magnetycznym  $\mathbf{B}$  z położenia, w którym  $\theta = 0^\circ$ , do położenia, w którym  $\theta = 180^\circ$ ? Zakładamy, że  $N = 100$ ,  $a = 5,0$  cm,  $i = 0,10$  A,  $B = 1,5$  T.

Wymagana praca równa jest różnicy energii w obu tych położeniach, czyli (z równ. (33-12))

$$W = U_{\theta=180^\circ} - U_{\theta=0^\circ} = (-\mu B \cos 180^\circ) - (-\mu B \cos 0^\circ) = 2\mu B,$$

ale ponieważ  $\mu = NiA$ , wobec tego

$$W = 2NiAB = 2Ni\pi a^2 B = 2 \cdot 100 \cdot 0,10 \text{ A} \cdot \pi \cdot (5 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 \cdot 1,5 \text{ T} = 0,24 \text{ J.}$$

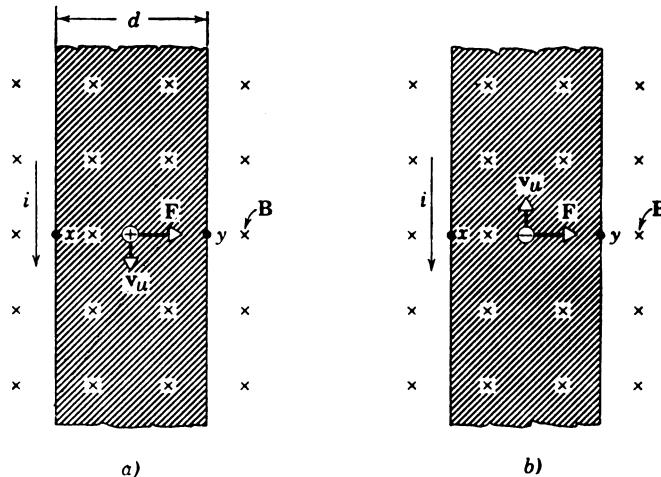
### 33-5. Efekt Halla

W roku 1879 na Uniwersytecie Harward E. H. Hall zaprezentował doświadczenie, które pozwala określić znak ładunku płynącego w przewodniku, patrz str. 134. Rysunek 33-10 przedstawia płaski pasek miedziany, w którym płynie prąd o natężeniu  $i$  w kierunku wskazanym strzałką. Jak zwykle strzałka wskazuje kierunek, w którym płynęłyby ładunki dodatnie, gdyby z takich składała się prąd. A więc strzałka wskazuje kierunek ruchu ładunków dodatnich (jak na rys. 33-10a) lub kierunek przeciwny do ruchu ładunków ujemnych (jak na rys. 33-10b). Efekt Halla pozwala odróżnić, z którą z tych możliwości mamy do czynienia.

Pasek umieszczamy w polu magnetycznym o indukcji  $\mathbf{B}$ , między biegunami elektromagnesu, tak aby linie natężenia pola były prostopadłe do płaszczyzny paska. Pole to działa na pasek z siłą  $\mathbf{F}$  (równą  $i\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ ) skierowaną w prawą stronę (na rysunku). Ponieważ siła działająca na pasek jest wynikiem sił (równych  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ), działających na ładunki przenoszące prąd; ładunki te, niezależnie od tego czy są dodatnie, czy ujemne, będą odchylane w prawą stronę rys. 33-10 powodując powstanie między punktami  $x$  i  $y$  poprzecznej różnicy potencjałów Halla  $V_{xy}$ . Znak płynących ładunków jest określony przez znak wytworzonej różnicy potencjałów. Jeżeli ładunki mają znak dodatni, w punkcie  $y$  potencjał

będzie wyższy niż w punkcie  $x$ , jeżeli ujemny — w  $y$  będzie potencjał niższy w  $x$ . Doświadczenie wykazuje, że w metalach nośniki prądu mają znak ujemny\*.

Aby ilościowo przeanalizować efekt Halla, skorzystamy z modelu swobodnych elektronów w metalu, tego samego, którego używaliśmy w paragrafie 31-4, aby wy tłumaczyć dlaczego prawo Ohma obejmuje metale. Założymy, że ładunki przenoszące prąd poruszają się w przewodniku z pewną stałą prędkością  $v_u$ . Magnetyczne siły odchylające, które powodują ruch ładunków w kierunku prawej krawędzi paska, dane są wzorem  $qv_u \times \mathbf{B}$  (patrz równ. (33-2)).



Rys. 33-10. W pasku miedzianym umieszczonym w polu magnetycznym o indukcji  $\mathbf{B}$  płynie prąd o natężeniu  $i$ , przy czym prąd jest przenoszony przez (a) ładunki dodatnie, (b) ujemne

Oczywiście ruch ten nie trwa nieograniczenie długo, ponieważ przesunięcie ładunków powoduje powstanie poprzecznego *pola elektrycznego Halla*  $\mathbf{E}_H$ , które przeciwstawia się dalszemu przesuwaniu ładunków w poprzek przewodnika. Pole to powstało wskutek wytworzonej różnicy potencjałów Halla i związane jest z nią zależnością

$$E_H = \frac{V_{xy}}{d}.$$

Ostatecznie osiągnięty zostaje stan równowagi, w którym magnetyczne siły odchylające, działające na ładunki, równoważone są przez przeciwnie skierowane siły elektryczne  $q\mathbf{E}_H$ , wywołane efektem Halla, czyli

$$q\mathbf{E}_H + q(\mathbf{v}_u \times \mathbf{B}) = 0,$$

inaczej

$$\mathbf{E}_H = -\mathbf{v}_u \times \mathbf{B}. \quad (33-13)$$

Z równania tego jasno widać, że jeżeli zmierzmy  $\mathbf{E}_H$  i  $\mathbf{B}$ , to będziemy mogli określić zarówno wartość bezwzględną, jak i kierunek  $\mathbf{v}_u$ . Znając kierunek prędkości możemy, jak widać na rys. 33-10, podać znak ładunków przenoszących prąd.

Wykorzystując efekt Halla możemy również znaleźć liczbę ładunków w jednostce objętości ( $n$ ). Jeżeli weźmiemy wartość bezwzględną równania (33-13) dla przypadku, gdy  $\mathbf{v}_u$  i  $\mathbf{B}$  są prostopadłe, otrzymamy  $E_H = v_u B$ . Łącząc ostatnią zależność z równaniem (31-5) ( $v_u = j/ne$ ) otrzymamy

$$E_H = \frac{j}{ne} B \quad \text{lub} \quad n = \frac{jB}{eE_H}. \quad (33-14)$$

\* W czasie przeprowadzania eksperymentów przez E. H. Halla i H. A. Rowlanda nie był jeszcze odkryty elektron (patrz paragraf 33-8). Analiza Halla opierała się na ciekłym modelu elektryczności, ale jej ogólne wnioski pozostają w mocy.

Zgodność równania (33-14) z doświadczeniem jest dosyć dobra dla metali jednowartościowych, jak wskazuje tablica 33-1.

Dla metali wielowartościowych, dla żelaza i innych materiałów magnetycznych oraz dla półprzewodników, np. germanu, podana interpretacja efektu Halla za pomocą modelu swobodnych elektronów jest niesłuszna. Dobrą zgodność z doświadczeniem dla wszystkich wypadków daje teoretyczna interpretacja efektu Halla oparta o nowoczesną fizykę kwantową.

Tablica 33-1. Liczba elektronów przewodnictwa na jednostkę objętości

Metal	Wyniki otrzymane przy pomocy efektu Halla, $10^{22}/\text{cm}^3$	Wyniki otrzymane bezpośrednio, przy założeniu: 1 elektron na 1 atom, $10^{22}/\text{cm}^3$
Li	3,7	4,8
Na	2,5	2,6
K	1,5	1,3
Cs	0,80	0,85
Cu	11	8,4
Ag	7,4	6,0
Au	8,7	5,9

**Przykład 5.** Pasek miedziany o szerokości 2,0 cm i grubości 1,0 mm umieszczony jest w polu magnetycznym o indukcji  $B = 1,5 \text{ T}$ , jak na rys. 33-10. Jaka różnica potencjałów Halla powstanie w poprzek paska, jeżeli natężenie płynącego prądu wynosi 200 A?

Z równania (33-14) mamy

$$E_H = \frac{jB}{ne},$$

ale

$$E_H = \frac{V_{xy}}{d}, \quad j = \frac{i}{A} = \frac{i}{dh},$$

gdzie  $h$  jest grubością paska. Łącząc te równania otrzymujemy

$$V_{xy} = \frac{iB}{neh} = \frac{200 \text{ A} \cdot 1,5 \text{ T}}{(8,4 \cdot 10^{28}/\text{m}^3) \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ V} = 22 \mu\text{V}.$$

Otrzymana różnica potencjałów, mimo że mierzalna, nie jest duża. Obliczenie  $n$ , patrz str. 136.

### 33-6. Ładunki krążące po orbitach

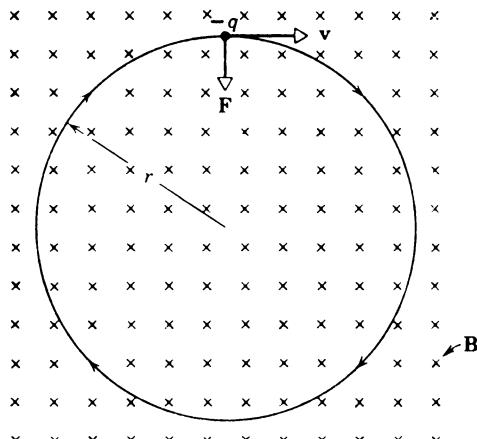
Rysunek 33-11 przedstawia ujemnie naładowaną cząstkę o prędkości  $v$ , wprowadzoną do jednorodnego pola magnetycznego o indukcji  $B$ . Zakładamy, że  $v$  jest prostopadłe do  $B$ , czyli leży dokładnie w płaszczyźnie rysunku. Z zależności  $\mathbf{F} = qv \times \mathbf{B}$  (równ. (33-2)) wynika, że na cząstkę działa siła odchylająca o wartości bezwzględnej  $qvB$ . Siła ta leży w płaszczyźnie rysunku, wobec czego cząstka nie może opuścić tej płaszczyzny.

Przypomina nam to kamień przytrzymywany linką i obracający się w płaszczyźnie poziomej po okręgu koła. Tutaj również na kamień działa siła o stałej wartości bezwzględnej — napięcie linki, leżąca stale w jednej płaszczyźnie i prostopadła do prędkości. Naładowana cząstka, podobnie jak kamień, porusza się ze stałą prędkością po torze kołowym.

Z drugiego prawa Newtona mamy

$$qvB = \frac{mv^2}{r}, \quad \text{czyli} \quad r = \frac{mv}{qB}, \quad (33-15)$$

gdzie  $r$  jest promieniem toru. Na rysunku 33-4 pokazany jest spiralny tor (trzy spirale) elektronu o niskiej energii w komorze pęcherzykowej. Tutaj tor nie jest kołem, ponieważ elektron w czasie ruchu traci energię wskutek zderzeń.



Rys. 33-11. Ładunek  $-q$  krąży po torze kołowym leżącym w płaszczyźnie prostopadłej do jednorodnego pola magnetycznego

Prędkość kątowa  $\omega$  równa jest  $v/r$ , czyli z równania (33-15)

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}.$$

Częstość  $\nu$  dana jest wzorem

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}. \quad (33-16)$$

Zauważmy, że  $\nu$  nie zależy od prędkości cząstki. Szybkie cząstki poruszają się po dużych kołach (równ. (33-15)), wolne po małych, ale każda z nich potrzebuje tego samego czasu  $T$  (okres), aby wykonać jeden obrót w polu.

Częstość  $\nu$  jest częstością charakterystyczną dla naładowanej cząstki w polu magnetycznym i można ją porównać z częstością charakterystyczną wahadła w ziemskim polu grawitacyjnym oraz z częstością charakterystyczną układu drgającego masa-sprężynka. Częstość ta jest czasami nazywana częstotliwością cyklotronową cząstki w polu, ponieważ z taką częstością krąży cząstka w cyklotronie.

**Przykład 6.** Elektron o energii 10 eV krąży w płaszczyźnie prostopadłej do jednorodnego pola magnetycznego o indukcji  $1,0 \cdot 10^{-4}$  T ( $= 1,0$  Gs).

(a) Jaki jest promień orbity elektronu?

Prędkość elektronu o energii kinetycznej  $K$  można znaleźć ze związku

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}}.$$

Czytelnik powinien sprawdzić, że otrzymujemy stąd na  $v$  wartość  $1,9 \cdot 10^6$  m/s. Wobec tego z równania (33-15) mamy

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1,9 \cdot 10^6 \text{ m/s}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1,0 \cdot 10^4 \text{ T}} = 0,11 \text{ m} = 11 \text{ cm.}$$

(b) Jaka jest częstotliwość cyklotronowa? Z równania (33-16) mamy

$$\nu = \frac{qB}{2\pi m} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ T}}{2\pi \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} = 2,8 \cdot 10^6 \text{ Hz.}$$

(c) Jaki jest okres obrotu  $T$ ?

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{2,8 \cdot 10^6 \text{ Hz}} = 3,6 \cdot 10^{-7} \text{ s.}$$

Widać stąd, że elektron potrzebuje czasu 0,36 μs, aby wykonać jeden obrót w polu o indukcji  $1,0 \cdot 10^{-4}$  T.

(d) Jaki jest kierunek ruchu widziany przez obserwatora, który patrzy wzdłuż linii pola?

Na rysunku 33-11 siła magnetyczna  $qv \times B$  musi mieć kierunek promienia i zwrot do wnętrza koła, gdyż jest ona siłą dośrodkową. Ponieważ wektor  $B$  jest skierowany za płaszczyznę rysunku, prędkość  $v$  w położeniu przedstawionym na rysunku powinna być skierowana w lewą stronę, gdyby ładunek  $q$  był dodatni. Jednakże, ponieważ nasz ładunek jest elektronem,  $q = -e$ , wobec tego  $v$  jest skierowane w prawą stronę. Ostatecznie więc, ładunek oglądany przez obserwatora patrzącego wzdłuż linii pola  $B$  porusza się zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara.

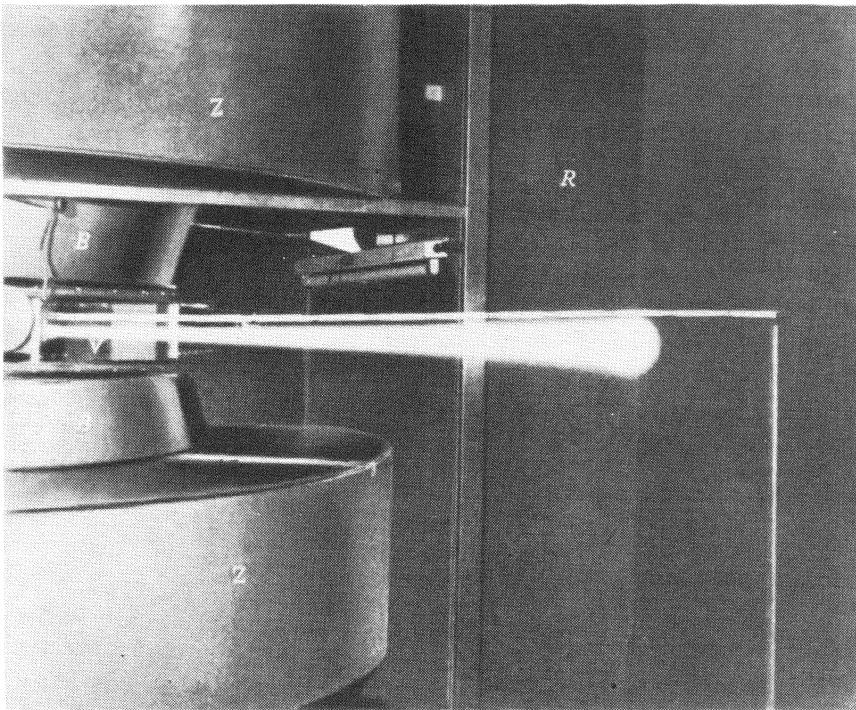
### 33-7. Cyklotrony i synchrocyklotrony

Cyklotron, uruchomiony po raz pierwszy na Uniwersytecie Kalifornijskim w Berkeley przez Ernesta Lawrance'a (1902–1958) w roku 1932, jest przyrządem służącym do przyspieszania naładowanych cząstek, takich jak jądra wodoru (protony) i deuterony, czyli jądra ciężkiego wodoru do wysokich energii, takich aby cząstki te można było używać w doświadczeniach nad rozbijaniem atomów. Na rysunku 33-12 przedstawiony jest cyklotron pracujący dawniej na uniwersytecie w Pittsburghu. Chociaż konwencjonalne cyklotrony tego typu nie są już używane, przedyskutujemy je z dwóch powodów: (a) dostarczają one doskonałych ram do dyskusji oddziaływanego pól elektrycznego i magnetycznego na cząstki naładowane; (b) od nich wywodzi się kilka generacji usprawnionych akceleratorów — chociażby synchrotron protonowy. Ten ostatni dostarcza nawet więcej możliwości badania oddziaływanego pól elektrycznych i magnetycznych z cząstками naładowanymi. Oczywiście nie jest to jego główne zadanie.

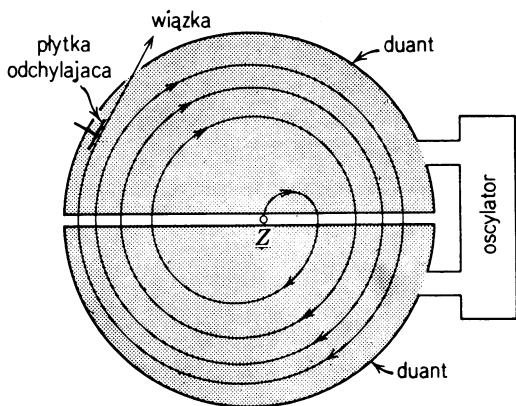
W środku cyklotronu znajduje się źródło jonów, w którym cząsteczki deuteru (ciężkiego wodoru) bombardowane są elektronami o dosyć wysokiej energii (np. 100 eV), dzięki czemu podczas zderzeń wytwarza się duża liczba dodatnich jonów. Wiele z tych jonów są to po prostu swobodne deuterony, które przedostają się przez mały otwór w ścianie źródła jonów do właściwego cyklotronu i tam mogą być przyspieszane.

W cyklotronie do przyspieszania stosuje się różnicę potencjałów średniej wielkości (np.  $10^5$  V), ale jony przebywają tę różnicę wielokrotnie. Aby osiągnąć energię 10 MeV, przy różnicy potencjałów przyspieszających  $10^5$  V, jony muszą przebyć tę różnicę 100 razy. Do zakrywiania toru jonów, tak aby mogły one wielokrotnie przebyć tę samą drogę, stosuje się pole magnetyczne.

Rysunek 33-13 przedstawia widzianą z góry część cyklotronu, która znajduje się wewnątrz opróżnionego z powietrza zbiornika, oznaczonego na rys. 33-12 literą  $V$ . Dwa pierścienie w kształcie litery  $D$  (nazywane duantami), z blachy miedzianej, tworzą część



Rys. 33-12. Poprzedni cyklotron uniwersytetu w Pittsburghu. Na zdjęciu widzimy komorę próżniową  $V$ , ramę magnesu  $R$ , biegony magnesu  $B$ , uzwojenia magnesu  $Z$  oraz strumień deuteronów wychodzący w powietrze przez „okno” z folii aluminiowej. Strumień ma około 2 m długości. (Dzięki uprzejmości A. J. Allena)



Rys. 33-13. Część cyklotronu przedstawiająca źródło  $Z$  jonów i duanty. Płytką odchylającą o odpowiednim ujemnym potencjale skierowuje wiązkę na zewnątrz

elektrycznego oscylatora. W przerwie pomiędzy pierścieniami panuje określona różnica potencjałów przyspieszająca cząstki. Znak tej różnicy potencjałów zmienia się milion razy na sekundę.

Pierścienie umieszcza się w polu magnetycznym ( $B \approx 1,6$  T) skierowanym za płaszczyznę rys. 33-13. Pole wytworzone jest przez ogromny elektromagnes, którego część oznaczono na rys. 33-12 literą  $R$ . Ponadto przestrzeń, w której poruszają się jony, opróż-

niona jest z powietrza do ciśnienia  $10^{-6}$  mmHg. Gdyby tego nie zrobiono, jony zderzałyby się ciągle z cząsteczkami powietrza.

Przypuśćmy, że deuteron wybiegający ze źródła jonów napotyka na pierścień o potencjale ujemnym; zostanie on przyspieszony w kierunku tego pierścienia i wejdzie do niego. Wewnątrz pierścienia jon (deuteron) jest ekranowany od sił elektrycznych przez jego metalowe ścianki. Pole magnetyczne natomiast swobodnie przechodzi przez te ścianki, wobec czego tor jonu zostaje zakrzywiony, staje się kołem o promieniu zależnym od prędkości i jest dany równaniem (33-15)  $r = mv/qB$ . Po czasie  $t_0$  jon wylatuje z pierścienia w kierunku przeciwnym niż początkowo ze źródła jonów. Założymy, że w tym momencie potencjał zmienia znak. Wobec tego jon ma teraz przed sobą drugi pierścień o potencjale ujemnym, w dalszym ciągu jest przyspieszany i znowu opisuje półokrąg, ale już w drugim pierścieniu o nieco większym promieniu (patrz rów. (33-15)). Jednakże czas przejścia przez drugi pierścień znowu jest równy  $t_0$ , ponieważ okres obrotu jona krążącego w polu magnetycznym nie zależy od jego prędkości; patrz rów. (33-16). Ten proces powtarza się aż do chwili, gdy jon zbliży się do zewnętrznej krawędzi jednego z pierścieni, gdyż wówczas jest on wyrzucony z układu przez ujemnie naładowaną płytke odchylającą.

Aby cyklotron działał, częstotliwość charakterystyczna  $\nu$ , z którą jon krąży w polu, musi być równa ustalonej części  $\nu_0$  oscylatora elektrycznego, czyli  $\nu = \nu_0$ . Jest to warunek rezonansowy. Z warunku tego wynika, że jeżeli energia krążącego jona ma wzrastać, trzeba mu dostarczać energię z częstotliwością  $\nu_0$  równą jego częstotliwości własnej, z jaką krąży w polu. W ten sposób dostarczamy energię huśtawce, popychając ją z częstotliwością równą częstotliwości własnej wahań huśtawki.

Korzystając z równania (33-16) ( $\nu = qB/2\pi m$ ) możemy warunek rezonansowy przepisać w postaci

$$\frac{qB}{2\pi m} = \nu_0. \quad (33-17)$$

Jeżeli wybraliśmy rodzaj cząstek, które mają być przyspieszane, stosunek  $q/m$  jest wielkością ustaloną. Zwykle oscylatory pracują tylko przy określonej częstotliwości  $\nu_0$ . Zmieniając  $B$  dotąd, aż równanie (33-17) będzie spełnione, „dostrajamy” cyklotron tak, abytrzymać na wyjściu wiązkę cząstek przyspieszonych.

*Energia cząstek wytwarzanych w cyklotronie zależy od promienia  $R$  pierścienia. Z równania (33-15) ( $r = mv/qB$ ) otrzymujemy na prędkość cząstki krążącej po okręgu o danym promieniu wyrażenie*

$$v = \frac{qBR}{m}.$$

Energia kinetyczna jest więc równa

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2B^2R^2}{2m}. \quad (33-18)$$

**Przykład 7.** Częstotliwość drgań elektrycznego oscylatora w cyklotronie uniwersytetu w Pittsburghu wynosiła  $12 \cdot 10^6$  Hz, promień pierścienia równy jest 53 cm.

(a) Jaka musi być wartość indukcji  $B$ , aby można było przyspieszyć deuterony? Z równania (33-17),  $\nu_0 = qB/2\pi m$ , mamy

$$B = \frac{2\pi\nu_0 m}{q} = \frac{2\pi \cdot (12 \cdot 10^6 \text{ Hz}) \cdot 3,3 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 1,6 \text{ T}.$$

Zauważmy, że deuteron ma taki sam ładunek jak proton, a masę (z dobrym przybliżeniem) dwukrotnie większą. (b) Jaką energię będą miały deuterony? Z równania (33-18) mamy

$$K = \frac{q^2 B^2 R^2}{2m} = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2 (1,6 \text{ T})^2 (0,53 \text{ m})^2}{2 \cdot 3,3 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = 2,8 \cdot 10^{-12} \text{ J} \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 17 \text{ MeV}.$$

Istnieją dwa powody, dla których opisany przez nas klasyczny cyklotron zawodzi przy wysokich energiach. Jeden z nich wiąże się z fizyką, drugi z kosztami. Omówimy oba.

(a) Przy wysokich energiach działanie cyklotronu zawodzi, ponieważ w jednym z założień przyjęliśmy, że częstość obrotów jona krążącego w polu magnetycznym nie zależy od jego prędkości, co jest słuszne jedynie dla prędkości dużo mniejszych od prędkości światła. Gdy prędkość cząstek wzrasta, w równaniu (33-16) musimy brać pod uwagę masę relatywistyczną  $m$ . Ponieważ masa relatywistyczna rośnie wraz z prędkością (równanie (8-20)), więc przy dostatecznie dużych prędkościach częstość  $v$  maleje ze wzrostem prędkości. Wskutek tego jony krążące w oscylatorze elektrycznym zbaczają z torów i w końcu energia ich przestaje wzrastać.

(b) Drugą trudnością związaną z przyspieszaniem cząstek naładowanych do wysokich energii jest to, że wymiary magnesu potrzebnego do prowadzenia takich cząstek po orbitach kołowych muszą być bardzo duże. Dla protonów o energii — na przykład —  $30 \cdot 10^9 \text{ eV}$ , w polu o indukcji 1,5 T promień krzywizny wynosi 65 m. Magnes dla takiego cyklotronu (o średnicy około 17 m) byłby niezwykle kosztowny. Nawiąsem mówiąc, protony o energii  $30 \cdot 10^9 \text{ eV}$  mają prędkość równą 0,99998 prędkości światła.

Oba te ograniczenia, relatywistyczne i ekonomiczne można zlikwidować w sposób, który okaże się zrozumiały, jeżeli rozpatrzmy równanie (33-17)  $2\pi\nu_0 m = qB$  podstawiając tam na miejsce  $m$  masę relatywistyczną, daną równaniem (8-20), czyli  $m = m_0 / \sqrt{1 - (v/c)^2}$ , gdzie  $v$  jest prędkością cząstki,  $c$  — prędkością światła.

Gdy prędkość cząstki rośnie, masa relatywistyczna również rośnie. Aby równość (33-17) pozostała słuszna i spełniony był warunek rezonansowy, częstość oscylatora  $\nu_0$ , w miarę jak cząstka (niech będzie to np. proton) jest przyspieszana, można zmniejszyć w taki sposób, aby iloczyn  $\nu_0 m$  pozostawał stały. Akceleratory, w których stosuje się ten sposób, nazywamy *synchrocyclotronami*.

Aby zlikwidować ograniczenie spowodowane kosztami magnesu, można zmienić zarówno  $B$ , jak i  $\nu_0$  w sposób cykliczny, tak aby nie tylko przez cały czas spełnione było równanie (33-17), ale również, aby promień orbity pozostawał nie zmieniony podczas procesu przyspieszenia. Pozwala to na użycie magnesu pierścieniowego (w kształcie obrączki) zamiast magnesów zwykle stosowanych w cyklotronach, co znacznie zmniejsza koszty. Mając do dyspozycji dwie zmienne wielkości  $B$  i  $\nu_0$ , możemy w czasie trwania procesu zachować dwie równości, jedną — równanie (33-17) i drugą, daną zależnością

$$v = \omega_0 R_0 = 2\pi\nu_0 T_0,$$

gdzie  $R_0$  jest ustalonym promieniem orbity. Akceleratory, w których stosowana jest tego rodzaju technika, nazywane są *synchrotronami*. Tablica 33-2 podaje pewne parametry charakteryzujące synchrotron zbudowany w Brookhaven National Laboratory w Brookhaven.

Tablica 33-2. *Synchrotron protonowy w Brookhaven*

maksymalna energia protonów	33 GeV
średni promień orbity	128 m
maksymalne pole orbity	1,3 T
energia początkowa	50 MeV
zakres częstości dla jednego obiegu	2,4 Hz
przekrój poprzeczny wiązki	18 cm × 8 cm
całkowita masa magnesów	4000 ton

Zwracamy uwagę, że nawet energie protonów *wstrzykiwanych* (50 MeV) do tego akceleratora daleko przewyższają możliwości cyklotronu konwencjonalnego\*.

W czasie pisania tego podręcznika (1977) największy synchrotron protonowy (z energią 500 GeV mający wzrosnąć do docelowej 1000 GeV) znajdował się w Batavii k. Chicago w stanie Illinois\*\*.

\* Patrz np.: Harald Enge, *Introduction to Nuclear Physics*, John Wiley and Sons, 1966.

\*\* Patrz: R. R. Wilson, The Batavia Accelerator, *Scientific American*, February 1974.

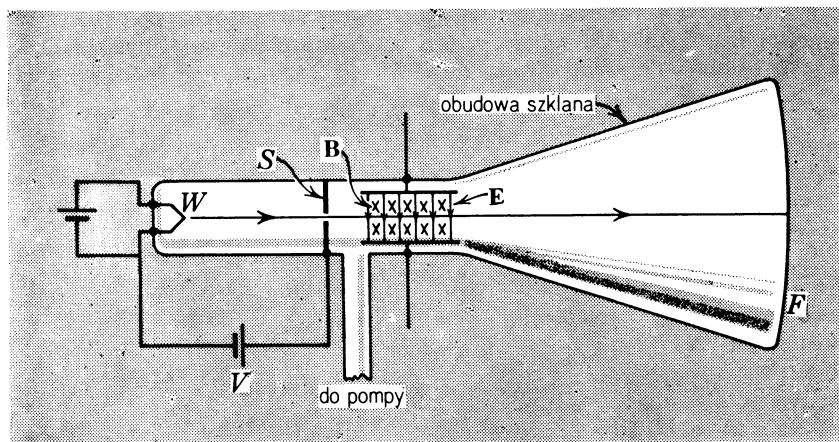
System wstrzymujący protony do pierścienia przyspieszającego tego akceleratora jest sam w sobie imponujący. Protony są początkowo przyspieszane do 750 keV przez układ transformator-prostownik. Następnie przechodzą przez mający 145 m długości akcelerator liniowy i opuszczają go z energią 200 MeV, która jest energią wejściową do pośredniej wielkości synchrotronu dającego energię 80 GeV. Dopiero z tą energią wstrzykiwane są do głównego przyspieszającego pierścienia.

We wszystkich tych procesach pola elektryczne i magnetyczne nie tylko przyspieszają protony, lecz również kierują je w pożądanych kierunkach potrzebnych do przeprowadzanych eksperymentów, a przed wszystkim ogniskują dobrze zdefiniowaną wiązkę protonową na drodze jej przebiegu wynoszącej około  $1,6 \cdot 10^6$  km. Choć nie to było głównym celem, nie zbudowano lepszego „laboratorium” dla zadeemonstrowania oddziaływanego pól elektrycznego i magnetycznego na cząstki naładowane. Dla ilustracji wielkości i zakresu tej inwestycji podajemy tylko jej roczny budżet za zużytą energię elektryczną, który wyniósł w 1976 r. kilka milionów dolarów.

### 33-8. Odkrycie elektronu

Zasadniczy eksperyment, przeprowadzony w 1897 r. przez J. J. Thomsona w Anglii w Cavendish Laboratory w Cambridge, dotyczył pomiaru stosunku ładunku  $e$  do masy elektronu  $m$ . Pomiar ten opierał się na pomiarze odchylenia naładowanych obiektów poruszających się w polach elektrycznym i magnetycznym. W ten sposób odkryto elektron jako cząstkę elementarną. Jest to inny przykład, który teraz przedyskutujemy, oddziaływanie pól elektrycznego i magnetycznego na cząstki naładowane.

Na rysunku 33-14 przedstawiona jest unowocześniona postać aparatury używanej przez Thomsona. Rozżarzone włókno  $W$  emitem elektrony, które są przyspieszane dzięki przyłożonej różnicy potencjałów  $V$ . Następnie wypadają one do obszaru, w którym poruszają się prostopadle do pola elektrycznego  $E$  i pola magnetycznego o indukcji  $B$ .



Rys. 33-14. Elektrony wylatujące z rozżarzonego włókna  $W$ , przyspieszane w polu o różnicę potencjałów  $V$ , przelatują przez otwór w ekranie  $S$ . Po przejściu przez obszar pola magnetycznego ( $B$ ) i elektrycznego ( $E$ ) trafiają na fluoryzujący ekran  $F$

Wektor  $E$  i  $B$  są również prostopadłe do siebie. Gdy strumień elektronów uderzy w ekran fluoryzujący  $F$ , na ekranie widzimy świeczącą plamkę. W całym obszarze, w którym poruszają się elektrony, panuje wysoka próżnia, dzięki czemu nie ma zderzeń z cząsteczkami powietrza.

Całkowita siła działająca na naładowaną cząstkę poruszającą się w polu elektrycznym i magnetycznym dana jest równaniem (33-4)

$$\mathbf{F} = q_0 \mathbf{E} + q_0 \mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Patrząc na rys. 33-14 widzimy, że pole elektryczne odchyla cząstki do góry, a magnetyczne do dołu. Jeżeli siły odchylające równoważą się (tzn. jeżeli  $\mathbf{F} = 0$ ), podane równanie upraszcza się przyjmując postać

$$eE = evB,$$

czyli

$$E = vB. \quad (33-19)$$

Wobec tego, dla elektronów o określonej prędkości  $v$  można uzyskać zerowe odchylenie dobierając odpowiednio  $E$  lub  $B$ .

Doświadczenie Thomsona polegało na (a) zanotowaniu położenia plamki nie odchyłonej przy  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$  jednocześnie równych zera; (b) zmierzeniu odchylenia plamki na ekranie fluoryzującym, gdy przyłożone było stałe pole elektryczne  $\mathbf{E}$ ; (c) przyłożeniu pola magnetycznego i dobraniu takiej jego wartości, żeby plamka z powrotem wróciła do położenia zerowego.

W paragrafie 27-5 widzieliśmy, że odchylenie  $y$  elektronu w samym polu elektrycznym (punkt b), mierzone przy krawędzi płytka odchylającej, dane jest równaniem (27-9) lub, po małych przekształceniach,

$$y = \frac{eEl^2}{2mv^2},$$

gdzie  $v$  jest prędkością elektronu,  $l$  — długością płytka odchylających; wartości  $y$  nie można zmierzyć bezpośrednio, ale można ją wyliczyć mierząc przesunięcie plamki na ekranie, jeżeli znana jest geometria przyrządu. Ostatecznie więc znamy  $y$ ,  $E$  i  $l$ , nie znamy  $e/m$  oraz  $v$ . Stosunku  $e/m$  nie można wyliczyć, dopóki nie znamy prędkości, której znalezienie jest celem punktu (c).

Jeżeli (punkt (c)) siła elektryczna jest równa co do wielkości, lecz przeciwnie skierowana niż siła magnetyczna, wypadkowa tych sił równa się zera i możemy napisać (równ. (33-19))

$$v = \frac{E}{B}.$$

Wstawiając to równanie do równania na  $y$  i rozwiązuje to ostatnie względem  $e/m$  otrzymujemy

$$\frac{e}{m} = \frac{2yE}{B^2 l^2}, \quad (33-20)$$

przy czym wszystkie wielkości z prawej strony można zmierzyć. Otrzymana przez Thomsona wartość stosunku  $e/m$  wynosiła  $1,7 \cdot 10^{11}$  C/kg, co całkowicie się zgadza z wartością z 1977 roku  $1,758805 \cdot 10^{11}$  C/kg.

### Pytania

1. W liście do wydawcy czasopisma *Sky and Telescope* (Sierpień 1976) Cicely M. Botley pisze: „Biegun [magnetyczny] w Kanadzie jest właściwie *biegunem inklinacji*, gdzie swobodnie zawieszona igła

magnetyczna ustawia się pionowo. *Biegun geomagnetyczny*, od którego mierzy się szerokości geomagnetyczne znajduje się w północno-zachodniej Grenlandii". Omówić oba zagadnienia.

2. Które z trzech wektorów występujących w równaniu  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  są zawsze parami prostopadłe? Które mogą być wzajemnie skierowane pod dowolnym kątem?

3. Dlaczego nie można po prostu zdefiniować wektora indukcji  $\mathbf{B}$  w ten sposób, że jest to wektor wskazujący kierunek sił magnetycznych, działających na poruszający się ładunek?

4. Wyobraźcie sobie, że siedzicie w pokoju plecami do jednej ze ścian i że strumień elektronów biegących poziomo w kierunku od ściany tylnej do przedniej odchyla się w prawo. Jaki jest kierunek indukcji pola magnetycznego istniejącego w pokoju?

5. Jeżeli elektron przechodzący przez jakiś obszar przestrzeni nie ulega odchyleniu, to czy możemy być pewni, że w tym obszarze nie ma pola magnetycznego?

6. Jeżeli poruszający się elektron ulega odchyleniu w bok przechodząc przez jakiś obszar przestrzeni, to czy możemy być pewni, że w obszarze tym istnieje pole magnetyczne?

7. Strumień protonów jest odchylony w bok. Czy odchylenie to może być spowodowane: (a) przez pole elektryczne i (b) przez pole magnetyczne? (c) Jeżeli oba te wypadki są możliwe, to w jaki sposób można ocenić, które pole występuje?

8. Przewodnik, nawet jeżeli płynie przez niego prąd, ma wypadkowy ładunek równy零. Dlaczego więc pole magnetyczne działa na ten przewodnik z pewną siłą?

9. W przykładzie 2 (patrz rys. 33-6) widzieliśmy, że siła magnetyczna była taka sama, gdy półkolisty łuk zastąpiono prostym drutem o długości  $2R$ . Czy byłaby w dalszym ciągu taka sama gdyby półkolisty łuk zastąpiono krzywą o nieregularnym kształcie? Podać przykład dla udowodnienia własnej odpowiedzi, negatywnej lub pozytywnej.

10. Czy równanie 33-6a ( $\mathbf{F} = i\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ ) stosuje się do prostego drutu o nieregularnym kształcie przekroju poprzecznego na całej długości?

11. W polu magnetycznym  $\mathbf{B}$  umieszczono pod kątem prostym do linii sił pola prosty drut miedziany. Wiemy, że pole  $\mathbf{B}$  działa siłą Lorentza (odchylającą) na wolne (przewodzące) elektrony. Czy oddziałyuje także na elektrony związane? One również nie znajdują się w stanie spoczynku. Omówić to.

12. W paragrafie 33-3 ustaliliśmy, że pole magnetyczne  $\mathbf{B}$  oddziałuje siłą Lorentza na przewodzące elektrony, np. w drucie miedzianym przenoszącym prąd o natężeniu  $i$ . Zrobiliśmy także ciche założenie, że ta sama siła działa na sam przewodnik. Czy w twierdzeniu tym czegoś nie brakuje?

13. Z równania (33-11) ( $\tau = \mu \times \mathbf{B}$ ) wynika, że jeżeli kąt pomiędzy osią zamkniętego obwodu z prądem, a kierunkiem zewnętrznego pola magnetycznego jest (a)  $0^\circ$  lub (b)  $180^\circ$ , na obwód nie działa żaden moment skręcający. Omówić rodzaj równowagi (trwała, obojętna, nietrwała) w obu tych położeniach.

14. W przykładzie 4 pokazaliśmy, że praca potrzebna do obrócenia obwodu, przez który płynie prąd, o  $180^\circ$ , w zewnętrznym polu magnetycznym wynosi  $2\mu B$ . Czy nie ma znaczenia, jakie było początkowe położenie obwodu?

15. Wyobraźcie sobie, że w pokoju, w którym siedzicie, istnieje jednorodne pole magnetyczne, przy czym  $\mathbf{B}$  skierowane jest pionowo w górę. Okrągły obwód z prądem umieszczony jest poziomo. Dla jakiego kierunku prądu w obwodzie, widzianego z góry, obwód będzie znajdował się w stanie równowagi trwałej względem sił i momentów obracających pochodzenia magnetycznego?

16. Prąd płynie przez obwód, mający kształt prostokąta, który umieszczony jest w dowolny sposób w zewnętrznym polu magnetycznym. Czy trzeba wykonać jakąś pracę, aby obrócić ten obwód dookoła osi prostopadłej do jego płaszczyzny?

17. Co należy zrobić chcąc zmodyfikować galwanometr (patrz przykład 3), tak aby stał się (a) amperometrem i (b) woltomierzem?

18. (a) Dlaczego przy pomiarze różnicy potencjałów Halla trzeba uważać, aby punkty  $x$  i  $y$  z rys. 33-10 leżały dokładnie naprzeciw siebie? (b) Jeżeli jeden z kontaktów jest ruchomy, co trzeba zrobić, aby upewnić się, że oba te punkty są właściwie wybrane?

19. Pewien sześcienny obszar przestrzeni wypełniony jest jednorodnym polem magnetycznym. Czy można w taki sposób „wstrzelić” elektron z zewnątrz do tego obszaru, aby tor jego wewnątrz stał się zamkniętym kołem?

20. Wyobraźcie sobie, że w pokoju, w którym siedzicie, istnieje jednorodne pole magnetyczne  $\mathbf{B}$ , skierowane pionowo w dół. Nagle, ze środka pokoju zostają wyrzucone poziomo dwa elektrony z tymi

samymi prędkościami, lecz w przeciwnych kierunkach. (a) Omówić ich ruch. (b) Jaki byłby ruch cząstek, gdyby jedna z nich była elektronem, a druga pozytonem, tj. dodatnio naładowanym elektronem?

21. Dlaczego ślady niskoenergetycznych elektronów na rys. 33-4 są spiralne? To znaczy, dlaczego promień krzywizny toru w stałym polu magnetycznym, w którym umieszczona jest komora, zmienia się?

22. Jakią są podstawowe zadania: (a) pola elektrycznego i (b) pola magnetycznego w cyklotronie?

23. Jaki fakt umożliwia pracę klasycznego cyklotronu? Pominąć rozważania relatywistyczne.

24. Czy przy wykonywaniu doświadczenia Thomsona w celu wyznaczenia  $e/m$  ważne jest, aby elektrony miały dokładnie stałą prędkość?

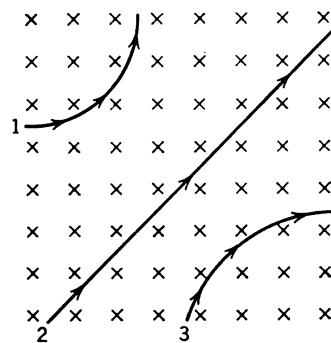
25. Układ przecinających się pól elektrycznego i magnetycznego pokazany w środkowej części na rys. 33-14 nazywa się czasem *filtrem prędkości*. Jak można wyjaśnić tę nazwę?

## Zadania

### Paragraf 33-2

1. Cząstki 1, 2 i 3 przechodząc przez pole magnetyczne poruszają się po drogach pokazanych na rys. 33-15. Co należy sądzić o każdej z tych cząstek?

*Odp.:* cząstka 1 jest dodatnia, cząstka 2 jest obojętna, cząstka 3 jest ujemna.



Rys. 33-15. Zadanie 1

2. Elektrony płynące w lampie telewizyjnej mają energię 12 keV. Lampa jest tak zorientowana, że elektrony poruszają się poziomo z południa na północ. Ziemskie pole magnetyczne skierowane jest do dołu i ma indukcję  $B = 5,5 \cdot 10^{-5}$  T. (a) W jakim kierunku będzie odchyły strumień? (b) Jakie jest przyspieszenie elektronów? (c) O ile odchyli się strumień po przebyciu 20 cm drogi w lampie?

3. Elektron ma prędkość  $v = 2,0 \cdot 10^6 i + 3,0 \cdot 10^6 j$  (w m/s). Wchodzi on w pole magnetyczne  $B = 0,03i - 0,15j$  (w T). (a) Znaleźć wartość i kierunek siły działającej na elektron. (b) Powtórzyć obliczenia dla deuteronu o takiej samej prędkości.

*Odp.:* (a)  $6,2 \cdot 10^{-14}k$ , N. (b)  $-6,2 \cdot 10^{-14}k$ , N.

4. Przez okienko na końcu rury akceleracyjnej wydostaje się wiązka elektronów o energii kinetycznej  $K$ . Prostopadle do kierunku wiązki, w odległości  $d$  od okienka ustawiona jest płytka metalowa. Pokazać, że elektrony nie dosiągną płytki, jeżeli przyłożymy pole magnetyczne  $B$  spełniające warunek

$$B \geq \left( \frac{2mK}{e^2 d^2} \right)^{1/2},$$

gdzie  $m$  i  $e$  — masa i ładunek elektronu. Jak powinno być zorientowane  $B$ ?

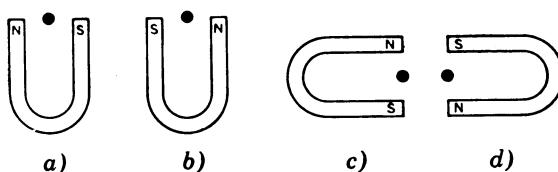
### Paragraf 33-3

5. Rysunek 33-16 pokazuje magnes i prosty drut, w którym prąd elektronów płynie prostopadle za stronę podręcznika. W którym przypadku na drut będzie działała siła skierowana do góry strony?

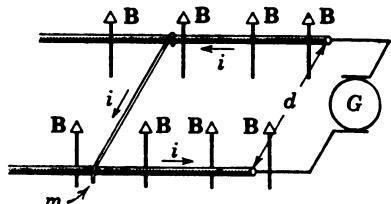
*Odp.:* (b).

6. Drut metalowy o masie  $m$  ślizga się bez tarcia po dwóch poziomych szynach odległych od siebie o  $d$  (rys. 33-17). Całość umieszczona jest w pionowym, jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $B$ . Stalny prąd i płynie od generatora  $G$  przez jedną szynę, następnie przez drut i wraca przez drugą szynę.

Znaleźć zależność prędkości (wielkość i kierunek), z jaką porusza się drut, od czasu, zakładając, że w chwili  $t = 0$  był on w spoczynku.



Rys. 33-16. Zadanie 5



Rys. 33-17. Zadanie 6

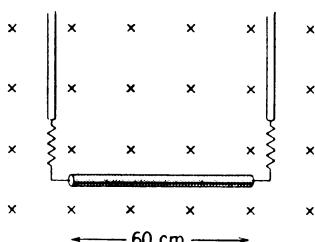
7. Drut o długości 1,0 m, w którym płynie prąd o natężeniu 10 A, tworzy kąt  $30^\circ$  z jednorodnym polem magnetycznym o indukcji  $B = 1,5$  T. Znaleźć wielkość i kierunek siły działającej na drut.

Odp.: 7,5 N, prostopadle do drutu i do B.

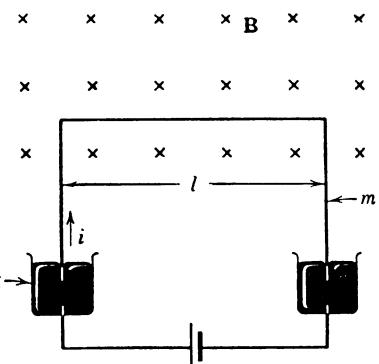
8. Drut o długości 50 cm leżący na osi x przenosi prąd o natężeniu 0,50 A w dodatnim kierunku osi x. Obecne jest pole magnetyczne o indukcji (podane w T)  $\mathbf{B} = 0,0030\mathbf{j} + 0,010\mathbf{k}$ . Znaleźć składowe siły działającej na drut.

9. Drut o długości 60 cm i masie 10 g jest zawieszony na dwóch sprężystych przewodach w polu magnetycznym o indukcji 0,40 T. Jaka powinna być wielkość i kierunek prądu, aby siły magnetyczne zrównoważyły napięcie przewodów? Patrz rys. 33-18.

Odp.: 0,41 A, od strony lewej do prawej.



Rys. 33-18. Zadanie 9



Rys. 33-19. Zadanie 12

10. Elektron znajdujący się w jednorodnym polu magnetycznym  $\mathbf{B}$  ma prędkość  $\mathbf{v} = 4,0 \cdot 10^5 \mathbf{i} + 7,1 \cdot 10^5 \mathbf{j}$  (w m/s). Działa nań siła  $\mathbf{F} = -2,7 \cdot 10^{-13} \mathbf{i} + 1,5 \cdot 10^{-13} \mathbf{j}$  (w N). Jeżeli  $B_x = 0$ , znaleźć pole magnetyczne.

11. Rozważyć następujący pomysł na nowy pociąg elektryczny. Silnik jest napędzany siłą pionowej składowej pola magnetycznego Ziemi działającą na oś napędową. Prąd płynie jedną szyną do koła napędowego przez oś, przez inne koło napędowe i z powrotem do źródła drugą szyną. (a) Jaki prąd jest potrzebny, aby zapewnić siłę 10 000 N? Przyjąć, że pionowa składowa  $\mathbf{B}$  wynosi  $10^{-5}$  T, a długość osi 3,0 m. (b) Jakie będą straty mocy w szynach na każdy om oporu? (c) Czy taki pociąg jest całkowicie nie realny czy też marginalnie nierealny?

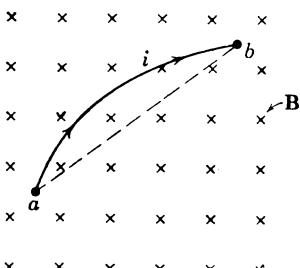
Odp.: (a)  $3,3 \cdot 10^9$  A. (b)  $1,0 \cdot 10^{17}$  W. (c) Całkowicie nierealny.

12. Drut w kształcie litery U, o masie  $m$  i długości  $l$  zanurzony jest oboma końcami w rzeçi (rys. 33-19). Drut ten znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\mathbf{B}$ . Jeżeli przez drut przepuścimy pewien ładunek, tzn. impuls prądu  $q = \int idt$ , drut wyskoczy w góre. Obliczyć na podstawie wysokości  $h$ , jaką osiągnie drut, wielkość ładunku (impulsu prądowego) zakładając, że czas trwania impulsu jest mały w porównaniu z czasem lotu drutu. Skorzystać z faktu, że impuls siły dany jest przez  $\int F dt$  i równa się  $mv$ .

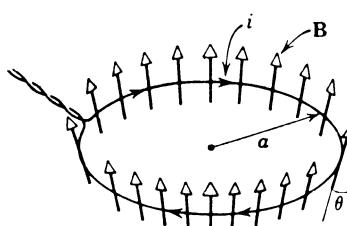
(Wskazówka: Spróbować powiązać  $\int idt$  oraz  $\int Fdt$ .) Wyliczyć  $q$  dla  $B = 0,10 \text{ T}$ ,  $m = 10 \text{ g}$ ,  $l = 20 \text{ cm}$  i  $h = 3 \text{ m}$ .

13. Rysunek 33-20 przedstawia drut o dowolnym kształcie przewodzącym prąd  $i$  między punktami  $a$  i  $b$ . Drut leży w płaszczyźnie prostopadłej do jednorodnego pola magnetycznego o indukcji  $\mathbf{B}$ . Udowodnić, że siła działająca na drut jest taka sama jak siła, która działałyby na drut prostoliniowy, przewodzący prąd  $i$  między tymi samymi punktami od  $a$  do  $b$ . (Wskazówka: Zastąpić drut szeregiem odcinków prostopadłych i równoległych do linii prostej łączącej  $a$  i  $b$ .)

14. Rysunek 33-21 przedstawia pierścień z drutu o promieniu  $a$  umieszczony prostopadle do głównego kierunku, osiowo symetrycznego, rozbieżnego pola magnetycznego. Indukcja magnetyczna w pierścieniu ma wszędzie tę samą wartość  $B$  i tworzy kąt  $\theta$  z normalną do płaszczyzny pierścienia. Skręcone przewody doprowadzające prąd nie mają żadnego znaczenia. Znaleźć wielkość i kierunek sił wywieranych przez pole na pierścień, jeżeli płynie w nim prąd  $i$  o kierunku wskazanym na rysunku.



Rys. 33-20. Zadanie 13



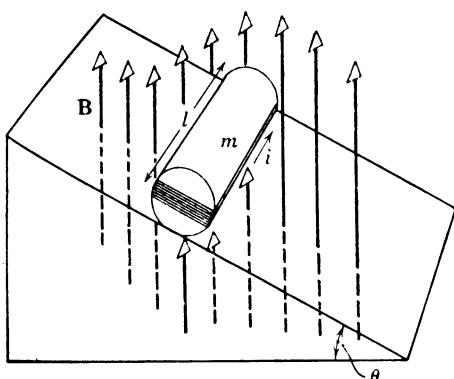
Rys. 33-21. Zadanie 14

#### Paragraf 33-4

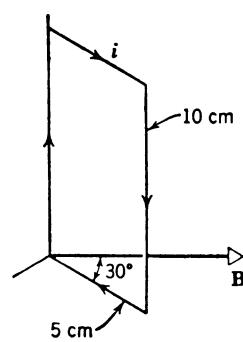
15. Okrągła cewka o  $N$  zwojach i promieniu  $R$  została zawieszona w jednorodnym polu magnetycznym  $\mathbf{B}$  skierowanym pionowo w dół. Cewka może obracać się wokół poziomej osi przechodzącej przez jej środek. Na sznurku u dołu cewki zawieszona jest masa  $m$ . Gdy przepuszczony zostanie przez cewkę prąd  $i$ , przyjmie ona pozycję równowagi, w której prostopadła do płaszczyzny cewki tworzy kąt  $\varphi$  z kierunkiem pola  $\mathbf{B}$ . Znaleźć  $\varphi$  i narysować szkic tej pozycji równowagi. Przyjąć  $B = 0,50 \text{ T}$ ,  $R = 10 \text{ cm}$ ,  $N = 10$ ,  $m = 500 \text{ g}$  oraz  $i = 1,0 \text{ A}$ .

Odp.:  $\varphi = 72^\circ$ .

16. Na rysunku 33-22 przedstawiony jest drewniany walec o masie  $m = 0,25 \text{ kg}$ , promieniu  $R$  i długości  $l = 0,1 \text{ m}$ . Na walcu nawinięte jest  $N = 10$  zwojów drutu w ten sposób, że oś walca leży w płaszczyźnie zwojów. Jaki najmniejszy prąd musi płynąć przez obwód, aby walec nie toczył się w dół, jeżeli umieścimy go na pochyłej płaszczyźnie tworzącej z poziomem kąt  $\theta$ , w skierowanym pionowo do góry polu magnetycznym o indukcji  $0,5 \text{ T}$ . Zakładamy, że płaszczyzna zwojów jest równoległa do płaszczyzny, na której umieszczałyśmy walec.



Rys. 33-22. Zadanie 16



Rys. 33-23. Zadanie 19

17. Pewien galwanometr ma opór  $75,3 \Omega$ . Jego wskazówka odchyla się o całą skalę, gdy przez cewkę płynie prąd  $1,62 \cdot 10^{-3} A$ . (a) Ustalić wartość dodatkowego oporu, który zmieniłby galwanometr w voltomierz, który wskazywałby 1,000 V przy odchyleniu o całą skalę. Jak należy go dołączyć? (b) Ustalić wartość dodatkowego oporu, który zmieniłby galwanometr w amperomierz, który wskazywałby 0,0500 A przy odchyleniu o całą skalę. Jak należy go dołączyć?

Odp.: (a)  $540 \Omega$ , dołączony szeregowo. (b)  $2,52 \Omega$ , dołączony równolegle.

18. Okrągły obwód z drutu o promieniu  $8,0 \text{ cm}$  przewodzi prąd o natężeniu  $0,20 \text{ A}$ . Wektor jednostkowy równoległy do momentu dipolowego  $\mu$  obwodu dany jest w  $\text{A} \cdot \text{m}^2$  przez  $0,60\hat{i} - 0,80\hat{j}$ . Obwód umieszczony zostaje w polu magnetycznym danym w T przez  $\mathbf{B} = 0,26\hat{i} - 0,30\hat{k}$ ; znaleźć (a) wartość i kierunek momentu sił działających na obwód i (b) magnetyczną energię potencjalną obwodu. Przyjąć takie samo jak w paragrafie 33-4 położenie, w którym energia jest zerowa.

19. Rysunek 33-23 przedstawia prostokątną cewkę złożoną z dwudziestu zwojów drutu o wymiarach  $10 \text{ cm} \times 5,0 \text{ cm}$ . W cewce płynie prąd o natężeniu  $0,10 \text{ A}$  i jedna z jej krawędzi jest zamocowana. Jaki moment siły (kierunek i wielkość) działa na cewkę, jeżeli jej płaszczyzna tworzy kąt  $30^\circ$  z kierunkiem jednorodnego pola magnetycznego o indukcji  $0,50 \text{ T}$ .

Odp.:  $4,3 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$ . Wektor momentu siły jest równoległy do dłuższego boku cewki i skierowany jest w dół.

20. Udowodnić, że zależność  $\tau = NAIBs \sin \theta$  jest słuszna dla obwodu zamkniętego o dowolnym kształcie, a nie tylko dla obwodów prostokątnych jak na rys. 33-8. (Wskazówka: Zastąpić obwód o dowolnym kształcie przez zbiór przylegających, długich i cienkich, w przybliżeniu prostokątnych obwodów, które, co się tyczy rozkładu prądów, są równoważne naszemu obwodowi.)

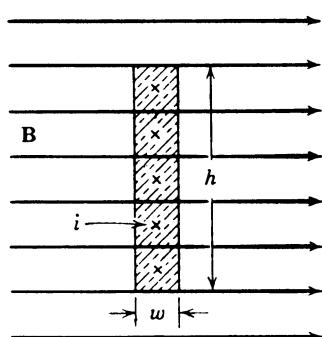
21. Drut o długości  $l$  przewodzi prąd o natężeniu  $i$ . Pokazać, że jeżeli ten drut zwiniemy spiralnie, maksymalny moment siły będzie działał na spiralę w danym polu magnetycznym wtedy, gdy będzie ona składała się tylko z jednego zwoju i wartość tego momentu wyniesie

$$\tau = \frac{1}{4\pi} l^2 i B.$$

### Paragraf 33-5

22. W doświadczeniu wywołującym efekt Halla prąd o natężeniu  $3,0 \text{ A}$  wzdłuż przewodnika o szerokości  $1,0 \text{ cm}$ , długości  $4,0 \text{ cm}$  i grubości  $10^{-3} \text{ cm}$  wytworzył poprzeczne napięcie Halla (przez szerokość)  $1,0 \cdot 10^{-5} \text{ V}$ , gdy pole magnetyczne  $1,5 \text{ T}$  przechodziło prostopadle przez cienki przewodnik. Z tych danych, znaleźć (a) prędkość przesuwania się nośników ładunku i (b) liczbę nośników na centymetr sześcienny. (c) Pokazać na wykresie bieguność napięcia Halla przy danym kierunku natężenia pola magnetycznego, przyjawszy, że nośniki ładunku są elektronami (ujemnymi).

23. Prąd  $i$ , o kierunku wskazanym przez krzyżyki na rys. 33-24 płynie przez pasek miedziany o wysokości  $h$  i szerokości  $w$ . Pasek jest umieszczony w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\mathbf{B}$ , prostopadlym do niego. (a) Obliczyć, z jaką prędkością elektrony poruszają się w poprzek paska. (b) Jaka jest wielkość i kierunek siły magnetycznej  $\mathbf{F}$  działającej na elektrony? (c) Jaka powinna być wielkość i kierunek jednorodnego pola elektrycznego  $\mathbf{E}$ , aby pole to zrównoważyło efekt pola magnetycznego? (d) Jakie napięcie  $V$  trzeba przyłożyć pomiędzy bokami paska, aby wytworzyć się takie pole  $\mathbf{E}$ ? Pomiędzy którymi bokami paska powinno być to napięcie? (e) Jeżeli nie ma żadnego zewnętrznego pola elektrycznego, elek-



Rys. 33-24. Zadanie 23

trony będą dotąd przesuwać się w stronę jednego z boków powodując powstanie jednorodnego pola elektrycznego Halla  $E_H$  w przewodniku, aż siły elektrostatyczne zrównoważą siły magnetyczne, o których mówiliśmy w punkcie (b). Jaka będzie wielkość i kierunek pola  $E_H$ ? Zakładamy, że ilość elektronów przewodzących prąd na jednostkę objętości wynosi  $n = 1,1 \cdot 10^{29}/\text{m}^3$ ,  $h = 0,02 \text{ m}$ ,  $w = 0,1 \text{ cm}$ ,  $i = 50 \text{ A}$  oraz  $B = 2,0 \text{ T}$ .

*Odp.:* (a)  $1,4 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$ . (b)  $4,5 \cdot 10^{-23} \text{ N}$ , w dół. (c)  $2,8 \cdot 10^{-4} \text{ V/m}$ , w dół. (d)  $5,7 \cdot 10^{-6} \text{ V}$ , górnny + dolny. (e) Podobnie jak (c).

24. (a) Pokazać, że stosunek pola elektrycznego Halla  $E_H$  do pola elektrycznego  $E$ , odpowiedzialnego za przepływ prądu, wynosi

$$\frac{E_H}{E} = \frac{B}{ne\varrho},$$

gdzie  $\varrho$  jest oporem właściwym materiału. (b) Jaki kąt tworzy  $E_H$  i  $E$ ? (c) Obliczyć wielkość powyższego stosunku dla warunków podanych w przykładzie 5.

#### Paragraf 33-6

25. Proton, deuteron i cząstka  $\alpha$  przyspieszane przez tę samą różnicę potencjałów wchodzą do obszaru jednorodnego pola magnetycznego  $B$ , poruszając się prostopadle do niego. (a) Porównać ich energie kinetyczne. (b) Jakie są promienie torów deuteronu i cząstki  $\alpha$ , jeżeli promień kołowego toru protonu równa się  $10 \text{ cm}$ ?

*Odp.:* (a)  $K_p = K_d = \frac{1}{2}K_\alpha$ . (b)  $R_d = R_\alpha = 14 \text{ cm}$ .

26. Proton, deuteron i cząstka  $\alpha$  mające tę samą energię kinetyczną, wchodzą do obszaru jednorodnego pola magnetycznego  $B$ , poruszając się prostopadle do niego. Porównać promienie ich orbit.

27. Elektron przyspieszamy w polu o różnicę potencjałów  $15\,000 \text{ V}$ , a następnie pozwalamy mu krążyć w płaszczyźnie prostopadłej do jednorodnego pola magnetycznego o indukcji  $B = 250 \text{ Gs}$  ( $10^4 \text{ Gs} = 1 \text{ T}$ ). Jaki jest promień orbity tego elektronu?

*Odp.:*  $1,7 \text{ cm}$ .

28. W pewnym doświadczeniu proton o energii  $1,0 \text{ MeV}$  krąży po torze kołowym w jednorodnym polu magnetycznym. Jaką energię powinny mieć (a) cząstka  $\alpha$  i (b) deuteron, aby poruszać się po takim samym kole?

29. (a) Jaki będzie promień toru, po którym w polu magnetycznym  $B = 0,50 \text{ T}$  będzie poruszał się elektron z prędkością równą  $0,1$  prędkości światła? (b) Jaka będzie energia kinetyczna tego elektronu?

*Odp.:* (a)  $0,34 \text{ mm}$ . (b)  $2,6 \text{ keV}$ .

30. (a) Jaką prędkość powinien mieć proton, aby okrążyć Ziemię na równiku, jeżeli wszędzie tam pole magnetyczne jest poziome o kierunku zgodnym z liniami południków? Przyjąć, że wielkość pola magnetycznego Ziemi na równiku wynosi  $0,41 \cdot 10^{-4} \text{ T}$ . (b) Narysować wektory prędkości i pola magnetycznego odpowiadające tej sytuacji.

31. Jakie pole magnetyczne (podać najmniejszą wielkość i kierunek wektora indukcji) trzeba przyłożyć na równiku, aby protony o prędkości  $1,0 \cdot 10^7 \text{ m/s}$  krążyły wokół Ziemi?

*Odp.:*  $1,6 \cdot 10^{-8} \text{ T}$ .

32. Cząstka  $\alpha$  porusza się po torze kołowym o promieniu  $0,45 \text{ m}$  w polu magnetycznym o indukcji  $B = 1,2 \text{ T}$ . Obliczyć: (a) prędkość cząstki, (b) okres jej obrotu, (c) energię kinetyczną oraz (d) różnicę potencjałów, jaką musiała przebyć cząstka, aby uzyskać taką energię.

33. Obojętna cząstka, rozpatrywana w takim układzie odniesienia, w którym jest w stanie spoczynku, znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o wielkości  $B$ . W czasie  $t = 0$  rozpada się na dwie naładowane cząstki, każda o masie  $m$ . (a) Jeżeli ładunek jednej cząstki wynosi  $+q$ , to jaki będzie ładunek cząstki drugiej? Cząstki poruszają się po odrębnych torach, leżących na płaszczyźnie prostopadłej do  $B$ . (b) W czasie późniejszym cząstki zderzają się. Wyrazić czas, jaki upłynął od rozpadu do zderzenia przy pomocy  $m$ ,  $B$  i  $q$ .

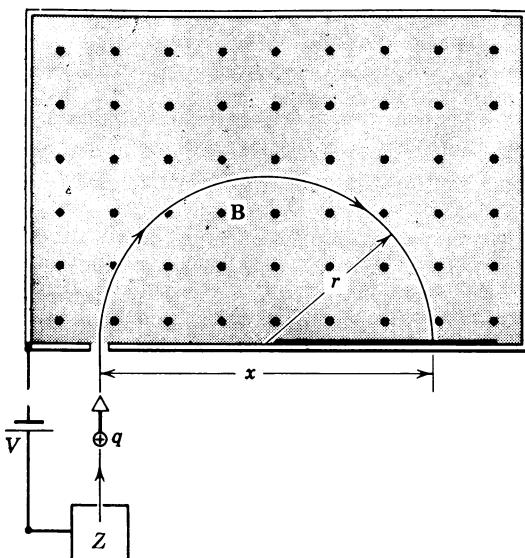
*Odp.:* (a)  $-q$ , (b)  $t = \pi m/qB$ .

34. Pojedynczo zjonizowane atomy chloru  $35 \text{ u}$  ( $\text{u} = \text{jednostka masy atomowej}$ ) i  $37 \text{ u}$  poruszające się z prędkością  $2,0 \times 10^5 \text{ m/s}$ , wchodzą prostopadle w jednorodne pole magnetyczne  $0,50 \text{ T}$ . Po odchyleniu o  $180^\circ$  atomy uderzają w kliszę fotograficzną. Jaki jest odstęp między powstałymi dwoma znaczkami na kliśzy? ( $1,00 \text{ u} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ).

35. Pokazać, że promień krzywizny toru cząstki naładowanej poruszającej się prostopadle do pola magnetycznego jest proporcjonalny do jej pędu.

36. *Spektrometr masowy.* Rysunek 33-25 przedstawia układ używany przez Dempstera do pomiaru masy jonów. Jony o masie  $M$  i ładunku  $+q$  wytwarzane są w źródle  $Z$  znajdującym się w komorze, w której następuje wyładowanie gazu. Znajdujące się początkowo w spoczynku jony są następnie przyspieszane w polu o różnicę potencjałów  $V$  i wchodzą do pola magnetycznego o indukcji  $B$ . W polu tym jony poruszają się po półokręgu i na końcu uderzają w kliszę fotograficzną, w odległości  $x$  od szczeliny wejściowej, gdzie zostają pochłonięte. Pokazać, że masa jonów jest dana równaniem

$$M = \frac{B^2 q}{8V} x^2.$$



Rys. 33-25. Zadanie 36

37. Dwa rodzaje pojedynczo zjonizowanych atomów o tym samym ładunku  $q$  i masach różniących się o małą wielkość  $\Delta M$  wprowadzono do spektrometru masowego opisanego w zadaniu 36. (a) Wyrazić różnicę między masami przy pomocy  $V$ ,  $q$ ,  $M$  (jednego lub drugiego rodzaju),  $B$  i odległości  $\Delta x$  między znakami na kliszy fotograficznej. (b) Obliczyć  $\Delta x$  dla wiązki pojedynczo zjonizowanych atomów chloru o masach 35 i 37 u, jeżeli  $V = 7,3 \cdot 10^3$  V i  $B = 0,50$  T ( $1,00$  u =  $1,67 \cdot 10^{-27}$  kg).

Odp.: (a)  $B(mg/2V)^{1/2}\Delta x$ . (b) 8,2 mm.

38. Pozyton o energii 2 keV wlatuje do jednorodnego pola o indukcji  $B = 0,10$  T z prędkością, której kierunek tworzy kąt  $89^\circ$  z  $\mathbf{B}$ . (a) Sprawdzić, że tor elektronu będzie spiralą o osi zgodnej z kierunkiem  $\mathbf{B}$ . Znaleźć: (b) okres (c) skok  $p$  oraz promień  $r$  spirali; patrz rys. 33-26.

39. *Czas przelotu w spektrometrze.* S. A. Goudsmit wynalazł metodę dokładnego pomiaru masy ciężkich jonów przy pomocy odpowiedniego dobierania okresu ich ruchu w znanym polu magnetycznym. Pojedynczo naładowany jon (jodu) wykonuje 7 obrotów w polu o indukcji  $4,5 \cdot 10^{-2}$  T w czasie około  $1,29 \cdot 10^{-3}$  s. Jaka (w przybliżeniu) jest jego masa w kilogramach? Obecne pomiary masy są dużo dokładniejsze od pomiarów uzyskiwanych tą metodą.

Odp.:  $2,11 \cdot 10^{-25}$  kg lub ok. 127 mas protonu.

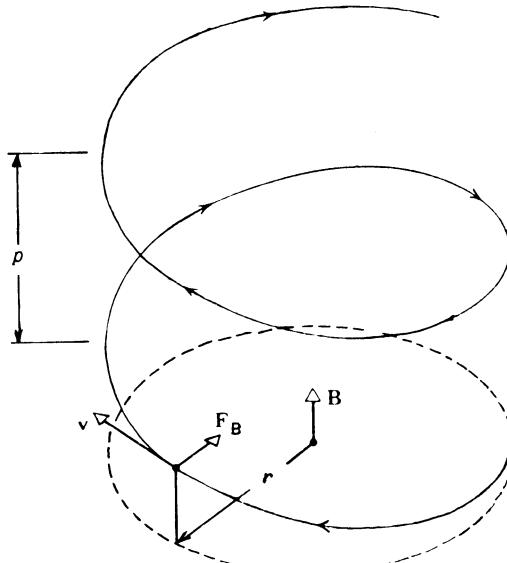
40. *Efekt Zeemana.* W teorii atomu wodoru Bohra przyjmuje się, że elektron krąży wokół protonu po orbicie kołowej o promieniu  $r$ . Wyobraźmy sobie, że atom taki został umieszczony w polu magnetycznym w ten sposób, że płaszczyzna toru jest prostopadła do wektora indukcji  $\mathbf{B}$ . (a) Czy częstotliwość kołowa elektronu wzrasta, czy maleje, jeżeli obraca się on zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara w stosunku do obserwatora patrzącego wzdłuż  $\mathbf{B}$ ? (b) Co byłoby, gdyby elektron obracał się przeciwnie do kie-

runku ruchu wskazówek zegara? Zakładamy, że promień orbity nie ulega zmianie. (Wskazówka: Siła dośrodkowa jest teraz częściowo elektrycznego ( $F_E$ ) i częściowo magnetycznego ( $F_M$ ) pochodzenia.)

41. Pokazać, że w zadaniu 40 zmiana częstości obrotów spowodowana przez pole magnetyczne dana jest w przybliżeniu wzorem

$$\Delta\nu = \pm \frac{Be}{4\pi m}.$$

Taka zmiana częstości została zaobserwowana przez Zeemana w roku 1896. (Wskazówka: Obliczyć częstość obrotów bez pola magnetycznego i z polem. Odjąć od siebie obie częstości biorąc pod uwagę, że ponieważ wpływ pola magnetycznego jest bardzo mały, więc niektóre wyrazy zawierające  $B$  można pominąć, nie popełniając większego błędu.)



Rys. 33-26. Zadanie 38

42. (a) Jaka jest częstość cyklotronowa elektronu o energii 100 eV w polu magnetycznym Ziemi wynoszącym  $1,0 \cdot 10^{-4}$  T? (b) Jaki jest promień krzywizny drogi, którą zakreśla elektron, jeżeli jego prędkość jest prostopadła do pola magnetycznego?

43. Elektron o energii 10 KeV krąży na płaszczyźnie pod kątem prostym do jednorodnego pola magnetycznego. Promień orbity wynosi 25 cm. Znaleźć: (a) pole magnetyczne, (b) częstość cyklotronową i (c) okres ruchu.

Odp.: (a)  $1,4 \cdot 10^{-3}$  T. (b)  $3,8 \cdot 10^7$  Hz. (c)  $2,6 \cdot 10^{-8}$  s.

#### Paragraf 33-7

44. Cyklotron przedstawiony na rysunku 33-12 był przystosowany do przyspieszania deuteronów. (a) Jaką energię uzyskają protony przyspieszane w tym cyklotronie, jeżeli będziemy stosować tę samą częstość drgań co dla deuteronów? (b) Jakie pole magnetyczne trzeba przyłożyć w tym wypadku? (c) Jaką energię miałyby protony, gdyby pole magnetyczne miało tę samą wartość co dla deuteronów? (d) Jaka byłaby wówczas częstość drgań oscylatora elektrycznego? (e) Odpowiedzieć na te same pytania dla cząstki  $\alpha$ .

45. Deuterон porusza się w ogromnym cyklotronie, w polu magnetycznym o indukcji  $B = 1,5$  T po orbicie o promieniu 2,0 m. Po lekkim zderzeniu z tarczą, deuteron rozpada się, nie tracąc prawie energii kinetycznej, na proton i neutron. Opisać ruch obu powstałych cząstek. Zakładamy, że energia deuteronu po rozpadzie dzieli się równo pomiędzy proton i neutron.

Odp.: Neutron porusza się po stycznej do początkowej drogi. Proton porusza się po orbicie kołowej o promieniu 1,0 m.

46. W pewnym cyklotronie proton porusza się po kole o promieniu  $r = 0,50$  m. Wielkość pola **B** wynosi 1,2 T. (a) Jaka jest częstotliwość cyklotronowa? (b) Jaka jest energia kinetyczna protonu?

47. Znaleźć całkowitą długość drogi przebytej przez deuteron w cyklotronie przedstawionym na rysunku 33-12 podczas procesu przyspieszania. Zakładamy, że potencjał przyspieszający między pierścieniami wynosi 80 000 V.

Odp.: około 240 m.

#### Paragraf 33-8

48. Na poruszający się elektron działa pole elektryczne o natężeniu 1500 V/m oraz pole magnetyczne o indukcji 0,40 T, tak że siła wypadkowa równa się零. (a) Obliczyć minimalną prędkość  $v$  w elektronu. (b) Narysować wektory **E**, **B** i  $v$ .

49. Elektron przyspieszony przez różnicę potencjałów 1000 V został skierowany w obszar między dwoma równoległymi okładkami oddalonymi o 0,02 m z różnicą potencjałów między nimi wynoszącą 100 V. Jeżeli elektron wchodzi w ten obszar poruszając się prostopadle do pola elektrycznego między okładkami, to jakie pole magnetyczne prostopadłe zarówno do drogi elektronu jak i do pola elektrycznego jest konieczne, aby elektron poruszał się po linii prostej?

Odp.:  $2,7 \cdot 10^{-4}$  T.

50. Elektron o energii 10 keV poruszający się poziomo wchodzi do obszaru, w którym istnieje skierowane do dołu pole elektryczne 100 V/cm. (a) Jaki powinien być kierunek i (najmniejsza) wielkość indukcji magnetycznej pola, które trzeba przyłożyć, aby elektron mógł dalej poruszać się poziomo? Zaniedbujemy siły grawitacyjne, które są tutaj małe. (b) Czy możliwe jest, aby przez tak samo dobrane pola przebiegły proton również nie ulegając odchyleniu? Jeżeli tak, to przy jakich warunkach?

51. Dodatni ładunek punktowy  $Q$  porusza się po linii prostej ze stałą prędkością przez próżnię, w której istnieje jednorodne pole elektryczne **E** i jednorodne pole magnetyczne **B**. (a) Określić najmniejszą wartość wielkości pola **B** i odpowiadający jej kierunek pola **B**, jeżeli **E** skierowane jest pionowo w góre i ładunek porusza się poziomo z północy na południe z prędkością  $v$ . (b) Wyjaśnić, dlaczego nie obliczy się jednoznacznie pola **B**, gdy dane są jedynie **E** i  $v$ . (c) Założmy, że ładunek jest protonem, który wchodzi w próżnię po przyspieszeniu go przez różnicę potencjałów  $3,10 \times 10^5$  V. Obliczyć wartość **B** w pytaniu (a) jeżeli  $E = 1,90 \cdot 10^5$  V/m. (d) Obliczyć promień  $r$  koła, po którym teraz porusza się proton, jeżeli w pytaniu (c) zniknie pole elektryczne **E**.

Odp.: (a)  $B = E/v$ , ze wschodu na zachód. (c)  $2,47 \cdot 10^{-2}$  T. (d) 3,26 m.

# 34. Prawo Ampère'a

## 34-1. Prawo Ampère'a

Jedna klasa problemów związanych z polem magnetycznym, z którymi mieliśmy do czynienia w rozdziale 33, dotyczy sił *wywieranych przez pole magnetyczne na poruszający się ładunek lub na przewodnik, przez który płynie prąd, oraz momentów skręcających działających na dipole magnetyczne* (np. magnes sztabkowy lub przewodzący obwód). Druga klasa dotyczy *wytwarzania pola magnetycznego przez magnes przewodnik z prądem lub poruszający się ładunek*. Niniejszy rozdział poświęcony jest problemom tej drugiej klasy.

Odkrycia, że prąd wytworza pole magnetyczne, dokonał Hans Christian Oersted w roku 1820. Jego odkrycie związane było z demonstracją na lekcji w klasie i opisane w publikacji *Oddziaływanie prądu na magnesy*, gdzie odkrywca m.in. napisał: „Pierwsze eksperymenty na ten temat, które podjąłem dla ilustracji miały miejsce na lekcjach o elektryczności, galwanizacji i magnetyzmie prowadzonych przeze mnie ubiegłej zimy”.

Ze względu na wagę odkrycia Oersteda (dotyczy fundamentalnego związku między elektrycznością a magnetyzmem), a szczególnie ze względu na jego znaczenie dydaktyczne, Amerykańskie Stowarzyszenie Nauczycieli Fizyki ufundowało dorocznie przyznawany medal Oersteda dla nauczyciela fizyki wyróżniającego się sukcesami w nauczaniu tego przedmiotu.

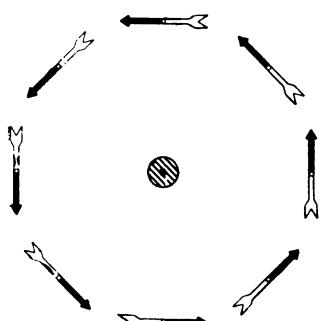
Jeżeli możemy zająć się obecnie przewodnikami przewodzącymi prąd jako typowymi źródłami pól magnetycznych i jako typowymi obiekttami, na które pola magnetyczne mogą działać, to możemy napisać w analogii do argumentów z paragrafu 27-1 dla pól elektrycznych:

$$\text{prąd} \rightleftharpoons \text{pole } (\mathbf{B}) \rightleftharpoons \text{prąd},$$

co sugeruje: (a) że prądy generują pola magnetyczne i (b) że pola magnetyczne wywierają siły na prądy. Mieliśmy do czynienia z (b) w paragrafie 33-3, a przypadkiem (a) zajmujemy się w tym rozdziale.

Na rysunku 34-1 przedstawiony jest drut otoczony pewną liczbą małych magnesików; rysunek ilustruje zmodyfikowane doświadczenie Oersteda. Jeżeli przez drut nie płynie prąd, magnesiki układają się wzduż poziomej składowej ziemskiego pola magnetycznego.

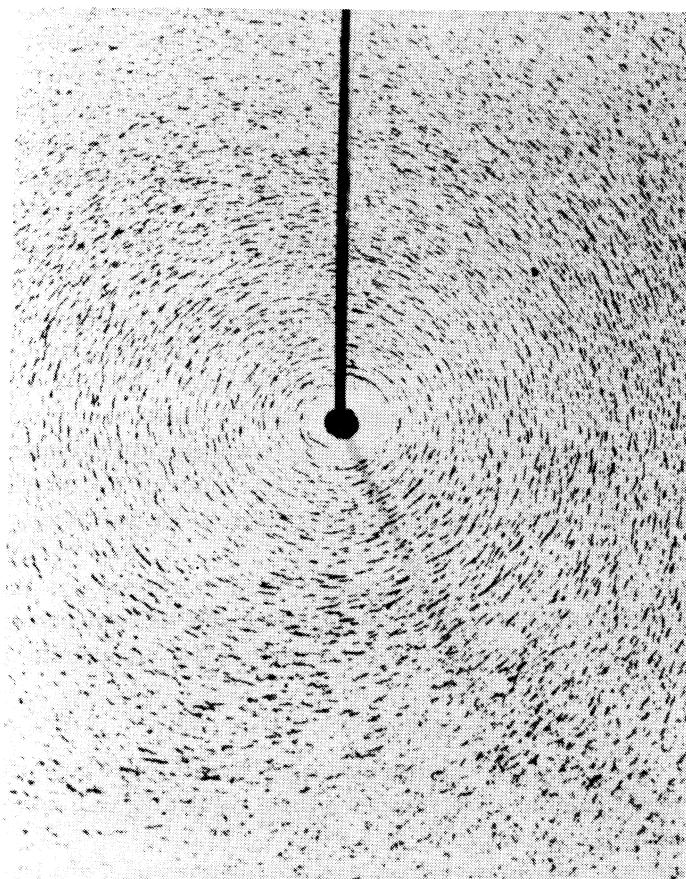
Kiedy przez drut płynie silny prąd, magnesiki otaczają wokoło drutu wskazując, że linie pola magnetycznego wytworzonego przez ten prąd są kołami zamkniętymi. Pogląd ten



Rys. 34-1. Zespół igieł magnetycznych wokół przewodnika z prądem. Kolorem czarnym zaznaczono bieguny północne. Środkowa kropka wskazuje, że prąd jest skierowany przed rysunek. Jak zwykle, jako kierunek prądu przyjmujemy kierunek strumienia ładunków dodatnich

potwierdza doświadczenie przedstawione na rys. 34-2, na którym widzimy opilki żelazne umieszczone na poziomej płaszczyźnie, przez której środek przechodzi drut przewodzący prąd.

Obecnie wiemy, że ilościowa zależność między natężeniem prądu  $i$  a polem magnetycz-



Rys. 34-2. Opiłki żelazne wokół przewodnika z prądem. (Reprodukowane za zgodą Physical Science Study Committee)

nym **B** jest następująca:

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 i. \quad (34-1)$$

Zależność ta nosi nazwę *prawa Ampère'a*. Ampère, będący zwolennikiem oddziaływania na odległość, nie przedstawił wyników swoich badań w postaci równań pola; uczynił to dopiero Maxwell. Prawo Ampère'a, łącznie z jego uogólnieniem i rozszerzeniem dokonanym później przez Maxwella, jest jednym z podstawowych równań teorii elektromagnetyzmu (patrz tablica 40-2).

Aby zobaczyć, w jaki sposób historycznie stwierdzono słuszność prawa Ampère'a, rozważmy hipotetyczne doświadczenie, podobne zresztą do tych, jakie rzeczywiście były wykonywane. Doświadczenie polega na pomiarach indukcji **B** w różnych odległościach *r* od długiego, prostego drutu o przekroju kołowym, przewodzącego prąd o natężeniu *i*. Można to zrobić przy pomocy jakościowych i ilościowych obserwacji podobnych do przedstawionych na rys. 34-1.

Umieścimy małą igłę magnetyczną w odległości *r* od drutu. Igła taka, będąca dipolem magnetycznym, dąży do ustawienia się wzdłuż linii zewnętrznego pola magnetycznego, tak aby jej biegun północny wskazywał kierunek **B**. Z rysunku 34-1 widać, że indukcja **B** w punkcie, w którym znajduje się dipol, jest styczna do koła o promieniu *r* i środku leżącym wewnętrz drutu.

Jeżeli zmienimy kierunek prądu płynącego w drucie (rys. 34-1), wszystkie igiełki obrócą się o 180°. Na podstawie tego doświadczenia można sformułować „regułę prawej ręki” dotyczącą kierunku pola magnetycznego powstałego wokół drutu przewodzącego prąd: *Jeżeli uchwycimy drut prawą ręką, tak aby kciuk wskazywał kierunek prądu, to palce otaczające drut wskażą kierunek wektora indukcji magnetycznej B*.

Obróćmy następnie dipol o kąt  $\theta$  od jego położenia równowagi. Aby to uczynić, musimy przyłożyć zewnętrzny moment skręcający, większy co do wartości bezwzględnej od momentu  $\tau$ , jaki działa na dipol w polu magnetycznym, przeszkadzając jego obracaniu.  $\tau$ ,  $\theta$  i **B** związane są równaniem (33-11) ( $\tau = \mu \times \mathbf{B}$ ), które można przepisać w postaci

$$\tau = \mu B \sin \theta, \quad (34-2)$$

gdzie  $\mu$  jest wielkością momentu magnetycznego dipola, a  $\theta$  kątem pomiędzy  $\mu$  i **B**. Mimo że nie znamy wartości  $\mu$  dla igły magnetycznej, możemy uważać, że wartość ta jest stała i niezależna od położenia oraz orientacji igły. Wobec tego po zmierzeniu  $\tau$  i  $\theta$  z równania (34-2) możemy wyznaczyć względową wartość indukcji **B** dla różnych odległości *r* i przy różnych natężeniach prądu *i*. Wyniki doświadczenia można przedstawić w postaci

$$B \propto \frac{i}{r}. \quad (34-3)$$

Proporcjonalność tę możemy zamienić na równość wprowadzając stałą proporcjonalności. Z przyczyn analogicznych do prawa Coulomba (patrz paragraf 26-4) stałej tej nie oznaczamy po prostu przez np. *k*, lecz napiszemy ją w postaci bardziej skomplikowanej:  $\mu_0/2\pi$ , gdzie  $\mu_0$  — przenikalność magnetyczna\*

Wówczas równanie (34-3) przyjmuje postać

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}, \quad (34-4)$$

\*  $\mu_0$  nie ma nic wspólnego z momentem dipola  $\mu$ , który występuje w równaniu (34-2).

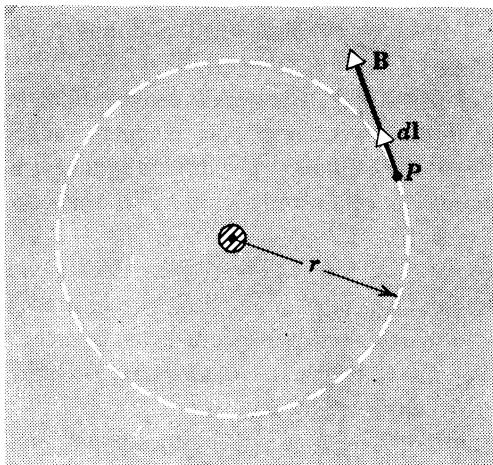
albo inaczej

$$2B\pi r = \mu_0 i. \quad (34-5)$$

Możemy łatwo pokazać, że lewa strona równania (34-5) jest równa  $\oint \mathbf{B} d\mathbf{l}$  po obwodzie koła o promieniu  $r$ , w którego środka umieszczony jest drut. We wszystkich punktach tego koła  $\mathbf{B}$  ma tę samą (stałą) wartość bezwzględną  $B$ , a  $d\mathbf{l}$  — styczna do drogi całkowania, ma ten sam kierunek co  $\mathbf{B}$ , jak widać na rys. 34-3. Wobec tego

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \oint B d\mathbf{l} = B \oint d\mathbf{l} = 2B\pi r,$$

gdzie  $\oint d\mathbf{l}$  jest po prostu obwodem koła. A więc w tym szczególnym przypadku możemy



Rys. 34-3. Dokoła przewodnika z przepływającym prądem przedstawiony jest tor kołowy, wzdłuż którego wykonujemy całkowanie. Kropka oznacza, że prąd jest skierowany przed rysunek. Ponieważ kąt między wektorami  $\mathbf{B}$  i  $d\mathbf{l}$  równa się zeru, iloczyn tych wektorów równa się iloczynowi ich modułów:  $\mathbf{B} d\mathbf{l} = B d\mathbf{l}$

zapisać zaobserwowany doświadczalnie związek pomiędzy polem magnetycznym i prądem jako

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 i. \quad (34-1)$$

Jest to prawo Ampère'a. Wiele innych doświadczeń sugeruje, że równanie (34-1) jest słuszne ogólnie dla dowolnego pola magnetycznego, dla dowolnego układu prądów i dla dowolnej drogi całkowania\*.

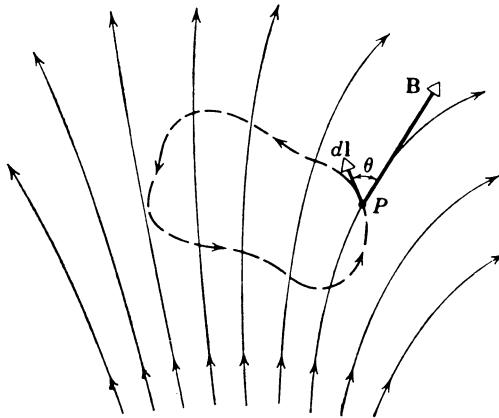
Aby móc zastosować prawo Ampère'a do dowolnego przypadku, konstruujemy w polu magnetycznym zamkniętą drogę, jak na rys. 34-4. Drogę tę dzielimy na elementy o długości  $d\mathbf{l}$  i dla każdego elementu obliczamy wartość  $\mathbf{B} d\mathbf{l}$ . Przypominamy, że  $\mathbf{B} d\mathbf{l}$  równe jest  $B d\mathbf{l} \cos\theta$ ; możemy je interpretować jako iloczyn  $d\mathbf{l}$  i składowej  $\mathbf{B}$  ( $= B \cos\theta$ ) równoległej do  $d\mathbf{l}$ . Całka jest sumą wielkości  $\mathbf{B} d\mathbf{l}$  dla wszystkich elementów zamkniętej drogi, jest to całka liniowa dookoła zamkniętej drogi. Występująca po prawej stronie równania (34-1) wielkość  $i$  oznacza całkowity prąd przepływający przez powierzchnię otoczoną przez skonstruowaną krzywą.

\* Równanie (34-1) trzeba zmodyfikować, jeżeli wewnętrz drugi całkowania istnieje zmniejszający się z czasem strumień elektryczny lub materiał magnetyczny. W tym rozdziale przyjmujemy, że jeżeli są pola elektryczne, to są one stałe co do kierunku i wartości bezwzględnej i że nie istnieje żaden materiał magnetyczny.

Przenikalności magnetycznej próżni w prawie Ampère'a przypisujemy wartość

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}.$$

Stała ta razem ze stałą dielektryczną próżni  $\epsilon_0$  występuje w równaniach dotyczących elektromagnetyzmu, jeżeli używamy układu jednostek SI.



Rys. 34-4. Droga całkowania w polu magnetycznym

Czytelnik może być zdziwiony, dlaczego stała  $\epsilon_0$  występująca w prawie Coulomba jest wielkością mierzoną doświadczalnie, podczas gdy stała  $\mu_0$  w prawie Ampère'a przypisujemy określona wartość. Odpowiedź na to pytanie jest następująca: jednostka natężenia prądu w układzie SI, którą stosujemy w prawie Ampère'a, zdefiniowana jest przy pomocy sił wywieranych przez pole magnetyczne (patrz dalej, tzw. *waga prądu*), przy czym występuje jawnie stała  $\mu_0$ . W wyniku tego, jak szczegółowo pokażemy w paragrafie 34-4, jednostka natężenia prądu, którą określamy jako jeden amper (A) jest tak dobrana, że  $\mu_0$  musi mieć wartość dokładnie równą wartości podanej wyżej. W prawie Coulomba natomiast wielkości  $F$ ,  $q$  i  $r$  są mierzone niezależnie od stałej  $\epsilon_0$ . A więc stała ta musi mieć taką wartość, aby lewa strona prawa Coulomba była równa stronie prawej; nie można jej przypisać wartości dowolnej.

### 34-2. Indukcja magnetyczna $\mathbf{B}$ w otoczeniu długiego drutu

Widzieliśmy, że linie indukcji magnetycznej dla długiego, cylindrycznego prostolinowego drutu przewodzącego prąd o natężeniu  $i$  są koncentrycznymi kołami, których osią jest drut, i że  $\mathbf{B}$  w odległości  $r$  od tej osi dane jest równaniem (34-4)

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}. \quad (34-4)$$

Możemy to traktować jako wynik doświadczalny, zgodny z prawem Ampère'a i dający się z tego prawa łatwo wyprowadzić.

Interesujące jest porównanie wyrażenia (34-4) z wyrażeniem na natężenie pola elektrycznego w otoczeniu długiej linii utworzonej z ładunków, danym przez

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}. \quad (28-10)$$

W obu przypadkach występują stałe modyfikacyjne  $\mu_0/2\pi$  lub  $1/2\pi\epsilon_0$  oraz czynniki opisujące wielkość odpowiedzialną za powstanie pola, mianowicie  $i$  lub  $\lambda$ . Ponadto oba pola zmieniają się jak  $1/r$ .

Równanie (28-10) można otrzymać z prawa Gaussa, wiążąc pole elektryczne przechodzące przez powierzchnię gaussowską z całkowitym ładunkiem wewnętrznej tej powierzchni. Całka (powierzchniowa) w pra-

wie Gaussa obliczona jest dla zamkniętej powierzchni cylindrycznej, do której linie  $\mathbf{E}$  są wszędzie prostopadłe.

Równanie (34-4) można otrzymać z prawa Ampère'a wiążąc pole magnetyczne wzduż krzywej całkowania z całkowitym prądem wewnątrz tej krzywej. Całka (krzywoliniowa) w prawie Ampère'a obliczona jest dla zamkniętego okręgu koła, do którego linie  $\mathbf{B}$  są wszędzie styczne.

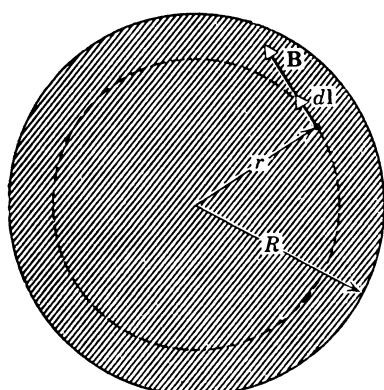
**Przykład 1.** Znaleźć wyrażenie na  $\mathbf{B}$  w odległości  $r$  od środka długiego cylindrycznego drutu o promieniu  $R$ , dla  $r < R$ . Drut przewodzi prąd  $i_0$  rozmieszczony równomiernie w całym przekroju drutu.

Rysunek 34-5 przedstawia okrąg, wzduż którego wykonujemy całkowanie wewnątrz drutu. Z symetrii układu wynika, że  $\mathbf{B}$  jest styczne do tego okręgu. Z prawa Ampère'a

$$\oint \mathbf{B} dl = \mu_0 i$$

otrzymujemy

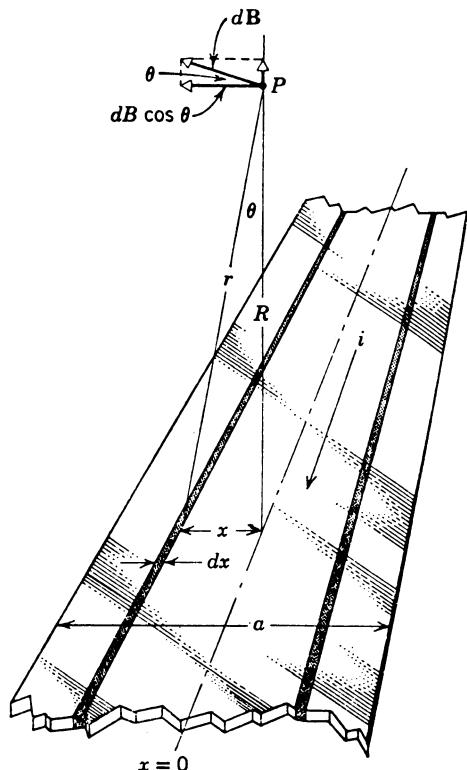
$$2B\pi r = \mu_0 i_0 \frac{\pi r^2}{\pi R^2},$$



Rys. 34-5. Przykład 1. Tor kołowy, wzduż którego wykonujemy całkowanie wewnątrz przewodnika. Prąd równomiernie rozmieszczony w przewodniku wypływa przed rysunek

ponieważ  $i$  po prawej stronie równania odnosi się jedynie do tej części prądu, która przepływa wewnątrz drogi całkowania. Rozwiążając ostatnią równość względem  $B$  i opuszczając wskaźnik przy natężeniu  $i_0$  otrzymujemy

$$B = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R^2}.$$



Rys. 34-6. Przykład 2. Płaski pasek o szerokości  $a$  przewodzi prąd o natężeniu  $i$

Na powierzchni drutu ( $r = R$ ) równanie ma taką samą postać, jaką otrzymalibyśmy przyjmując  $r = R$  w równaniu (34-4) ( $B = \mu_0 i / 2\pi R$ ).

**Przykład 2.** Rysunek 34-6 przedstawia płaski pasek miedziany o szerokości  $a$  i grubości, którą możemy zaniedbać, przewodzący prąd o natężeniu  $i$ . Znaleźć pole magnetyczne  $\mathbf{B}$  w punkcie  $P$ , w odległości  $R$  od środka paska, w kierunku prostopadłym do niego.

Podzielmy pasek na długie elementy o nieskończonym malej szerokości  $dx$ , z których każdy stanowi jak gdyby drut przewodzący prąd o natężeniu  $di$  równym  $i(dx/a)$ . Wkład  $dB$  do pola w punkcie  $P$ , na rys. 34-6, pochodzący od elementu pokazanego na rysunku, dany jest różniczką równania (34-4)

$$dB = \frac{\mu_0 di}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i(dx/a)}{R \sec \theta}.$$

Zauważmy, że wektor  $d\mathbf{B}$  skierowany jest prostopadle do linii oznaczonej literą  $r$ .

Wpływ na pole ma jedynie składowa pozioma  $dB$ , czyli  $dB \cos \theta$ , ponieważ składowa pionowa redukuje się z podobną składową pochodzącą od elementu umieszczonego symetrycznie po drugiej stronie środka paska. Wobec tego  $B$  w punkcie  $P$  dane jest całką

$$B = \int dB \cos \theta = \int \frac{\mu_0 i(dx/a)}{2\pi R \sec \theta} \cos \theta = \frac{\mu_0 i}{2\pi a R} \frac{dx}{\sec^2 \theta}.$$

Zmienne  $x$  i  $\theta$  nie są niezależne, mianowicie

$$x = R \operatorname{tg} \theta$$

albo

$$dx = R \sec^2 \theta d\theta.$$

Biorąc pod uwagę, że wartościami granicznymi  $\theta$  są  $\pm \operatorname{arctg}(a/2R)$  oraz eliminując  $dx$  z wyrażenia na  $B$  otrzymujemy

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi a R} \int \frac{R \sec^2 \theta d\theta}{\sec^2 \theta} = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \int_{-\operatorname{arctg}(a/2R)}^{+\operatorname{arctg}(a/2R)} d\theta = \frac{\mu_0 i}{\pi a} \operatorname{arctg} \left( \frac{a}{2R} \right).$$

Dla punktów leżących daleko od paska kąt  $\alpha = a/2R$  jest mały i wobec tego  $\operatorname{arctg} \alpha \cong \alpha$ . Stąd w przybliżeniu

$$B \cong \frac{\mu_0 i}{\pi a} \frac{a}{2R} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{R}.$$

Jest to rezultat oczekiwany, ponieważ dla odległych punktów pasek trudno jest odróżnić od cylindrycznego drutu (patrz równ. (34-4)).

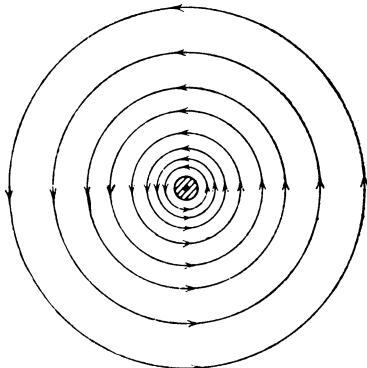
### 34-3. Linie indukcji magnetycznej

Na rysunku 34-7 pokazane są linie indukcji magnetycznej  $\mathbf{B}$  pola w otoczeniu długiego, prostoliniowego drutu. Widoczny jest wzrost odległości pomiędzy liniami w miarę wzrostu odległości od drutu. Charakteryzuje to przewidziane przez równanie (34-4) zmniejszanie się  $B$  zgodnie z  $1/r$ .

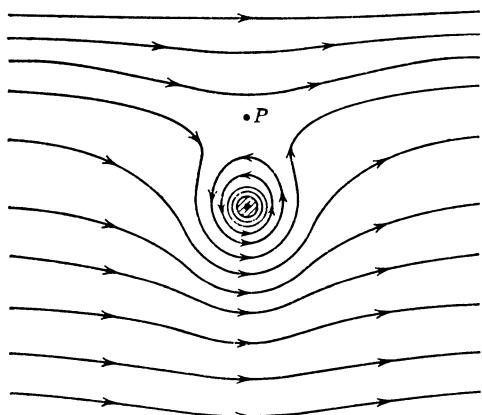
Na rysunku 34-8 przedstawione są linie indukcji magnetycznej pola wytworzonego przez prąd płynący w drucie umieszczonym prostopadle do jednorodnego, zewnętrznego pola  $\mathbf{B}_e$ . Wypadkowe pole magnetyczne  $\mathbf{B}$  w każdym punkcie będzie sumą wektorową  $\mathbf{B}_e$  i  $\mathbf{B}_i$ , gdzie  $\mathbf{B}_i$  jest indukcją magnetyczną wytworzoną przez prąd płynący w drucie. Pola  $\mathbf{B}_e$  i  $\mathbf{B}_i$  osłabiają się powyżej drutu, a wzmacniają poniżej. W punkcie  $P$ , na rys. 34-8,  $\mathbf{B}_e$  i  $\mathbf{B}_i$  całkowicie się redukują. Bardzo blisko drutu pole pochodzi głównie od prądu i przedstawione jest liniami kołowymi.

Michael Faraday, który wprowadził pojęcie linii indukcji, przypisywał im bardziej realne znaczenie niż czynimy to obecnie. Uważał on, że przedstawiają one miejsca wystę-

powania sił, podobnie jak w mechanice rozciągnięte linki gumowe. Czy nie możemy, korzystając z tej analogii, wyobrazić sobie, że drut z rys. 34-8 będzie wypychany ku górze? Obecnie używamy linii indukcji głównie w celach wizualnych. Do obliczeń ilościowych stosujemy wektory pola, przedstawiając na przykład siłę działającą na drut z rys. 34-8, za pomocą zależności  $\mathbf{F} = i\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ .



Rys. 34-7. Linie indukcji magnetycznej  $\mathbf{B}$  w otoczeniu długiego, cylindrycznego przewodnika. Prąd  $i$  oznaczony kropką wypływa przed rysunek



Rys. 34-8. Linie indukcji magnetycznej  $\mathbf{B}$  w otoczeniu przewodzącego prąd długiego przewodnika, umieszczonego w jednorodnym, zewnętrznym polu  $\mathbf{B}$  skierowanym w prawą stronę. Prąd płynący w przewodniku jest skierowany przed rysunek. W punkcie  $P$ ,  $\mathbf{B} = 0$

Aby zastosować tę zależność do przypadku pokazanego na rys. 34-8, przypominamy, że  $\mathbf{B}$  jest *polem zewnętrznym*, w którym umieszczony jest drut, czyli w naszym wypadku jest to  $\mathbf{B}_e$ , skierowane w prawą stronę. Ponieważ  $\mathbf{l}$  jest skierowane przed płaszczyznę rysunku, siła działająca na drut ( $= i\mathbf{l} \times \mathbf{B}_e$ ) rzeczywiście działa ku górze. W obliczeniach takich bierzemy pod uwagę jedynie pole zewnętrzne, ponieważ pole wytworzone przez drut nie może działać na ten drut, podobnie jak ziemskie pole grawitacyjne nie działa na Ziemię, lecz na inne ciała. Na rysunku 34-7, na przykład, na drut nie działa żadna siła, ponieważ nie ma tam zewnętrznego pola magnetycznego.

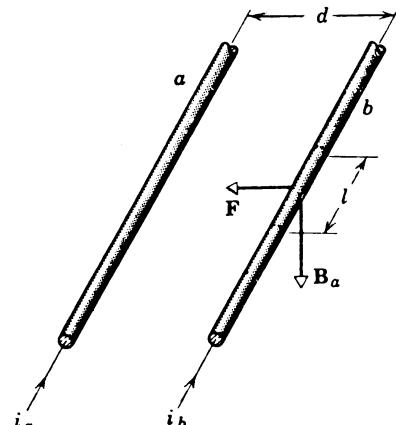
Idea linii indukcji Faradaya obala teorie magnetycznych (i elektrycznych) oddziaływań na odległość. Jak wiele nowych pomysłów, nie została ona natychmiast uznana. W roku 1851 np. Faraday pisał: „Nie mogę się powstrzymać od ponownego wyrażenia przekonania o prawdziwości obrazu, jaki dają nam linie oddziaływania magnetycznego. Obraz ten jest zgodny ze wszystkimi faktami, jakie można eksperymentalnie ustalić dla tego oddziaływania, tzn. ze wszystkim, co nie jest hipotezą”.

Z drugiej strony, w cztery lata później, inny, dobrze znany uczony brytyjski, George Airy, pisał: „Stwierdzam, że nie mogę wyobrazić sobie, aby ktokolwiek, kto praktycznie i liczbowo stwierdził tę zgodność (z teorią oddziaływania na odległość), mógł wahać się choć chwilę w wyborze między prostym i ścisłym oddziaływaniem z jednej strony, a czymś tak niejasnym, jak linie sił z drugiej strony”.

Czytelnicy uważający, iż stwierdzenia naukowe są absolutne, mogą porównać dwa podane powyżej, ogłoszone przez wybitnych współczesnych sobie naukowców. Obecnie takich przykładów również nie brakuje.

### 34-4. Dwa przewodniki równolegle

Rysunek 34-9 przedstawia dwa długie, równoległe przewodniki, rozsunięte na odległość  $d$ , w których płyną prądy o natężeniach  $i_a$  i  $i_b$ . Z doświadczenia wynika, że dwa takie przewodniki przyciągają się. Fakt ten zauważył Ampère już w tydzień po tym, gdy wiadomość o eksperymentach Oersteda dotarła do Paryża.



Rys. 34-9. Dwa druty, przez które przepływają prądy o tym samym kierunku, przyciągają się

Niektórzy koledzy Ampère'a uważali, że w świetle doświadczeń Oersteda takie wzajemne przyciąganie się dwóch przewodników jest oczywiste i nie wymaga sprawdzania. Sądzili oni, że jeśli każdy z tych przewodników z osobna oddziałuje z pewną siłą na igłę magnetyczną, to winny one oddziaływać i na siebie. Wniosek ten jest błędny. Współczesny Ampère'owi Arago, słuchając tych rozoważań, wyjął z kieszeni dwa żelazne klucze i zareplikował: „Każdy z tych kluczy przyciąga magnes. Czy sądzicie, że w związku z tym będą one się przyciągały wzajemnie?”

Przewodnik  $a$  (rys. 34-9) wytwarza w swoim otoczeniu pole o indukcji  $\mathbf{B}_a$ . Wartość liczbową wektora  $\mathbf{B}_a$  wytworzonego przez prąd  $i_a$  w miejscu, gdzie znajduje się drugi przewodnik, zgodnie z równaniem (34-4) wynosi

$$B_a = \frac{\mu_0 i_a}{2\pi d}.$$

Z reguły prawej ręki wynika, że w pobliżu przewodnika  $b$ ,  $\mathbf{B}_a$  jest skierowane w dół, tak jak to widać na rysunku.

Przewodnik  $b$ , w którym płynie prąd  $i_b$ , jest umieszczony w *zewnętrznym* polu magnetycznym o indukcji  $\mathbf{B}_a$ . Na odcinek  $l$  tego przewodnika działać będzie skierowana w bok siła magnetyczna ( $= il \times B$ ) o wartości

$$F_b = i_b l B_a = \frac{\mu_0 l i_b i_a}{2\pi d}. \quad (34-6)$$

Z reguły mnożenia wektorowego wnioskujemy, że siła  $\mathbf{F}_b$  leży w płaszczyźnie przewodników i skierowana jest ku lewej stronie rys. 34-9.

Moglibyśmy rozpocząć rozumowanie od przewodnika  $b$ , obliczyć pole magnetyczne wytwarzane w miejscu zajmowanym przez przewodnik  $a$ , a następnie znaleźć siłę działającą na przewodnik  $a$ . Siła ta dla prądów równoległych winna być skierowana w prawą

stronę. Siły, jakimi oddziałują na siebie te dwa przewodniki, są równe i przeciwnie skierowane, tak jak powinno być zgodnie z newtonowską zasadą akcji i reakcji.

Powyższa dyskusja przypomina nam rozważania z paragrafu 27-1, dotyczące pola elektrycznego między dwoma ładunkami punktowymi. Widzieliśmy tam, że jeden ładunek oddziałuje na drugi za pośrednictwem pola elektrycznego. Przewodniki na rys. 34-9 oddziałują nawzajem na siebie za pośrednictwem pola magnetycznego **B**. Rozumujemy tu przy pomocy pojęć:

$$\text{prąd} \rightleftharpoons \text{pole } (\mathbf{B}) \rightleftharpoons \text{prąd},$$

a nie z punktu widzenia oddziaływanego na odległość, według schematu:

$$\text{prąd} \rightleftharpoons \text{prąd}.$$

Fakt wzajemnego przyciągania się dwóch długich, równoległych przewodników wykorzystujemy do zdefiniowania ampera. Założymy, że odległość między przewodnikami wynosi dokładnie 1 m ( $d = 1$  m), a płynące w nich prądy mają jednakowe natężenie ( $i_a = i_b = i$ ). Jeśli wspólne natężenie prądu zostało tak dobrane, że zmierzona siła wzajemnego przyciągania przewodników na jednostkę ich długości wynosi  $2 \cdot 10^{-7}$  N/m, to mówimy, że natężenie to równe jest 1 amperowi. Z równania (34-6) mamy

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d} = \frac{(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m}/\text{A}) (1\text{A})^2}{2\pi \cdot 1 \text{ m}} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N/m}.$$

czego należało oczekiwac\*

W Narodowym Biurze Wzorców USA podstawowe pomiary natężenia prądów są dokonywane za pomocą tzw. *wagi prądu*. Składa się ona z precyzyjnie wykonanej cewki, umieszczonej między dwiema innymi cewkami, jak pokazano na rys. 34-10. Zewnętrzna para cewek jest na stałe przymocowana do podstawy wagi, natomiast cewka wewnętrzna — jest zawieszona na jej ramieniu. Cewki są tak połączone, że mierzony prąd przepływa przez każdą z nich.

Cewki — tak jak i równolegle przewodniki na rys. 34-9 — działają na siebie silami, które można zmniejszyć obciążając odpowiednie szalki wagi. Natężenie prądu jest wyznaczane na podstawie zmierzonej wartości siły i wymiarów cewek. Waga prądu jest urządzeniem w zupełności równoważnym długim, równoległym przewodnikom, a przy tym o wiele od nich praktyczniejszym. Wyniki pomiarów na wadze prądu są używane głównie przy opracowywaniu wtórnnych, bardziej wygodnych metod pomiarów natężeń.

**Przykład 3.** Przez długi, poziomy, sztywno zamocowany drut płynie prąd o natężeniu  $i_a = 100$  A. Równolegle nad nim umieszczony jest cienki drut o ciężarze  $0,073$  N/m, przez który płynie prąd o natężeniu  $i_b = 20$  A. Na jakiej wysokości ponad pierwszym drutem powinien być umieszczony drugi drut, aby siły magnetyczne zrównoważyły jego ciężar?

Aby występovalo odpychanie, prądy w drutach muszą mieć przeciwnie kierunki. W warunkach równowagi siła magnetyczna działająca na jednostkę długości cienkiego drutu musi być równa ciężarowi tej jednostki długości i mieć przeciwny kierunek.

Rozwiązywanie równania (34-6) względem  $d$  daje

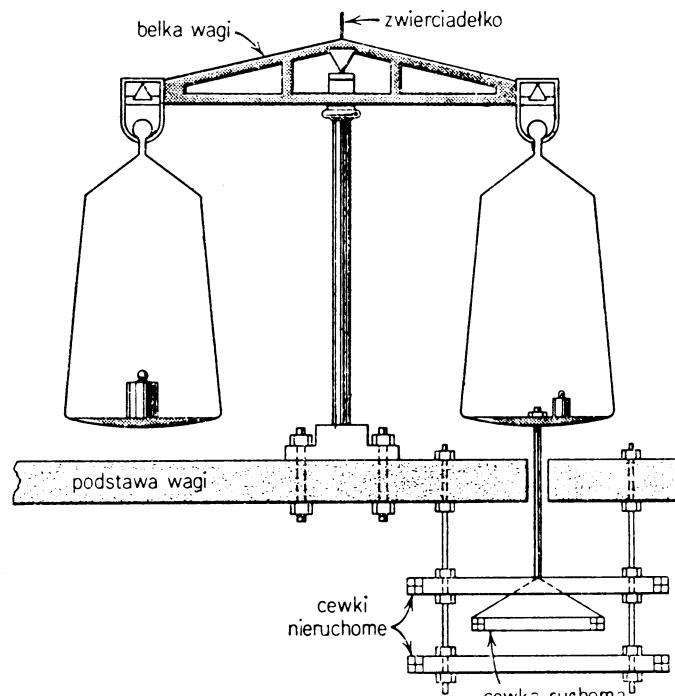
$$d = \frac{\mu_0 i_a i_b}{2\pi(F/l)} = \frac{(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m}/\text{A}) \cdot 100 \text{ A} \cdot 20 \text{ A}}{2\pi \cdot 0,073 \text{ N/m}} = 5,5 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 5,5 \text{ mm}.$$

Zakładamy przy tym, że średnice drutów są dużo mniejsze niż ich odległości. Założenie to jest konieczne z tego względu, że wyprowadzając równanie (34-6) milcząco założyliśmy, że indukcja magnetyczna pola wytwarzanego przez jeden z drutów jest jednakowa we wszystkich punktach drugiego.

\* Zauważmy, że w zależności użytej do określenia ampera występuje  $\mu_0$ . Jak stwierdziliśmy na str. 213 dla  $\mu_0$  przyjęto (w sposób dowolny) wartość  $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m}/\text{A}$ , natomiast wartość natężenia prądu określona przez nas jako 1 amper została tak dobrana, aby dawała wymaganą siłę przyciągania na jednostkę długości.

Czy równowaga cienkiego drutu jest trwała względem jego przemieszczeń pionowych? Można to sprawdzić przemieszczając ten przewodnik pionowo i badając, jak zmienia się działająca na niego siła.

Przypuśćmy następnie, że cienki drut jest umieszczony pod drutem sztywno zamocowanym. Jak należałoby postąpić, aby „unosił” się on w powietrzu? Czy równowaga względem przemieszczeń pionowych byłaby wówczas trwała, czy nie?



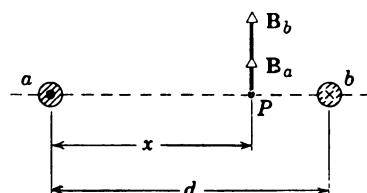
Rys. 34-10. Waga prądu

**Przykład 4.** Dwa równoległe druty odległe od siebie o  $d$  przewodzą prądy przeciwne skierowane, lecz o równych natężeniach  $i$ . Znaleźć indukcję magnetyczną dla punktów leżących między drutami w odległości  $x$  od jednego z nich.

Z rysunku 34-11 widać, że w punkcie  $P$  indukcja  $\mathbf{B}_a$  wywołana prądem  $i_a$  oraz  $\mathbf{B}_b$  wywołana prądem  $i_b$ , mają ten sam kierunek. Wartość ich znajdujemy z równania (34-4) ( $B = \mu_0 i / 2\pi r$ ):

$$B = B_a + B_b = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right).$$

Zależność ta nie stosuje się do wnętrza drutów, gdyż równanie (34-4) nie jest tam słuszne.



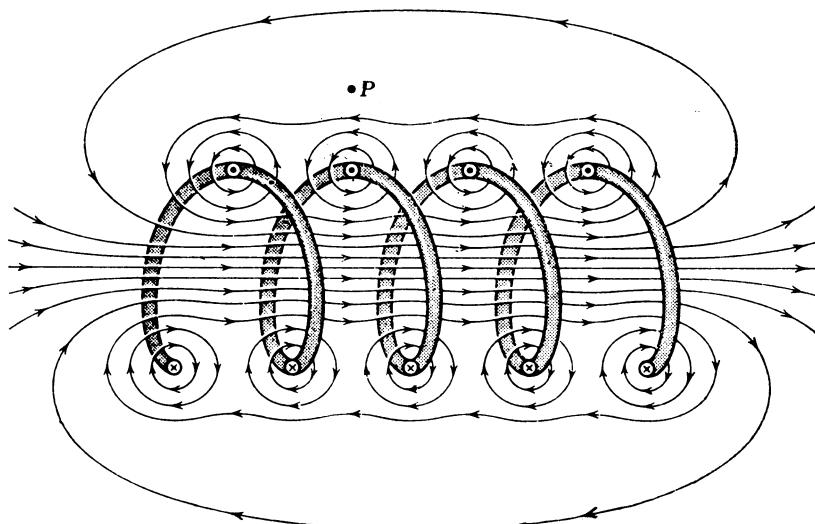
Rys. 34-11. Przykład 4

### 34-5. Wektor indukcji magnetycznej $\mathbf{B}$ dla solenoidu

*Solenoidem* nazywamy długi drut zwinięty w spiralę o przylegających zwojach i przewodzący prąd  $i$ . Zakładamy przy tym, że spirala jest bardzo dłuża w porównaniu ze swoją średnicą. Jak wygląda wytwarzane przez nią pole magnetyczne?

Dla punktów leżących w pobliżu pojedynczego zwoju solenoidu obserwator nie jest w stanie zauważać, że drut jest zgięty w łuk. Pod względem magnetycznym drut zachowuje się prawie tak, jak gdyby był długi i prostoliniowy, a linie wektora  $\mathbf{B}$  pola wytworzonego przez ten zwój są prawie koncentrycznymi kołami.

Pole całego solenoidu jest sumą wektorową pól wytworzonych przez wszystkie zwoje tworząc solenoid. Rysunek 34-12, przedstawiający „solenoid” z rozsuniętymi zwojami, pokazuje, że pola między zwojami mają tendencję do wzajemnej kompensacji. Ponadto sugeruje on, że w punktach leżących wewnętrznych solenoidu, dostatecznie daleko od po-



Rys. 34-12. Solenoid luźno nawinięty

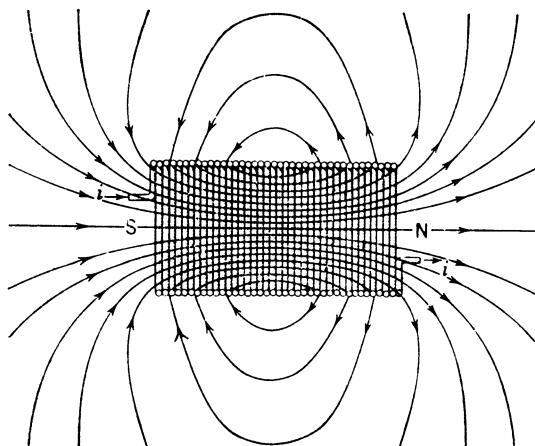
wierzchni zwojów, wektor  $\mathbf{B}$  jest równoległy do osi solenoidu. W granicznym przypadku przylegających, ścisłe dopasowanych drutów, o przekroju kwadratowym, solenoid staje się właściwie odcinkiem cylindra, w którym płynie prąd i warunki symetrii powodują, że ostatnie twierdzenie staje się w pełni słuszne. W dalszych rozważaniach zakładamy, że jest ono zawsze słuszne.

W punktach takich jak  $P$  (rys. 34-12) pole wytwarzane przez górne części zwojów solenoidu (oznaczone  $\odot$ ) skierowane jest w lewą stronę i znosi się częściowo ze skierowanym w prawą stronę polem wytwarzanym przez dolne części zwojów (oznaczone  $\otimes$ ). W miarę tego, jak solenoid staje się coraz bardziej idealny, tzn. w miarę jak zbliża się do nieskończego długiego cylindra, w którym płynie prąd, pole magnetyczne w punktach zewnętrznych dąży do zera. Z dobrym przybliżeniem można przyjąć, że zewnętrzne pole magnetyczne jest równe zeru również dla solenoidów stosowanych w praktyce, zwłaszcza jeśli ich długości są dużo większe niż średnice i rozważania dotyczą punktów zewnętrznych, leżących w pobliżu środka solenoidu, tzn. daleko od jego końców. Rysunek 34-13 przedstawia linie indukcji w przypadku realnego solenoidu, który daleki jest od idealnego, gdyż jego długość jest niewiele większa od średnicy. Nawet i tutaj z rozmieszczeniem linii indukcji w części środkowej widać, że pole zewnętrzne jest dużo słabsze niż wewnętrzne.

Zastosujmy prawo Ampèrea  $\oint \mathbf{B} dl = \mu_0 i$ , wzdłuż prostokątnej drogi  $abcd$  do ideal-

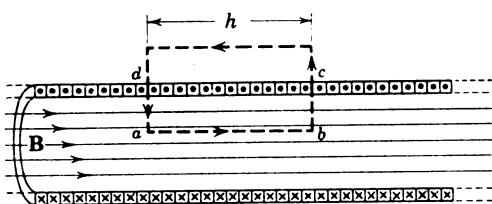
nego solenoidu z rys. 34-14. Przedstawmy całkę  $\oint \mathbf{B} d\mathbf{l}$  jako sumę czterech całek, odpowiadających poszczególnym częściom drogi całkowania:

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{B} d\mathbf{l} + \int_b^c \mathbf{B} d\mathbf{l} + \int_c^d \mathbf{B} d\mathbf{l} + \int_d^a \mathbf{B} d\mathbf{l}.$$



Rys. 34-13. Solenoid o skończonej długości. Prawy koniec, z którego wybiegają linie wektora indukcji  $\mathbf{B}$ , zachowuje się jak północny biegun igły magnetycznej, a lewy koniec — jak biegun południowy

Pierwsza całka z prawej strony równania jest równa  $Bh$ , gdzie  $B$  — wartość indukcji magnetycznej wewnętrz solenoidu,  $h$  — długość drogi od  $a$  do  $b$ . Należy podkreślić, że odcinek  $ab$ , jakkolwiek jest równoległy do osi solenoidu — nie musi się z nią pokrywać.



Rys. 34-14. Odcinek idealnego solenoidu, otrzymanego przez ścisłe nawinięcie przewodnika o przekroju kwadratowym. Solenoid taki jest równoważny nieskończonemu długiemu cylindrycznemu przewodnikowi z prądem

Druga i czwarta całka są równe zeru, gdyż na odpowiadających im odcinkach elementy drogi są wszędzie prostopadłe do  $\mathbf{B}$ . Z tego powodu  $\mathbf{B} d\mathbf{l}$  jest równe zero, a więc i całka — też. Trzecia całka, związana z lejącą na zewnątrz solenoidu częścią prostokąta, także jest równa零, gdyż przyjęliśmy, że dla wszystkich zewnętrznych punktów idealnego solenoidu  $\mathbf{B}$  jest równe zero.

Zatem  $\oint \mathbf{B} d\mathbf{l}$  dla całej drogi prostokątnej ma wartość  $Bh$ . Całkowite natężenie prądu, przepływającego przez powierzchnię ograniczoną drogą całkowania, nie jest równe natężeniu  $i_0$  prądu płynącego w solenoidzie, gdyż droga całkowania obejmuje więcej niż jeden zwój. Oznaczmy przez  $n$  liczbę zwojów przypadających na jednostkę długości. Wówczas

$$i = i_0 nh.$$

W związku z powyższym, prawo Ampère'a dla naszego przypadku przyjmie postać:

$$Bh = \mu_0 i_0 nh$$

lub

$$\mathbf{B} = \mu_0 i_0 n. \quad (34-7)$$

Jakkolwiek równanie (34-7) zostało wyprowadzone dla idealnego solenoidu, zupełnie dobrze można je stosować w przypadku realnych solenoidów dla punktów wewnętrznych, leżących w pobliżu środków takich solenoidów. Z równania tego wynika, że  $\mathbf{B}$  nie zależy od średnicy i długości solenoidu i jest stałe na całej powierzchni przekroju. Solenoid pozwala na otrzymywanie potrzebnych w wielu doświadczeniach jednorodnych pól magnetycznych o znanych natężeniach, podobnie jak kondensator płaski pozwala uzyskać znane, jednorodne pola elektryczne.

Solenoid jest dobrym przykładem do dyskusji strumienia  $\Phi_B$  pola magnetycznego  $\mathbf{B}$ . Dyskutowaliśmy już w paragrafie 28-3 strumień pola elektrycznego  $\Phi_E$  ograniczając się do strumieni przez zamknięte powierzchnie zgodnie z prawem Gaussa.

Omawialiśmy również strumień  $\Phi_E$  dla powierzchni otwartych, patrz rys. 28-1.

W podobny sposób możemy zdefiniować strumień  $\Phi_B$  pola magnetycznego  $\mathbf{B}$  zarówno dla zamkniętej, jak i otwartej powierzchni.

W każdym przypadku jest on dany wzorem

$$\Phi_B = \int \mathbf{B} ds,$$

w ściślej analogii do dyskusji o  $\Phi_E$  w paragrafie 28-3. Jednostką SI dla  $\mathbf{B}$  jest jak wiemy tesla (1 tesla = 1 weber/metr<sup>2</sup>), a dla  $\Phi_B$  po prostu weber (skrót Wb).

**Przykład 5.** W solenoidzie, składającym się z pięciu warstw o długości 1,0 m i średnicy wewnętrznej 3,0 cm, z których każda zawiera 850 zwojów, płynie prąd o natężeniu 5,0 A. (a) Jaka jest wartość  $B$  w środku solenoidu? Z równania (34-7) mamy

$$B = \mu_0 i_0 n = (4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A})(5 \text{ A})(5 \cdot 850 \text{ zwojów/m}) = 2,7 \cdot 10^{-2} \text{ T}.$$

Równanie (34-7) możemy stosować nawet wtedy, gdy solenoid składa się z wielu warstw, gdyż nie występuje tam średnica zwojów.

(b) Jaki jest strumień  $\Phi_B$  przechodzący przez powierzchnię przekroju solenoidu w jego części środkowej? Z taką dokładnością, z jaką  $\mathbf{B}$  można uważać za stałe, strumień dany jest wyrażeniem

$$\Phi_B = \int \mathbf{B} dS = BA,$$

gdzie  $A$  jest efektywną powierzchnią przekroju. Jeśli przyjmiemy, że  $A$  jest równe powierzchni koła, o średnicy równej wewnętrznej średnicy zwojów (3,0 cm), to  $A = 7,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$  i

$$\Phi_B = BA = (2,7 \cdot 10^{-2} \text{ Wb/m}^2)(7,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2) = 1,9 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}.$$

**Przykład 6. Toroid.** Na rysunku 34-15 przedstawiony jest toroid. Możemy powiedzieć, że jest to solenoid o kształcie obwarzanka. Znaleźć indukcję  $\mathbf{B}$  dla punktów leżących wewnętrz toroidu.

Ze względu na symetrię, linie wektora  $\mathbf{B}$  wewnętrz toroidu mają kształt koncentrycznych okręgów, jak to zaznaczono na rysunku. Zastosujmy prawo Ampère'a, przyjmując jako drogę całkowania okrąg o promieniu  $r$ :

$$\oint \mathbf{B} dl = \mu_0 i,$$

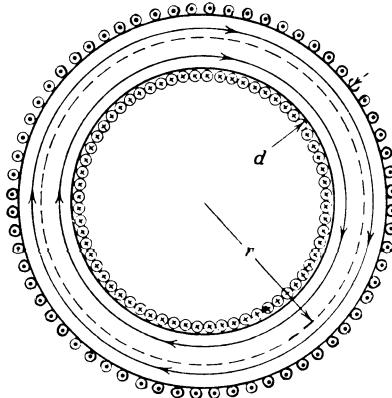
czyli

$$2B\pi r = \mu_0 i_0 N,$$

gdzie  $i_0$  jest natężeniem prądu płynącego w zwojach toroidu, a  $N$  całkowitą liczbą zwojów. Stąd

$$B = \frac{\mu_0 i_0 N}{2\pi r}.$$

W odróżnieniu od solenoidu, w toroidzie indukcja  $B$  nie ma stałej wartości na całej powierzchni przekroju. Wykazać, w oparciu o prawo Ampère'a, że w punktach leżących na zewnątrz idealnego toroidu  $B$  jest równe zero.



Rys. 34-15. Przykład 6. Toroid

### 34-6. Prawo Biota–Savarta\*

Prawo Ampère'a możemy stosować do znajdowania pola magnetycznego tylko wtedy, gdy rozkład prądów jest na tyle symetryczny, że pozwala na łatwe obliczenie całki krzywoliniowej  $\oint \mathbf{B} dl$ . Ogranicza to użyteczność tego prawa przy rozwiązywaniu praktycznych zagadnień. Oczywiście, prawo nie przestaje być słuszne, tylko trudno jest je zastosować.

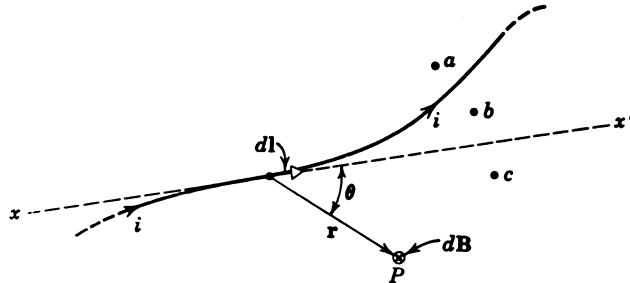
Podobnie prawo Gaussa można w elektrostatyce stosować do znajdowania pól elektrostatycznych tylko wtedy, jeśli rozkład ładunku ma na tyle wysoką symetrię, że łatwo jest obliczyć całkę powierzchniową  $\oint \mathbf{E} d\mathbf{S}$ . Na przykład możemy użyć prawa Gaussa do wyznaczenia pola elektrycznego wytworzonego przez równomiernie naładowany preł, nie możemy go jednak zastosować w przypadku dipola elektrycznego, gdyż w tym przypadku symetria rozkładu ładunku jest niewystarczająca.

W celu obliczenia natężenia  $\mathbf{E}$  pola wytworzonego w danym punkcie przez dowolnie rozłożony ładunek (patrz paragraf 27-4), dzieliliśmy ten ładunek na *elementy ładunku*  $dq$  i stosując prawo Coulomba obliczaliśmy wkład  $d\mathbf{E}$ , jaki wnosi w natężenie pola w rozważanym punkcie każdy z tych elementów. Całkowite natężenie pola  $\mathbf{E}$  otrzymywaliśmy sumując, a właściwie całkując wkłady  $d\mathbf{E}$  po całym ładunku.

Podobnie postępujemy chcąc obliczyć w jakimś punkcie indukcję  $\mathbf{B}$  pola magnetycznego, wytworzonego przez dowolny rozkład prądów. Dzielimy mianowicie każdy z prądów na nieskończoność małe *elementy* i stosując prawo Biota–Savarta (które podajemy niżej) obliczamy wkłady  $d\mathbf{B}$ , dawane w rozważanym punkcie przez każdy z tych elementów. Wypadkowy wektor  $\mathbf{B}$  w tym punkcie uzyskujemy całkując te wkłady po całym rozkładzie prądów.

\* Patrz: R. A. Tricker, Ampère's a Contemporary Physicist, *Contemporary Physics*, August 1962; W. G. V. Rosser, Electromagnetism as a Second Order Effect III: The Biot–Savart Law, *Contemporary Physics*, October 1961 — więcej informacji o prawie Ampère'a i prawie Biota–Savarta.

Na rysunku 34-16 przedstawiony jest prosty przykład rozkładu prądu, mianowicie krzywoliniowy przewodnik z prądem o natężeniu  $i$ . Pokazany jest tam również typowy element prądu. Jest to odcinek  $dl$  przewodnika z prądem o natężeniu  $i$ . Ma on kierunek stycznej do przewodnika (zaznaczonej na rysunku linią przerywaną). Oczywiście element prądu nie może istnieć samodzielnie, gdyż do jednego z jego końców musimy doprowadzać prąd, a z drugiego — odprowadzać. Możemy jednak uważać, że rzeczywisty obwód z prądem złożony jest z bardzo dużej ilości elementów prądu połączonych szeregowo.



Rys. 34-16. Element prądu  $dl$  wytwarza w punkcie  $P$  pole magnetyczne o indukcji  $d\mathbf{B}$

Przypuśćmy, że chcemy znaleźć indukcję  $d\mathbf{B}$  pola magnetycznego wytworzonego przez element prądu w punkcie  $P$ . Zgodnie z prawem Biota–Savarta, wartość liczbową  $d\mathbf{B}$  dana jest równaniem

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \sin \theta}{r^2}, \quad (34-8)$$

gdzie  $r$  jest promieniem wodzącym, poprowadzonym od elementu prądu do punktu  $P$ , a  $\theta$  — kątem zawartym między tym promieniem i elementem  $dl$ . Kierunek  $d\mathbf{B}$  jest taki sam jak kierunek wektora  $dl \times \mathbf{r}$ . Na przykład, na rysunku 34-16 w punkcie  $P$  indukcja  $d\mathbf{B}$ , pochodząca od zaznaczonego tam elementu prądu jest skierowana za rysunek, prostopadle do jego płaszczyzny. Warto zauważyć, że w wyrażeniu (34-8) indukcja magnetyczna pochodząca od elementu prądu  $dl$  jest wielkością odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości. W związku z tym, wyrażenie to może być traktowane jako magnetyczny odpowiednik prawa Coulomba, zgodnie z którym natężenie pola elektrycznego pochodzącego od elementu ładunku jest wielkością odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości.

Zapiszemy prawo Biota–Savarta w postaci wektorowej:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (34-9)$$

Po przejściu do postaci skalarnej otrzymamy równanie (34-8). Na podstawie równania (34-9) można ponadto określić kierunek wektora  $d\mathbf{B}$ , który jest taki sam jak kierunek wektora  $dl \times \mathbf{r}$ .

Wypadkową indukcję magnetyczną w punkcie  $P$  otrzymujemy całkując równanie (34-9), czyli

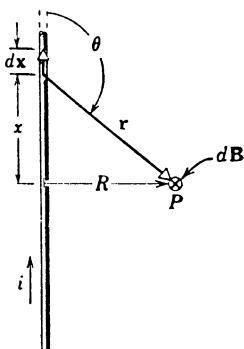
$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B}. \quad (34-10)$$

Podana całka jest całką wektorową.

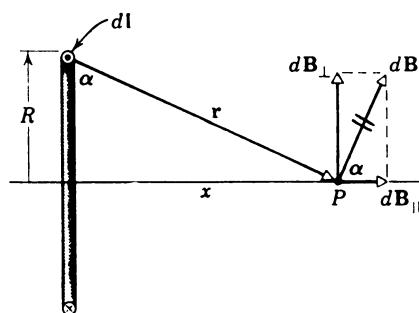
**Przykład 7. Długi prostoliniowy przewodnik.** Dla zilustrowania prawa Biota-Savarta zastosujemy je do obliczenia indukcji magnetycznej  $\mathbf{B}$  w przypadku prądu o natężeniu  $i$ , płynącego przez długi, prostoliniowy przewodnik. Zagadnienie to omawialiśmy szczegółowo w związku z prawem Ampère'a w paragafie 34-1.

Na rysunku 34-17, przedstawiającym przewodnik z boku, zaznaczony jest typowy element prądu  $dx$ . Wielkość wkładu  $d\mathbf{B}$  do indukcji pola magnetycznego w punkcie  $P$ , pochodząca od tego elementu, otrzymujemy z równania (34-8). Wynosi ona

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dx \sin \theta}{r^2}.$$



Rys. 34-17. Przykład 7



Rys. 34-18. Przykład 8. Obwód kołowy o promieniu  $R$  przewodzący prąd o natężeniu  $i$

Wszystkie wektory  $d\mathbf{B}$  w punkcie  $P$  są tak samo skierowane, a mianowicie: za rysunek, prostopadle do jego płaszczyzny. Zatem całkując wyrażenie wektorowe (równ. (34-10)) całkujemy wyrażenie skalarnie:

$$B = \int d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{\sin \theta}{r^2} dx.$$

Ponieważ między  $x$ ,  $\theta$  i  $r$  istnieją związki:

$$r = \sqrt{x^2 + R^2},$$

$$\sin \theta [= \sin(\pi - \theta)] = \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}},$$

to wyrażenie na  $B$  przyjmuje postać

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \left| \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \right|_{x=-\infty}^{x=+\infty} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{R}.$$

Uzyskany wynik jest identyczny z wynikiem, jaki otrzymaliśmy dla tego problemu poprzednio (patrz równ. (34-4)). Na podstawie prawa Biota-Savarta zawsze będziemy otrzymywać wyniki zgodne z wynikami otrzymywany doświadczalnie i na podstawie prawa Ampère'a.

Zagadnienie to również ma swój odpowiednik elektrostatyczny. Przy pomocy prawa Gaussa wyrowadziliśmy wyrażenie na natężenie pola elektrostatycznego  $\mathbf{E}$ , wytworzonego przez długą, naładowany pręt (paragraf 28-8); to samo zagadnienie rozwiązaliśmy również metodą całkowania w oparciu o prawo Coulomba (paragraf 27-4).

**Przykład 8. Kołowy przewodnik z prądem.** Na rysunku 34-18 przedstawiony jest przewodnik w kształcie okręgu o promieniu  $R$ , w którym płynie prąd o natężeniu  $i$ . Obliczyć  $\mathbf{B}$  dla punktów leżących na osi tego okręgu.

Wektor  $\mathrm{dl}$  elementu prądu położony u szczytu okręgu jest skierowany prostopadle do rysunku, w stronę patrzącego. Kąt  $\theta$  między wektorami  $\mathrm{dl}$  i  $\mathbf{r}$  wynosi  $90^\circ$ , a płaszczyzna wyznaczona przez te wektory jest prostopadła do płaszczyzny rysunku. Wektor  $\mathbf{dB}$  tworzy kąt prosty z tą płaszczyzną, leży więc w płaszczyźnie rysunku i tworzy kąt prosty z  $\mathbf{r}$ , co widać na rysunku.

Rozłożymy  $\mathbf{dB}$  na dwie składowe: jedną  $\mathbf{dB}_{||}$  — wzduż osi okręgu i drugą  $\mathbf{dB}_\perp$  — prostopadłe do tej osi. Jedynie  $\mathbf{dB}_{||}$  daje wkład do wypadkowego wektora indukcji  $\mathbf{B}$  w punkcie  $P$ . Wynika to stąd, że składowe  $\mathbf{dB}_{||}$  od wszystkich elementów prądu leżą na osi i sumują się; natomiast składowe  $\mathbf{dB}_\perp$  są skierowane prostopadle do tej osi w różnych kierunkach i, ze względu na symetrię, ich suma dla pełnego okręgu jest równa zeru. Zatem

$$\mathbf{B} = \int \mathrm{d}\mathbf{B}_{||},$$

przy czym całkowanie jest skalarne.

Z prawa Biota–Savarta (równ. (34-8)), dla elementu prądu pokazanego na rys. 34-18 mamy

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\mathrm{d}l \sin 90^\circ}{r^2}.$$

Ponadto

$$\mathrm{d}\mathbf{B}_{||} = \mathrm{d}\mathbf{B} \cos \alpha.$$

Z tych dwóch wyrażeń otrzymujemy

$$\mathrm{d}\mathbf{B}_{||} = \frac{\mu_0 i \cos \alpha \mathrm{d}l}{4\pi r^2}.$$

Z rysunku 34-18 widać, że  $r$  i  $\alpha$  wzajemnie zależą od siebie. Wyraźmy obie te wielkości za pomocą nowej zmiennej  $x$ , równej odległości od środka okręgu do punktu  $P$ . Otrzymamy związki

$$r = \sqrt{R^2 + x^2},$$

$$\cos \alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}.$$

Podstawiając je do wyrażenia na  $\mathrm{d}\mathbf{B}_{||}$  otrzymujemy

$$\mathrm{d}\mathbf{B}_{||} = \frac{\mu_0 i R}{4\pi(R^2 + x^2)^{3/2}} \mathrm{d}l.$$

Zauważmy, że wielkości  $i$ ,  $R$  i  $x$  mają tę samą wartość dla wszystkich elementów prądu. Całkując to równanie i uwzględniając, że  $\int \mathrm{d}l$  jest po prostu równa obwodowi okręgu ( $= 2\pi R$ ), otrzymujemy

$$\mathbf{B} = \int \mathrm{d}\mathbf{B}_{||} = \frac{\mu_0 i R}{4\pi(R^2 + x^2)^{3/2}} \int \mathrm{d}l = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (34-11)$$

Gdybyśmy w przykładzie 8 przyjęli, że  $x \gg R$ , tzn. nie rozważalibyśmy punktów leżących w pobliżu okręgu, to równanie (34-11) przyjęłoby postać

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i R^2}{2x^3}.$$

Uwzględniając, że  $\pi R^2$  jest równe powierzchni  $A$  koła i biorąc pod uwagę kołowy obwód złożony z  $N$  zwojów, możemy napisać

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{NiA}{x^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{x^3},$$

gdzie  $\mu$  nosi nazwę *dipolowego momentu magnetycznego* prądu kołowego. Przypomina nam to wzór znaleziony w zadaniu 25 z rozdziału 27 [ $E = (1/2\pi\epsilon_0)(p/x^3)$ ], który określa natężenie pola *elektrycznego* na osi dipola *elektrycznego*.

Tak więc wykazaliśmy dwoma sposobami, że prąd kołowy można traktować jak dipol magnetyczny; gdy umieścimy go w zewnętrznym polu magnetycznym — działa nań moment siły  $\tau = \mu \times B$  (równ. (33-11)), sam zaś prąd ten wytwarza pole magnetyczne, które dla punktów leżących na jego osi wyraża się ostatnio wyprowadzonym wzorem. Tablica 34-1 podsumowuje własności dipoli elektrycznych i magnetycznych.

Tablica 34-1. Niektóre wyrażenia dla dipoli

Własność	Typ dipola	Wzór
moment siły w polu zewnętrznym	elektryczny	$\tau = p \times E$
	magnetyczny	$\tau = \mu \times B$
energia w polu zewnętrznym	elektryczny	$U = -pE$
	magnetyczny	$U = -\mu B$
pole w odległych punktach leżących na osi dipola	elektryczny	$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{x^3}$
	magnetyczny	$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{x^3}$
pole w odległych punktach leżących na dwusiecznej, prostopadłej do osi dipola	elektryczny	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{x^3}$
	magnetyczny	$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu}{x^3}$

**Przykład 9.** Zgodnie z modelem Bohra, elektron w atomie wodoru porusza się po okręgu o promieniu  $5,1 \cdot 10^{-11}$  m z częstotliwością  $v = 6,5 \cdot 10^{15}$  Hz. (a) Jaką wartość ma indukcja  $B$  w środku tej orbity?

Natężenie prądu równe jest wielkości ładunku, jaki przechodzi w ciągu 1 s przez dowolny punkt orbity i dane jest wyrażeniem

$$i = ev = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 6,5 \cdot 10^{15} \text{ Hz} = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ A.}$$

Wartość  $B$  dla środka orbity otrzymujemy z równania (34-11) dla  $x = 0$ , czyli

$$B = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{2R} = \frac{(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) \cdot 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ A}}{2 \cdot 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}} = 12 \text{ T.}$$

(b) Jaka jest wartość magnetycznego momentu dipolowego równoważnego atomowi? Z równania (33-10)

$$\mu = NiA = 1 \cdot 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ A} \cdot \pi(5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m})^2 = 8,8 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2.$$

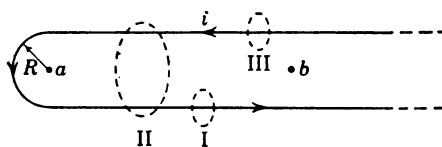
### Pytania

1. Czy linia, wzdłuż której wykonujemy całkowanie stosując prawo Ampère'a, może przechodzić przez przewodnik?

2. Przypuśćmy, że krzywa całkowania obejmuje kabel składający się z dwunastu przewodników, w których płyną prądy o różnych natężeniach i kierunkach. Jak w tym wypadku obliczyć natężenie  $i$  prądu występującego w prawie Ampère'a?

3. Zastosować jakościowo prawo Ampère'a dla trzech krzywych całkowania pokazanych na rys. 34-19.

4. Omówić i porównać prawo Gaussa i prawo Ampère'a.  
 5. (a) Czy prawo Ampère'a (równanie (34-1)) trzeba zawsze stosować do zamkniętej pętli? Czy można je stosować np. do półkolistego łuku? (b) Czy można stosować prawo Ampère'a do powierzchni zamkniętej?



Rys. 34-19. Pytanie 3. Zadanie 27

6. Podać szczegółowo trzy sposoby zmierzenia pola magnetycznego  $\mathbf{B}$  w punkcie  $P$ , w odległości (**biorąc prostopadle**)  $r$  od prostego, długiego przewodnika przewodzącego stały prąd  $i$ . Oprzeć się na: (a) wystrzeleniu cząstki o ładunku  $q$  przez punkt  $P$  z prędkością  $v$ , równolegle do drutu; (b) zmierzeniu siły na jednostkę długości wywieranej na drugi przewodnik, równoległy do pierwszego i przewodzący prąd  $i'$ ; (c) zmierzeniu momentu obrotowego działającego na mały dipol magnetyczny umieszczony w odległości  $r$  od przewodnika.

7. Prąd płynie przez długą rurkę miedzianą. Czy istnieje pole magnetyczne (a) wewnętrz i (b) na zewnątrz rurki?

8. Z równania (34-4) ( $B = \mu_0 i / 2\pi r$ ) widać, że w punktach leżących w pobliżu długiego przewodnika z prądem panuje silne pole magnetyczne. Skoro więc mamy prąd  $i$  oraz pole magnetyczne o indukcji  $B$ , dlaczego na przewodnik nie działa siła, zgodnie z równaniem:  $\mathbf{F} = il \times \mathbf{B}$ ?

9. Z urządzenia podobnego do cyklotronu wylatuje strumień protonów o energii 20 MeV. Czy cząstki wytwarzają pole magnetyczne?

10. Czy z samych zasad symetrii wynika, że linie pola  $\mathbf{B}$  wokół długiego, prostego przewodnika muszą być koniecznie koncentrycznymi kołami?

11. Długi, prosty przewodnik o promieniu  $R$  przewodzi stały prąd  $i$ . W jaki sposób, jeżeli w ogóle, pole magnetyczne wytworzone przez ten prąd zależy od  $R$ ?

12. Długi, prosty przewodnik o promieniu  $R$  przewodzi stały prąd  $i$ . Czy prawo Ampère'a obejmuje (równanie (34-1)): (a) drogę całkowania, która zawiera drut, lecz nie jest okrągła; (b) drogę całkowania, która nie zawiera drutu i (c) drogę całkowania, która zawiera drut, lecz nie leży w całości na jednej płaszczyźnie? Omówić to.

13. Dwa długie, proste przewodniki przecinają się pod kątem prostym. Opisać, co stanie się, gdy zaczną przewodzić prąd, jeżeli mogą swobodnie się poruszać?

14. Czy wartość  $\mathbf{B}$  jest stała dla punktów leżących na jednej linii indukcji pola magnetycznego?

15. W elektronice często skręca się razem przewody, w których płyną równe, lecz przeciwnie skierowane prądy, celem zmniejszenia ich magnetycznego działania. Dlaczego jest to skuteczne?

16. Dwa długie, równolegle przewodniki przewodzą jednakowe prądy  $i$ , w tym samym kierunku. Naszkicować linie wypadkowe pola  $\mathbf{B}$  powstałego wskutek występowania obu prądów. Czy rysunek ten sugeruje przyciąganie się dwóch przewodników (tak jak rys. 34-8 sugeruje siłę skierowaną do góry działającą na przewodnik przedstawiony na tym rysunku)?

17. Wyjaśnić zależność między rysunkiem 34-8 i równaniem (33-6a) ( $\mathbf{F} = il \times \mathbf{B}$ ).

18. Rozważmy „unoszący się” drut z przykładu 3 z punktu widzenia jego równowagi względem przemieszczeń poziomych. Drut „unosi się” nad lub pod drugim drutem sztywno zamocowanym. Zestawić wyniki rozważań dla obu położen drutów i dla obu kierunków przemieszczeń (poziomego i pionowego).

19. Co się stanie, gdy przepuścimy prąd przez pionowo zawieszoną sprzągne, do której u dołu doczepiony jest cięzarek?

20. Skomentować następujące stwierdzenie: „Indukcja magnetyczna na zewnątrz długiego solenoidu nie może być równa零, chociażby z tego względu, że spiralny charakter zwojów powoduje powstanie w punktach zewnętrznych takiego pola, jakie istniałoby w przypadku prostoliniowego przewodnika z prądem umieszczonego wzdłuż osi solenoidu”.

21. Czy dla solenoidu o przekroju kwadratowym słuszne jest równanie (34-7) ( $B = \mu_0 in$ )?

22. Przekonać się samemu, że dla punktów na zewnątrz doskonalego solenoidu, takiego jak na rys. 34-14, pole  $\mathbf{B} = 0$ .

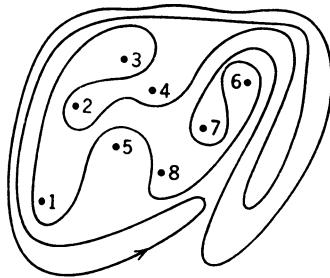
23. Jaki jest kierunek pola magnetycznego wytworzzonego w punktach *a*, *b* i *c* (rys. 34-16) przez zaznaczony na rysunku element prądu?
24. Czy we wszystkich punktach leżących wewnątrz obszaru ograniczonego kołowym przewodnikiem z prądem o natężeniu *i* wektor indukcji *B* jest taki sam?
25. Omówić podobieństwo i różnice między prawem Coulombla a prawem Biota-Savarta.
26. Równanie (34-9) przedstawia prawo Biota-Savarta w postaci wektorowej. Napisać w postaci wektorowej jego równoważnik elektrostatyczny (tzn. równ. (27-6), czyli  $dE = dq/4\pi\epsilon_0 r^2$ ).
27. Jak można zmierzyć dipolowy moment magnetyczny igły kompasu?
28. Na jakiej podstawie możemy mówić, że prąd kołowy jest dipolem magnetycznym?
29. W pokoju, w którym znajduje się czytelnik, leży na podłodze kołowy obwód z drutu przewodzący stały prąd *i*, patrząc z góry, w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Jaki jest kierunek magnetycznego momentu dipolowego tego obwodu kołowego?
30. Jako ćwiczenie w przedstawianiu wektorów, przeciwstawić i porównać rys. 18-12, odnoszący się do przepływu cieczy, z rys. 34-7, odnoszącym się do pola magnetycznego. Jak duża może być wg czytelnika ta analogia?

### Zadania

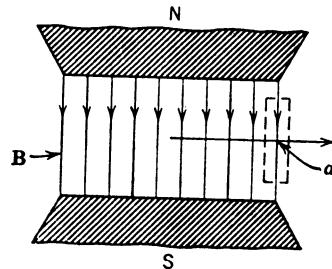
#### Paragraf 34-1

1. Osiem drutów przecina stronę prostopadle w punktach pokazanych na rys. 34-20. Drut oznaczony liczbą całkowitą *k* ( $k = 1, 2, \dots, 8$ ) przewodzi prąd  $ki_0$ . W drutach oznaczonych nieparzystym *k* prąd płynie w góre, a w drutach oznaczonych parzystym *k* prąd płynie w dół. Wyznaczyć wartość  $\oint B dl$  wzduż zamkniętej drogi na rysunku w kierunku strzałki.

Odp.:  $-10\mu_0 i_0$  (Dlaczego znak minus?).



Rys. 34-20. Zadanie 1



Rys. 34-21. Zadanie 2

2. Wykazać, że niemożliwe jest, aby indukcja *B* jednorodnego pola magnetycznego gwałtownie spała do zera, gdy badamy je przesuwając się w kierunku prostopadłym do niego, jak pokazuje pozioma strzałka na rys. 34-21 (punkt *a*). W rzeczywistych magnesach zawsze występuje wygięcie linii sił pola *B*, co oznacza ciągłe i stopniowe zbliżanie się *B* do zera. (Wskazówka: Zastosować prawo Ampèrea do prostokątnej drogi całkowanej na rysunku linią przerywaną.)

#### Paragraf 34-2

3. Nieizolowany przewód miedziany (o średnicy 0,25 mm) może bez przegrzania przewodzić prąd o natężeniu 50 A. Jaka jest dla takiego prądu wartość *B* przy powierzchni przewodnika?

Odp.:  $7,9 \times 10^{-3}$  T.

4. Geodeta ustawił kompas pod przewodami elektrycznymi, w których płynie prąd stały o natężeniu 100 A, w odległości 6 m od nich. Czy będzie to miało widoczny wpływ na wskazania kompasu? Składowa pozioma ziemskiego pola magnetycznego ma wartość około 0,2 Gs.

5. Jeżeli ładunek punktowy o wartości  $+q$  i prędkością *v* znajduje się w odległości *d* od osi długiego, prostego drutu przewodzącego prąd *i* porusza się prostopadle do osi drutu, to jaki jest kierunek i wartość siły działającej nań, gdy ładunek porusza się: (a) w kierunku do drutu, (b) od drutu?

Odp.: (a)  $\frac{\mu_0}{2} \frac{qv i}{r}$ , nierównoległa do *i*. (b) Ta sama wartość, równoległa do *i*.

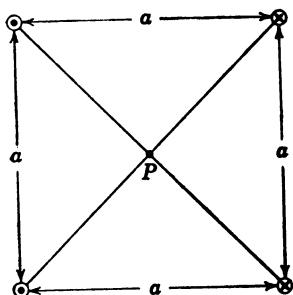
6. W długim prostoliniowym przewodniku płynie prąd o natężeniu 50 A. W odległości 5 cm od tego przewodnika znajduje się elektron leczący z prędkością  $10^7$  m/s. Jaka siła działa na elektron, gdy jego prędkość skierowana jest: (a) w stronę przewodnika, (b) równolegle do niego i (c) prostopadle do kierunków podanych w (a) i (b)?

7. Długi, lity, cylindryczny drut miedziany o promieniu  $R$  przewodzi prąd  $i$  rozmiieszczony jednorodnie na przekroju poprzecznym drutu. Naszkicować wartość pola magnetycznego  $B$  jako funkcję odległości  $r$  od osi drutu dla (a)  $r < R$  i (b)  $r > R$ .

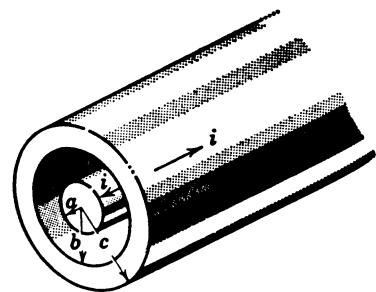
8. Cztery długie druty miedziane są umieszczone równolegle, tak że przekrój utworzonego układu jest kwadratem o boku  $a = 20$  cm. W każdym z drutów płynie prąd o natężeniu  $i = 20$  A w kierunku wskazanym na rys. 34-22. Jaka jest wartość i kierunek wektora  $B$  w środku  $P$  kwadratu?

9. Długi, wspólnosowy kabel składa się z dwóch koncentrycznych przewodników o wymiarach podanych na rys. 34-23. W przewodnikach tych płyną równe, lecz przeciwnie skierowane prądy o natężeniu  $i$ . Wyznaczyć wartość indukcji magnetycznej  $B$ : (a) wewnętrz środkowego przewodnika ( $r < a$ ), (b) między przewodnikami ( $a < r < b$ ), (c) wewnętrz zewnętrznego przewodnika ( $b < r < c$ ), (d) na zewnątrz kabla ( $r > c$ ).

$$Odp.: (a) \frac{\mu_0 ir}{2\pi a^2}, (b) \frac{\mu_0 i}{2\pi r}, (c) \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \left( \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \right), (d) Zero.$$



Rys. 34-22. Zadanie 8



Rys. 34-23. Zadanie 9

10. Dwa długie druty umieszczone w odległości wzajemnej  $d$  (rys. 34-24) przewodzą antyrównoległe prądy o natężeniu  $i$ . (a) Wykazać, że  $B$  w punkcie  $P$  równoodległym od obu drutów jest dane wzorem:

$$B = \frac{2\mu_0 id}{\pi(4R^2 + d^2)}.$$

(b) Jaki jest kierunek pola  $B$ ?

11. Na rysunku 34-25 przedstawiony jest cylindryczny (pusty w środku) przewodnik, o promieniach  $a$  i  $b$ . Przez przewodnik ten płynie prąd o natężeniu  $i$  równomiernie rozłożony na całym jego przekroju. (a) Pokazać, że dla punktów leżących wewnętrz przewodnika (tzn. dla  $a < r < b$ ) wartość indukcji magnetycznej  $B$  wynosi

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi(b^2 - a^2)} \frac{r^2 - a^2}{r}.$$

Zbadać zachowanie się tego wyrażenia dla granicznego przypadku  $a = 0$ . (b) Wykonać przybliżony wykres zależności  $B(r)$  dla  $r$  od 0 do  $\infty$ .

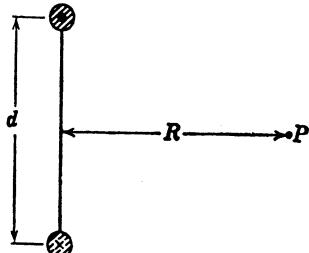
12. Dwa długie, proste druty znajdujące się w odległości  $d$  od siebie (10 cm) przewodzą prądy  $i$  (100 A). Rysunek 34-26 pokazuje przekrój poprzecznego, z drutami biegącymi prostopadle do kartki i punkt  $P$  leżący na symetrycznej odcinku  $d$ . Znaleźć wartość i kierunek pola magnetycznego w  $P$ , gdy prąd w lewym drucie wypływa z kartki do góry, a prąd w prawym drucie płynie (a) w tym samym kierunku i (b) w kierunku przeciwnym.

13. Rozpatrzmy przewodnik złożony z nieskończoną ilości umieszczonej obok siebie drutów, z których każdy jest nieskończonie długi i przewodzi prąd o natężeniu  $i$ . Wykazać, że linie wektora  $B$  przebiegają

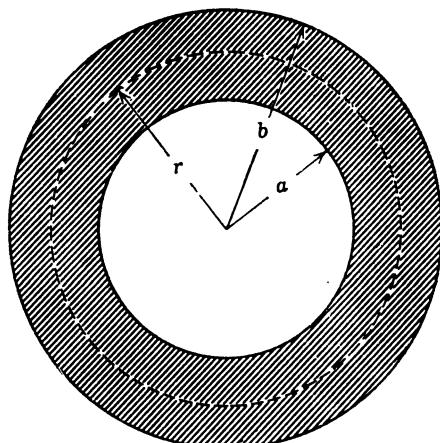
gają tak, jak to pokazuje rys. 34-27 i że wartość  $B$  dla wszystkich punktów nad i pod tak utworzoną płaszczyzną prądu jest równa

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 n i,$$

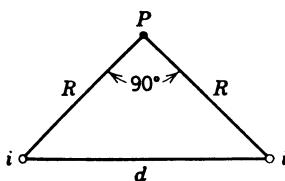
gdzie  $n$  jest liczbą drutów na jednostkę długości. Rozumowanie przeprowadzić dwukrotnie: stosując bezpośrednio prawo Ampère'a oraz traktując zadanie jako graniczny przypadek przykładu 2.



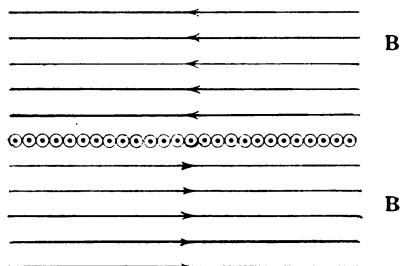
Rys. 34-24. Zadanie 10



Rys. 34-25. Zadanie 11



Rys. 34-26. Zadanie 12



Rys. 34-27. Zadanie 13

14. Długi prosty przewodnik ma kołowy przekrój poprzeczny o promieniu  $R$ . W przewodniku płynie prąd  $i$ . Wewnętrzna przewodnika znajduje się cylindryczna dziura o promieniu  $a$ , której osi jest równoległa do osi przewodnika i znajduje się w odległości  $b$  od niej. Zastosować zasady superpozycji i otrzymać wzór na pole magnetyczne  $B$  wewnętrznej dziury.

#### Paragraf 34-3

15. Długi przewodnik z prądem o natężeniu 100 A umieszczono w zewnętrznym polu magnetycznym o indukcji 50 Gs. Przewodnik tworzy kąt prosty z liniami sił tego pola. Wyznaczyć punkty, w których wypadkowe pole magnetyczne jest równe zeru.

Odp.:  $B = 0$  wzdłuż linii równoległej do drutu i w odległości 4 mm od niego.

#### Paragraf 34-4

16. Jaka jest wartość i kierunek siły działającej na jednostkę długości N/m dolnego, lewego drutu w zadaniu 8?

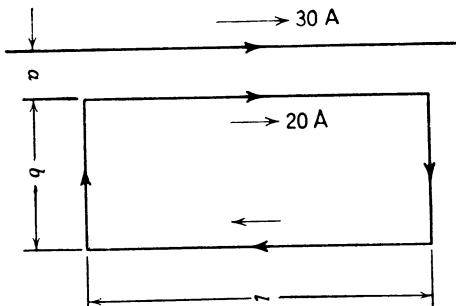
17. Na rysunku 34-28 przedstawiony jest długi drut przewodzący prąd o natężeniu 30 A oraz prostokątny obwód, w którym płynie prąd o natężeniu 20 A. Obliczyć siłę wypadkową działającą na ten obwód. Przyjąć, że  $a = 1,0$  cm,  $b = 8,0$  cm,  $l = 30$  cm.

Odp.:  $3,2 \cdot 10^{-3}$  N, w kierunku drutu.

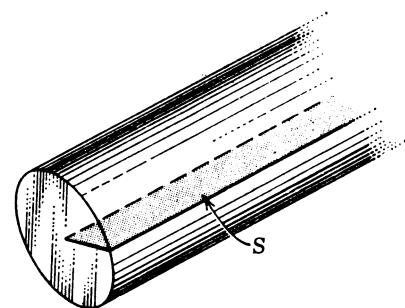
18. Założmy, że na rys. 34-22 wszystkie prądy płyną w tym samym kierunku. Jaka siła na jednostkę długości ( $N/m$ , wartość i kierunek) działa na którykolwiek z drutów? W analogicznym przypadku równoległego ruchu naładowanych cząstek w plazmie znane to jest jako efekt skurczu.

19. Dwa długie, równolegle druty o pomijalnych promieniach znajdują się w odległości  $d$  od siebie. Niech przez każdy z nich płynie prąd  $i$  (a) w tym samym kierunku, (b) w kierunkach przeciwnych. Niech  $r$  będzie odlegością od środka jednego z drutów. Znaleźć wartość  $B$  pola magnetycznego w obszarze między przewodnikami, w punktach leżących na płaszczyźnie przechodzącej przez te druty, jako funkcję  $r$ .

$$\text{Odp.: (a)} \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left[ \frac{d-2r}{r(d-r)} \right]. \quad \text{(b)} \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left[ \frac{d}{r(d-r)} \right].$$



Rys. 34-28. Zadanie 17



Rys. 34-29. Zadanie 25

#### Paragraf 34-5

20. Solenoid o 200 zwojach, o długości 25 cm i średnicy 10 cm przewodzi prąd 0,30 A. (a) Jaka jest wartość pola magnetycznego  $B$  w pobliżu środka solenoidu? (b) Jaki strumień magnetyczny przechodzi przez pierścień o wewnętrznej średnicy 2 cm i średnicy zewnętrznej 8 cm, jeżeli płaszczyzna pierścienia jest prostopadła do osi solenoidu?

21. Wyrazić (a) pole magnetyczne  $B$  i (b) strumień magnetyczny  $\Phi_B$  przy pomocy masy, długości, czasu i ładunku ( $M, L, T, Q$ ).

$$\text{Odp.: (a)} M/QT. \quad \text{(b)} ML^2/QT.$$

22. Toroid o przekroju poprzecznym  $5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$  i promieniu wewnętrznym 15 cm ma 500 zwojów drutu i przewodzi prąd 0,80 A. (a) Jaka jest wartość pola magnetycznego  $B$  w środku toroidu (tzn. w odległości 17,5 cm od osi toroidu)? (b) Jaki jest strumień magnetyczny przechodzący przez przekrój poprzeczny?

23. Długi prosty drut o promieniu  $r$  przewodzi stały prąd  $i$ . (a) Rozważyć hipotetyczne, koncentryczne koło o promieniu  $2a$ , leżące na płaszczyźnie prostopadłej do drutu. Jaki strumień magnetyczny  $\Phi_B$  przechodzi przez to koło? (b) Jeżeli mielibyśmy podwoić prąd  $i$ , co stałoby się z tym strumieniem?

*Odp.: (a) Zero. (b) W dalszym ciągu zero; żadne linie pola  $B$  nie przechodzą przez koło w żadnym z przypadków.*

24. Wyprowadzić równanie (34-7) dla solenoidu, w oparciu o wyrażenie na indukcję pola magnetycznego na osi obwodu kołowego (przykład 8). (*Wskazówka:* Podzielić solenoid na obwody kołowe o infinitesimalnej grubości i całkować.)

25. Długi drut miedziany przewodzi prąd o natężeniu 10 A. Obliczyć strumień magnetyczny przypadający na 1 m długości drutu dla płaskiej powierzchni  $S$  (rys. 34-29) przeprowadzonej wewnątrz tego drutu.

26. Dwa długie, równolegle druty miedziane o średnicy 0,25 cm, przewodzą przeciwnie skierowane prądy o natężeniu 10 A. (a) Obliczyć strumień magnetyczny przechodzący przez obszar leżący pomiędzy osiami tych drutów przypadający na 1 m ich długości, gdy odległość między środkami drutów wynosi 2 cm. (b) Jaka część strumienia (a) leży wewnątrz drutów? (b) Powtórzyć obliczenia z punktu (a) dla prądów o kierunkach zgodnych.

### Paragraf 34-6

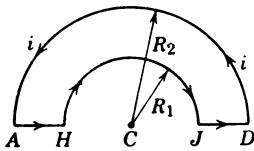
27. W obwodzie pokazanym na rys. 34-19 płynie prąd o natężeniu 10 A. Jaki jest kierunek i wartość indukcji  $\mathbf{B}$  w punkcie  $a$  oraz w punkcie  $b$ ? Przyjąć, że  $R = 0,50$  cm.

Odp.: (a)  $1,0 \cdot 10^{-3}$  T, na zewnątrz rysunku. (b)  $8,0 \cdot 10^{-4}$  T, na zewnątrz rysunku.

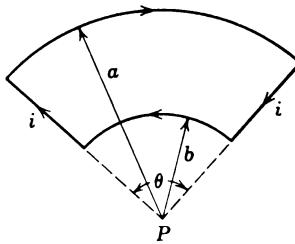
28. Zastosować prawo Biota-Savarta do obliczenia pola magnetycznego  $\mathbf{B}$  w  $C$ , wspólnym środku półkolistych łuków  $AD$  i  $HJ$  o promieniach odpowiednio  $R_2$  i  $R_1$  tworzących obwód  $ADJHA$ , przewodzący prąd  $i$ , jak widać na rys. 34-30.

29. Rozpatrzyć obwód na rys. 34-31. Oba łuki są częściami kół o promieniach  $a$  i  $b$ . Dwa proste odcinki leżą na promieniach. Znaleźć pole magnetyczne  $\mathbf{B}$  w punkcie  $P$ , zakładając prąd  $i$  w obwodzie.

Odp.:  $B = \frac{\mu_0 i \theta}{4\pi} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$  przed płaszczyznę rysunku.



Rys. 34-30. Zadanie 28

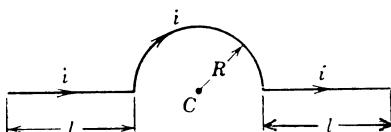


Rys. 34-31. Zadanie 29

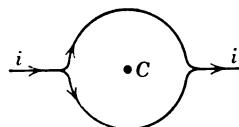
30. W przewodniku przedstawionym na rysunku 34-32 płynie prąd o natężeniu  $i$ . Jaka jest wartość indukcji magnetycznej w środku  $C$  półkola, pochodząca (a) od każdego z prostoliniowych odcinków o długości  $l$ , (b) od półkola o promieniu  $R$ , (c) od całego przewodnika?

31. Prosty przewodnik przechodzi w dwa identyczne półkliste rozwidlenia jak na rys. 34-33. Jaki jest pole magnetyczne w środku  $C$  tak uformowanego kołowego obwodu?

Odp.: Zero.



Rys. 34-32. Zadanie 30



Rys. 34-33. Zadanie 31

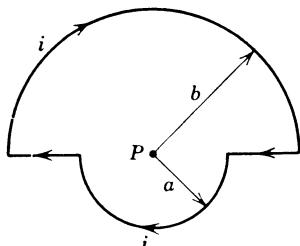
32. W kołowej pętli o promieniu 10 cm, wykonanej z drutu miedzianego, płynie prąd o natężeniu 15 A. W jej środku umieszczono drugą pętlę o promieniu 1,0 cm zawierającą 50 zwojów, w których płynie prąd o natężeniu 1,0 A. (a) Jaka jest indukcja magnetyczna  $\mathbf{B}$  wytwarzana przez dużą pętlę w jej środku? (b) Jaki moment siły działa na małą pętlę? Przyjąć, że płaszczyzny obu pętli są do siebie prostopadłe, a pole magnetyczne wytworzone przez dużą pętlę w obszarze zajętym przez małą pętlę jest w zasadzie jednorodne.

33. Dany jest zamknięty obwód o promieniach  $a$  i  $b$ , jak widać na rys. 34-34, przewodzący prąd  $i$ . (a) Jaka jest wartość i kierunek pola  $\mathbf{B}$  w punkcie  $P$ ? (b) Znaleźć moment dipolowy obwodu?

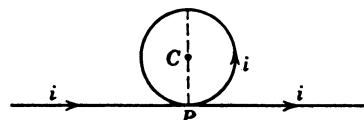
Odp.: (a)  $\frac{\mu_0 i}{4} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ , (b)  $\frac{i\pi}{2} (a^2 + b^2)$  za płaszczyznę rysunku

34. (a) Długi drut zgęsto jak na rys. 34-35, tak aby nie stykał się w punkcie przecięcia  $P$ . Promień odcinka kołowego wynosi  $R$ . Ustalić wartość i kierunek pola  $\mathbf{B}$  w środku  $C$  części kołowej, gdy prąd  $i$  płynie jak zaznaczono. (b) Kołowa część drutu jest obracana bez jej zniekształcenia wokół oznaczonej średnicy prostopadłej do prostej części drutu. Moment magnetyczny związany z obwodem kołowym przybiera kierunek taki sam jak prąd w prostej części drutu. Ustalić w tym przypadku pole  $\mathbf{B}$  w punkcie  $C$ .

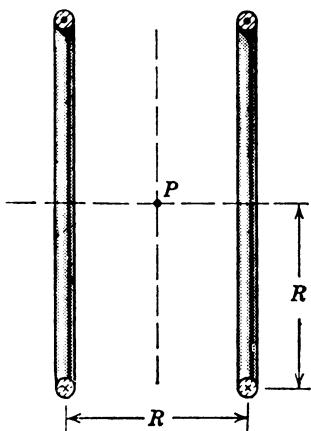
**35. Cewki Helmholtza.** Dwie cewki, każda złożona z 300 zwojów, są umieszczone w odległości równej ich promieniom, tak jak to pokazano na rys. 34-36. Wykonać wykres indukcji  $B$  (dla  $R = 5$  cm,  $i = 50$  A) jako funkcji odległości  $x$  mierzonej wzdłuż ich wspólnej osi w przedziale od  $x = -5$  cm do  $x = +5$  cm, przyjmując, że  $x = 0$  w punkcie  $P$ . (Cewki takie zapewniają wyjątkową jednorodność pola  $B$  w pobliżu punktu  $P$ .)



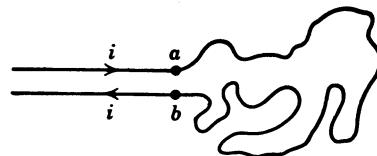
Rys. 34-34. Zadanie 33



Rys. 34-35. Zadanie 34



Rys. 34-36. Zadania 35, 36



Rys. 34-37. Zadanie 38

**36.** Wykazać, że jeśli w zadaniu 35 przyjmiemy, że odległość  $z$  między cewkami jest zmienna, to dla  $z = R$  nie tylko pierwsza pochodna  $B$  ( $dB/dx$ ), ale i druga ( $d^2B/dx^2$ ) jest w punkcie  $P$  równa zero. To właśnie tłumaczy jednorodność  $B$  w pobliżu punktu  $P$  dla tej szczególnej odległości cewek.

**37.** Na powierzchni plastikowego dysku o promieniu  $R$  rozłożony jest równomiernie ładunek  $q$ . Pokazać, że gdy dysk obraca się wokół swojej osi z prędkością kątową  $\omega$ , to: (a) indukcja w środku dysku wynosi

$$B = \frac{\mu_0 \omega q}{2\pi R};$$

(b) magnetyczny moment dipolowy dysku równa się

$$\mu = \frac{1}{2} \omega q R^2.$$

(Wskazówka: Obracający się dysk jest równoważny zespołowi prądów kołowych; patrz przykład 8.)

**38.** Obwód z giętkiego drutu o nieregularnym kształcie umieszczony jest na stole i przytwierdzony w punktach  $a$  i  $b$  jak pokazano na rys. 34-37. Jeżeli teraz przepuścimy przez ten obwód prąd  $i$ , to czy przyjmie on kształt kołowy czy też jeszcze bardziej nieregularny.

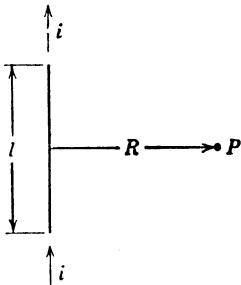
**39.** W prostoliniowym przewodniku o długości  $l$  płynie prąd o natężeniu  $i$ . (a) Wykazać, że wartość

indukcji  $B$  pola magnetycznego wytworzonego przez ten prąd dla punktów leżących na symetralnej tego przewodnika, w odległości  $R$  od niego (rys. 34-38) wynosi

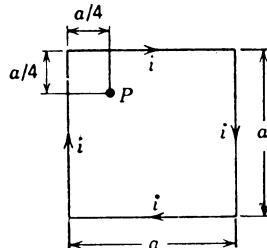
$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \frac{l}{(l^2 + 4R^2)^{1/2}}.$$

(b) Czy dla  $l \rightarrow \infty$  wyrażenie to daje wynik, jakiego należałoby oczekивать?

Odp.: (b) Tak.



Rys. 34-38. Zadanie 39



Rys. 34-39. Zadanie 44

40. W kwadratowym obwodzie o boku  $a$  płynie prąd o natężeniu  $i$ . Wykazać, że wartość indukcji  $B$  w środku kwadratu wyraża się wzorem:

$$B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 i}{\pi a}.$$

41. W obwodzie kwadratowym o boku  $a$  płynie prąd o natężeniu  $i$ . (a) Wykazać, że dla punktów leżących na osi obwodu w odległości  $x$  od jego środka indukcja  $B$  wyraża się wzorem

$$B = \frac{4\mu_0 i a^2}{\pi(4x^2 + a^2)(4x^2 + 2a^2)^{1/2}}.$$

(b) Czy dla  $x = 0$  wyrażenie to przechodzi we wzór otrzymany w zadaniu 40? (c) Czy obwód kwadratowy zachowuje się jak dipol dla  $x \gg a$ ? Jeśli tak, to jaki jest jego moment dipolowy?

Odp.: (b) Tak. (c) Tak;  $\mu = ia^2$ .

42. (a) Wykazać, że indukcja  $B$  w środku prostokąta o bokach równych odpowiednio  $l$  i  $d$  przewodzącego prąd o natężeniu  $i$  jest dana wyrażeniem

$$B = \frac{2\mu_0 i}{\pi} \frac{(l^2 + d^2)^{1/2}}{ld}.$$

(b) Czy dla  $l \gg d$  wyrażenie to daje wynik, jakiego należałoby oczekiwać?

43. (a) Obwód ma kształt regularnego wielokąta o  $n$  bokach, wpisanego w okrąg o promieniu  $a$ . Wykazać, że jeśli w obwodzie tym płynie prąd o natężeniu  $i$ , to indukcja magnetyczna w środku okręgu jest dana wyrażeniem:

$$B = \frac{\mu_0 ni}{2\pi a} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

(b) Wykazać, że dla  $n \rightarrow \infty$  wyrażenie to dąży do odpowiedniego wyrażenia dla obwodu kołowego.

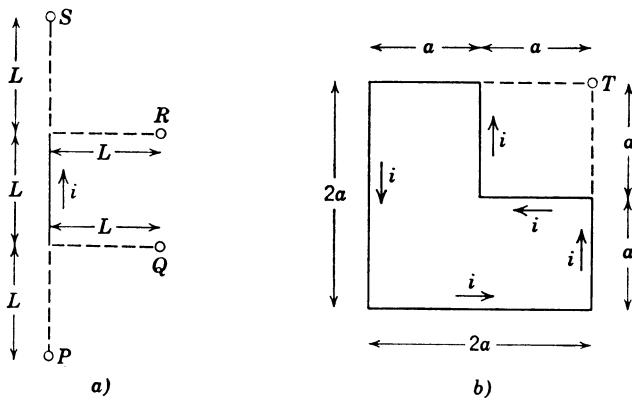
44. Obliczyć indukcję  $B$  w punkcie  $P$  na rys. 34-39. Przyjąć  $i = 10$  A,  $a = 8,0$  cm.

45. Dany jest drut o długości  $l$ , w którym może płynąć prąd o natężeniu  $i$ . Z drutu tego można utworzyć okrąg lub kwadrat. W którym z tych przypadków wartość  $B$  w punkcie środkowym będzie większa? Patrz zadanie 40.

Odp.: Kwadrat.

46. (a) Prąd  $i$  płynie przez prosty drut o długości  $L$  w kierunku pokazanym na rys. 34-40a. Wychodząc z prawa Biota-Savarta, ustalić wypadkowe pole magnetyczne (odpowiednio  $\mathbf{B}_P$ ,  $\mathbf{B}_Q$ ,  $\mathbf{B}_R$ ,  $\mathbf{B}_S$  — kierunek

i wartość w każdym przypadku) w każdym z czterech punktów  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  (współpłaszczyznowych z drutem). (b) Stosując wyniki z (a) obliczyć pole magnetyczne  $\mathbf{B}$  (wartość i kierunek) powstające w punkcie  $T$  przy przepływie prądu takim, jak zaznaczono na sześciobocznym, prostoliniowym obwodzie pokazanym na rys. 30-40b. (Wszystkie rysunki winny leżeć na tej samej płaszczyźnie i wszystkie kąty winny być równe  $90^\circ$ .)



Rys. 34-40. Zadanie 46

# 35. Prawo indukcji Faradaya

## 35-1. Doświadczenia Faradaya

Dla szeregu praw fizycznych trudno jest znaleźć doświadczenie, które w sposób bezpośredni i przekonywający prowadziłyby do ich sformułowania. Tak na przykład prawo Gaussa jest ogólnym prawem, przy pomocy którego można było zinterpretować i powiązać wszystkie doświadczenia elektrostatyczne. W związku z tym w rozdziale 28 uznaliśmy za celowe najpierw podać prawo Gaussa, a następnie pokazać, że opisane później doświadczenia są z nim zgodne.

*Prawo indukcji Faradaya*, które jest jednym z podstawowych równań elektrodynamiki (patrz tablica 40-2), wyróżnia się tym, że istnieje wiele prostych doświadczeń, z których to prawo może być — i było — bezpośrednio wyprowadzone. Doświadczenia te zostały wykonane przez Michaela Faradaya w Anglii w roku 1831 i przez Josepha Henry'ego w Stanach Zjednoczonych, mniej więcej w tym samym czasie.

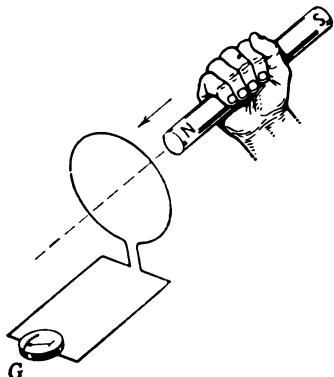
Faraday i Henry mieli kilka podobnych zdarzeń w swoim życiu. Obydwaj byli zatrudnieni w młodym wieku. Faraday w wieku 14 lat terminował u londyńskiego introligatora, skąd pisał „Jest tu pełno książek i czytam je”. Henry w wieku 13 lat terminował u zegarmistrza w Albany, stan Nowy Jork.

W późniejszych latach Faraday otrzymał nominację na dyrektora Królewskiego Instytutu w Londynie, ufundowanego w dużej części przez amerykanina, Benjamina Thompsona (hrabia Rumforda), z drugiej strony Henry został sekretarzem Smithsonian Institute in Washington D.C., który był ufundowany przez Jamesa Smithsona. Ich największym naukowym odkryciem dokonanym niezależnie, niemal w tym samym czasie, było odkrycie prawa indukcji elektromagnetycznej, którą zajmiemy się w tym rozdziale. Mimo, że Faraday opublikował swe wyniki pierwszy, co dało mu pierwszeństwo jako odkrywcy, to międzynarodową jednostką SI indukcyjności jest *henr* (skrót H, patrz rozdział 36). Z drugiej strony jednostką SI pojemności jest *farad* (skrót F).

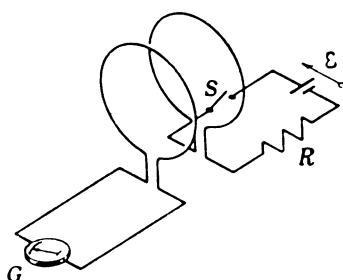
W paragrafie 38-1, gdzie dyskutujemy drgania w obwodach pojemnościowo-indukcyjnych przekonamy się jak właściwe jest połączenie nazwisk tych współcześnie żyjących utalentowanych ludzi przy opisie tego zjawiska.

Na rysunku 35-1 przedstawiony jest przewodzący zwój, którego końcówki połączone są z galwanometrem. Normalnie wskazówka galwanometru nie wychyla się, gdyż w obwodzie nie ma siły elektromotorycznej. Jeśli jednak do zwoju zbliżymy magnes sztabkowy, tak aby jego biegun północny zwrócony był w stronę zwoju — obserwujemy ciekawe

zjawisko. Mianowicie w czasie ruchu magnesu w kierunku zwoju wskazówka galwanometru wychyla się pokazując, że w obwodzie został wytworzony prąd. Gdy magnes pozostaje nieruchomy w stosunku do zwoju — wskazówka nie wychyla się. Gdy magnes oddala się od zwoju — wskazówka znowu wychyla się w przeciwnym kierunku. Oznacza to, że prąd w zwoju ma kierunek przeciwny. Jeśli zamiast bieguna północnego używamy południowego, doświadczenie przebiega podobnie jak poprzednio, tylko wychylenia wskazówki są przeciwe. Dalsze doświadczenia pokazują, że główną rolę odgrywa tu wzajemny ruch magnesu i zwoju. Nie ma znaczenia czy magnes porusza się w stronę zwoju, czy zwoj w stronę magnesu.



Rys. 35-1. Gdy magnes porusza się względem zwoju, wtedy wskazówka galwanometru  $G$  wychyla się. Liczy się tylko ich wzajemny ruch



Rys. 35-2. Przy zamykaniu i otwieraniu przełącznika  $S$  obserwujemy krótkotrwałe wychylenie wskazówki galwanometru  $G$ . Nie występuje żaden ruch

Prąd pojawiający się w tym doświadczeniu nazywa się *prądem indukowanym* i mówimy o nim, że jest wywołany *indukowaną siłą elektromotoryczną*. Należy zauważać, że nigdzie w obwodzie nie ma baterii. Na podstawie doświadczeń podobnych do wyżej opisanego, Faraday był w stanie sformułować prawo, które podaje wartość i kierunek tej siły elektromotorycznej (SEM). Takie SEM mają duże znaczenie praktyczne. Prawdopodobnie oświetlenie pokoju, w którym czytelnik czyta tę książkę, wytwarzane jest dzięki indukowanej SEM, powstającej w technicznych generatorach elektrycznych.

Innego rodzaju doświadczenie przeprowadza się za pomocą urządzenia przedstawionego na rys. 35-2. Dwa zwoje umieszcza się blisko siebie, ale tak, aby nie kontaktowały elektrycznie. W chwili zamknięcia przełącznika  $S$ , czyli włączenia prądu stałego w prawym obwodzie, nastąpi chwilowe wychylenie się wskazówki galwanometru. Podobnie, przy otwieraniu przełącznika, czyli przerywaniu prądu, znowu nastąpi chwilowe wychylenie się wskazówki, ale w stronę przeciwną. W tym doświadczeniu żaden z makroskopowych przedmiotów nie porusza się. Faraday opisał to tak: „Gdy obwód został zamknięty, wywołało to w galwanometrze nagły i bardzo słaby efekt. Podobnie słaby efekt wystąpił także wtedy, gdy odłączono baterię. Gdy jednak prąd woltaiczny przepływał stale przez jedną ze zwojnic, nie można było zauważać ani galwanometrycznych, ani żadnych innych zjawisk w rodzaju indukcji w drugiej zwojnicy, chociaż stwierdzono, że siła elektromotoryczna baterii była bardzo duża...”

Doświadczenie uczy, że zawsze, gdy prąd w obwodzie znajdującym się po prawej stronie na rys. 35-2 zmienia się, w obwodzie po lewej stronie pojawia się *indukowana SEM*. Znaczenie ma tu *nie wielkość natężenia prądu, lecz szybkość, z jaką to natężenie się zmienia*.

### 35-2. Prawo indukcji Faradaya

Na podstawie obserwacji powyższych doświadczeń Faraday doszedł do wniosku, że najważniejszym czynnikiem wspólnym dla wszystkich tych doświadczeń jest zmiana strumienia  $\Phi_B$  indukcji magnetycznej w lewym zwoju. Strumień ten może być wytworzony przez magnes sztabkowy lub obwód z prądem. Prawo indukcji Faradaya głosi, że indukowana w obwodzie SEM równa jest (wyłączając znak minus) szybkości, z jaką zmienia się strumień przechodzący przez ten obwód. Jeśli szybkość zmian strumienia jest mierzona w Wb/s, to SEM  $\mathcal{E}$  otrzymamy w woltach. Prawo to możemy przedstawić w postaci równania

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (35-1)$$

Równanie to nosi nazwę *prawa indukcji Faradaya*. Znak minus dotyczy *kierunku* indukowanej SEM, o czym będzie jeszcze mowa w paragrafie 35-3\*.

Jeżeli równanie (35-1) zastosować do zwojnicy o  $N$  zwojach, to w każdym z nich pojawi się SEM i te SEM dodadzą się. Jeżeli zwojnicę jest utworzona z cienkiego drutu i nawinięta tak ciasno, że o każdym zwoju można powiedzieć, iż zajmuje to samo miejsce w przestrzeni, to strumień przechodzący przez każdy zwój będzie taki sam. Ponadto w (idealnych) toroidach i solenoidach strumień przechodzący przez każdy zwój też będzie jednakowy (patrz paragraf 34-5). We wszystkich tych urządzeniach indukowana SEM jest dana wzorem:

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(N\Phi_B)}{dt}, \quad (35-2)$$

gdzie  $N\Phi_B$  jest miarą *calkowitego strumienia* przechodzącego przez urządzenie.

Z rysunków 35-1 i 35-2 wynika, że istnieją co najmniej dwa sposoby wytworzenia w obwodzie indukowanej SEM poprzez zmiany strumienia objętego przez ten obwód. Zachowanie zwojnicy dołączonej do galwanometru jest w obu przypadkach identyczne; ważne jest tylko to, że strumień przechodzący przez przekrój zwojów zmienia się. Warto dodać, że zmianę strumienia objętego obwodem można uzyskać zmieniając kształt tego obwodu, tzn. rozciągając go lub ściskając.

**Przykład 1.** W długim solenoidzie zawierającym 200 zwojów/cm o średnicy 3,0 cm płynie prąd o natężeniu 1,5 A. Wewnątrz umieszczać ściśle nawiniętą cewkę o 100 zwojach i średnicy 2,0 cm. Cewka jest tak ustawniona, że linie indukcji  $B$  w środku solenoidu są równoległe do jej osi. Prąd płynący w zwojnicy w ciągu czasu 0,050 s najpierw w sposób jednostajny spada do zera, a następnie płynie w przeciwnym kierunku i osiąga natężenie 1,5 A. Jak duża SEM indukuje się w cewce w czasie zmian prądu?

Indukcja  $B$  w środku solenoidu dana jest równaniem (34-7), czyli

$$B = \mu_0 ni = (4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) \cdot (200 \cdot 10^2 \text{ zwojów/m}) \cdot 1,5 \text{ A} = 3,8 \cdot 10^{-2} \text{ T}.$$

---

\* Faraday nie był matematykiem i nie wyraził swego prawa indukcji równaniem. W istocie, w jego trzytomowych *Doświadczalnych badaniach nad elektrycznością* będących kamieniem milowym w rozwoju fizyki, nie pojawia się ani jedno równanie!

Powierzchnia cewki (ale nie solenoidu) wynosi  $3,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ . Początkowy strumień przechodzący przez każdy zwój cewki wynosi

$$\Phi_B = BA = 3,8 \cdot 10^{-2} \text{ T} \cdot 3,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ Wb.}$$

Strumień zmienia się od początkowej wartości  $1,2 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}$  do wartości końcowej  $-1,2 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}$ . Zmiana strumienia  $\Delta\Phi_B$  dla każdego zwoju cewki w ciągu czasu  $0,050 \text{ s}$  równa jest zatem jego podwojonej wartości początkowej. Indukowana SEM wynosi więc

$$\mathcal{E} = -\frac{N\Delta\Phi_B}{t} = -\frac{100 \cdot 2,1 \cdot 2 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}}{0,050 \text{ s}} = -4,8 \cdot 10^{-2} \text{ V} = -48 \text{ mV.}$$

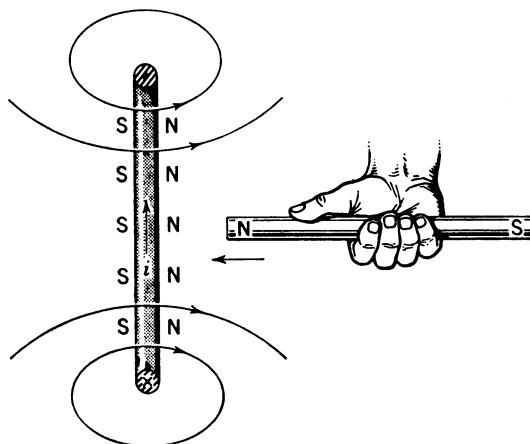
Znak minus, jak wyjaśnimy poniżej, odnosi się do *kierunku SEM*.

### 35-3. Reguła Lenza

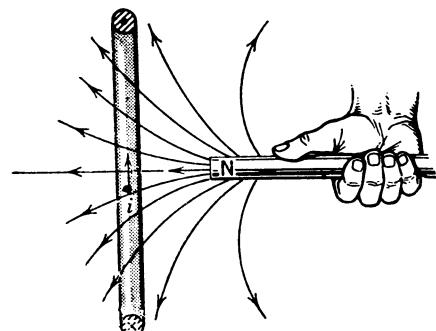
Dotychczas nie określiliśmy kierunków indukowanych SEM. Jakkolwiek kierunki te można znajdować na podstawie formalnej analizy prawa Faradaya, wolimy wyznaczyć je z prawa zachowania energii, które tutaj przyjmuje postać reguły Lenza: wyprowadzonej przez Heinricha Friedricha Lenza (1804–1865) w 1834 r. *Prąd indukowany ma taki kierunek, że przeciwstawia się zmianie, która go wywołała.* Znak minus w prawie Faradaya wyraża właśnie to przeciwstawienie się. W mechanice prawo zachowania energii często pozwala nam wyciągnąć wnioski na temat zachowania się układów mechanicznych, bez ich szczegółowej analizy. Podobne podejście stosujemy tutaj.

Reguła Lenza dotyczy *prądów* indukowanych, co oznacza, że odnosi się ona tylko do przewodzących obwodów zamkniętych. Jeśli obwód jest otwarty, to kierunek indukowanej SEM możemy znaleźć rozważając, co by się stało, gdyby obwód ten był zamknięty.

Weźmy pod uwagę pierwsze z doświadczeń Faradaya, opisanych w paragrafie 35-1. Na rysunku 35-3 przedstawiony jest północny biegun magnesu oraz przekrój znajdującego się w pobliżu przewodzącego zwoju. Gdy magnes zbliżamy do zwoju (lub zwój do magnesu) w zwoju indukuje się prąd. Jaki jest jego kierunek?



Rys. 35-3. Gdy magnes porusza się w stronę zwoju, indukowany prąd ma kierunek pokazany na rysunku i wytwarza pole przeciwstawiające się ruchowi magnesu



Rys. 35-4. Zbliżając magnes do zwoju powiększaemy strumień  $\Phi_B$  objęty tym zwojem

Jeżeli przez zwój przepływa prąd, to w odległych punktach powstaje pole magnetyczne, takie jak pole dipola magnetycznego, przy czym jedna strona zwoju odgrywa rolę bieguna północnego, druga zaś — południowego. Biegunem północnym, tak jak i w przypadku magnesów sztabkowych, jest ta strona zwoju, z której wybierają linie wektora  $\mathbf{B}$ . Jeżeli, jak to przewiduje reguła Lenza prąd indukowany w zwoju (rys. 35-3) ma przeciwdziałać ruchowi magnesu w stronę zwoju, to strona zwoju zwrócona ku magnesowi powinna stać się biegunem północnym. Dwa północne bieguny; biegun magnesu oraz biegun, wytworzony przez płynący w zwoju, będą się odpierać. Reguła prawej dłoni pokazuje, że aby tak było, prąd w zwoju musi mieć kierunek taki, jaki został zaznaczony na rysunku. Jeśli patrzeć od strony magnesu, to prąd w zwoju będzie płynął w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówki zegara.

Przy zbliżaniu magnesu do zwoju (lub zwoju do magnesu) pojawia się prąd indukowany. W terminologii reguły Lenza zbliżanie jest tą „zmianą”, która wytwarza prąd indukowany. Zgodnie z tą regułą prąd indukowany powinien przeciwdziałać „zbliżaniu”. Gdy oddalamy magnes — prąd indukowany winien przeciwdziałać „oddalaniu”, wytwarzając po prawej stronie zwoju (rys. 35-3) biegun *południowy*. Aby to miało miejsce — prąd musi mieć kierunek przeciwny do tego, jaki jest zaznaczony na rys. 35-3. Czy magnes się zbliża, czy oddala — jego ruch zawsze będzie automatycznie hamowany.

Czynnik, powodujący ruch magnesu czy to ku zwojowi, czy też od niego, zawsze będzie odczuwał siłę oporu, a więc będzie musiał wykonywać pracę. Z prawa zachowania energii wnioskujemy, że ta praca wykonana nad układem musi być dokładnie równa energii cieplnej, wydzielającej się w zwoju, gdyż w układzie zachodzi wymiana tylko tych dwóch rodzajów energii. Jeśli poruszamy magnes szybciej — musimy i pracę wykonywać szybciej i odpowiednio wzrośnie szybkość wydzielania się energii cieplnej. Jeśli powtórzmy doświadczenie z przecietym zwojem — prąd indukcyjny nie pojawi się i nie wydzieli się energia cieplna; nie będzie też na magnes działać siła oporu, a tym samym jego ruch nie będzie wymagał wykonywania pracy. Wprawdzie w zwoju pojawi się SEM, ale podobnie jak w przypadku ogniska dołączonego do otwartego obwodu — nie wywoła ona przepływu prądu.

Gdyby w zwoju (rys. 35-3) przy zbliżaniu do niego północnego bieguna magnesu płynął prąd o kierunku przeciwnym niż tam zaznaczono, wtedy po jego stronie zwróconej ku magnesowi powstałby biegun południowy, przyciągający magnes do zwoju. Wystarczyłoby wtedy tylko lekko popchnąć magnes, aby zapoczątkować proces przyciągania, a dalszy przebieg miałby charakter samorzutny. Magnes przyspiesiłby swój ruch ku zwojowi, zwiększąc ciągle swoją energię kinetyczną. Równocześnie w zwoju wydzielałaby się energia cieplna z coraz większą prędkością. Byłby to niewątpliwie pewien rodzaj perpetuum mobile! Oczywiście, zjawisko takie nigdy nie zachodzi.

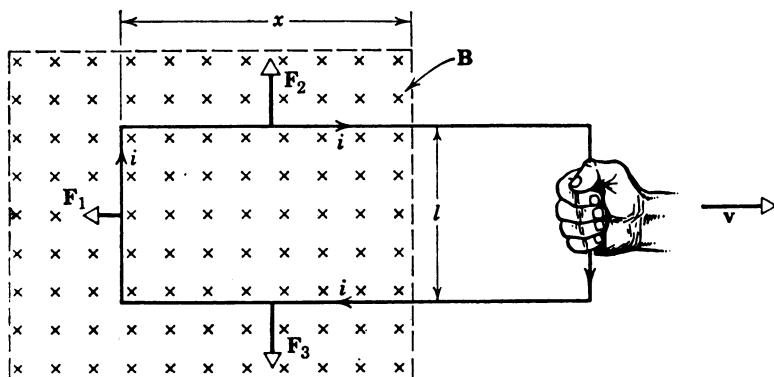
Zastosujmy regułę Lenza do doświadczenia przedstawionego na rys. 35-3 w inny sposób. Rysunek 35-4 przedstawia linie wektora  $\mathbf{B}$  dla magnesu sztabkowego\*. Możemy powiedzieć, że „zmiana” polega na spowodowanym przez zbliżanie magnesu wzroście strumienia  $\Phi_B$  objętego przez zwój. Prąd indukowany przeciwstawia się tej zmianie wytwarzając pole, które stara się przeciwdziałać wzrostowi strumienia wywołanemu ruchem magnesu. Dlatego właśnie pole wytwarzane przez indukowany prąd musi być skierowane poprzez płaszczyznę zwoju z lewej strony na prawą, co zgadza się z naszym wcześniejszym wnioskiem.

\* W zagadnienniu tym występują dwa pola wektora  $\mathbf{B}$ : jedno związane z prądem w zwoju, a drugie — z magnesem sztabkowym. Czytelnik musi zawsze dokładnie sobie zdawać sprawę, o którym z nich mowa.

Należy podkreślić, że *pole* indukowane nie przeciwdziała polu magnesu, lecz *zmianie*, która tutaj polega na wzroście strumienia  $\Phi_B$  przechodzącego przez zwój. W tym wypadku pole indukowane będzie przeciwdziałać zmniejszaniu strumienia  $\Phi_B$  (to znaczy — zmianie) przez *wzmacnianie* pola magnesu. Pole indukowane zawsze przeciwdziała zmianie, która je wywołała.

### 35-4. Indukcja elektromagnetyczna. Rozważania ilościowe

Przykład z rysunku 35-4, jakkolwiek łatwy do zrozumienia — nie nadaje się do rozważań ilościowych. Weźmy więc pod uwagę rys. 35-5, na którym przedstawiony jest obwód prostokątny o szerokości  $l$ , którego jeden koniec znajduje się w jednorodnym polu wektora  $\mathbf{B}$ , skierowanym prostopadle do płaszczyzny obwodu. Takie pole może być wytworzone w przerwie elektromagnesu, takiego np. jak przedstawiony na rys. 33-2. Linie przerwane oznaczają granice obszaru pola magnetycznego. Doświadczenie polega na przesuwaniu obwodu w prawą stronę ze stałą prędkością  $v$ .



Rys. 35-5. Usuwanie z prędkością  $v$  prostokątnego obwodu z pola magnetycznego

Należy podkreślić, że sytuacja przedstawiona na rys. 35-5 w zasadzie nie różni się od przedstawionej na rys. 35-4. W obu wypadkach obwód i magnes poruszają się względem siebie; w obu wypadkach — wywołuje się zmiana objętego przez obwód strumienia pola wytworzonego przez magnes.

Strumień  $\Phi_B$  objęty przez obwód na rys. 35-5 wynosi

$$\Phi_B = Blx,$$

gdzie  $lx$  jest powierzchnią tej części obwodu, dla której  $B$  jest różne od zera. Na podstawie prawa Faradaya SEM  $\mathcal{E}$  jest równa

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(Blx) = -Bl \frac{dx}{dt} = Blv, \quad (35-3)$$

przy czym uwzględniliśmy, że  $-dx/dt$  jest równe prędkości  $v$ , z jaką obwód usuwany jest z pola magnetycznego. Należy podkreślić, że z wymiarów obwodu — jedynie szerokość  $l$  jego lewego końca wchodzi do wyrażenia (35-3). Jak zobaczymy później — można uważać, że SEM indukowana w obwodzie z rys. 35-5 jest zlokalizowana właśnie w tej części obwodu. Indukowana SEM, wytwarzana — tak jak tutaj — na skutek przemieszczania

przewodnika w polu magnetycznym lub na odwórt jest często nazywana *dynamiczną SEM*. Prąd wytwarzany w obwodzie przez SEM  $Bv$  jest równy

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Bv}{R}, \quad (35-4)$$

gdzie  $R$  jest oporem obwodu. Zgodnie z regułą Lenza prąd ten (a tym samym i  $\mathcal{E}$ ) winien mieć na rys. 35-5 kierunek przeciwny do kierunku ruchu wskazówek zegara. Przeciwdziela on bowiem „zmianie” (zmnieszeniu  $\Phi_B$ ) wytwarzając wewnątrz obwodu pole równoległe do pola zewnętrznego.

Gdy w obwodzie popłynie prąd, na trzy boki obwodu zaczną działać odpowiednio siły  $F_1$ ,  $F_2$  i  $F_3$ , przy czym zgodnie z równaniem (33-6a)

$$\mathbf{F} = il \times \mathbf{B}. \quad (33-5)$$

Siły  $F_2$  i  $F_3$  jako równe i przeciwnie skierowane, równoważą się. Zgodnie z równaniami (35-5) i (35-4) wartość liczbową siły  $F_1$ , przeciwstawiającej się przesuwaniu obwodu, wynosi

$$F_1 = ilB \sin 90^\circ = \frac{B^2 l^2 v}{R}.$$

Czynnik powodujący przesuwanie się obwodu musi wykonywać pracę ze stałą szybkością

$$P = F_1 v = \frac{B^2 l^2 v^2}{R}. \quad (35-6)$$

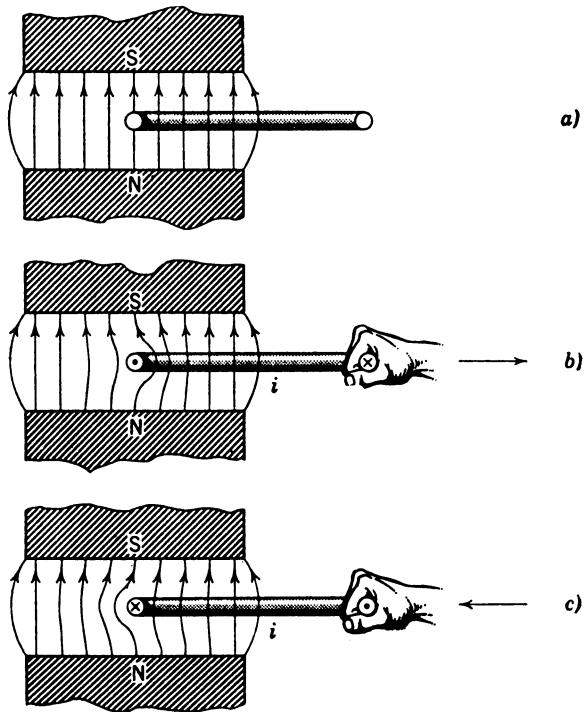
Zgodnie z prawem zachowania energii, na oporze winna wydzielać się energia cieplna z taką samą szybkością, z jaką wykonywana jest praca. Prawo zachowania energii wprowadziliśmy do naszych rozważań wtedy, gdy zostało napisane wyrażenie na natężenie prądu (równ. (35-4)). Czytelnik zapewne pamięta, że związek  $i = \mathcal{E}/R$  dla obwodów złożonych z jednego oczka wynika bezpośrednio z tej zasady. W związku z tym, powinniśmy móc napisać wyrażenie na szybkość wydzielania w obwodzie energii cieplnej  $P_J$ , oczekując, że otrzymamy wynik identyczny z równaniem (35-6). Korzystając z równania (35-4) otrzymujemy

$$P_J = i^2 R = \left( \frac{Blv}{R} \right)^2 R = \frac{B^2 l^2 v^2}{R},$$

co rzeczywiście jest zgodne z tym, czego oczekiwaliśmy. Rozpatrzony przykład jest ilościową ilustracją przemiany energii mechanicznej (pracy wykonanej przez czynnik zewnętrznego) w energię elektryczną (indukowaną SEM) i ostatecznie — w energię cieplną.

Na rysunku 35-6 pokazany jest widziany z boku zwój umieszczony w polu magnetycznym, przy czym rys. 35-6a przedstawia zwój w spoczynku, rys. 35-6b — w ruchu w prawą stronę, a rys. 35-6c w ruchu w lewą stronę. Linie indukcji  $B$  na tych rysunkach odnoszą się do *pola wypadkowego*, otrzymanego przez wektorowe zsumowanie pola  $\mathbf{B}_0$  magnesu i pola  $\mathbf{B}_i$  prądu indukowanego w zwoju. Kształt tych linii pokazuje w sposób przekonywający, że czynnik zewnętrzny poruszający zwój zawsze napotyka siłę przeciwdziałającą.

**Przykład 2.** Na rysunku 35-7 pokazany jest obwód prostokątny o oporze  $R$ , szerokości  $l$  i długości  $a$ , przemieszczany ze stałą prędkością  $v$  przez obszar o szerokości  $d$ , w którym za pomocą magnesu wytworzono jednorodne pole magnetyczne o indukcji  $\mathbf{B}$ .



Rys. 35-6. Prostokątny obwód w polu magnetycznym: (a) obwód pozostawiony w spoczynku, (b) usuwany z obszaru pola, (c) wprowadzany w obszar pola. Układ linii sił pola sugeruje przeciwnie siły działające w (b) i (c)

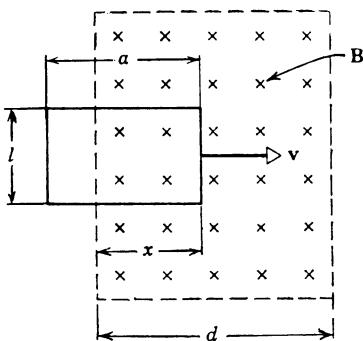
(a) Wykonać wykres strumienia  $\Phi_B$  objętego obwodem jako funkcji położenia  $x$  zwoju. Przyjąć następujące wartości liczbowe:  $l = 4 \text{ cm}$ ,  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $d = 15 \text{ cm}$ ,  $R = 16 \Omega$ ,  $B = 2,0 \text{ T}$  i  $v = 1,0 \text{ m/s}$ .

Gdy obwód znajduje się poza obszarem pola — strumień  $\Phi_B$  jest równy零. Gdy cały obwód znajduje się w polu — strumień wynosi  $Bla$ . Gdy obwód wchodzi w obszar pola — strumień ma wartość  $Blx$ , a gdy wychodzi:  $Bl[a - (x - d)]$ . Wnioski te, które czytelnik winien sprawdzić, przedstawia graficznie rys. 35-8a.

(b) Wykonać wykres indukowanej SEM  $\mathcal{E}$ .

Indukowana SEM  $\mathcal{E}$  dana jest wyrażeniem  $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{dx}v$ , któremu można nadać postać

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{dx} = -\frac{d\Phi_B}{dx}v,$$



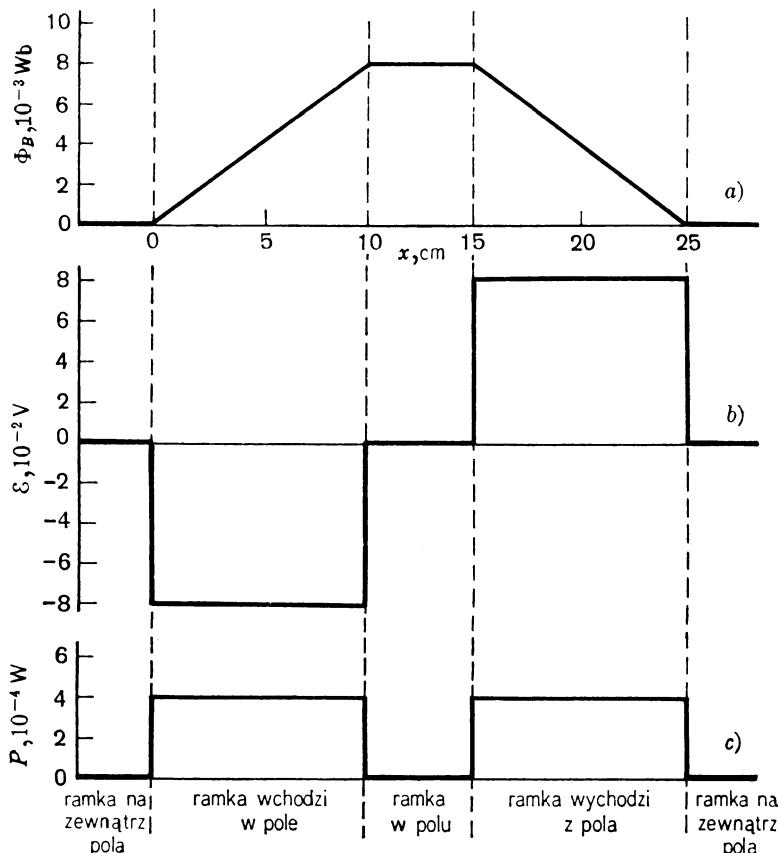
Rys. 35-7. Przykład 2. Prostokątny obwód porusza się z prędkością  $v$  względem pola magnetycznego. Położenie  $x$  obwodu jest równe odległości między lewym, efektywnym brzegiem pola  $B$ , a prawym końcem obwodu

gdzie  $d\Phi_B/dx$  równa się tangensowi kąta nachylenia krzywej z rys. 35-8a. Wykres  $\mathcal{E}(x)$  jest przedstawiony na rys. 35-8b. W oparciu o regułę Lenza, prowadząc rozumowanie tak jak w przypadku pokazanym na rys. 35-5, stwierdzamy, że gdy obwód wchodzi w obszar pola — SEM działa w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, co widać z wyrażeniem podanego wyżej. Należy podkreślić, że gdy cały obwód znajduje się w obszarze pola — nie indukuje się w nim SEM, gdyż — jak wynika z rys. 35-8a — strumień  $\Phi_B$  przechodzący przez obwód nie zmienia się.

(c) Wykonać wykres szybkości  $P$  wydzielania się energii cieplnej w obwodzie.

Wielkość ta dana jest wyrażeniem:  $P = \mathcal{E}^2/R$  i można ją wyliczyć podnosząc do kwadratu rzędną krzywą z rys. 35-8b i dzieląc przez  $R$ . Wynik przedstawiony jest na rys. 35-8c.

Jeśli uwzględnić wygięcie linii pola magnetycznego, którego w praktyce nigdy nie daje się uniknąć (patrz zad. 34-2), to krzywe łamane z rys. 35-8 przejdą w krzywe gładkie. Jakie zmiany pojawiłyby się na rys. 35-8, gdyby użyć obwodu otwartego?



Rys. 35-8. Przykład 2. W praktyce ostre załamania powinny być zaokrąglone

**Przykład 3.** Pręt miedziany o długości  $L$  wiruje z prędkością kątową  $\omega$  w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $B$  tak, jak to pokazano na rys. 35-9. Wyznaczyć SEM  $\mathcal{E}$  pojawiającą się między końcami pręta. Moglibyśmy wyznaczyć SEM umieszczając stycznie do zakreskowanego okręgu przewodzącą szynę i łącząc ją voltmierzem z punktem  $O$ .

Jeśli przewodnik dl porusza się z prędkością  $v$  w polu magnetycznym prostopadle do jego linii indukcji  $B$ , pojawia się w nim dynamiczna SEM  $d\mathcal{E}$  (patrz równ. (35-3)) o wielkości

$$d\mathcal{E} = Bvdl.$$

Pręt z rys. 35-9 można podzielić na elementy o długości  $dl$ . Prędkość  $v$  każdego elementu wynosi  $\omega l$ . Każdy

z elementów jest prostopadły do **B** i jego ruch odbywa się w płaszczyźnie prostopadłej do **B**. Ponieważ d'ś połączone są „szeregowo”, więc

$$\mathcal{E} = \int d\mathcal{E} = \int_0^L Bv dl = \int_0^L B(\omega l) dl = \frac{1}{2} B\omega L^2.$$

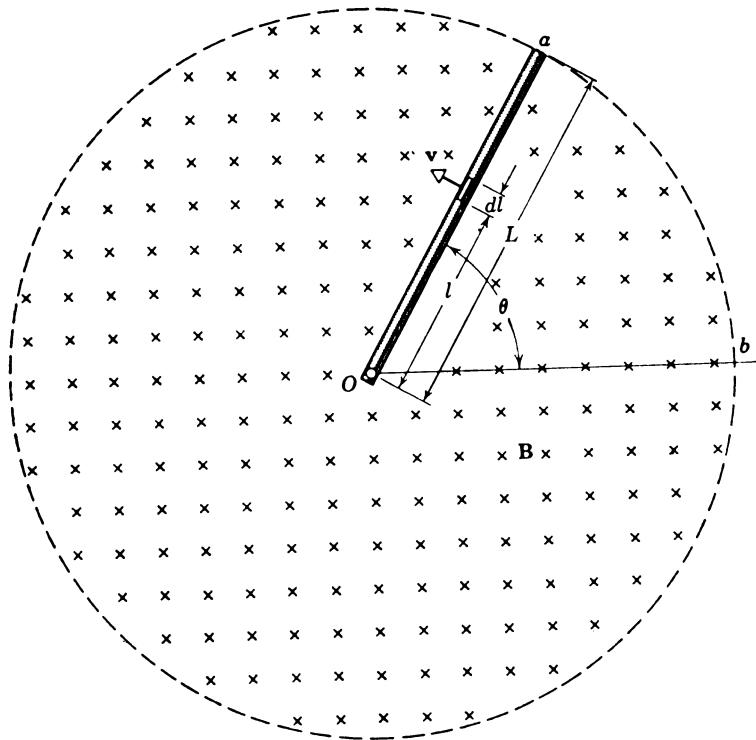
Inne podejście polega na uwzględnieniu faktu, że w każdym momencie strumień przechodzący przez wycinek *aOb* na rys. 35-9 wynosi

$$\Phi_B = BA = B\left(\frac{1}{2}L^2\theta\right),$$

gdzie  $\frac{1}{2}L^2\theta$  jest powierzchnią wycinka. Różniczkując ostatnie wyrażenie otrzymamy

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{1}{2} BL^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} B\omega L^2.$$

Zgodnie z prawem Faradaya, jest to właśnie wartość  $\mathcal{E}$ . Wartość ta pokrywa się z wynikiem otrzymanym poprzednio.



Rys. 35-9. Przykład 3

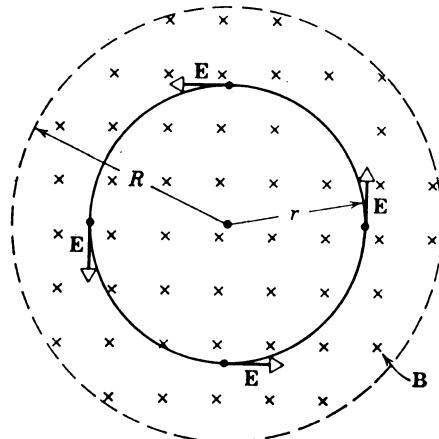
### 35-5. Zmienne pole magnetyczne

Dotychczas rozważaliśmy SEM indukowane na skutek względnego ruchu magnesów i zwojnic. W tym paragrafie przyjmiemy, że żaden z makroskopowych przedmiotów nie porusza się, natomiast pole magnetyczne zmienia się z czasem. Jeśli w takim zmiennym polu umieścić przewodzący zwój, objęty przez niego strumień będzie się zmieniał i pojawi się indukowana SEM. Spowoduje ona ruch nośników prądu, tzn. wywoła przepływ prądu.

Wychodząc z mikroskopowego punktu widzenia możemy powiedzieć, że zmienny strumień wektora **B** indukuje w punktach otaczających zwój pole elektryczne o natężeniu **E**.

Te indukowane pola elektryczne są równie realne, jak pola wytwarzane przez ładunki statyczne i działają na ładunek próbny  $q_0$  siłą  $\mathbf{F} = q_0\mathbf{E}$ . W związku z tym możemy podać nowe sformułowanie prawa indukcji Faradaya, wprawdzie dość ogólne, ale bardzo istotne: *Zmienne pole magnetyczne wytwarza pole elektryczne.*

W celu ugruntowania tego sformułowania, rozważmy przedstawione na rys. 35-10 jednorodne pole wektora indukcji  $\mathbf{B}$ , skierowane prostopadle do płaszczyzny rysunku. Zakładamy, że wartość  $B$  wzrasta ze stałą szybkością  $dB/dt$  we wszystkich punktach. Sytuację taką możemy osiągnąć przez odpowiednią zmianę w czasie natężenia prądu w uzwojeniach elektromagnesu wytwarzającego pole.



Rys. 35-10. Wektory przedstawiają natężenie pola elektrycznego  $E$  w czterech punktach pola wytworzonego przez wzrastające pole magnetyczne  $B$ . Pole magnetyczne nie może całkowicie zniknąć na obwodzie o promieniu  $R$  — lecz stopniowo przybliża się do zera. To rozproszenie linii na obwodzie nie zmienia żadnego argumentu z tego paragrafu

Okrąg o dowolnym promieniu  $r$  (rys. 35-10) obejmuje w każdej chwili strumień  $\Phi_B$ . W związku z tym, że strumień ten zmienia się z czasem, w otoczeniu tego okręgu pojawi się indukowana SEM o wartości  $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$ . Ze względów symetrii, natężenie  $E$  pola elektrycznego indukowanego w różnych punktach okręgu powinno być do niego styczne. Oznacza to, że w tym wypadku linie sił pola elektrycznego wytworzonego przez zmienne pole magnetyczne są koncentrycznymi okręgami.

Weźmy pod uwagę ładunek próbny  $q_0$ , poruszający się po okręgu zaznaczonym na rys. 35-10. Uwzględniając definicję SEM, na pracę wykonywaną przy jednym pełnym obiegu otrzymamy po prostu wyrażenie  $\mathcal{E}q_0$ . Z drugiej strony, praca ta równa jest  $q_0E \cdot 2\pi r$ , gdzie  $q_0E$  jest siłą działającą na ładunek, a  $2\pi r$  — drogą, na której ta siła działa. Porównując te wyrażenia na pracę  $W$  i skracając przez  $q_0$  otrzymamy

$$\mathcal{E} = E2\pi r. \quad (35-7)$$

W przypadku ogólniejszym, niż przedstawiony na rys. 35-10, powinniśmy napisać

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{Edl}. \quad (35-8)$$

W warunkach podanych na rys. 35-10 wyrażenie to sprowadza się do równania (35-7). Łącząc równania (35-8) i (35-1) ( $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$ ) możemy prawo indukcji Faradaya zapisać w postaci

$$\oint \mathbf{Edl} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (35-9)$$

W tej postaci prawo to jest podane w tablicy 40-2.

**Przykład 4.** Założmy, że indukcja  $B$  (rys. 35-10) wzrasta z szybkością  $dB/dt$ , a  $R$  jest promieniem cylindrycznego obszaru, w którym istnieje pole. Jaka jest wartość natężenia  $E$  pola elektrycznego w dobowej odległości  $r$  od osi cylindra? Przyjmując wartości:  $dB/dt = 0,10 \text{ T/s}$  i  $R = 10 \text{ cm}$ .

(a) Dla  $r < R$  — strumień  $\Phi_B$  objęty okręgiem wynosi

$$\Phi_B = B\pi r^2.$$

Podstawiając to do prawa Faradaya (równ. (35-9)) mamy  $\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -d\Phi_B/dt$

co daje  $2\pi r E = \frac{d\Phi_B}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB}{dt},$

skąd

$$E = -\frac{1}{2} r \frac{dB}{dt}.$$

Znak minus został zachowany w celu zaznaczenia, że indukowane pole  $E$  przeciwstawia się zmianom pola magnetycznego. Należy podkreślić, że  $E(r)$  zależy od  $dB/dt$ , a nie od  $B$ . Podstawiając wartości liczbowe — przy  $r = 5 \text{ cm}$  — otrzymamy

$$E = \frac{1}{2} r \frac{dB}{dt} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 0,10 \text{ T/s} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ V/m}.$$

(b) Dla  $r > R$  strumień  $\Phi_B$  objęty okręgiem wynosi

$$\Phi_B = \int \mathbf{B} d\mathbf{S} = B\pi R^2.$$

Wynika to stąd, że dla punktów obszaru objętego przez zwój, a leżących poza efektywnym ograniczeniem pola magnetycznego,  $BdS$  jest równe zero.

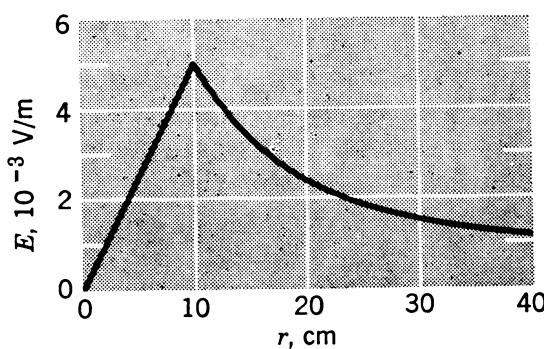
Z prawa Faradaya (równ. (35-9)) mamy

$$2\pi r E = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\pi R^2 \frac{dB}{dt},$$

stąd

$$E = -\frac{1}{2} \frac{R^2}{r} \frac{dB}{dt}.$$

Dla  $r = R$  oba wyrażenia na  $E(r)$  są oczywiście identyczne. Rysunek 35-11 przedstawia wykres  $E(r)$  dla podanych w przykładzie wartości liczbowych.

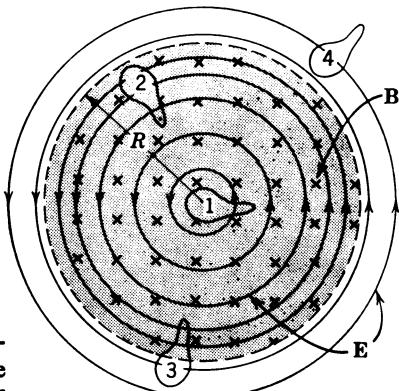


Rys. 35-11. Przykład 4. Przy uwzględnieniu rozmycia brzegów pola z rys. 35-10 otrzyma się zaokrąglenie ostrego szczytu krzywej dla  $r = R (= 10 \text{ cm})$

Aby do przypadku przedstawionego na rys. 35-10 zastosować regułę Lenza, wyobraźmy sobie, że koncentrycznie z polem umieszczony jest obwód kołowy. Wobec wzrostania strumienia  $\Phi_B$  objętego przez ten obwód, płynący w nim prąd będzie się starał przeciwdziałać tej „zmianie”, wytwarzając swoje własne pole magnetyczne, które w obszarze objętym przez obwód będzie skierowane przeciwnie do pola zewnętrznego. A więc indu-

kowany prąd  $i$  musi mieć kierunek przeciwny do kierunku ruchu wskazówek zegara, co oznacza, że linie indukowanego pola elektrycznego  $E$ , które jest odpowiedzialne za prąd, również winny mieć zwrot przeciwny do kierunku ruchu wskazówek zegara. Gdyby pole magnetyczne z rys. 35-10 zmniejszało swoją wartość, to indukowany prąd, a tym samym i linie sił indukowanego pola elektrycznego  $E$  miałyby kierunek zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara i znowu przeciwdziałałyby zmianom  $\Phi_B$ .

Na rysunku 35-12 pokazano cztery z wielu możliwych obwodów. Do obwodów tych można zastosować prawo Faradaya. SEM  $\mathcal{E}$  indukowane w obwodach 1 i 2 są identyczne, gdyż oba one leżą całkowicie wewnątrz zmennego pola magnetycznego, mają jednakowe pola i dla obu  $d\Phi_B/dt$  ma tę samą wartość. Należy zwrócić uwagę, że chociaż SEM  $\mathcal{E}(\oint Edl)$  dla obu tych obwodów są identyczne, rozkład pola elektrycznego  $E$  w otoczeniu każdego z nich jest inny, jak to zaznaczono za pomocą elektrycznych linii sił. Dla obwodu 3 — SEM jest mniejsza, gdyż w tym wypadku zarówno  $\Phi_B$ , jak i  $d\Phi_B/dt$  są mniejsze, natomiast dla obwodu 4 — indukowana SEM jest równa zeru.



Rys. 35-12. Kołowe linie sił pola elektrycznego, wytworzonego przez wzrastające pole magnetyczne. Cztery pętle przedstawiają drogi, wzdłuż których można obliczyć SEM

Indukowane pola elektryczne, powstające w procesie indukcji, są związane nie z ładunkiem, lecz ze zmianą strumienia magnetycznego. Choć oba rodzaje pól działają na ładunki — istnieje między nimi pewna różnica. Najprostszym przejawem tej różnicy jest to, że linie wektora  $E$  związane z zmianami strumienia magnetycznego mogą być liniami zamkniętymi, natomiast linie wektora  $E$  związane z ładunkami — nigdy nie mogą być zamknięte i zawsze zaczynają się na ładunkach dodatnich, a kończą na ujemnych.

Równanie (29-5) definiujące różnicę potencjałów między punktami  $a$  i  $b$  ma postać

$$V_b - V_a = \frac{W_{ab}}{q_0} = - \int_a^b Edl.$$

Podkreślimy, że po to, aby potencjał miał znaczenie praktyczne, ostatnia całka (oraz  $W_{ab}$ ) winna mieć tę samą wartość dla wszystkich dróg łączących  $a$  i  $b$ . We wcześniejszych rozdziałach pokazywaliśmy, że tak jest we wszystkich badanych przypadkach.

Szczególnie interesujący jest przypadek, gdy  $a$  i  $b$  są tym samym punktem. Droga „łącząca” je jest wtedy krzywą zamkniętą,  $V_a$  musi być identyczne z  $V_b$  i ostatnie wyrażenie przyjmuje postać

$$\oint Edl = 0. \quad (35-10)$$

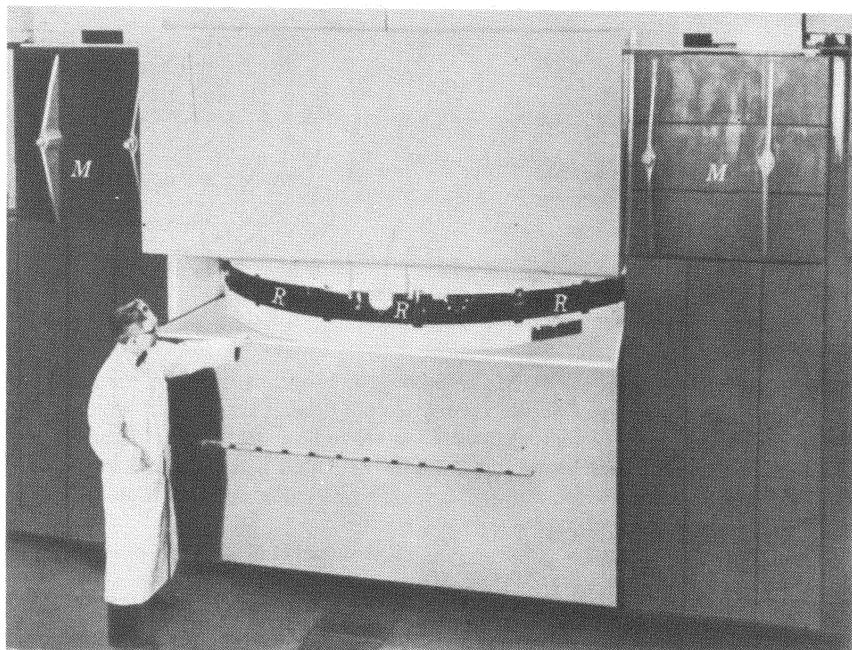
Wtedy jednak, gdy występuje zmienny strumień magnetyczny, wyrażenie  $\oint Edl$  przestaje być równe zero, lecz zgodnie z prawem Faradaya (równ. (35-9)) jest równe  $-d\Phi_B/dt$ . Pola elektryczne wytwarzane przez

ładunki statyczne są *zachowawcze*, natomiast pola wytwarzane przez zmienne pola magnetyczne są *niezachowawcze* (patrz paragraf 8-2). Potencjał elektryczny, który można zdefiniować tylko dla siły zachowawczej, *traci swój sens w przypadku pól elektrycznych wytwarzanych przez indukcję*.

### 35-6. Betatron

Betatron jest urządzeniem, które przyspiesza elektrony do wysokich prędkości przez poddawanie ich działaniu indukowanych pól elektrycznych, wytwarzanych za pomocą zmiennego strumienia magnetycznego. Jest ono doskonałą ilustracją realności takich indukowanych pól i w tym kontekście je omawiamy. Wysokoenergetyczne elektrony stosuje się w wielu podstawowych badaniach fizycznych oraz do otrzymywania przeklitych promieni Roentgena, użytkowych przy leczeniu raka i w przemyśle.

Na rysunku 35-13 widzimy zdjęcie betatronu skonstruowanego przez firmę General Electric Company, dającego elektrony o energii 100 MeV. Prędkość elektronów o takiej energii wynosi  $0,999986c$ , gdzie  $c$  jest prędkością światła. W związku z tym do analizy ich zachowania się konieczne jest stosowanie mechaniki relatywistycznej. Rysunek 35-14 przedstawia przekrój pionowy centralnej części betatronu, ku której zwrócony jest mążczyzna na rys. 35-13.

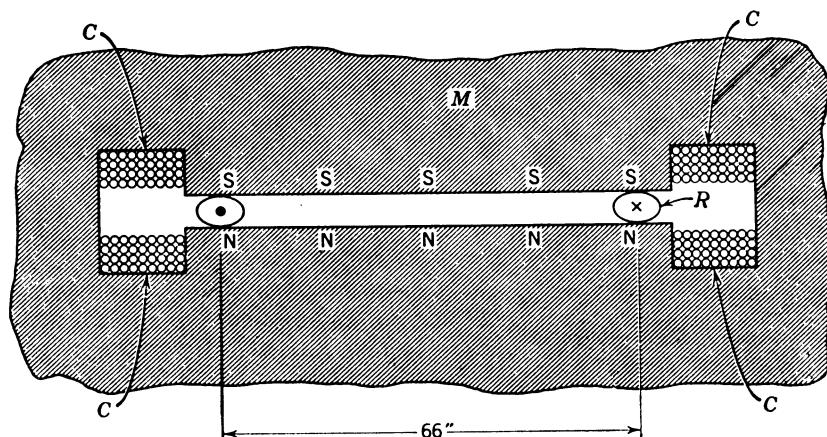


Rys. 35-13. Betatron przyspieszający elektrony do energii 100 MeV. M — magnes; R — obszar, w którym umieszczona jest toroidalna rura opróżniona z powietrza. (Dzięki uprzejmości General Electric Company)

Pole magnetyczne betatronu spełnia kilka funkcji: (a) utrzymuje elektrony na torze kołowym; (b) zmienia pole magnetyczne generujące pole elektryczne (paragraf 35-5), które z kolei przyspiesza te elektrony; (c) zapewnia stałość promienia orbity, po której zasadniczo poruszają się elektrony; (d) wprowadza elektrony na orbitę oraz wyprowadza je z betatronu wtedy, gdy mają już one żądaną energię; (e) dostarcza siły zapewniającej

równowagę układu, która przeciwdziała tendencji elektronów do opuszczania orbity w kierunku pionowym lub radialnym. Warto zwrócić uwagę, że wszystkie te wymagania można zrealizować przez właściwe ukształtowanie i regulację pola magnetycznego.

Na rysunku 35-14 szklana, próżniowa komora toroidalna, wewnętrz której krążą elektryny, jest oznaczona przez  $R$ . Orbita tych elektronów jest kołem leżącym w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny rysunku. Elektryny wychodzą z tej płaszczyzny pod kątem prostym względem niej, z lewej strony rysunku (●) i wchodzą z prawej (×). W betatronie firmy General Electric Company promień orbity elektronów wynosi 82 cm. Cewki  $C$  oraz 130-tonowy magnes (rys. 35-13) wytwarzają strumień magnetyczny przechodzący przez płaszczyznę orbity.



Rys. 35-14. Przekrój poprzeczny betatronu przedstawiający magnes  $M$ , cewki  $C$  oraz toroidalną rurę  $R$ . Elektryny wychodzą z płaszczyzny rysunku z lewej strony i wchodzą z prawej. Patrz zadanie 33

Prąd płynący w cewkach  $C$ , zmieniający się okresowo 60 razy/s, wytwarza zmienny strumień przechodzący przez orbitę (rys. 35-15). Kiedy  $B$  skierowane jest do góry, jak na rys. 35-14, wtedy  $\Phi_B$  uważamy za dodatnie. Ruch elektronów we wskazanym kierunku odbywa się w czasie tego półokresu (oznaczonego na rys. 35-15 przez  $ac$ ), kiedy strumień jest dodatni. Czytelnik może to sprawdzić (patrz paragraf 33-6). Elektryny są w tym czasie przyspieszane przez pole elektryczne wytwarzane przez zmienny strumień. Kierunek indukowanych pól elektrycznych zależy od znaku  $d\Phi_B/dt$  i musi być tak dobrany, aby elektryny były przyspieszane, a nie opóźniane. A więc tylko połowa dodatniego półokresu (rys. 35-15) może być wykorzystana do przyspieszania. Wykażemy, że jest to część  $ab$ .

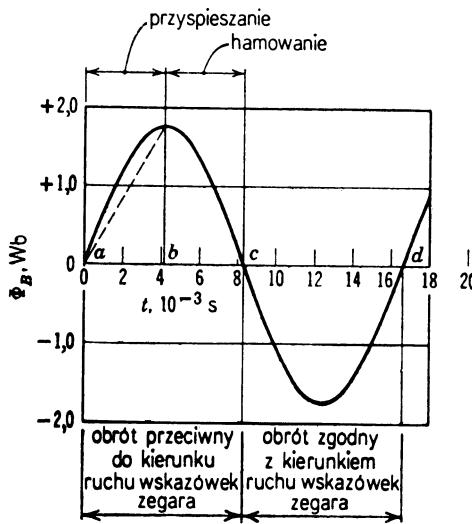
Średnią wartość  $d\Phi_B/dt$  w czasie równym  $\frac{1}{4}$  okresu wyznaczamy z nachylenia linii przerwanej, rys. 35-15

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{1,8 \text{ Wb}}{4,2 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = 430 \text{ V.}$$

Tą samą SEM wyrażoną w  $V$  możemy również otrzymać z prawa Faradaya (równ. 35-1). Energia elektronów wzrasta więc o 430 eV przy każdym obiegu wzduż orbity, w zmiennym strumieniu magnetycznym. Jeżeli przyrost energii wynosi tylko 430 eV na 1 obieg, to aby

elektron osiągnął energię 100 MeV, musi on wykonać około 230 000 obiegów. Dla promienia orbity 82 cm odpowiada to długości drogi  $1,2 \cdot 10^6$  m.

Betatron dostarcza przykładu na to, że w przypadku pól elektrycznych wytwarzanych przez indukcję potencjał elektryczny nie ma żadnego znaczenia. Jeżeli potencjał istnieje, to jak wynika z równania (35-10),  $\oint \mathbf{E} dl = 0$  dla każdego toru zamkniętego. Natomiast w betatronie, całka ta obliczona wzduż orbity nie jest równa零 i, w naszym przykładzie, wartość jej wynosi 430 V. Nie należy jednak sądzić, że betatron



Rys. 35-15. Strumień przechodzący przez orbitę betatronu w czasie jednego okresu. Obrót elektronów w kierunku wskazanym na rys. 35-14 (tzn. przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara) możliwy jest tylko w czasie półokresu *ac*

zaprzecza prawu zachowania energii. Przyrost energii kinetycznej krążącego elektronu (430 eV/obr) musi być równoważny energii, jaką straciło źródło. Energia ta pochodzi z generatora zasilającego cewki magnesu, a więc wytwarzającego zmienny strumień. Energia przenoszona jest na elektron za pośrednictwem tego strumienia.

**Przykład 5.** Która część półokresu w betatronie przedstawionym na rys. 35-13 jest „przyspieszającą”?

Załóżmy, że jest to część *ab* na rys. 35-15, podczas której strumień  $\Phi_B$  przechodzący przez orbitę wzrasta. Wyobraźmy sobie, że wzduż orbity umieszczona jest pętla przewodząca. W pętli pojawi się prąd indukowany, który będzie przeciwdziałał wzrostowi  $\Phi_B$ . Oznacza to, że wytwarza się pole magnetyczne o kierunku przeciwnym do pola magnesu. A więc  $E$  powinno być skierowane na zewnątrz w prawym przekroju toroidu  $R$  (rys. 35-14), a do wewnętrz w lewym. Siła ( $-eE$ ) działająca na elektron ma kierunek przeciwny do  $E$  z uwagi na ujemny ładunek elektronu. Zatem siła styczna działająca na elektron ma ten sam kierunek co jego ruch po orbicie. Oznacza to, że prędkość elektronu wzrasta. Czytelnik powinien uważnie przeprowadzić podobną analizę zakładając (co okaże się niesłuszne), że półokresem „przyspieszającym” jest *bc* z rys. 35-15, a nie *ab*.

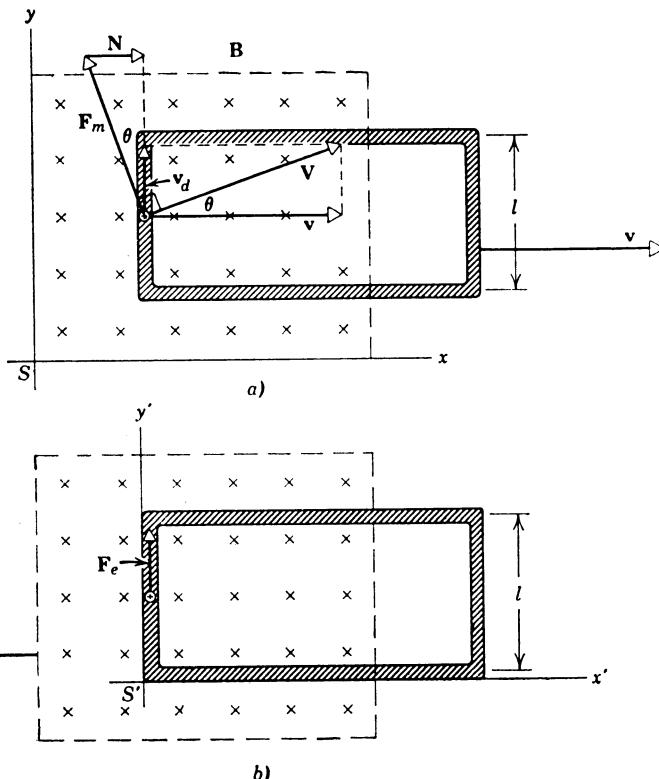
### 35-7. Indukcja a ruch wzgledny

Prawo Faradaya w postaci  $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$  poprawnie określa indukowaną SEM niezależnie od tego, w jaki sposób dokonujemy zmiany  $\Phi_B$ . Zmiana ta może być wywołana przez poruszającą się cewką lub magnes (przy czym zmienia się wielkość pola magnetycznego), zmieniający się kształt przewodzącej pętli lub inny efekt. Jednakże obserwatorzy poruszający się względem siebie, nawet gdyby podali zgodne wartości liczbowe indukowanej SEM, powinni dać różne mikroskopowe opisy procesu indukcji. W układach elektromagnetycznych, tak jak w mechanicznych, ważne jest, aby stan ruchu obserwatora względem jego otoczenia był dokładnie określony.

Na rysunku 35-16 przedstawiony jest zamknięty obwód (pętla) poruszający się z prędkością  $v$  względem magnesu, który wytwarza jednorodne pole  $\mathbf{B}$  w pokazanym obszarze. Niech obserwator oznaczony

na rys. 35-16a przez  $S$  będzie w spoczynku względem magnesu wytwarzającego pole  $B$ . Indukowaną SEM nazywamy w tym przypadku *dynamiczną SEM*, ponieważ pętla przewodząca porusza się względem obserwatora.

Rozpatrzmy dodatni nośnik ładunku znajdujący się w środku lewego końca pętli. Obserwator  $S$  widzi ładunek  $q$  poruszający się w polu magnetycznym  $B$  w prawą stronę wzdłuż pętli z prędkością  $v$ . Na ładunek ten działa odchylająca siła magnetyczna, dana równaniem (33-2) ( $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ). Siła ta powoduje przesuwanie nośników do góry, w ten sposób nabywają one także prędkości unoszenia  $v_u$ . Ilustruje to rys. 35-16a.



Rys. 35-16. Ruch zamkniętego obwodu mogącego przewodzić prąd względem magnesu. (a) Obserwator  $S$  pozostający w spoczynku względem magnesu wytwarzającego pole  $B$  widzi, że obwód porusza się w prawą stronę. Widzi on także (patrz tekst) siłę magnetyczną (równ. 33-2) równą  $F_m \cos \theta$  działającą w górę na nośniki ładunku dodatniego. (b) Obserwator  $S'$  nieruchomy względem obwodu widzi, że pole porusza się w lewą stronę. Widzi również siłę elektryczną (patrz tekst) działającą w górę na nośniki ładunku dodatniego. Istnieje oczywiście średnia siła wynikająca ze zderzeń wewnętrznych (nie przedstawiona na rysunkach, patrz paragraf 31-4 i 31-5), która uniemożliwia przyspieszenie nośników ładunku

Dodając wektorowo prędkości  $v$  i  $v_u$  otrzymujemy wypadkową prędkość  $V$ , która jest prędkością równowagi nośników. Magnetyczna siła odchylająca  $\mathbf{F}_m$  jest zawsze prostopadła do wypadkowej prędkości nośnika  $V$  i określa ją zależność

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{V} \times \mathbf{B}. \quad (35-13)$$

Siła  $\mathbf{F}_m$  będzie „usiłowała przepchnąć” nośniki przez lewą ściankę przewodnika. Ponieważ jest to niemożliwe, przewodnik oddziałuje na nośniki siłą normalną  $N$  (patrz rys. 35-16a) o takiej wartości bezwzględnej, że  $v_u$  jest równoległa do osi przewodnika. Innymi słowy, siła normalna  $N$  równoważy poziomą składową siły  $\mathbf{F}_m$ , pozostawiając jej składową pionową  $F_m \cos \theta$ . Ale tę składową równoważy z kolei średnia

siła  $\bar{F}_i$  związaną z wewnętrznymi zderzeniami, których nośnik doznaje podczas unoszenia ze stałą prędkością  $v_u$  przez przewodnik.

Energia kinetyczna nośnika ładunku pozostaje stała podczas unoszenia przez przewodnik. Wynika to z faktu, że wypadkowa siła działająca na nośnik ładunku ( $= F_m + \bar{F}_i + N$ ) jest równa zeru. Praca wykonyana przez siłę  $F_m$  jest również równa zeru, ponieważ jest prostopadła do prędkości poruszającego się ładunku. Praca (ujemna) wykonana przez średnią siłę zderzeń wewnętrznych  $\bar{F}_i$  musi być zrównoważona przez (dodatnią) pracę siły normalnej  $N$ . Siłą  $N$  działa właśnie ten czynnik, który ciągnie pętlę w polu magnetycznym. Praca wykonywana przez tę siłę zewnętrzną  $N$  wydatkowana jest w pętli w postaci energii cieplnej jak to już zauważaliśmy w parafagie 35-4.

Obliczmy zatem pracę  $dW$ , jaka zostanie wykonana na nośniku przez siłę  $N$  w czasie  $dt$ ,

$$dW = Nv dt. \quad (35-14)$$

Wielkość  $v dt$  jest odległością, jaką pętla (i nośnik) przebędzie w czasie  $dt$ , w prawą stronę na rys. 35-16a. Wartość siły  $N$  dana jest wyrażeniem (patrz rys. 35-16a i równ. (35-13))

$$N = F_m \sin \theta = (qVB)(v_u/V) = qBv_u. \quad (35-15)$$

Podstawiając równanie (35-15) do równania (35-14) otrzymujemy

$$dW = qBv_u v dt = (qBv)(v_u dt) = qBv dl, \quad (35-16)$$

gdzie  $dl (= v_u dt)$  jest odległością, na której nośnik przesunie się w czasie  $dt$  wzduż przewodnika.

Calkując równanie (35-16) po obwodzie pętli, obliczamy pracę potrzebną na przesunięcie nośnika wzduż całej pętli. Zatem

$$W = \oint dW = qBvl. \quad (35-17)$$

Otrzymaliśmy taki wynik, ponieważ praca wykonana w górnym odcinku ramki równoważy pracę wykonaną w dolnym odcinku oraz ponieważ praca w odcinkach ramki, które znajdują się poza polem magnetycznym, jest równa zeru.

Czynnik wykonujący pracę na nośnikach ładunku można traktować jako siłę elektromotoryczną, ponieważ wywołuje on prąd w zamkniętej, przewodzącej pętli. Korzystając z równania (35-17), możemy napisać

$$\mathcal{E} = \frac{W}{q} = \frac{qBvl}{q} = Blv, \quad (35-18)$$

co jest oczywiście tym samym wyrażeniem, które wyrowadziliśmy z zasady indukcji Faradaya (patrz równ. (35-3)). Zatem wywołana ruchem siła elektromotoryczna jest wewnętrznie związana z bocznym odchyleniem częstek naładowanych poruszających się w polu magnetycznym.

Rozważmy teraz, jak sytuacja z rys. 35-16b przedstawiłaby się obserwatorowi  $S'$ , który znajduje się w spoczynku względem pętli. Dla tego obserwatora magnes na rys. 35-16b przesuwa się w lewą stronę z prędkością  $-v$ , a ładunek  $q$  znajduje się w spoczynku tak dugo, jak długo trwa ruch od lewej strony do prawej. Jednakże  $S'$ , podobnie jak  $S$ , obserwuje, że ładunek unosi się zgodnie z kierunkiem wskazówek zegara dookoła pętli. Obydwaj obserwatorzy mierzą tę samą siłę elektromotoryczną  $\mathcal{E}$ . Dlatego więc obserwator  $S'$  uważa, że poruszający się magnes indukuje w pętli mikroskopowe pole magnetyczne. To indukowane pole  $E$ , mające to samo pochodzenie jak pola, o których mówiliśmy w parafagie 35-5, działa siłą równą iloczynowi  $qE$  na nośnik ładunku.

Indukowane pole  $E$ , które istnieje tylko w lewym boku ramki, jest związane z siłą elektromotoryczną  $\mathcal{E}$  i generuje prąd w zamkniętej ramce. Ogólnie, w dowolnej pętli zamkniętej z prądem musi istnieć wewnętrzne pole elektryczne w każdym punkcie, w którym ładunki się poruszają. Takie pola powstają dzięki siле elektromotorycznej, jak to ma miejsce w pętli podłączonej do baterii, a nie są indukowane przez ruch magnesu. Jest to tylko to indukowane pole  $E$ , które wiąże się z siłą elektromotoryczną zależnością (równ. 35-8),

$$\mathcal{E} = \oint Edl$$

sprawdzającą się w nowym przypadku do postaci

$$\mathcal{E} = El. \quad (35-19)$$

Nie ma bowiem *indukowanego* pola elektrycznego  $E$  ani w górnym, ani w dolnym odcinku ramki ze względu na rodzaj ich ruchu, nie ma także w części pętli znajdującej się poza polem magnetycznym.

Sily elektromotoryczne dane przez równania (35-19) i (35-18) muszą być jednakowe, ponieważ względny ruch magnesu i pętli jest jednakowy w obydwu przypadkach pokazanych na rys. 35-16. Porównując te zależności otrzymujemy

$$El = Blv \quad \text{albo} \quad E = vB. \quad (35-20a)$$

Na rysunku 35-16b, na lewym odcinku ramki przewodzącej wektor  $E$  skierowany jest w górę, ponieważ w tym kierunku unoszone są dodatnie ładunki. Kierunki  $v$  i  $B$  wyraźnie wynikają z tego rysunku. Widzimy więc, że równanie (35-20a) jest zgodne z bardziej ogólną zależnością wektorową

$$E = v \times B. \quad (35-20b)$$

Udowodniliśmy równanie (35-20b) tylko dla szczególnego przypadku przedstawionego na rys. 35-16; niemniej jest ono prawdziwe dla dowolnych kątów zawartych między  $v$  i  $B$ .

Równanie (35-20b) interpretujemy w następujący sposób: obserwator  $S$  związany z magnesem obserwuje tylko pole magnetyczne i sily związane z ruchem ładunków w polu magnetycznym  $B$ . Obserwator  $S'$  związany z nośnikiem ładunku obserwuje pole elektryczne  $E$  i przypisuje siłę działającą na ładunek temu polu (ładunek początkowo znajduje się w spoczynku względem niego). Obserwator  $S$  stwierdza, że siła ma czysto magnetyczne pochodzenie, a obserwator  $S'$  — że ma ona pochodzenie czysto elektryczne. Z punktu widzenia obserwatora  $S$ , indukowana siła elektromotoryczna dana jest przez wyrażenie  $\oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) dl$ . Z punktu widzenia obserwatora  $S'$ , ta sama indukowana siła elektromotoryczna jest dana przez wyrażenie  $\oint Edl$ , gdzie  $E$  jest wektorem indukowanego pola elektrycznego obserwowanym w różnych punktach obwodu.

Dla trzeciego obserwatora  $S''$ , który sądzi, że i magnes i pętla poruszają się, siła starająca się przesuwać ładunki wzduż pętli ma pochodzenie zarówno elektryczne jak i magnetyczne. Podsumowując, w równaniu

$$\frac{\mathbf{F}}{q} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

różni obserwatorzy stwierdzają, że  $E$ ,  $B$  i  $v$  mają różne wartości. Ale gdy się to wszystko uwzględnii, wszyscy obserwatorzy wymierzą to samo  $F/q$  i wszyscy otrzymają tę samą wartość dla indukowanej siły elektromotorycznej w pętli (zależy to tylko od ruchu względnego). Znaczy to, że siła całkowita jest taka sama dla wszystkich obserwatorów, chociaż każdy obserwator może różnie szacować jej składową elektryczną i magnetyczną.

Zasadniczo to, co wydaje się, że jest polem magnetycznym dla jednego obserwatora, może być mieszaniną pola elektrycznego i magnetycznego dla drugiego obserwatora znajdującego się w innym inercjalnym układzie odniesienia. Obaj obserwatorzy zgodzą się jednakże, że w pętli w przypadku przedstawionym na rys. 35-16, płynie prąd. Jesteśmy zmuszeni do wyciągnięcia wniosku, że pole magnetyczne i elektryczne nie są niezależne od siebie, i w ogólności nie występują oddzielnie. Zależą one od inercjalnego układu odniesienia.

Einstein zaczął myśleć o ruchu względnym mając 16 lat, a opublikował swą sławną pracę na temat szczególnej teorii względności w 1905 r., mając 26 lat, jako rzecznik patentowy w szwajcarskim Urzędzie Patentowym w Bernie. Doszedł on do tej teorii nie na podstawie rozważań nad strukturą przestrzeni i czasu, ale właśnie na podstawie rozważań nad zagadnieniami poruszonymi w tym paragrafie.

Wynika to nie tylko z tytułu jego pracy *O silach elektromagnetycznych działających na poruszające się ciała*, lecz jest wyraźnie zaznaczone we wstępie tej pracy, gdzie pisze:

„Wiadomo, że elektrodynamika Maxwella — jak się to obecnie zwykle rozumie — zastosowana do poruszających się ciał prowadzi do asymetrii, która okazuje się być nieodłączną od zjawiska. Weźmy np. wzajemne elektromagnetyczne oddziaływanie magnesu i przewodnika. Obserwowane zjawisko zależy tu tylko od względnego ruchu przewodnika i magnesu, podczas gdy zwyczajowo wprowadza się ostre rozróżnienie między dwoma przypadkami, w których albo jedno, albo drugie ciało jest w ruchu. Jeżeli magnes się porusza a przewodnik spoczywa, to w sąsiedztwie magnesu powstaje pole elektryczne o pewnej określonej energii, wytwarzające w przewodniku prąd. Ale jeżeli magnes jest w spoczynku, a przewodnik w ruchu, pole elektryczne nie pojawi się w sąsiedztwie magnesu. W przewodniku jednakże znajdziemy siłę elektromotoryczną, dla której nie ma odpowiadającej energii, ale która daje — zakładając równość względnych

ruchów w obydwu dyskutowanych przypadkach — prądy elektryczne na tej samej drodze i o tym samym natężeniu jak prądy wytwarzane przez siły elektryczne w poprzednim przypadku.

Dalsze i dokładniejsze rozważania na ten temat znajdzie czytelnik w dodatku V tej książki oraz w pracy: Robert Resnick, *Introduction to Special Relativity*, John Wiley and Sons, 1968, rozdział IV.

**Przykład 6.** Założmy, że na rys. 35-16 indukcja  $B = 2,0 \text{ T}$ ,  $I = 10 \text{ cm}$  i  $v = 1,0 \text{ m/s}$ . Obliczyć (a) indukowane pole elektryczne widziane przez obserwatora  $S'$ , (b) SEM indukowaną w pętli.

(a) Pole elektryczne, które widzi tylko obserwator  $S'$ , związane jest z poruszającym się polem magnetycznym, a jego wielkość jest równa

$$E = vB = 1,0 \text{ m/s} \cdot 2,0 \text{ T} = 2,0 \text{ V/m}.$$

(b) Obserwator  $S$  oblicza indukowaną SEM według wzoru

$$\mathcal{E} = Blv = 2,0 \text{ T} \cdot 10 \cdot 10^{-1} \text{ m} \cdot 1,0 \text{ m/s} = 0,20 \text{ V},$$

a obserwator  $S'$ , który nie traktuje SEM jako siły dynamicznej, stosuje wzór

$$\mathcal{E} = El = (2,0 \text{ V/m}) \cdot 1,0 \cdot 10^{-1} \text{ m} = 0,20 \text{ V}.$$

I znów, jak należało oczekiwać, obydwa obserwatorzy otrzymują zgodne wartości liczbowe SEM.

### Pytania

1. Na rysunkach 35-1, 35-2 i 35-3 dla wygody prezentujemy cewki jednozwojowe. Wyjaśnić zalety zwiększenia liczby zwojów.

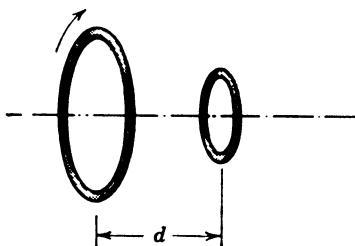
2. Czy „indukowane” siły elektromotoryczne i prądy różnią się w jakiś sposób od sił elektromotorycznych i prądów zasilanych przez baterię połączoną z obwodem przewodzącym? Omówić to.

3. Mimo że sprawy te były omawiane we wcześniejszych rozdziałach, jak można dokładniej wyjaśnić własnymi słowami różnicę między polem magnetycznym  $B$  a strumieniem pola magnetycznego  $\Phi_B$ ? Czy są to wektory czy skalary? W jakich jednostkach można je wyrazić? W jakim związku pozostają te jednostki? Czy jedno z nich lub oba są własnościami danego punktu przestrzeni. Czy też ani jedno, ani drugie? Omówić to wyczerpująco.

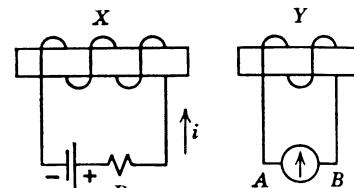
4. Magnes spada z sufitu, wzdłuż osi miedzianej pętli leżącej płasko na podłodze. Jeżeli spadający magnes fotografujemy kamerą filmową, tzn. w kolejnych odstępach czasowych, jakie zauważymy różnice (jeżeli jakieś zauważymy): (a) gdy pętla jest w temperaturze pokojowej, (b) gdy jest obłożona suchym lodem?

5. Dwie pętle przewodzące umieszczone są współosiowo, w odległości  $d$  (rys. 35-17). Obserwator patrzy wzdłuż osi ze strony lewej na prawą. Jeżeli w większej pętli zaczyna nagle płynąć prąd  $i$  o kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, to (a) jaki jest kierunek prądu indukowanego w mniejszej pętli? (b) jaki jest kierunek siły (jeżeli ona występuje) działającej na mniejszą pętlę?

6. Jaki jest kierunek SEM indukowanej w cewce  $Y$  na rys. 35-18, gdy (a) cewka  $Y$  jest przesunięta w stronę cewki  $X$  i (b) prąd w cewce  $X$  jest zmniejszony, bez zmiany wzajemnej pozycji cewek?



Rys. 35-17. Pytanie 5

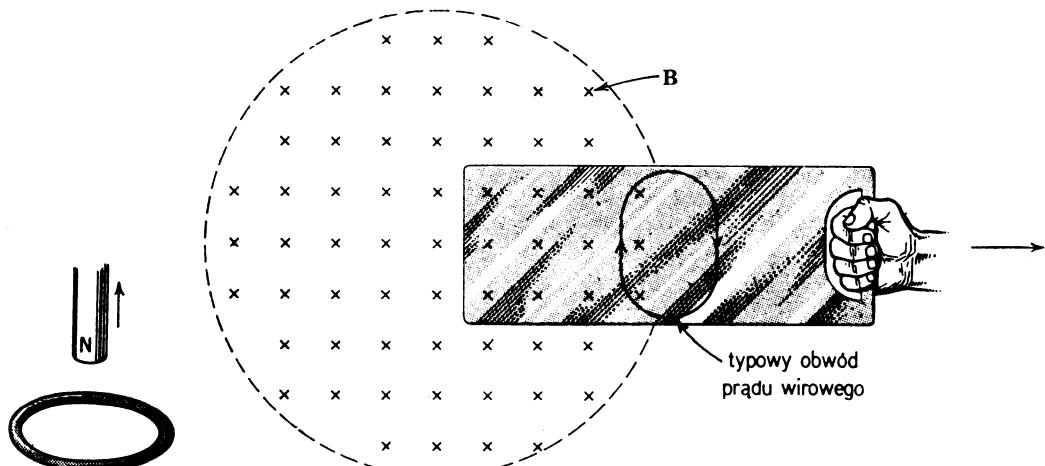


Rys. 35-18. Pytanie 6

7. Północny biegun magnesu usuwamy z pierścienia metalowego, jak pokazano na rys. 35-19. Jaki jest kierunek prądu w części pierścienia leżącej najdalej od patrzącego?

8. *Prądy wirowe.* Płytką miedzianą umieszczoną jest częściowo w polu magnetycznym, jak pokazano na rys. 35-20. Jeżeli spróbujemy usunąć płytke z pola lub wsunąć ją dalej w pole, pojawia się siła oporu.

**Wytnieć to zjawisko. (Wskazówka: W płytce indukowane są prądy zwane wirowymi, które przeciw- działają jej ruchowi.)**

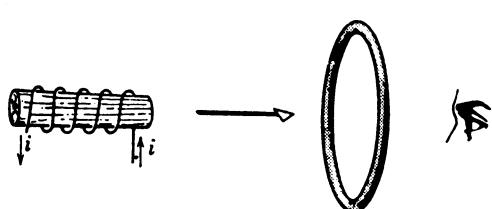


Rys. 35-19. Pytanie 7

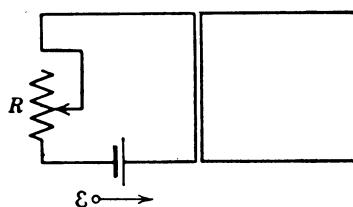
Rys. 35-20. Pytanie 8

9. Solenoid, przez który płynie prąd, porusza się w kierunku przewodzącej pętli, jak na rys. 35-21. Jaki jest kierunek prądu płynącego w pętli, jeśli patrzymy na nią z przodu, tak jak pokazano na rysunku?

10. Jeżeli opór  $R$  w obwodzie przedstawionym na rys. 35-22 wzrasta, jaki jest kierunek prądu indukowanego w prawym obwodzie?



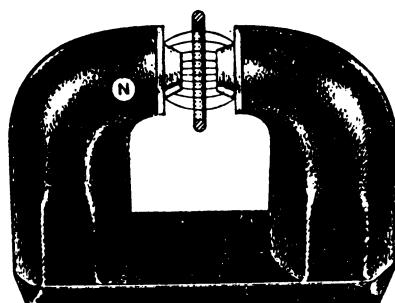
Rys. 35-21. Pytanie 9



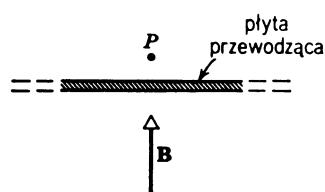
Rys. 35-22. Pytanie 10

11. Spomiędzy bieguna magnesu usuwamy zamkniętą pętlę (rys. 35-23) unosząc ją pionowo do góry  
 (a) Jaki jest kierunek indukowanego prądu? (b) Czy dla usunięcia pętli potrzebna jest siła? (c) Czy całkowita energia cieplna wytwarzana w usuwanej pętli zależy od czasu potrzebnego na jej usunięcie?

12. Oslona elektromagnetyczna. Płytki przewodzące znajdują się w polu magnetycznym  $B$  w płaszczyźnie.



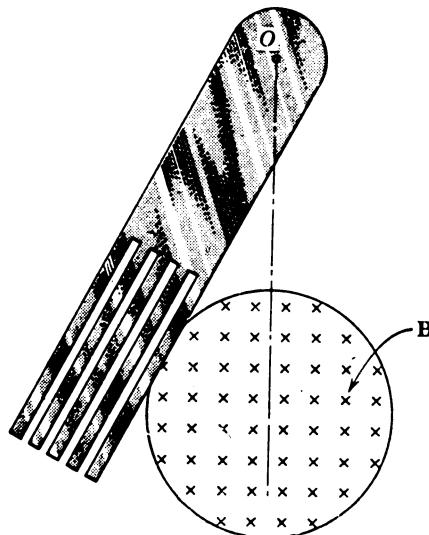
Rys. 35-23. Pytanie 11



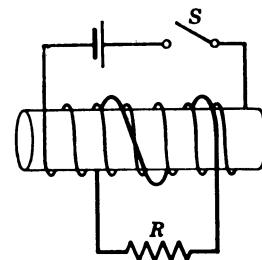
Rys. 35-24. Pytanie 12

czyżnie prostopadłej do pola (rys. 35-24). (a) Jeżeli  $B$  zmieni się w sposób natychmiastowy, całkowita zmiana  $B$  nie zostaje od razu wykryta w okolicy punktu  $P$ . Wytlumaczyć to. (b) Jeżeli opór właściwy płytki jest 0, zmiana ta nigdy nie będzie wykryta w  $P$ . Wytlumaczyć to. (c) Jeżeli  $B$  zmienia się okresowo z wysoką częstotliwością, a przewodnik wykonany jest z materiału o niskim oporze właściwym, obszar w bliskim otoczeniu  $P$  jest prawie całkowicie osłaniany od zmian strumienia. Wytlumaczyć to. (d) Czy taki przewodnik może służyć jako osłona od statycznych pól magnetycznych?

13. *Tłumienie magnetyczne.* Pasek miedziany (rys. 35-25) umocowany jest w punkcie  $O$  tak, że tworzy wahadło. Swobodny koniec paska może wachać się w polu magnetycznym, prostopadłym do płaszczyzny rysunku. Jeżeli w pasku wycięte są szczeliny, jak pokazuje rysunek, może on swobodnie poruszać się w polu. Jeżeli zastąpimy go paskiem pełnym, bez szczelin, ruch wahadłowy będzie silnie tłumiony. Wytlumaczyć to. (*Wskazówka:* Zastosować prawo Lenza. Rozpatrzyć tory, po których muszą poruszać się nośniki ładunku, aby przeciwdziałać ruchowi.)



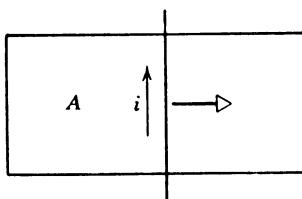
Rys. 35-25. Pytanie 13



Rys. 35-26. Pytanie 14

14. Jaki jest kierunek prądu płynącego przez opór (rys. 35-26): (a) natychmiast po zamknięciu przełącznika  $S$ , (b) po upływie czasu od chwili zamknięcia, (c) natychmiast po otwarciu  $S$ ? (d) który koniec cewki działa jako biegun północny, kiedy przełącznik  $S$  jest stale zamknięty? (e) skąd wołne ładunki w cewce zawierającej  $R$ , „wiedzą” o strumieniu wewnętrznz długiej cewki? Co naprawdę sprawia je w ruch?

15. Ruchomy przewód, przedstawiony na rys. 35-27, przesuwa się w prawą stronę powodując powstanie prądu indukcyjnego w obwodzie. Jaki jest kierunek indukcji  $B$  w obszarze  $A$ ?



Rys. 35-27. Pytanie 15

16. Dokonać jakościowej analizy układów linii sił pola  $B$  na rysunkach 35-6b i c.  
17. Jak zmieniłby się rys. 35-8, jeżeli wzięlibyśmy pod uwagę konieczne rozproszenie linii sił pola  $B$  na obwodzie na rys. 35-7?

18. (a) Czy koło o promieniu  $r$  na rys. 35-10 musi być obwodem przewodzącym, aby  $E$  i  $\mathcal{E}$ , mogły istnieć? (b) Jeżeli koło o promieniu  $r$  nie byłoby koncentryczne (np. lekko przesunięte w lewo), czy zmieniłaby się  $\mathcal{E}$ ?

Czy zmieniiby się układ pola E wokół koła? (c) Czy istnieje SEM dla koncentrycznego koła o promieniu  $r$ , gdy  $r > R$ ? Czy istnieją pola elektryczne?

19. Dwa pierścienie, miedziany i drewniany, o identycznych wymiarach, ustawione są tak, aby zmieniający się strumień magnetyczny, przechodzący przez każdy z nich, był taki sam. Porównać pola elektryczne indukowane w każdym z pierścieni?

20. Spójrzmy na rys. 35-12. Kiedy SEM indukowane w obwodzie 1 i 2 będą identyczne? Pole elektryczne indukowane w pobliżu obwodu 1 jest dużo słabsze niż pole w pobliżu obwodu 2, na co wskazuje rozmieszczenie linii sił. Patrz również rys. 35-11.

21. W pewnym betatronie elektrony krążą w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Jaki musi być kierunek pola magnetycznego i jak zmienia się ono w czasie, kiedy elektrony są przyspieszane?

22. Dlaczego w betatronie proces przyspieszania zachodzi tylko w 1/4 cyklu?

23. Jak należy zmienić strumień centralny w betatronie, zwiększyć czy też zmniejszyć, aby orbitę stacjonarną przekształcić w spiralę skierowaną na zewnątrz?

24. Cyklotron (patrz paragraf 33-7) działa na zasadzie *rezonansu*. Czy w betatronie wykorzystany jest rezonans? Omówić to.

25. Widzimy na rys. 35-16a, że siła ( $F_m \cos\theta$ ) działa na nośniki ładunku w lewym odgałęzieniu obwodu. Jednakże, jeżeli musi płynąć w obwodzie nieprzerwany prąd, to jakaś siła musi działać na nośniki ładunku w trzech pozostałych odgałęzieniach obwodu, aby utrzymać tę samą prędkość przesunięcia  $v_s$  w tych odgałęzieniach. Jakie jest jej źródło? (Wskazówka: Rozpatrzyć lewe odgałęzienie obwodu jako jedyny element przewodzący, podczas gdy trzy pozostałe nie przewodzą. Czy ładunek dodatni nie zgromadzi się u góry lewej połowy, a ładunek ujemny u dołu?)

26. Wykazać, że jeden wolt = jeden weber/sekunda.

## Zadania

### Paragraf 35-2

1. Pole jednorodne o indukcji  $\mathbf{B}$  jest prostopadłe do płaszczyzny pierścienia kołowego o średnicy 10 cm, wykonanego z drutu miedzianego o średnicy 2,5 mm. Z jaką prędkością zmienia się w czasie indukcja  $\mathbf{B}$ , jeżeli prąd indukowany w pierścieniu wynosi 10 A?

Odp.: 1,3 T/s.

2. Mamy 50 cm drutu miedzianego, o średnicy 0,8 mm. Drut tworzy pętlę kołową umieszczoną prostopadle względem jednorodnego pola magnetycznego, które wzrasta w czasie ze stałą szybkością 0,010 T/s. Z jaką szybkością wytwarzana jest w pętli energia cieplna (w watach)?

3. Sto zwojów izolowanego drutu miedzianego nawinięto na walec żelazny, którego przekrój po-przecznny ma powierzchnię  $0,001 \text{ m}^2$  i połączono szeregowo z oporem. Całkowity opór obwodu wynosi  $10 \Omega$ . Jaki ładunek musi płynąć w obwodzie, aby podłużna indukcja magnetyczna w żelazie zmieniła się od wartości 1 T w jednym kierunku do wartości 1 T w kierunku przeciwnym?

Odp.:  $2,0 \cdot 10^{-2} \text{ C}$ .

4. Prąd w solenoidzie z przykładu 1 zmienia się nie tak jak w tym przykładzie, lecz zgodnie z równaniem  $i = 3,0t + 1,0t^2$ , gdzie  $i$  podano w amperach, a  $t$  w sekundach. (a) Wykreślić ilościowo SEM indukowaną w cewce od  $t = 0$  do  $t = 4$  s. (b) Opór cewki wynosi  $0,15 \Omega$ . Ile wynosi chwilowy prąd w cewce, gdy  $t = 2,0$  s.

5. Mały obwód o powierzchni  $A$  znajduje się wewnątrz długiego solenoidu o  $n$  zwojach na jednostkę długości i natężeniu  $i$ , a os obwodu ma ten sam kierunek co os solenoidu. Znaleźć SEM  $\mathcal{E}$  w obwodzie, jeżeli  $i = i_0 \sin \omega t$ .

Odp.:  $-\mu_0 n A i_0 \omega \cos \omega t$ .

6. Generator prądu zmiennego. Obwód prostokątny złożony z  $N$  zwojów o długości  $a$  i szerokości  $b$  obraca się z częstością  $v$  w jednorodnym polu o indukcji  $\mathbf{B}$  (rys. 35-28). (a) Pokazać, że w obwodzie pojawia się indukowana siła SEM dana wzorem

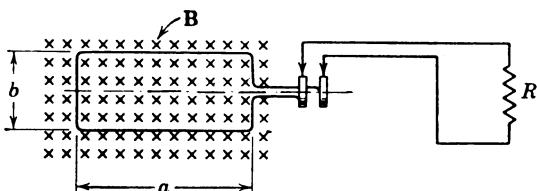
$$\mathcal{E} = 2\pi v N b a B \sin 2\pi v t = \mathcal{E}_0 \sin 2\pi v t.$$

Taka jest zasada działania generatora prądu przemiennego sieci miejskiej. (b) Zaprojektować obwód,

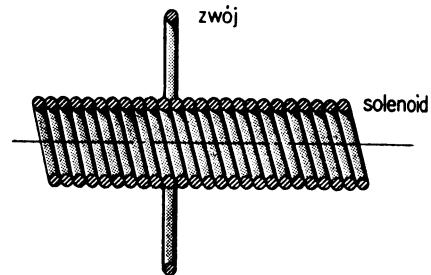
który obracając się z szybkością 60 obr/s w polu magnetycznym o indukcji 0,50 T, będzie wytwarzał SEM  $\mathcal{E}_0 = 150$  V.

7. Zamknięty, pojedynczy zwój (rys. 35-29) z miedzianego drutu o oporze równym  $5,0 \Omega$  umieszczony jest na zewnątrz solenoidu opisanego w przykładzie 1. (a) Jaki prąd pojawi się w cewce, jeżeli prąd w solenoidzie jest zmienny? (b) W jaki sposób wolne ładunki w obwodzie „otrzymują wiadomość” od solenoidu, że powinny zacząć się poruszać (aby utworzyć prąd)? Wszakże strumień magnetyczny jest całkowicie ograniczony tylko do wewnętrz solenoidu.

Odp.: (a)  $2,1 \cdot 10^{-4}$  A.



Rys. 35-28. Zadanie 6



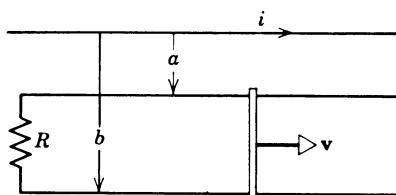
Rys. 35-29. Zadanie 7

8. Rysunek 35-30 przedstawia miedziany pręt poruszający się na przewodzących szynach z prędkością  $v$  równoległą do długiego, prostego drutu przewodzącego prąd  $i$ . Obliczyć SEM  $\mathcal{E}$  indukowaną w pręcie, przyjmując, że  $v = 5,0$  m/s,  $i = 100$  A,  $a = 1,0$  cm i  $b = 20$  cm.

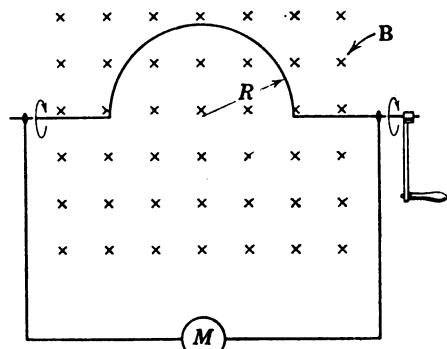
9. Pętla kołowa o średnicy 10 cm, wykonana z drutu, ustawiona jest tak, że jej normalna tworzy kąt  $30^\circ$  z kierunkiem jednorodnego pola magnetycznego o indukcji 0,50 T. Pętla wykonuje ruch „oscylowy-obrotowy” taki, że jej normalna obraca się wokół kierunku pola ze stałą prędkością 100 obrotów/min. Kąt między normalną do pętli i kierunkiem pola ( $= 30^\circ$ ) nie zmienia się podczas tego ruchu. Jaka SEM pojawiła się w pętli?

Odp.: Zero.

10. Sztynny drut wygięty w półkole o promieniu  $R$ , obraca się z częstotliwością  $v$  w jednorodnym polu o indukcji  $B$  (rys. 35-31). Jakie są amplituda i częstotliwość indukowanej SEM i indukowanego prądu, jeżeli opór wewnętrzny miernika  $M$  wynosi  $R_M$ , a opór reszty obwodu jest do zaniedbania?



Rys. 35-30. Zadanie 8



Rys. 35-31. Zadanie 10

11. Na rysunku 35-32 przedstawiony jest pręt miedziany poruszający się z prędkością  $v$  równolegle do długiego, prostego przewodu, przez który płynie prąd o natężeniu  $i$ . Obliczyć SEM indukowaną w pręcie przyjmując, że  $v = 5,0$  m/s,  $i = 100$  A,  $a = 1,0$  cm,  $b = 20$  cm.

Odp.:  $3,0 \cdot 10^{-4}$  V.

12. Wielkość jednorodnego pola o indukcji  $B$  zmienia się ze stałą prędkością  $dB/dt$ . Z kawałka miedzi o masie  $m$  wykonano drut o promieniu  $r$ , z którego utworzono pętlę kołową o promieniu  $R$ . Udowodnić, że prąd indukowany w pętli nie zależy od wymiarów  $r$  i  $R$ . Przyjmując, że  $B$  jest prostopadłe do pętli, wykazać, że prąd indukowany dany jest wzorem

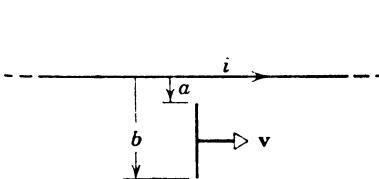
$$i = \frac{m}{4\pi\rho\delta} \frac{dB}{dt},$$

gdzie  $\rho$  jest oporem właściwym, a  $\delta$  — gęstością miedzi.

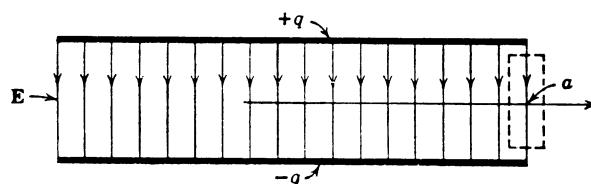
13. Kołowy obwód o promieniu  $r$  (10 cm) umieszczony zostaje w jednorodnym polu magnetycznym  $B$  (0,80 T) prostopadłym do płaszczyzny obwodu. Promień obwodu zaczyna zmniejszać się ze stałą szybkoscią  $dr/dt$  (80 cm/s). (a) Ile wynosi indukowana SEM w obwodzie? (b) Z jaką szybkoscią musiałaby zmniejszać się powierzchnia, aby indukować tę samą SEM?

Odp.: (a) 0,40 V. (b) 0,50 m<sup>2</sup>/s.

14. Udowodnić, że pole elektryczne  $E$  w naładowanym kondensatorze płaskim nie może skokowo zmaleć do zera w funkcji zmiennej liniowej, której oś, prostopadła do tego pola, pokrywa się ze strzałką na rys. 35-33 (patrz punkt a). W rzeczywistych kondensatorach występuje zawsze rozproszenie linii sił, co oznacza, że  $E$  zbliża się do zera w sposób ciągły i stopniowy, patrz zadanie 34-2. (Wskazówka: Zastosować prawo Faradaya dla prostokątnej drogi zaznaczonej przerywaną linią.)



Rys. 35-32. Zadanie 11



Rys. 35-33. Zadanie 14

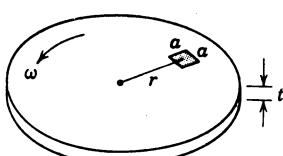
15. Elektromagnetyczny hamulec na „prąd wirowy” składa się z krążka o przewodności  $\sigma$  i grubości  $t$  obracającego się wokół własnej osi w polu magnetycznym  $B$  przyłożonym prostopadle do płaszczyzny krążka na małym obszarze  $a^2$  (patrz rys. 35-34). Znaleźć przybliżone wyrażenie na moment obrotowy mogący zwolnić ruch krążka, w chwili gdy jego prędkość kątowa wynosi  $\omega$ , a obszar  $a^2$  znajduje się w odległości  $r$  od osi.

Odp.:  $\tau = B^2 a^2 r^2 \omega \sigma t$ .

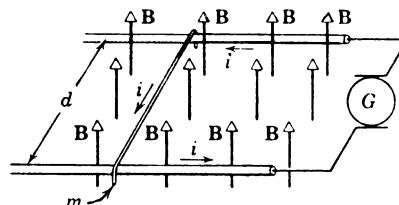
#### Paragraf 35-3

16. Stały magnes o niewielkich wymiarach przesuwamy szybko przez pętlę przewodzącą wzdłuż jej osi. Opisać jakościowo (a) indukowany prąd oraz (b) szybkość wytwarzania energii cieplnej jako funkcje położenia środka magnesu. Założyć, że północny biegum magnesu początkowo znajduje się bliżej pętli oraz że magnes porusza się ze stałą prędkością. Przyjąć, że prąd indukowany jest dodatni, jeżeli jego kierunek jest zgodny z kierunkiem wskazówek zegara dla obserwatora patrzącego wzdłuż drogi magnesu.

17. Drut metalowy o masie  $m$  śliiga się bez tarcia po dwóch szynach położonych w odległości wzajemnej  $d$  (rys. 35-35). Całość umieszczona jest w jednorodnym pionowym polu o indukcji  $B$ . (a) Prąd stary o natężeniu  $i$  płynie z generatora  $G$  wzdłuż jednej z szyn, następnie przez drut i wraca wzdłuż drugiej szyny. Znaleźć prędkość (wartość bezwzględną i kierunek) drutu jako funkcję czasu przyjmując, że w chwili po-



Rys. 35-34. Zadanie 15



Rys. 35-35. Zadanie 17

czątkowej ( $t = 0$ ) drut jest w spoczynku. (b) Zamiast generatora włączamy baterię o stałej SEM  $\mathcal{E}$ . Prędkość drutu osiąga pewną stałą wartość graniczną. Jaka jest ta graniczna wartość prędkości? (c) Jaki prąd będzie płynął, w przypadku (b), kiedy drut osiągnie prędkość graniczną?

Odp.: (a)  $Bdt/m$ ; od punktu G. (b)  $\mathcal{E}/Bd$ . (c) Zero.

18. Na rysunku 35-36 strumień magnetyczny przechodzi przez pętlę prostopadłe do jej płaszczyzny i skierowany jest za płaszczyznę rysunku. Zmiana strumienia dana jest następującym wzorem:

$$\Phi_B = 6t^2 + 7t + 1,$$

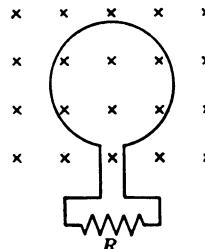
gdzie  $\Phi_B$  jest wyrażone w mWb (1 mWb =  $10^{-3}$  Wb), a  $t$  w s. (a) Jaka jest wartość SEM indukowanej w pętli, kiedy  $t = 2,0$  s? (b) Jaki jest kierunek prądu płynącego przez opór  $R$ ?

#### Paragraf 35-4

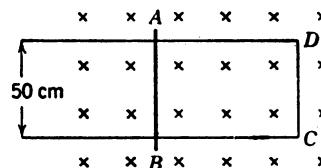
19. Założyć, że w układzie z przykładu 3:  $B = 1,2$  T i  $L = 5,0$  cm. Jakiego przyspieszenia będzie doznawał końcowy punkt obracającego się pręta, jeżeli  $\mathcal{E} = 1,0$  V.

Odp.: 2300 g.

20. Na rysunku 35-37, przewodzący pręt  $AB$  kontaktuje z szynami metalowymi  $AD$  i  $BC$ , które leżą w odległości 50 cm od siebie. Całość znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji 1,0 T, prostopadłym do płaszczyzny rysunku. Całkowity opór obwodu  $ABCD$  wynosi  $0,4\ \Omega$  (zakładamy, że jest on stały). (a) Jaka jest wielkość i kierunek SEM indukowanej w pręcie, kiedy porusza się on w lewą stronę z prędkością 8 m/s? (b) Jaka siła jest potrzebna, aby utrzymać pręt w ruchu? (c) Porównać szybkość, z jaką siła  $F$  wykonuje pracę mechaniczną, z szybkością wydzielania się energii cieplnej w obwodzie.



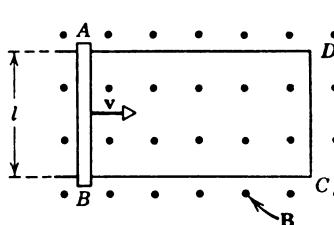
Rys. 35-36. Zadanie 18



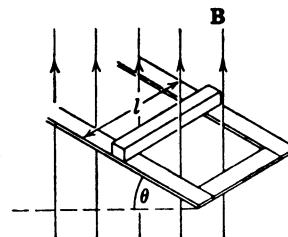
Rys. 35-37. Zadanie 20

21. Na rys. 35-38  $l = 2,0$  m i  $v = 50$  cm/s.  $\mathbf{B}$  jest polem magnetycznym Ziemi skierowanym prostopadle ponad stronę i mającym w tym miejscu wartość  $6,0 \cdot 10^{-5}$  T. Opór obwodu  $ADCB$  przyjęto za stały (wyjaśnić na jakiej podstawie można przyjąć takie założenie) i wynosi on  $R = 1,2 \cdot 10^{-5}\ \Omega$ . (a) Ile wynosi SEM indukowana w obwodzie? (b) Ile wynosi pole elektryczne w drucie  $AB$ ? (c) Jaka siła działa na każdy elektron w drucie wskutek ruchu drutu w polu magnetycznym? (d) Jaka jest wartość i kierunek prądu w drucie? (e) Jaką siłę musi wywierać czynnik zewnętrzny, aby utrzymać stałą prędkość poruszającego się drutu? (f) Obliczyć szybkość, z jaką czynnik zewnętrzny wykonuje pracę. (g) Obliczyć szybkość, z jaką energia elektryczna jest zamieniana w energię cieplną.

Odp.: (a)  $6,0 \cdot 10^{-5}$  V. (b)  $3,0 \cdot 10^{-5}$  V/m. (c)  $4,8 \cdot 10^{-24}$  N. (d)  $5,0$  A. (e)  $6,0 \cdot 10^{-4}$  N. (f)  $3,0 \cdot 10^{-4}$  W. (g)  $3,0 \cdot 10^{-4}$  W.



Rys. 35-38. Zadanie 21



Rys. 35-39. Zadanie 22

22. Drut o przekroju kwadratowym, długości  $l$ , masie  $m$  i oporze  $R$  ześlizguje się bez tarcia wzdłuż równoległych szyn przewodzących o zaniedbywalnym oporze (rys. 35-39). Dolne końce szyn połączone są szyną poprzeczną równoległą do drutu tak, że drut i szyny tworzą zamknięty, prostokątny obwód przewodzący. Płaszczyzna szyn tworzy kąt  $\theta$  z płaszczyzną poziomą. Całość znajduje się w jednorodnym, pionowym polu magnetycznym o indukcji  $B$ . (a) Wykazać, że drut spada ze stałą prędkością, której wielkość wyraża się wzorem

$$v = \frac{mgR\sin\theta}{B^2l^2\cos^2\theta}.$$

(b) Udowodnić, że wynik ten jest zgodny z zasadą zachowania energii. (c) Jaka zmiana zajdzie (jeżeli zajdzie), gdy  $B$  skierujemy w dół zamiast do góry?

#### Paragraf 35-5

23. Długi solenoid o promieniu  $r$  (2,5 cm) i  $n$  zwojach na jednostkę długości (100/cm) przewodzi prąd początkowy  $i_0$  (1,0 A). Pojedynczy zwój drutu, o średnicy  $D$  (10 cm), otacza ów solenoid współosiowo. Prąd w solenoidzie jest redukowany jednostajnie do  $i$  (0,50 A) w przedziale czasu  $T$  (0,010 s). Ile wynosi indukowana SEM w otaczającym uzwojeniu, gdy prąd się zmienia?

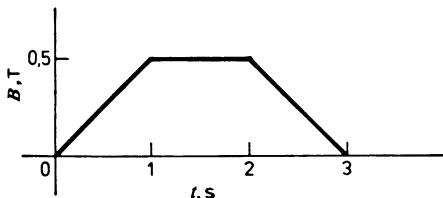
Odp.:  $1,2 \cdot 10^{-3}$  V.

24. Kołowa cewka o promieniu  $r$  (10 cm) wykonana jest z drutu o oporze  $R$  (10  $\Omega$ ). Jednorodne pole magnetyczne  $B$  jest prostopadłe do płaszczyzny cewki. (a) Z jaką stałą szybkością musi wzrastać pole  $B$ , tak aby w obwodzie utrzymał się stały prąd  $i$  (0,010 A)? (b) Jaka moc ulega rozproszeniu w oporniku?

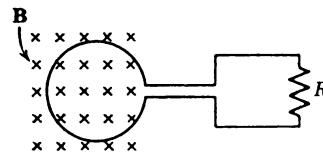
25. (a) Dla układu na rys. 34-28, jaki prąd byłby indukowany w prostokątnym uzwojeniu, jeżeli prąd w drucie małaby jednostajnie od 30 A do zera w ciągu 1,0 s? Założyć, że początkowo w obwodzie nie płynie prąd oraz że opór uzwojenia wynosi 0,020  $\Omega$ . Przyjąć, że  $a = 1,0$  cm,  $b = 8,0$  cm i  $l = 30$  cm. (b) Ile energii zostało przeniesione do uzwojenia w ciągu tej jednej sekundy?

Odp.: (a)  $1,9 \cdot 10^{-4}$  A. (b)  $7,2 \cdot 10^{-10}$  J.

26. Prostopadłe pole  $B$  przechodzące przez jeden kołowy zwój drutu o pomijalnym oporze zmienia się z czasem jak na rys. 35-40. Zwój ma promień  $r$  (10 cm) i jest połączony z opornikiem  $R$  (10  $\Omega$ ). (a) Wykreślić SEM pojawiającą się w obwodzie. (b) Wykreślić prąd i płynący przez opornik  $R$ . (c) Wykreślić szybkość wytwarzania energii cieplnej na oporniku.



Rys. 35-40. Zadanie 26



Rys. 35-41. Zadanie 27

27. Uzwojenie z drutu o powierzchni  $A$  jest połączone z oporem  $R$ . Uzwojenie wystawia się na działanie pola  $B$  zmieniającego się w czasie (rys. 35-41). (a) Wyprowadzić wzór na ładunek netto przenoszony przez opornik między  $t = t_1$  i  $t = t_2$ . Wykazać, że odpowiedź jest proporcjonalna do różnicy  $\Phi_B(t_2) - \Phi_B(t_1)$ , czyli, inaczej mówiąc, nie zależy od sposobu, w jaki zmienia się pole  $B$ . (b) Przypuśćmy, że zmiana strumienia  $\Phi_B(t_2) - \Phi_B(t_1)$  wynosi zero. Czy wynika stąd, że w tym przedziale czasu nie jest wytwarzana energia cieplna?

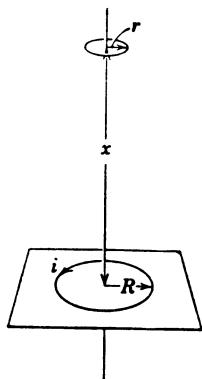
Odp.: (a)  $Q = -\frac{1}{R} [\Phi_B(t_2) - \Phi_B(t_1)]$ . (b) Nie.

28. Rysunek 35-42 przedstawia dwa współosiowe zwoje drutu. Mniejszy zwój znajduje się nad większym w odległości  $x$ , dużej w porównaniu z promieniem  $R$  większego zwoju. A więc, gdy prąd  $i$  płynie przez zwój większy zgodnie ze strzałką na rysunku, powstałe pole magnetyczne jest prawie stałe na obszarze  $\pi r^2$  otoczonym przez zwój mniejszy. Przypuśćmy teraz, że  $x$  nie jest stałe, ale zmienia się ze stałą szybkością  $dx/dt = v$  ( $x$  wzrasta). (a) Ustalić strumień magnetyczny przechodzący przez obszar otoczony przez

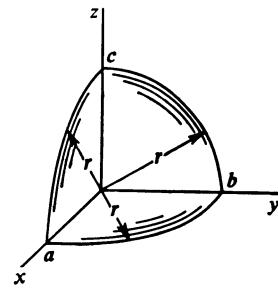
mniejszy zwój jako funkcję  $x$ . (b) Obliczyć SEM wytwarzaną w mniejszym zwoju w chwili gdy  $x = NR$ , (c) Ustalić kierunek indukowanego prądu płynącego w mniejszym zwoju, jeżeli  $v > 0$ .

29. Drut został zgięty w trzy kołowe segmenty o promieniu  $r$  (10 cm), jak przedstawiono na rys. 35-43. Każdy segment jest ćwiartką koła:  $ab$  leżącego na płaszczyźnie  $x-y$ ,  $bc$  leżącego na płaszczyźnie  $y-z$  i  $ca$  leżącego na płaszczyźnie  $z-x$ . (a) Jeżeli przestrzennie jednorodne pole magnetyczne  $B$  ma kierunek  $x$ , to jaka jest wielkość SEM  $\delta$  powstającej w drucie, gdy  $B$  wzrasta z szybkością  $3,0 \cdot 10^{-3}$  T/s? (b) Jaki jest kierunek prądu w segmencie  $bc$ ?

Odp.: (a)  $2,4 \cdot 10^{-5}$  V. (b) Od  $c$  do  $b$ .

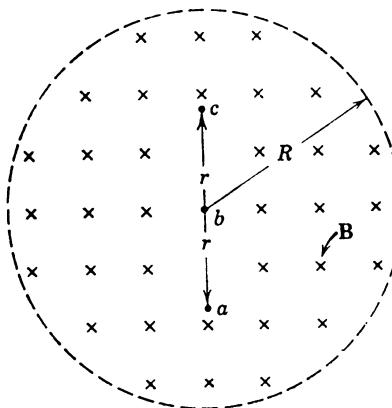


Rys. 35-42. Zadanie 28

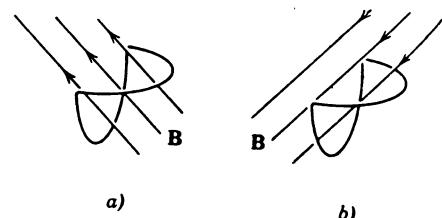


Rys. 35-43. Zadanie 29

30. Na rysunku 35-44 przedstawione jest jednorodne pole o indukcji  $B$ , zajmujące cylindryczny obszar o promieniu  $R$ . Wielkość  $B$  zmniejsza się ze stałą szybkością  $0,010$  T/s. Jakie jest przyspieszenie chwilowe elektronu (podać wielkość i kierunek) umieszczonego w punktach  $a$ ,  $b$  i  $c$ ? Przyjąć  $r = 5$  cm. (Konieczne rozproszenie linii pola magnetycznego poza  $R$  nie zmieni odpowiedzi tak długo, jak długo zachowana jest symetria osiowa względem osi prostopadłej przechodzącej przez punkt  $b$ .)



Rys. 35-44. Zadanie 30



Rys. 35-45. Zadanie 31

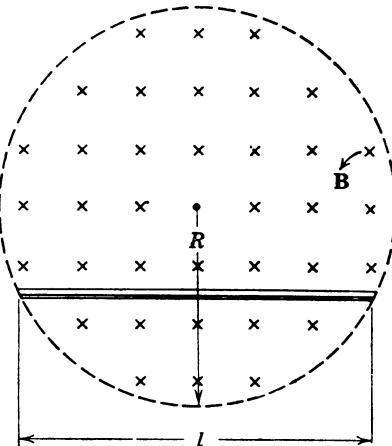
31. Zamknięty obwód z drutu składa się z pary równych półkoli, o promieniu 3,70 cm leżących we wzajemnie prostopadłych płaszczyznach. Obwód uformowano zginając kołowy obwód wzdłuż średnicy dopóki obie połowy nie stały się prostopadłe. Jednorodne pole magnetyczne  $B$  wielkości  $0,076$  T skierowane jest prostopadłe do owej średnicy i tworzy równe kąty ( $45^\circ$ ) z płaszczyznami półkoli jak na rys. 35-45a. (a) Pole magnetyczne jest redukowane z jednostajną szybkością do zera w przedziale czasu  $4,50 \cdot 10^{-3}$  s. Ustalić wielkość indukowanej SEM i zwrot indukowanego w obwodzie w tym przedziale czasu prądu.

(b) Jak zmieniłyby się odpowiedzi z przypadku (a), jeżeli  $B$  miałoby kierunek jak na rys. 35-45b, prostopadły do kierunku podanego początkowo, lecz w dalszym ciągu prostopadły do „średnicy zgęścia”?

Odp.: (a)  $51 \cdot 10^{-3}$  V. (b)  $\mathcal{E} = 0$ .

32. Jednorodne pole magnetyczne o indukcji  $B$  wypełnia obszar cylindryczny o promieniu  $R$ . Pręt metalowy o długości  $l$  umieszczony jest tak, jak pokazuje rys. 35-46. Wykazać, że jeżeli  $B$  zmienia się z szybkością  $dB/dt$ , SEM wytwarzana w przecie przez zmieniające się pole magnetyczne dana jest wzorem

$$\mathcal{E} = \frac{dB}{dt} \frac{l}{2} \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}.$$



Rys. 35-46. Zadanie 32

#### Paragraf 35-6

33. Dla betatronu będącego własnością General Electric Company wykonano szereg pomiarów maksymalnej wielkości indukcji magnetycznej jako funkcji promienia. Wyniki są następujące:

$r$ , cm	$B$ , tesla	$r$ , cm	$B$ , tesla
0	0,400	81,2	0,409
10,2	0,950	83,7	0,400
68,2	0,950	88,9	0,381
73,2	0,528	91,4	0,372
75,2	0,451	93,5	0,360
77,3	0,428	95,5	0,340

Wykazać przy pomocy analizy graficznej, że związek  $B = 2\bar{B}_R$  sprawdza się na promieniu orbity,  $R =$

$= 84$  cm. (Wskazówka: Wziąć pod uwagę, że  $\bar{B} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R B(r)(2\pi r) dr$  i wyznaczyć wartość całki graficznie.)

#### Paragraf 35-7

34. (a) Oszacować  $\theta$  na rys. 35-16a. Należy pamiętać (patrz paragraf 31-1), że  $V_d = 4 \cdot 10^{-2}$  cm/s w typowym przypadku. Przyjąć  $v = 10$  cm/s. (b) Jest oczywiste, że  $\theta$  będzie małe. Jednakże, czy musi być  $\theta \neq 0$ , aby argumenty przedstawione w związkach z tym rysunkiem były prawdziwe?

# 36. Indukcyjność

## 36-1. Indukcyjność

Jeżeli dwie cewki znajdują się blisko siebie, prąd  $i$  płynący w jednej z nich wytwarza strumień  $\Phi_B$  przechodzący przez drugą. Jeżeli strumień ten zmienia się (wraz ze zmianą prądu), w drugiej cewce, zgodnie z prawem Faradaya, powstaje indukowana SEM (patrz rys. 35-2). Jednakże do tego, aby wystąpiło zjawisko indukcji, nie są konieczne dwie cewki. Indukowana SEM pojawia się w pojedynczej cewce również wtedy, kiedy w niej samej zmienia się prąd. Zjawisko to nazywamy *samoindukcją*, a SEM wytwarzaną w ten sposób nazywamy *siłą elektromotoryczną samoindukcji*. Podlega ona prawu indukcji Faradaya, jak każda indukowana SEM.

Rozważmy na początku ściśle nawiniętą cewkę, toroid, albo środkową część długiego solenoidu. We wszystkich trzech przypadkach strumień  $\Phi_B$  wytwarzany w każdym ze zwojów przez prąd  $i$  jest jednakowy. Prawo Faradaya dla takich cewek (równ. (35-2))

$$\mathcal{E} = - \frac{d(N\Phi_B)}{dt} \quad (36-1)$$

pokazuje, że iloczyn  $N\Phi_B$  (wypadkowy strumień przechodzący przez wszystkie zwoje,  $N$  oznacza liczbę zwojów) jest ważną wielkością charakterystyczną dla indukcji. Dla danej cewki, oddalonej od wszelkich materiałów magnetycznych, jak np. żelazo, wielkość ta jest proporcjonalna do natężenia prądu  $i$  płynącego w cewce

$$N\Phi_B = Li, \quad (36-2)$$

gdzie  $L$  jest stałą proporcjonalności, nazywaną *indukcyjnością cewki*.

Korzystając z prawa Faradaya (patrz równ. (36-1)) indukowaną SEM można wyrazić następująco:

$$\mathcal{E} = - \frac{d(N\Phi_B)}{dt} = -L \frac{di}{dt}, \quad (36-3a)$$

a stąd

$$L = - \frac{\mathcal{E}}{di/dt}. \quad (36-3b)$$

Równanie to można przyjąć za definicję indukcyjności dla cewek o dowolnych kształtach i wymiarach, niezależnie od tego czy są one nawinięte ściśle czy nie i czy żelazo lub inne materiały magnetyczne znajdują się w ich otoczeniu. Równanie to jest analogiczne do równania określającego pojemność, a mianowicie:

$$C = \frac{q}{V}.$$

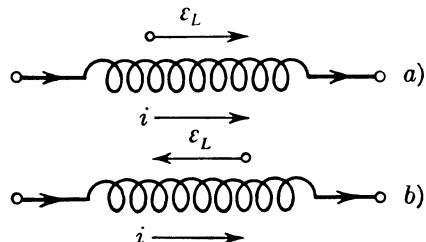
Jeżeli w pobliżu cewek nie ma żelaza lub podobnych materiałów,  $L$  zależy jedynie od geometrii uzwojenia. Dla cewki *indukcyjnej* ~~~~~ obecność *pola magnetycznego* jest czynnikiem charakterystycznym, odpowiednim do obecności pola elektrycznego w *kondensatorze*.

Jednostką indukcyjności, otrzymaną na podstawie równania (36-3b), jest

$$1 \text{ henr [H]} = 1 \text{ V} \cdot \text{s/A.}$$

Jak czytaliśmy w paragrafie 35-1, jednostka indukcyjności w układzie SI nosi nazwę *henr* od nazwiska fizyka amerykańskiego, Josepha Henry'ego (1797–1878), współczesnego Faraday'owi.

Kierunek SEM samoindukcji można otrzymać z reguły Lenza (patrz paragraf 35-3). Założymy, że przez cewkę płynie pewien ustalony prąd  $i$  wytworzony przez baterię. Zredukujemy SEM w obwodzie do 0 w sposób natychmiastowy, np. odłączając baterię. Równocześnie zacznie się zmniejszać prąd  $i$ . To zmniejszanie się prądu, w terminologii reguły Lenza, jest zmianą, której musi przeciwdziałać samoindukcja. Aby zapobiec zmniejszeniu się prądu, indukowana SEM musi mieć ten sam kierunek co prąd, jak pokazano na rys. 36-1a.



36-1. W przewodzie (a) prąd  $i$  maleje, a w przewodzie (b) rośnie. Siła elektromotoryczna samoindukcji  $\varepsilon_L$  w każdym przypadku przeciwdziała zmianie prądu

Jednakże, gdy zwiększymy SEM (np. w baterii), prąd  $i$  wzrośnie natychmiast. Temu wzrostowi prądu musi przeciwdziałać „zmiana” samoindukcji. Aby przeciwdziałać wzrastającemu pradowi indukowana SEM musi mieć kierunek *przeciwny* do kierunku prądu, jak na rys. 36-1b. W każdym z tych przypadków SEM samoindukcji działa tak, aby zapobiec zmianie prądu. Znak minus w równ. (36-3) pokazuje, że  $\varepsilon$  i  $di/dt$  mają znaki przeciwe, ponieważ  $L$  jest zawsze wielkością dodatnią.

## 36-2. Obliczanie indukcyjności

Wiadomo, że dla kilku przypadków specjalnych, np. dla kondensatora płaskiego, można w prosty sposób obliczyć pojemność w zależności od czynników geometrycznych. W podobny sposób dla kilku przypadków szczególnych można obliczyć indukcyjność  $L$ .

Dla ścisłe nawiniętej cewki, w której otoczeniu nie ma żelaza, z równania (36-2) mamy

$$L = \frac{N\Phi_B}{i}. \quad (36-4)$$

Zastosujemy to równanie do obliczenia indukcyjności  $L$  dla wewnętrznej części długiego solenoidu znajdującego się w pobliżu jego środka. Niech długość tej części będzie  $l$ . Wielkość  $N\Phi_B$  dla solenoidu o długości  $l$  wynosi

$$N\Phi_B = nlBA,$$

gdzie  $n$  jest liczbą zwojów na jednostkę długości,  $B$  — indukcją magnetyczną wewnętrz solenoidu,  $A$  — powierzchnią przekroju poprzecznego solenoidu. Według równania (34-7)  $B$  wyraża się następująco:

$$B = \mu_0 ni.$$

Z dwóch ostatnich wzorów otrzymujemy

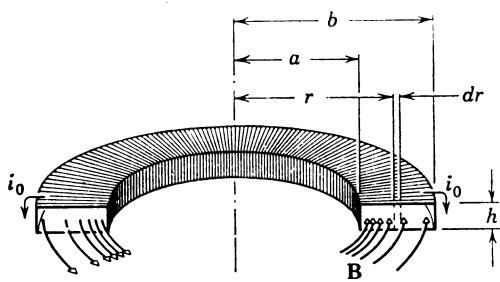
$$N\Phi_B = \mu_0 n^2 liA.$$

Ostatecznie, indukcyjność według równania (36-4) jest równa

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \mu_0 n^2 l A. \quad (36-5)$$

A więc indukcyjność solenoidu o długości  $l$  jest proporcionalna do jego objętości ( $lA$ ) oraz do kwadratu liczby zwojów na jednostkę długości. Zwróćmy uwagę, że  $L$  zależy tylko od czynników geometrycznych. Proporcjonalność  $L$  do  $n^2$  jest oczywista. Jeśli podwoimy liczbę zwojów na jednostkę długości, to nie tylko całkowita liczba zwojów  $N$  będzie dwukrotnie większa, ale również strumień  $\Phi_B$  przechodzący przez każdy zwój zostanie podwojony. W rezultacie  $N\Phi_B$  wzrasta czterokrotnie, a więc i  $L$  jest czterokrotnie większe (rown. (36-4)).

**Przykład 1.** Wyprowadzić wyrażenie dla indukcyjności toroidu o prostokątnym przekroju poprzecznym (rys. 36-2). Obliczyć  $L$  dla  $N = 10^3$ ,  $a = 5,0$  cm,  $b = 10$  cm i  $h = 1,0$  cm.



Rys. 36-2. Przykład 1. Przekrój poprzeczny toroidu. Widać kierunek prądu płynącego w uzojeniach i kierunek pola magnetycznego

Linie indukcji  $B$  dla toroidu są kołami koncentrycznymi. Stosując prawo Ampère'a

$$\oint B dl = \mu_0 i$$

dla drogi kołowej o promieniu  $r$  otrzymujemy

$$2\pi r B = \mu_0 i_0 N,$$

gdzie  $N$  jest liczbą zwojów, a  $i_0$  oznacza prąd płynący w uzojeniu toroidu. Należy zaznaczyć, że  $i$  we wzorze

Ampère'a oznacza całkowy prąd płynący wewnątrz drogi całkowania. Rozwiążanie powyższego równania względem  $B$  daje

$$B = \frac{\mu_0 i_0 N}{2\pi r}.$$

Strumień  $\Phi_B$  przechodzący przez poprzeczny przekrój toroidu jest równy

$$\Phi_B = \int_a^b BdS = \int_a^b Bh dr = \int_a^b \frac{\mu_0 i_0 N}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 i_0 Nh}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i_0 Nh}{2\pi} \ln \frac{b}{a},$$

gdzie  $hdr$  jest powierzchnią elementarnego wycinka pokazanego (zakreskowanego) na rysunku.

Indukcyjność otrzymujemy z równania (36-4):

$$L = \frac{N\Phi_B}{i_0} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Podstawienie do tego wzoru wartości liczbowych daje

$$L = \frac{(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Wb/(A} \cdot \text{m})(10^3)^2 \cdot 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{2\pi} \ln \frac{10 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{5 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ Wb/A} = 1,4 \text{ mH.}$$

### 36-3. Obwód LR

W rozdziale 32-8 stwierdziliśmy, że jeżeli do obwodu zamkniętego, złożonego z oporu  $R$  i kondensatora  $C$  wprowadzimy SEM  $\mathcal{E}$  w sposób natychmiastowy, np. przezłączenie baterii, to ładunek na kondensatorze nie osiąga od razu wartości końcowej ( $= C\mathcal{E}$ ), lecz zbliża się do niej w sposób wykładniczy opisany przez równanie (32-15) albo

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/\tau_C}). \quad (36-6)$$

To opóźnienie w narastaniu ładunku opisuje *pojemnościowa stała czasowa*  $\tau_C$  zdefiniowana następująco:

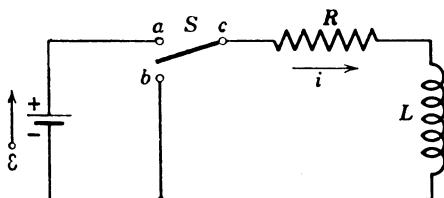
$$\tau_C = RC. \quad (36-7)$$

Jeżeli w tym samym obwodzie źródło SEM  $\mathcal{E}$  natychmiast wyłączymy, ładunek nie spada od razu do 0, lecz zmniejsza się wykładniczo według równania (32-18b), czyli

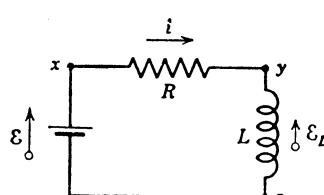
$$q = C\mathcal{E}e^{-t/\tau_C}. \quad (36-8)$$

Zarówno zanikanie ładunku, jak i jego narastanie opisuje ta sama stała czasowa  $\tau_C$ .

Analogiczne opóźnienie w narastaniu lub zanikaniu prądu pojawia się w obwodzie zamkniętym, złożonym z oporu  $R$  i cewki indukcyjnej  $L$ , przy włączaniu lub wyłączaniu źródła SEM  $\mathcal{E}$ . Kiedy przełącznik  $S$  (rys. 36-3) ustawimy np. w położeniu  $a$ , prąd płynący przez opór zaczyna rosnąć. Gdyby nie było cewki, prąd osiągnąłby natychmiast ustaloną wartość  $\mathcal{E}/R$ . Natomiast dzięki cewce, w obwodzie pojawia się SEM samoindukcji  $\mathcal{E}_L$ .



Rys. 36-3. Obwód LR



Rys. 36-4. Obwód z rys. 36-3 po ustawieniu przełącznika  $S$  w pozycji  $a$

Zgodnie z regułą Lenza siła ta przeciwdziała wzrostowi prądu, a to z kolei oznacza, że jej zwrot jest przeciwny do polaryzacji baterii. A więc napięcie na oporze odpowiada różnicy między stałą SEM  $\mathcal{E}$  baterii a zmienną SEM samoindukcji  $\mathcal{E}_L (= -Ldi/dt)$ . Tak dugo, jak długo działa siła  $\mathcal{E}_L$ , prąd płynący przez opór będzie mniejszy niż  $\mathcal{E}/R$ .

W miarę upływu czasu szybkość, z jaką rośnie natężenie prądu, staje się coraz mniejsza i SEM samoindukcji  $\mathcal{E}_L$  proporcjonalnie do  $di/dt$  maleje. Efekt ten wprowadza pewne opóźnienie czasowe, w rezultacie czego prąd w obwodzie osiąga wartość  $\mathcal{E}/R$  asymptotycznie.

Kiedy przełącznik  $S$  z rys. 36-3 znajduje się w położeniu  $a$ , mamy obwód przedstawiony na rys. 36-4. Zastosujmy teraz do tego obwodu II prawo Kirchhoffa, wychodząc z punktu  $x$  i posuwając się wokół obwodu zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Jeśli prąd płynie w kierunku wskazanym na rysunku, to w punkcie  $x$  potencjał będzie wyższy niż w punkcie  $y$ , co oznacza, że spadek potencjału na oporze wynosi  $-iR$ . Z kolei w punkcie  $y$  potencjał jest wyższy niż w punkcie  $z$ , ponieważ kiedy prąd rośnie, indukowana SEM o kierunku pokazanym na rysunku przeciwdziała wzrostowi prądu. Spadek potencjału między punktami  $y$  i  $z$  wynosi  $-L(di/dt)$ . Dalej między punktami  $x$  i  $z$  potencjał wzrasta do wartości  $+\mathcal{E}$  równej napięciu baterii. Z II prawa Kirchhoffa mamy

$$-iR - L \frac{di}{dt} + \mathcal{E} = 0$$

albo

$$L \frac{di}{dt} + iR = \mathcal{E}. \quad (36-9)$$

Równanie (36-9) jest *równaniem różniczkowym* zawierającym  $i$  oraz jego pierwszą pochodną  $di/dt$ . Znajdziemy teraz funkcję  $i(t)$  spełniającą to równanie.

Istnieją formalne reguły rozwiązywania różnych typów równań różniczkowych i równanie (36-9) można łatwo rozwiązać po przekształceniu przez bezpośrednie całkowanie. Jednakże, bardzo często stosuje się prostszy sposób zgadując postać rozwiązania na podstawie znajomości zagadnienia oraz doświadczenia. Rozwiążanie to będzie poprawne, jeśli podstawione do równania różniczkowego sprawdza je do tożsamości.

Zakładamy, że rozwiązanie równania (36-9) ma postać

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/L}). \quad (36-10)$$

Aby podstać je do równania, znajdujemy pochodną  $di/dt$ :

$$\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} e^{-Rt/L}. \quad (36-11)$$

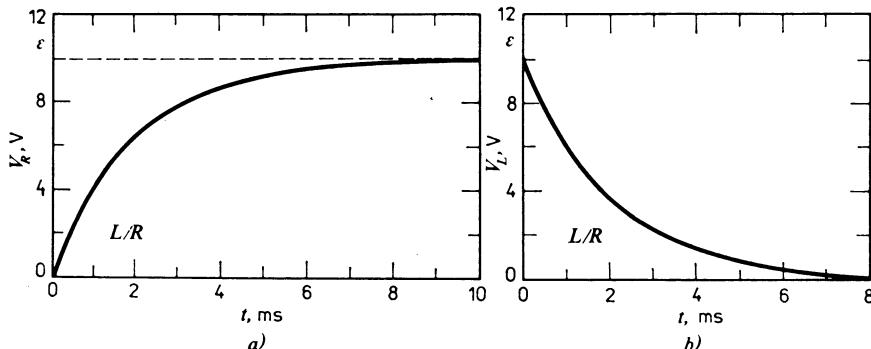
Wstawiając  $i$  oraz  $di/dt$  do równania (36-9) otrzymujemy tożsamość, co można łatwo sprawdzić. A więc równanie (36-10) jest poprawnym rozwiązaniem równania (36-9). Na rysunku 36-5 pokazane jest, w jaki sposób spadek potencjału na oporze  $V_R (= iR$ ; patrz równ. (36-10)) oraz na cewce  $V_L (= Ldi/dt$ ; patrz równ. (36-11)) zmienia się w czasie dla poszczególnych wartości  $\mathcal{E}$ ,  $L$  i  $R$ . Czytelnik powinien uważnie porównać ten rysunek z odpowiednim rysunkiem dla obwodu  $RC$  (rys. 32-11).

Równanie (36-10) możemy przepisać w postaci

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau_L}), \quad (36-12)$$

gdzie  $\tau_L$  jest indukcyjną stałą czasową daną wzorem

$$\tau_L = \frac{L}{R}. \quad (36-13)$$



Rys. 36-5. Jeżeli w obwodzie na rys. 36-3  $R = 2000 \Omega$ ,  $L = 4 \text{ H}$  i  $\mathcal{E} = 10 \text{ V}$ , to (a) przedstawia zależność  $V_R$  od czasu  $t$  po ustawnieniu przełącznika  $S$  w pozycji  $a$ , (b) pokazuje zależność  $V_L$  od czasu  $t$ . Stała czasowa  $L/R = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ . Porównać ten rysunek dokładnie z rys. 32-11, odnoszącym się do obwodu  $RC$ .

Należy tu zwrócić uwagę na podobieństwo między równaniem (36-12) i (36-6). Wielkość  $\tau_L (= L + R)$  ma wymiar czasu. Aby to wykazać, napiszemy

$$\frac{1 \text{ H}}{1 \Omega} = \frac{1 \text{ H}}{1 \Omega} \frac{1 \text{ V} \cdot \text{s}}{1 \text{ H} \cdot \text{A}} \frac{1 \Omega \cdot \text{A}}{1 \text{ V}} = 1 \text{ s}.$$

Wyraz w pierwszym nawiasie jest współczynnikiem przeliczeniowym, wynikającym z równania definiującego indukcję [ $L = -\mathcal{E}/(di/dt)$ ; równ. (36-3b)]. Drugi wyraz jest współczynnikiem we wzorze  $V = iR$ .

Znaczenie fizyczne stałej czasowej wynika z równania (36-12). Jeżeli do tego równania wstawimy  $t = \tau_L = L/R$ , otrzymamy

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-1}) = (1 - 0,37) \frac{\mathcal{E}}{R} = 0,63 \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Widzimy więc, że stała czasowa  $\tau_L$  oznacza czas, w którym prąd płynący w obwodzie osiąga  $1/e$  (tj. około 37%) swojej końcowej wartości stacjonarnej (patrz rys. 36-5).

Założymy teraz, że przełącznik  $S$  z rys. 36-3 pozostaje w pozycji  $a$  dostatecznie długo, aby w układzie ustaliła się równowaga i odpowiadający jej prąd  $\mathcal{E}/R$ . Przerzucamy teraz przełącznik  $S$  do pozycji  $b^*$  usuwając w ten sposób z obwodu baterię. Równanie różniczkowe, które teraz opisuje zanik prądu, otrzymamy podstawiając  $\mathcal{E} = 0$  w równaniu (36-9):

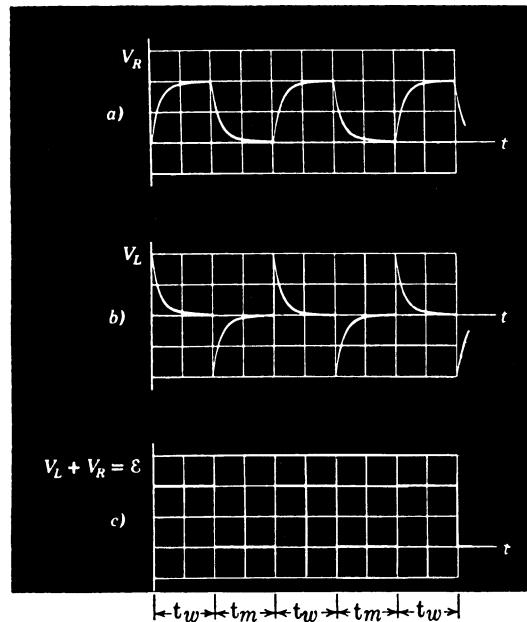
$$L \frac{di}{dt} + iR = 0. \quad (36-14)$$

\* Przełącznik pozycji  $b$  musi zadziałać zanim przełącznik pozycji  $a$  przestanie działać.

Czytelnik może sprawdzić, że rozwiązaniem tego równania jest

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau_L}. \quad (36-15)$$

Przebiegi napięć w obwodzie przedstawionym na rys. 36-3 można zbadać doświadczalnie za pomocą oscylografu, podobnie jak w przypadku obwodu  $RC$ . Jeżeli przełącznik  $S$  będzie okresowo przerzucany z położenia  $a$  do położenia  $b$ , SEM (bateria) włączana do obwodu będzie się zmieniać od 0 do  $\mathcal{E}$ . Jeżeli oscylograf podłączymy między punktami  $b$  i  $c$  na rys. 36-3, to na ekranie otrzymamy okresowy przebieg SEM; pokazuje to rys. 36-6c.



Rys. 36-6. Fotografie obrazów na ekranie oscylografu przedstawiają w zależności od czasu: (a) zmiany potencjału  $V_R$  na oporze (krzywa rosnąca — wzrost napięcia, krzywa malejąca — spadek napięcia), (b) zmiany potencjału  $V_L$  na indukcyjności, (c) przyłożoną siłę elektromotoryczną  $\mathcal{E}$ . W przedziałach czasu oznaczonych  $t_w$  prąd wzrasta, a w przedziałach  $t_m$  maleje. Porównać z rys. 32-13. (Dzięki uprzejmości E. K. Hegesa)

Jeżeli oscylograf podłączymy do końców oporu, obraz otrzymany na oscylografie (rys. 36-6a) będzie przedstawiał natężenie prądu płynącego w obwodzie, ponieważ spadek potencjału na oporze dany jest przez  $V_R = iR$ . W przedziałach czasu oznaczonych na rys. 36-6 przez  $t_w$  prąd wzrasta, a kształt krzywej otrzymanej na ekranie opisany jest wzorem (patrz równ. (36-12))

$$V_R (= iR) = \mathcal{E}(1 - e^{-t/\tau_L}).$$

W przedziałach oznaczonych przez  $t_m$  prąd maleje i  $V_R$  (patrz równ. (36-15)) jest równe

$$V_R (= iR) = \mathcal{E}e^{-t/\tau_L}.$$

Zauważmy, że zarówno narastanie, jak i zanik prądu są opóźnione.

Jeżeli oscylograf podłączymy między końcami cewki indukcyjnej, na ekranie otrzymamy obraz różnicy potencjałów na cewce jako funkcję czasu (rys. 36-6b). W czasie kiedy prąd rośnie, równanie opisujące zmianę  $V_L$  (patrz równ. (36-11)) będzie następujące

$$V_L \left( = L \frac{di}{dt} \right) = \mathcal{E}e^{-t/\tau_L}.$$

Natomiast kiedy prąd maleje,  $V_L$  wyraża się pochodną równania (36-15):

$$V_L \left( = L \frac{di}{dt} \right) = -\mathcal{E} e^{-t/\tau_L}.$$

Zauważmy, że  $V_L$  dla prądu rosnącego ( $di/dt$  — dodatnie) i  $V_L$  dla prądu malejącego ( $di/dt$  — ujemne) mają przeciwnie znaki. To samo słuszne jest dla indukowanej SEM  $\mathcal{E}_L [= -Ldi/dt = -V_L]$ .

Analizując rys. 36-6 widzimy, że dla każdej chwili czasu suma krzywych  $a$  i  $b$  daje zawsze krzywą  $c$ . Jest to oczywistą konsekwencją II prawa Kirchhoffa, wyrażonego równ. (36-9).

**Przykład 2.** Solenoid o indukcyjności 50 H i oporze 30 Ω podłączony jest do baterii o SEM równe 100 V. Ile czasu musi upływać, zanim prąd w tym obwodzie osiągnie połowę swojej wartości stacjonarnej?

Prąd osiąga wartość stacjonarną, gdy  $t \rightarrow \infty$ ; według równania (36-12) wartość ta jest równa  $\mathcal{E}/R$ . Połowie tej wartości prąd osiąga po pewnym czasie  $t_0$ . Równanie (36-12) dla  $t = t_0$  będzie następujące

$$\frac{1}{2} \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t_0/\tau_L}).$$

Rozwiązuje ją względem  $t_0$  otrzymujemy

$$t_0 = \tau_L \ln 2 = 0,69 \frac{L}{R}.$$

Podstawiając podane wielkości mamy

$$t_0 = 0,69 \tau_L = 0,69 \frac{50 \text{ H}}{30 \Omega} = 1,2 \text{ s.}$$

### 36-4. Energia a pole magnetyczne

Kiedy podnosimy kamień wykonujemy pracę, którą możemy otrzymać z powrotem opuszczając go w dół. Dla wygody myślimy o pracy wykonanej przy podnoszeniu kamienia jako o czasowo przechowywanej w polu grawitacyjnym. Pole to działa między ziemią a podniesionym kamieniem i uwalnia przechowywaną pracę w czasie opuszczania kamienia w dół.

Kiedy odciągamy dwa różne ładunki, wtedy mówimy, że wykonana przy tym praca została zmagazynowana w polu elektrycznym między tymi ładunkami.

Pozwalając zbliżyć się tym ładunkom do siebie możemy odzyskać pracę wykonaną przy ich oddalaniu.

W ten sposób energia może być również zgromadzona w polu magnetycznym. Weźmy jako przykład dwa równoległe druty, przewodzące prądy w tym samym kierunku. Druty przyciągają się wzajemnie, a więc aby je oddalić od siebie, trzeba wykonać pracę. Możemy odzyskać tak zgromadzoną energię w każdej chwili pozwalając drutom zbliżyć się z powrotem na odległość początkową.

Aby podać ilościowe wyrażenie dla energii zawartej w polu magnetycznym, rozważmy rys. 36-4, który przedstawia źródło SEM połączone szeregowo z oporem  $R$  i cewką  $L$ :

$$\mathcal{E} = iR + L \frac{di}{dt} \quad (36-9)$$

jest równaniem różniczkowym opisującym narastanie prądu w tym obwodzie. Należy podkreślić, że równanie to wynika bezpośrednio z II prawa Kirchhoffa, które z kolei

wyraża zasadę zachowania energii dla obwodów złożonych z jednego oczka. Jeżeli równanie (36-9) pomnożymy stronami przez  $i$ , otrzymamy

$$\mathcal{E}i = i^2 R + Li \frac{di}{dt}. \quad (36-16)$$

Interpretacja fizyczna tego równania z punktu widzenia pracy i energii jest następująca:

(1) Jeżeli ładunek  $q$  przepływa przez źródło SEM  $\mathcal{E}$  (rys. 36-4) w czasie  $dt$ , to źródło wykonuje pracę równą  $\mathcal{E}dq$ . Szybkość, z jaką ta praca jest wykonywana, wynosi  $\mathcal{E}dq/dt$  albo  $\mathcal{E}i$ . Lewa strona równania (36-16) przedstawia szybkość, z jaką źródło SEM przekazuje energię do obwodu.

(2) Drugi wyraz w równaniu (36-16) przedstawia szybkość, z jaką energia w postaci energii cieplnej (Joule'a) wydzieła się na oporze.

(3) Według naszej hipotezy część energii, która nie zamienia się na energię cieplną (Joule'a), musi gromadzić się w polu magnetycznym. Ponieważ równanie (36-16) wyraża prawo zachowania energii dla obwodu  $LR$ , ostatni wyraz tego równania musi przedstawać szybkość  $dU_B/dt$ , z jaką energia gromadzi się w polu magnetycznym

$$\frac{dU_B}{dt} = Li \frac{di}{dt}. \quad (36-17)$$

Możemy zapisać to w postaci

$$dU_B = Lidi,$$

i po scałkowaniu otrzymamy

$$U_B = \int_0^{U_B} dU_B = \int_0^i Lidi = \frac{1}{2} Li^2. \quad (36-18)$$

Równanie to określa całkowitą energię magnetyczną zawartą w cewce o indukcyjności  $L$ , przez którą płynie prąd o natężeniu  $i$ .

Wzór ten możemy porównać z wyrażeniem dla energii zawartej w kondensatorze  $C$ , na którym zgromadzony jest ładunek  $q$ , a mianowicie

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}.$$

Tutaj energia zawarta jest w polu elektrycznym. W obydwu przypadkach wyrażenie dla energii otrzymujemy przyrównując ją do pracy, którą trzeba wykonać, aby wytworzyć pole.

**Przykład 3.** Cewkę o indukcyjności 5 H i oporze  $20\Omega$  łączymy z baterią o SEM równej 100 V. Jaka energia będzie zawarta w polu magnetycznym, kiedy prąd osiągnie swoją maksymalną wartość  $\mathcal{E}/R$ ?

Maksymalne natężenie prądu jest równe

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{100 \text{ V}}{20 \Omega} = 5,0 \text{ A.}$$

Nagromadzona energia dana jest równaniem (36-18)

$$U_B = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \cdot 5,0 \text{ H} \cdot (5,0 \text{ A})^2 = 63 \text{ J.}$$

Zauważmy, że dla tej cewki stała czasowa ( $\tau_L = L/R$ ) wynosi 0,25 s. Po jakim czasie, wyrażonym w jednostkach równych  $\tau_L$ , w polu magnetycznym zgromadzi się energia równa połowie energii maksymalnej.

**Przykład 4.** Cewka o indukcyjności 3,0 H połączona jest szeregowo z oporem 10 Ω. Do obwodu włączamy w sposób natychmiastowy baterię o SEM 3 V. Stała czasowa  $\tau_L = 0,30$  s. Zakładamy, że od chwili włączenia baterii upłynął czas  $t = 0,30$  s. (a) Z jaką szybkością bateria przekazuje energię do obwodu w chwili  $t$ ?

Prąd w obwodzie dany jest równaniem (36-12):

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau_L}).$$

W chwili  $t = 0,30$  s ( $= \tau_L$ ) wartość  $i$  wynosi

$$i = \frac{3,0 \text{ V}}{10 \Omega} (1 - e^{-1}) = 0,189 \text{ A}.$$

Szybkość  $P_{\mathcal{E}}$ , z jaką bateria oddaje energię jest równa

$$P_{\mathcal{E}} = i\mathcal{E} = 3,0 \text{ V} \cdot 0,189 \text{ A} = 0,567 \text{ W}.$$

(b) Z jaką szybkością wydziela się na oporze energia cieplna (Joule'a)? Szybkość wydzielania się ciepła na oporze jest równa

$$P_J = i^2 R = (0,189 \text{ A})^2 \cdot 10 \Omega = 0,357 \text{ W}.$$

(c) Z jaką szybkością  $P_B$  wzrasta energia pola magnetycznego cewki? Odpowiedź dana jest przez ostatni wyraz w równaniu (36-16) i wymaga znajomości  $di/dt$ . Różniczkując równanie (36-12) otrzymujemy

$$\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} \frac{R}{L} e^{-t/\tau_L} = \frac{\mathcal{E}}{L} e^{-t/\tau_L}.$$

Dla  $t = \tau_L$  mamy

$$\frac{di}{dt} = \frac{3,0 \text{ V}}{3,0 \text{ H}} e^{-1} = 0,37 \text{ A/s}.$$

Szukana szybkość  $P_B$  dana jest równaniem (36-17):

$$P_B = \frac{dU_B}{dt} = Li \frac{di}{dt} = 3,0 \text{ H} \cdot 0,189 \text{ A} \cdot 0,37 \text{ A/s} = 0,210 \text{ W}.$$

Prawo zachowania energii dla omawianego obwodu (patrz równ. (36-16)) wymaga, aby

$$P_{\mathcal{E}} = P_J + P_B.$$

Możemy to sprawdzić

$$0,567 \text{ W} = 0,357 \text{ W} + 0,210 \text{ W}.$$

### 36-5. Gęstość energii a pole magnetyczne

Wprowadzimy obecnie wyrażenie na gęstość energii  $u_B$  pola magnetycznego. Rozpatrzmy środkową część bardzo długiego solenoidu. Niech długość tej części będzie  $l$ , a odpowiadająca jej objętość  $Al$ . Zmagazynowana energia musi być zawarta całkowicie w obszarze wyznaczonym przez tę objętość, ponieważ na zewnątrz takiego solenoidu pole magnetyczne jest równe zeru. Ponadto, energia zawarta w tej objętości musi być rozłożona w sposób równomierny, gdyż pole magnetyczne jest jednorodne w całym obszarze danej części solenoidu. Tak więc możemy napisać

$$u_B = \frac{U_B}{Al},$$

ale ponieważ

$$U_B = \frac{1}{2} Li^2,$$

więc

$$u_B = \frac{\frac{1}{2} L i^2}{Al}.$$

Aby wyrazić energię jako funkcję pola magnetycznego, możemy skorzystać z równania (36-5):  $L = \mu_0 n^2 l A$ . Można również rozwiązać równanie (34-7) ( $B = \mu_0 i n$ ) względem  $i$  oraz podstawić do wzoru na  $u_B$ . W wyniku otrzymujemy

$$u_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}. \quad (36-19)$$

Równanie to określa gęstość energii zawartej w każdym punkcie przestrzeni (w próżni lub materiale niemagnetycznym), w której indukcja magnetyczna jest  $B$ . Mimo że równanie to zostało wyprowadzone dla przypadku szczególnego, dla części solenoidu, jest ono słuszne dla pól magnetycznych o dowolnej geometrii. Równanie (36-19) jest analogiczne do równania (30-9):

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2, \quad (36-20)$$

które określa gęstość energii (w próżni) w każdym punkcie pola elektrycznego. Zwróćmy uwagę, że zarówno  $u_B$ , jak  $u_E$  są proporcjonalne do wielkości określającej pole  $B$  albo  $E$ .

Solenoid w odniesieniu do pola magnetycznego spełnia podobną funkcję jak kondensator płaski względem pola elektrycznego. W obydwu przypadkach są to proste urządzenie, które można użyć do wytworzenia jednorodnego pola w określonej części przestrzeni i zbadania w prosty sposób pewnych własności tego pola.

**Przykład 5.** Długi koncentryczny kabel (rys. 36-7) składa się z dwóch współosiowych cylindrów o promieniach  $a$  i  $b$ . W cylindrze wewnętrznym płynie stały prąd  $i$ , który wraca przez cylinder zewnętrzny. (a) Obliczyć energię zawartą w polu magnetycznym kabla, na odcinku o długości  $l$ .

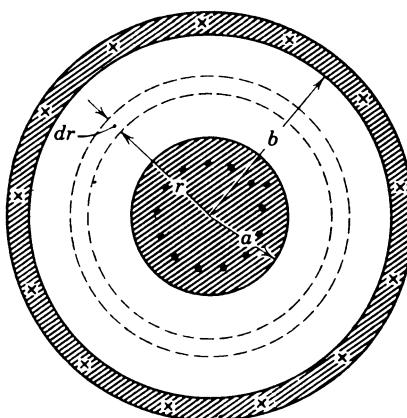
Stosując prawo Ampère'a ( $\oint \mathbf{B} dl = \mu_0 i$ ) do przestrzeni między dwoma przewodami otrzymamy

$$2\pi r B = \mu_0 i$$

albo

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}.$$

Z prawa Ampère'a wynika ponadto, że pole magnetyczne w punktach na zewnątrz kabla jest równe零 (wy tłumaczyć dlaczego). Pola magnetyczne istnieją również wewnątrz każdego z przewodników, lecz mimo



Rys. 36-7. Przykład 5. Przekrój poprzeczny kabla koncentrycznego. Na rysunku zaznaczono przeciwnie kierunki stałego, jednakowego prądu w cylindrze wewnętrznym i zewnętrznym

że ich wartości można znaleźć z prawa Ampère'a, pomijamy je w naszych rozważaniach, przyjmując, że wymiary kabla są tak dobrane, że większość energii zmagazynowana jest w polu między przewodnikami. Ale nas interesuje tu tylko energia zmagazynowana w polu między przewodnikami.

Gęstość energii w punktach między przewodami według równania (36-19) jest równa

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \right)^2 = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2}.$$

Rozpatrzmy element objętościowy  $dV$ , zawarty między dwiema powierzchniami cylindrycznymi o promieniach  $r$  i  $r+dr$ , którego długość wynosi  $l$ . Energia zawarta w tej objętości jest równa

$$dU = u_B dV = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r l dr = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi} \frac{dr}{r}.$$

Całkowitą energię pola magnetycznego znajdujemy całkując powyższe wyrażenie

$$U = \int dU = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Jest to szukane wyrażenie na energię pola magnetycznego kabla koncentrycznego.

(b) Ile wynosi indukcja kabla koncentrycznego o długości  $l$ ? Indukcję można znaleźć z równania (36-18) ( $U = \frac{1}{2} L i^2$ ), skąd mamy

$$L = \frac{2U}{i} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Wyrażenie to można otrzymać również bezpośrednio z definicji indukcyjności, stosując działania z przykładu 1.

**Przykład 6.** Porównać energię, jaka jest potrzebna, aby w sześcianie o boku 10 cm wytworzyć: a) jednorodne pole elektryczne o natężeniu  $10^5$  V/m, (b) jednorodne pole magnetyczne o indukcji 1 T. Podane tu pola są duże, ale łatwo dostępne w warunkach laboratoryjnych.

(a) W przypadku pola elektrycznego, jeżeli przez  $V_0$  oznaczymy objętość sześcianu, otrzymujemy

$$U_E = u_E V_0 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 V_0 = 0,5 \cdot (8,9 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)) (10^5 \text{ V/m})^2 \cdot (0,1 \text{ m})^3 = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ J}.$$

(b) W przypadku pola magnetycznego, na podstawie równania (36-19), mamy

$$U_B = u_B V_0 = \frac{B^2}{2\mu_0} V_0 = \frac{(1 \text{ T})^2 (0,1 \text{ m})^3}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}} = 400 \text{ J}.$$

Dla pól otrzymywanych w laboratoriach energia pola magnetycznego jest, jak wynika z przeliczeń, znacznie większa niż elektrycznego. Stosunek wielkości obydwu pól wynosi w naszym przykładzie około  $10^7$ . I na odwrót, dla wytwarzania pola magnetycznego o zadanej wielkości potrzeba znacznie więcej energii niż dla wytwarzania pola elektrycznego o podobnej wielkości.

## 36-6. Indukcja wzajemna

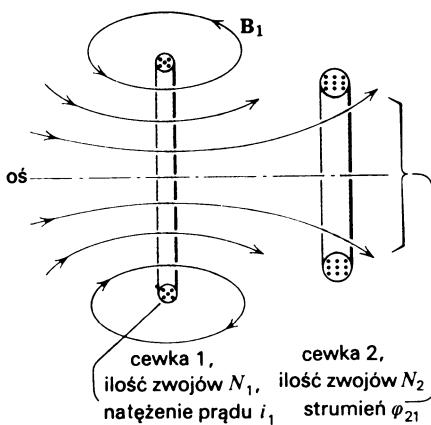
Jak to widzieliśmy w paragrafie 35-2 — dwie cewki umieszczone blisko siebie, jak na rys. 35-2, mogą na siebie oddziaływać wzajemnie. Stary prąd  $i$  płynący w jednej cewce utworzy strumień pola magnetycznego  $\Phi$  przecinającego drugą cewkę.

Jeżeli zmienimy prąd  $i$  w czasie, to w drugiej cewce pojawi się siła elektromotoryczna  $\mathcal{E}$  zgodnie z prawem Faradaya (równ. (35-2)). Zjawisko to nazywamy *indukcją*. Chociaż będziemy je raczej nazywać *indukcją wzajemną* dla podkreślenia wzajemnego oddziaływania cewek na siebie i dla odróżnienia od *samoindukcji*, która pojawia się w jednej cewce, jak o tym mówiliśmy w poprzednich paragrafach tego rozdziału.

Spójrzmy teraz nieco bardziej ilościowo na zjawisko indukcji wzajemnej. Rysunek 36-8 przedstawia dwie kołowe ściśle nawinięte cewki umieszczone blisko siebie na wspólnej

osi. Zewnętrzne źródło nie przedstawione na rysunku zasila cewkę 1 prądem  $i_1$ , który wytworza pole magnetyczne wyobrażone liniami  $\mathbf{B}_1$  na tym rysunku.

Cewka 2 jest oddzielnym, zamkniętym obwodem elektrycznym, nie podłączonym do baterii zewnętrznej, która obejmuje strumień magnetyczny  $\Phi_{21}$ .



Rys. 36-8. Urządzenie do określenia indukcji wzajemnej  $M_{21}$  cewki 2 względem cewki 1

Definiujemy *indukcję wzajemną*  $M_{21}$  cewki 2 względem cewki 1 jako

$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1}. \quad (36-21a)$$

Możemy porównać to z równaniem (36-4)( $L = N\Phi/i$ ) definiującym samoindukcję.

Przepisując równanie (36-21a) jako

$$M_{21} i_1 = N_2 \Phi_{21} \quad (36-21b)$$

i różniczkując względem czasu  $t$  mamy

$$M_{21} \frac{di_1}{dt} = N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt}. \quad (36-22)$$

Prawa strona tego równania, pomijając zmianę znaku, jest — z prawa Faradaya — właśnie siłą elektromotoryczną  $\mathcal{E}_2$  pojawiającą się w cewce 2 dzięki zmianom prądu w cewce 1, albo

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21} \frac{di_1}{dt}, \quad (36-23a)$$

co należy porównać z równaniem (36-3a)( $\mathcal{E} = -L di/dt$ ) dla samoindukcji.

Zamieńmy teraz rolami cewki 1 i 2 z rys. 36-8. To znaczy podłączamy z zewnętrznego źródła prąd  $i_2$  do cewki 2, która wytworzy strumień magnetyczny  $\Phi_{12}$  przechodzący przez cewkę 1 (której teraz odłączamy od zewnętrznego źródła).

Jeżeli zmieniamy prąd  $i_2$  w czasie, to analogicznie jak poprzednio otrzymamy

$$\mathcal{E}_1 = M_{12} \frac{di_2}{dt}, \quad (36-23b)$$

co należy porównać z równaniem (36-23a).

Widzimy zatem, że SEM w jednej z cewek jest proporcjonalna do szybkości zmiany prądu w drugiej z cewek. Współczynniki proporcjonalności  $M_{21}$  i  $M_{12}$  wydają się być różne, ale przyjmijmy bez dowodu, że w istocie są one takie same, i dalej nie będziemy używać wskaźników. Ten wniosek w ogólności nie jest oczywisty. Zatem

$$M_{21} = M_{12} = M, \quad (36-24)$$

a równania (36-23) przyjmują postać

$$\mathcal{E}_2 = -M di_1/dt, \quad \mathcal{E}_1 = -M di_2/dt. \quad (36-25)$$

Indukcja jest rzeczywiście wzajemna. W systemie SI jednostką dla  $M$  jest henr (porównać równania (36-3) i (36-23)).

Obliczanie wielkości  $M$ , podobnie jak  $L$  zależy od geometrii układu.

Najprostszy przypadek zachodzi wtedy, gdy cały strumień z jednej cewki przechodzi przez drugą cewkę. Taki przypadek omawia przykład 7.

**Przykład 7.** W toroidzie z przykładu 1 (rys. 36-2) zmieniamy oznaczenia wprowadzając  $N_1$  dla liczby zwojów w cewce 1 oraz  $i_1$  dla prądu w tych zwojach. Przypuśćmy, że nad cewką 1 umieszczaćmy cewkę 2 mającą  $N_2$  zwoje. Obydwie cewki są od siebie elektrycznie odizolowane. Jaka jest wartość indukcji wzajemnej  $M$  dla opisanej geometrii cewek?

Z równania 36-21a mamy

$$M = \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1},$$

gdzie  $\Phi_{21}$  jest identyczne z  $\Phi$  określającym całkowity strumień magnetyczny wspólny dla cewek 1 i 2 wywołyany prądem  $i_1$ .

Z przykładu 1 widzimy, że po wprowadzeniu zmian oznaczeń

$$\Phi = \frac{\mu_0 i_1 N_1 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a},$$

tak że

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Zwracamy uwagę, że jeżeli  $N_1 = N_2$ , to indukcyjności  $L_1$  i  $L_2$  tych dwóch uzwojeń są tożsamościowo równe ( $= L$ ). Porównanie z przykładem 1 dowodzi, że w tym przypadku  $M = L$ . Zadanie 36 omawia bardziej ogólny przypadek.

## Pytania

1. Pod jakimi warunkami można równanie (36-1) ( $\mathcal{E} = d(N\Phi_B/dt)$ ) przedstawić w postaci  $\mathcal{E} = N(d\Phi_B/dt)$ ? Czy można znaleźć fizyczną sytuację, w której zmiany jedynie  $N$  z czasem wytworzyłyby indukowaną SEM?

2. Czy w przypadku indukcji wzajemnej, jak na rys. 35-2, samoidukcja jest także obecna? Omówić.

3. Jaka jest indukcyjność przypadająca na jednostkę długości, dla środkowej części długiego solenoïdu, w stosunku do indukcyjności przypadającej na jednostkę długości, dla części skrajnych: (a) taka sama, (b) większa, (c) mniejsza?

4. Dwa miedziane jednowarstwowe solenoïdy  $A$  i  $B$  o tej samej średnicy i długości nawinięte są tak, że sąsiednie zwoje stykają się ze sobą. Grubość izolacji pomijamy. Solenoïd  $A$ , o dużej liczbie zwojów, wykonany jest z drutu cienkiego, natomiast solenoïd  $B$  składa się z kilku zwojów drutu grubego. (a) Który solenoïd ma większą indukcyjność? (b) Który solenoïd ma większą indukcyjną stałą czasową?

5. Jeżeli strumień przechodzący przez każdy zwoj cewki jest taki sam, to jej indukcyjność możemy obliczyć z równania (36-4):  $L = N\Phi_B/i$ . W jaki sposób obliczyć  $L$  dla cewki, jeżeli powyższe założenie nie jest spełnione?

6. Wykazać, że wymiary dwóch wyrażeń dla  $L$ ,  $N\Phi_B/i$  (równ. (36-4)) oraz  $\mathcal{E}/(di/dt)$  (równ. (36-4b)) są jednakowe.

7. Dany jest drut miedziany o długości  $l$ . Jak należy go wygiąć, aby otrzymać maksymalną samoindukcję?

8. Co należałoby zrobić, chcąc nawiniąć cewkę tak, aby miała opór  $R$ , i nie miała indukcyjności?

9. Czy czas, po upływie którego prąd w obwodzie  $LR$  osiąga określoną część swojej wartości stacjonarnej, zależy od stałej wielkości SEM włączonej do obwodu?

10. Przez cewkę o dużej indukcyjności stałej czasowej płynie prąd stały. Jeżeli przerwiemy obwód za pomocą przełącznika, między jego stykami pojawi się łuk. Wythumaczyć to. (Uwaga: Prądy powstające przy przerywaniu obwodów o dużej indukcyjności mogą być niebezpieczne.)

11. Kiedy SEM samoindukcji w obwodzie  $LR$ , pokazanym na rys. 36-4, będzie większa niż SEM baterii?

12. Czy w obwodzie  $LR$ , przedstawionym na rys. 36-4, prąd płynący przez opór jest zawsze taki sam jak prąd w cewce?

13. W obwodzie  $LR$  (rys. 36-3) SEM samoindukcji ma wartość maksymalną w momencie ustawienia przełącznika w położeniu  $a$ . Dlaczego tak jest, skoro w tym momencie prąd przez cewkę jeszcze nie płynie?

14. Przełącznik (rys. 36-3) po dłuższym zamknięciu w położeniu  $a$  został przerzucony do  $b$ . Czym się dzieje z energią początkowo nagromadzoną w cewce indukcyjnej?

15. Dana jest cewka o indukcyjności  $L$  (mierzzonej) i oporze  $R$  (mierzonym). Czy jej indukcyjna stała czasowa jest dana równ. (36-13)? Należy взять pod uwagę fakt, że równanie to (patrz rys. 36-3) otrzymaliśmy dla sytuacji, w której elementy indukcyjne i oporowe były fizycznie oddzielone. Omówić to.

16. W paragrafie 36-3 wykazaliśmy, że równanie (36-10) jest rozwiązaniem równania (36-9). Czy można być pewnym, że to jest jedyne rozwiązanie?

17. Jeżeli kierunek prądu w źródle SEM jest zgodny z kierunkiem tej SEM, energia źródła maleje. Jeżeli prąd ma kierunek przeciwny do SEM (jak np. podczas ładowania baterii), energia źródła rośnie. Czy twierdzenie to słusze jest dla cewki indukcyjnej przedstawionej na rys. 36-1a i 36-1b?

18. Czy można uzasadnić, że energia może zostać zmagazynowana w polu magnetycznym, rozważając różne położenia magnesów sztabkowych?

19. Czy równanie (36-18) ( $U = \frac{1}{2}Li^2$ ) rzuca jakieś światło na fakt, że (patrz równanie 36-5) indukcyność długiego solenoidu o długości  $l$  jest proporcjonalna do jego objętości?

20. Wyszczególnić możliwe wszystkie podobieństwa między kondensatorem płaskim (dla pól elektrycznych) i długim solenoidem (dla pól magnetycznych).

21. Czy gęstość energii w toroidzie jest większa w pobliżu promienia wewnętrznego czy zewnętrznego?

22. Dwie cewki połączone są szeregowo. Czy sumaryczna indukcyjność cewek zależy od stosunku ich wymiarów?

23. Dane są dwie podobne, płaskie, kołowe cewki o  $N$  zwojach każda. Dla jakiego układu tych dwóch cewek indukcyjność wzajemna  $M$  będzie największa? Dla jakiego układu będzie najmniejsza? Przyjąć, że cewki znajdują się blisko siebie.

24. Dane są dwie cewki znajdujące się obok siebie. Czy należy je połączyć elektrycznie, aby uzyskać indukcję wzajemną? A jeżeli są połączone, czy wykazują indukcję wzajemną?

25. Płaska, kołowa cewka jest umieszczona całkowicie na zewnątrz długiego solenoidu, w pobliżu jego środka. Osie cewki i solenoidu są równoległe. Czy występuje tutaj indukcyjność wzajemna. Przypuśćmy, że cewka otacza solenoid. Co dzieje się wtedy? W każdym z przypadków uzasadnij swoją odpowiedź.

26. Kołowa cewka o  $N$  zwojach otacza długi solenoid. Czy indukcja wzajemna jest większa, gdy cewka znajduje się w pobliżu środka solenoidu czy też kiedy znajduje się w pobliżu jego końca? Wyjaśnić.

## Zadania

### Paragraf 36-1

1. 400 ścisłe nawiniętych zwojów tworzy cewkę o indukcyjności 8 mH. Jaki strumień magnetyczny przechodzi przez cewkę, kiedy płynie przez nią prąd o natężeniu  $5 \cdot 10^{-3}$  A?

Odp.:  $1,0 \cdot 10^{-7}$  Wb.

2. Każda jednostka: (a) kulomb · om · metr/weber, (b) wolt · sekunda, (c) kulomb · amper/farad, (d) kilogram · volt · metr<sup>2</sup>/(henr · amper)<sup>2</sup>, (e) (henr/farad)<sup>1/2</sup> jest równa którejś jednostce z następującej listy: metr, sekunda, kilogram, liczba niewymierna, niuton, dżul, wolt, ohm, wat, kulomb, amper, weber, henr, farad. Podać odpowiednie równości.

3. Przez cewkę o indukcyjności 10 H płynie prąd o natężeniu 2 A. W jakich warunkach w tej cewce pojawi się SEM samoindukcji równa 100 V?

Odp.: Gdy natężenie zmieni się do 10 A/s.

### Paragraf 36-2

4. Jednowarstwowy solenoid wykonano z drutu miedzianego o średnicy 0,25 cm. Długość solenoidu wynosi 2,0 m, a średnica 4 cm. Jaka jest indukcyjność przypadająca na jednostkę długości w pobliżu środka solenoidu? Założyć, że sąsiednie zwoje stykają się ze sobą oraz że grubość izolacji można pominać.

5. Długi solenoid o niewielkiej średnicy, wygięty w kształcie pierścienia, tworzy toroid. Wykazać, że jeżeli solenoid jest dostatecznie długi i cienki, równanie określające indukcyjność toroidu (patrz przykład 1) przechodzi w odpowiednie równanie dla solenoidu o porównywalnej długości (równ. (36-5)).

6. Cewki łączone szeregowo. Dwie cewki o indukcyjnościach  $L_1$  i  $L_2$  połączone są szeregowo i odseparowane od siebie na dużą odległość. (a) Wykazać, że indukcyjność wypadkowa  $L = L_1 + L_2$ . (b) Dlaczego odległość cewek musi być duża.

7. Wykazać, że samoindukcja dla długiego drutu o długości  $l$  związana ze strumieniem wewnętrzny drutu wynosi jedynie  $\mu_0 l/8$ . Przyjąć jednorodne rozmiarczenie natężenia na przekroju poprzecznym drutu.

8. Cewki łączone równolegle. Dwie cewki  $L_1$  i  $L_2$  połączone równolegle znajdują się w dużej odległości od siebie. (a) Wykazać, że indukcyjność układu  $L$  dana jest równaniem

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}.$$

(b) Dlaczego, aby utrzymać prawdziwość tego równania, oddalenie cewek musi być duże?

9. Dwa długie równoległe druty, których środki znajdują się w odległości wzajemnej  $d$ , przewodzą jednakowe prądy o przeciwnych kierunkach. Wykazać, pomijając strumień przechodzący przez druty, że indukcyjność takiej pary przewodów dla odcinka o długości  $l$  wyraża się wzorem:

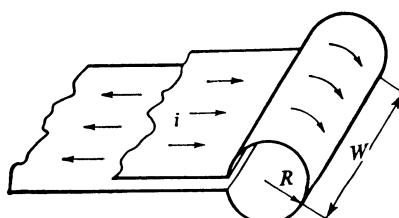
$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a},$$

gdzie  $a$  oznacza promień drutu. (Patrz przykład 4, rozdział 34.)

10. Obliczyć samoindukcję dwóch koncentrycznych, wydrążonych cylindrów o promieniach  $a$  i  $b$  i długości  $L \gg a, b$ . Na jednym końcu cylindry są połączone płaską, przewodzącą płytą tak, że prąd płynie w jedną stronę w cylindrze wewnętrznym i w stronę przeciwną w zewnętrznym. (Wskazówka: Patrz przykład 5.)

11. Bardzo szeroki miedziany pasek o szerokości  $W$  został zagięty i uformowany w smukłą tubę o promieniu  $R$  przedłużoną o dwie równoległe płaszczyzny jak na rys. 36-9. Prąd o natężeniu  $i$  płynie przez pasek jednorodnie na całej jego szerokości. W ten sposób powstał jednozwojowy solenoid. (a) Znaleźć wartość pola magnetycznego  $B$  w tubie (daleko od brzegów). (Wskazówka: Przyjąć, że pole na zewnątrz tego jednozwojowego solenoidu prawie nie istnieje.) (b) Znaleźć indukcyjność jednozwojowego solenoidu, pomijając przedłużenie na dwie płaszczyzny.

Odp.: (a)  $\mu_0 i/W$ . (b)  $\pi \mu_0 R^2/W$ .



Rys. 36-9. Zadanie 11

### Paragraf 36-3

12. Prąd płynący w obwodzie  $LR$  osiąga  $1/3$  swej wartości stacjonarnej po upływie  $5,0$  s. Jaka jest indukcyjna stała czasowa obwodu?

13. Jaki czas, wyrażony w jednostkach  $\tau_L$  musi upłynąć, aby prąd w obwodzie  $LR$  osiągnął  $0,1\%$  swej wartości stacjonarnej.

Odp.:  $6,9$ .

14. Źródło o napięciu  $50$  V włączamy w sposób natychmiastowy do obwodu złożonego z cewki  $L = 50 \text{ mH}$  i oporu  $R = 180 \Omega$ . Z jaką szybkością rośnie prąd po upływie  $0,001$  s?

15. Drewniany rdzeń toroidalny o przekroju kwadratowym ma promień wewnętrzny  $10$  cm, a zewnętrzny  $12$  cm. Na rdzeń nawinięto jedną warstwę zwojów drutu o średnicy  $1$  mm i oporze właściwym  $50 \Omega/\text{m}$ . Jaka jest: (a) indukcyjność i (b) indukcyjna stała czasowa tego układu? Grubość izolacji zapobiegać.

Odp.: (a)  $2,8 \cdot 10^{-4} \text{ H}$ . (b)  $2,7 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ .

16. Po jakim czasie różnica potencjałów na oporze w obwodzie  $LR$  ( $L = 1,0 \text{ H}$ ,  $R = 1,0 \Omega$ ) spadnie do  $10\%$  jej początkowej wartości?

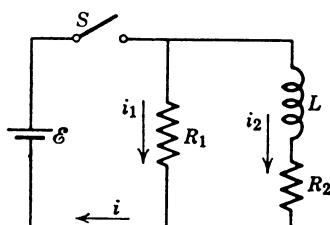
17. Solenoid o indukcyjności  $6,0 \cdot 10^{-6} \text{ H}$  połączono szeregowo z oporem  $1,0 \cdot 10^3 \Omega$ . (a) Po jakim czasie od podłączenia baterii  $10 \text{ V}$  prąd osiągnie  $80\%$  swej końcowej wartości? (b) Jaką wartość osiągnie prąd płynący przez opór  $R$  po upływie czasu równego stałej czasowej.

Odp.: (a)  $9,7 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ . (b)  $6,3 \cdot 10^{-3} \text{ A}$ .

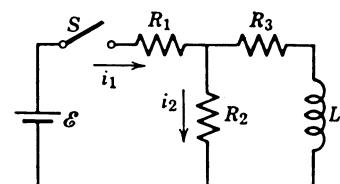
18. Prąd w obwodzie  $LR$  spada z wartości  $1,0 \text{ A}$  w chwili  $t_0 = 0$  do wartości  $0,010 \text{ A}$  w chwili  $t_1 = 1 \text{ s}$ . Jeżeli  $L = 10 \text{ H}$ , jaka jest wartość oporu  $R$ ?

19. W obwodzie pokazanym na rys. 36-10  $\mathcal{E} = 10 \text{ V}$ ,  $R_1 = 5,0 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$  i  $L = 5,0 \text{ H}$ . Obliczyć dla dwóch oddzielnych przypadków (I) bezpośrednio po zamknięciu przełącznika  $S$ , (II) po bardzo długim czasie od zamknięcia tego przełącznika: (a) prąd  $i_1$  płynący przez opór  $R_1$ ; (b) prąd  $i_2$  płynący przez opór  $R_2$ ; (c) prąd  $i$  płynący przez przełącznik  $S$ ; (d) różnicę potencjałów na oporze  $R_2$ ; (e) różnicę potencjałów na cewce  $L$ ; (f)  $di_2/dt$ .

Odp.: I: (a)  $2,0 \text{ A}$ , (b) zero, (c)  $2,0 \text{ A}$ , (d) zero, (e)  $10 \text{ V}$ , (f)  $2,0 \text{ A/s}$ . II: (a)  $2,0 \text{ A}$ , (b)  $1,0 \text{ A}$ , (c)  $3,0 \text{ A}$ , (d)  $10 \text{ V}$ , (e) zero, (f) zero.



Rys. 36-10. Zadanie 19



Rys. 36-11. Zadanie 20

20. Na rys. 36-11  $\mathcal{E} = 100 \text{ V}$ ,  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 20 \Omega$ ,  $R_3 = 30 \Omega$  i  $L = 2,0 \text{ H}$ . Znaleźć wartości  $i_1$  i  $i_2$  (a) bezpośrednio po zamknięciu przełącznika  $S$ , (b) długo po zamknięciu, (c) bezpośrednio po otwarciu, (d) długo po otwarciu.

21. Wykazać, że indukcyjną stałą czasową  $\tau_L$  można również zdefiniować jako czas niezbędny, aby prąd w obwodzie  $LR$  osiągnął swoją wartość stałą, wzrastając z początkową szybkością.

22. Przełącznik  $S$  na rys. 36-3 przerzucamy z położenia  $b$  do  $a$ . Wykazać, że po czasie równym indukcyjnej stałej czasowej (a) całkowita energia zamieniona na ciepło Joule'a w oporze  $R$  wynosi  $0,168\mathcal{E}^2\tau_L/R$ , (b) energia zgromadzona w polu magnetycznym wynosi  $0,200\mathcal{E}^2\tau_L/R$ . (c) Pokazać, że maksymalna energia zawarta w polu magnetycznym wynosi  $0,500\mathcal{E}^2\tau_L/R$ .

23. Cewkę o indukcyjności  $2 \text{ H}$  i oporze  $10 \Omega$  łączymy natychmiastowo z baterią bezoporową o napięciu  $\mathcal{E} = 100 \text{ V}$ . (a) Jaki prąd stacjonarny ustala się w tym obwodzie? (b) Jaka energia jest zgromadzona w polu magnetycznym po ustaleniu prądu?

Odp.: (a)  $10 \text{ A}$ , (b)  $100 \text{ J}$ .

24. Cewkę o indukcyjności  $2 \text{ H}$  i oporze  $10 \Omega$  łączymy natychmiastowo z baterią bezoporową o napięciu  $\mathcal{E} = 100 \text{ V}$ . Jaka jest po upływie  $0,1 \text{ s}$  od chwili połączenia: (a) szybkość narastania energii w polu

magnetycznym, (b) szybkość wydzielania się ciepła Joule'a na oporze cewki i (c) szybkość przekazywania przez baterię energii do obwodu?

25. Daną cewkę połączono w szereg z  $10\,000\ \Omega$  oporem. Kiedy do tego układu podłączono baterię o napięciu  $50\text{ V}$ , to w obwodzie prąd osiągnął wartość  $2,0\text{ mA}$  po czasie  $5,0\text{ ms}$ . (a) znaleźć indukcyjność cewki (b) energię zgromadzoną w cewce w rozpatrywanym momencie.

Odp.: (a)  $98\text{ H}$ , (b)  $2,0 \cdot 10^{-4}\text{ J}$ .

26. Prąd o jednakowej gęstości płynie przez długi przewód. Niech  $i$  będzie całkowitym natężeniem prądu płynącego wzdłuż przewodu. Wykazać, że zawarta w przewodzie energia magnetyczna przypadająca na jednostkę długości wynosi  $\mu_0 i^2 / 16\pi$ . Zwracamy uwagę, że energia ta nie zależy od średnicy przewodu.

27. Koncentryczny kabel z przykładu 5 ma następujące wymiary:  $a = 1,0\text{ mm}$ ,  $b = 4,0\text{ mm}$  i  $c = 5,0\text{ mm}$  ( $c$  oznacza promień zewnętrzny skrajnego cylindra). Wzdłuż cylindra wewnętrznego i zewnętrznego płyną równe co do wielkości, ale przeciwnie skierowane prądy o natężeniu  $10\text{ A}$ . Obliczyć i porównać energię magnetyczną przypadającą na metr kabla, zauważ: (a) wewnętrz cylindra środkowego, (b) w przestrzeni między obydwoma cylindrami, (c) wewnętrz cylindra zewnętrznego.

Odp.: (a)  $2,5 \cdot 10^{-6}\text{ J/m}$ , (b)  $14 \cdot 10^{-6}\text{ J/m}$ , (c)  $0,80 \cdot 10^{-6}\text{ J/m}$ .

28. Udowodnić, że gdy przełącznik  $S$  (rys. 36-3) przerzucamy z pozycji  $a$  do  $b$ , całkowita energia zawarta w cewce wydziela się na oporze jako ciepło Joule'a.

#### Paragraf 36-5

29. Jaka jest gęstość energii pola magnetycznego w pobliżu środka solenoidu z zadania 23 w rozdziale 35?

Odp.:  $63\text{ J/m}^3$ .

30. W kołowej pętli o średnicy  $5,0\text{ cm}$  płynie prąd  $100\text{ A}$ . Jaka jest gęstość energii w środku pętli?

31. Długi drut miedziany przewodzi prąd o natężeniu  $100\text{ A}$ . Obliczyć (a) gęstość energii magnetycznej i (b) gęstość energii elektrycznej na powierzchni drutu. Średnica drutu wynosi  $2,5\text{ mm}$ , a jego opór przypadający na jednostkę długości jest równy  $1,0\ \Omega/300\text{ m}$ .

Odp.: (a)  $0,99\text{ J/m}^3$ , (b)  $4,8 \cdot 10^{15}\text{ J/m}^3$ .

32. (a) Jaka jest gęstość energii magnetycznej ziemskiego pola magnetycznego wynoszącego  $5,0 \times 10^{-5}\text{ T}$ ? (b) Zakładając względną stałość tego pola na odległościach małych w porównaniu z promieniem Ziemi i zaniedbując zmiany w pobliżu biegunów magnetycznych, obliczyć energię magnetyczną zmagazynowaną w powłoce okoziemskiej o grubości  $16\text{ km}$  licząc od powierzchni Ziemi.

33. (a) Znaleźć wyrażenie na gęstość energii jako funkcję promienia toroidu z przykładu 1. (b) Całkując gęstość energii po objętości toroidu znaleźć całkowitą energię zmagazynowaną w polu toroidu dla  $i = 0,50\text{ A}$ . (c) Wychodząc z równania (36-18) określić zmagazynowaną energię toroidu bezpośrednio z indukcyjności i wynik porównać z wynikiem w przypadku (b).

Odp.: (a)  $\frac{\mu_0 i^2 N^2}{8\pi^2 r^2}$ , (b)  $1,8 \cdot 10^{-4}\text{ J}$ , (c)  $1,8 \cdot 10^{-4}\text{ J}$ .

34. Jaka musi być wielkość jednorodnego pola elektrycznego, aby miało taką samą gęstość energii, jak pole magnetyczne o indukcji  $0,50\text{ T}$ ?

35. Jaka jest gęstość energii magnetycznej w środku toru, po którym krąży elektron w atomie wodoru (patrz przykład 9, rozdział 34)?

Odp.:  $5,7 \cdot 10^7\text{ J/m}^3$ .

#### Paragraf 36-6

36. Pokazać, że w przykładzie 7, gdy  $N_1 \neq N_2$ , wzajemna indukcyjność cewek wyraża się wzorem

$$M = \sqrt{L_1 L_2}.$$

Czy można założyć, że ta relacja zachodzi nie tylko dla przykładu 7, tzn. gdy nie jest prawdą, że cały strumień z jednej cewki przechodzi przez wszystkie zwoje z drugiej cewki?

37. Dwie krótkie cewki cylindryczne połączono w szereg. Cewki te są umieszczone blisko siebie wzdłuż tej samej osi. (a) Wykazać, że wypadkowa indukcyjność takiego układu wynosi

$$L = L_1 + L_2 \pm 2M.$$

(b) Jakie jest znaczenie podwójnego znaku ( $\pm$ )? Czy ma to coś wspólnego z kierunkiem (zgodnym lub przeciwnym do ruchu wskazówek zegara) nawinięcia cewek?

# 37. Magnetyczne właściwości materii

## 37-1. Biegunki i dipole

W elektryczności najprostszym mogącym istnieć układem jest *odosobniony ładunek*  $q$ . Dwa takie ładunki o przeciwnych znakach, umieszczone blisko siebie tworzą *dipol elektryczny*, charakteryzujący się elektrycznym momentem dipolowym  $\mathbf{p}$ . Odosobnione biegunki magnetyczne zwane zazwyczaj *magnetycznymi monopolami*, które odpowiadałyby odosobnionym ładunkom elektrycznym, w przyrodzie nie istnieją. Najprostszym układem magnetycznym jest dipol magnetyczny, charakteryzujący się magnetycznym momentem dipolowym  $\mu$ . W tablicy 34-1 zebrane są niektóre dane charakteryzujące dipole elektryczne i magnetyczne.

Przykładem dipola magnetycznego jest zamknięty obwód z prądem, magnes oraz solenoid o skończonej długości. Możemy zidentyfikować ich biegunki północne (z których wychodzą linie pola  $\mathbf{B}$ ) umieszczając je jak igłę kompasu i obserwując, który koniec wskazuje północ. Magnetyczny moment dipolowy można wyznaczyć umieszczając dipol w zewnętrznym polu magnetycznym  $\mathbf{B}$  i mierząc działający na niego moment skręcający  $\tau$ . Wielkość  $\mu$  obliczamy z równania (33-11); czyli

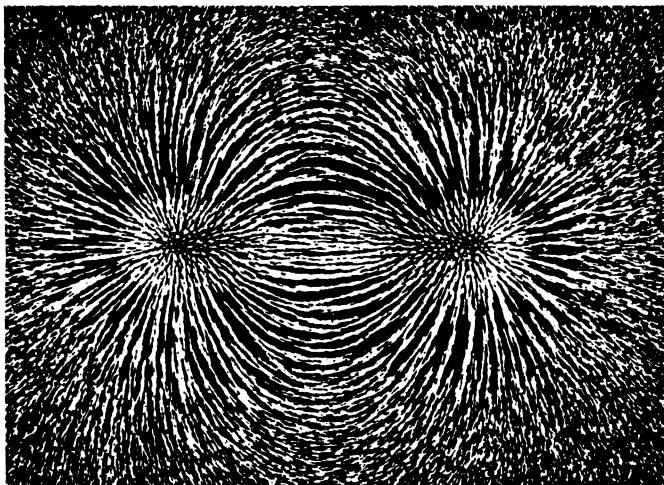
$$\tau = \mu \times \mathbf{B}. \quad (37-1)$$

Możemy również zmierzyć wielkość wytwarzanego przez dipol pola magnetycznego  $\mathbf{B}$  w punkcie położonym na osi dipola w odległości (dużej)  $r$  od jego środka i obliczyć  $\mu$  z wyrażenia podanego w tablicy 34-1, czyli

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{r^3}. \quad (37-2)$$

Rysunek 37-1, przedstawiający opilki żelaza rozsypane na arkuszu papieru położonym na magnesie sztabkowym sugeruje, że dipol magnetyczny możemy traktować jak dwa „biegunki” rozsunięte na odległość  $d$ . Jednakże wszelkie usiłowania zmierzające do roz-

dzielenia obu biegunów zawodzą. Jeśli magnes połamiemy, jak na rys. 37-2, to okaże się, że powstałe części będą dipolami, a nie izolowanymi biegunami. Tam gdzie istniał jeden biegun północny i jeden biegun południowy istnieją teraz po trzy bieguny. Gdybyśmy podzieliли magnes na elektrony, protony i neutrony okazałoby się, że nawet te elementarne cząstki są dipolami magnetycznymi. Rysunek 37-3 przedstawia elektryczne i magnetyczne pole swobodnego elektronu.

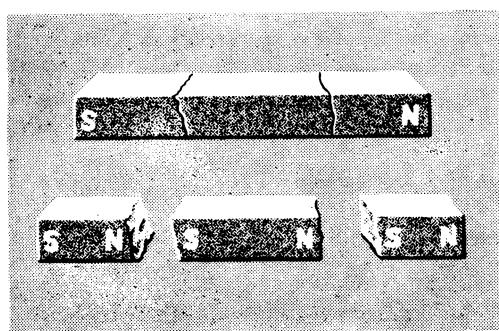


Rys. 37-1. Magnes sztabkowy jest dipolem magnetycznym. Opinki żelazne układają się zgodnie z liniami sił pola magnetycznego, przedstawionymi na rys. 37-4a. Patrz rys. 27-6b — analogia elektrostatyczna. (Dzięki uprzejmości: Physical Science Study Committee)

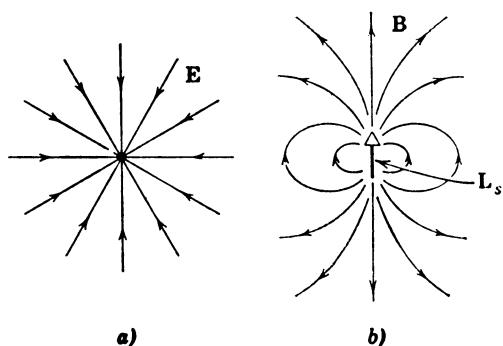
Wszystkie elektrony mają „spinowy” moment pędu (względem pewnej osi) o wartości

$$L_s = 0,5272943 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}.$$

Moment ten przedstawiony jest na rys. 37-3b wektorem  $L_s$ . Taki wirujący ładunek można w sposób klasyczny traktować jako zespół bardzo małych zamkniętych obwodów z prą-



Rys. 37-2. Jeżeli połamać magnes sztabkowy, to każdy kawałek stanie się dipolem magnetycznym. Będzie zawsze jednakowa liczba biegunów północnych i południowych połączonych w pary



Rys. 37-3. (a) Linie  $E$  i (b) linie  $B$  dla elektronu. Magnetyczny moment dipolowy elektronu  $\mu_s$  jest skierowany przeciwnie do wektora spinowego momentu pędu

dem. Każdy taki obwód jest małym dipolem magnetycznym, którego moment wynosi (równ. (33-10))

$$\mu = NiA, \quad (37-3)$$

gdzie  $i$  oznacza odpowiednie natężenie prądu w każdym z tych obwodów,  $A$  jest powierzchnią otoczoną obwodem. Dla każdego obwodu liczba zwojów  $N = 1$ . Moment magnetyczny wirującego ładunku można obliczyć sumując (całkując) momenty magnetyczne wszystkich małych obwodów z prądem, które się nań składają; patrz zadanie 8.

Chociaż model ten jest zbyt mechaniczny i nie jest zgodny z nowoczesną fizyką kwantową, to jednak ściśle powiązanie magnetycznych momentów dipolowych cząstek elementarnych z ich wewnętrznymi momentami pędu lub spinami pozostaje faktem. Cząstki lub jądra o spinowym momencie pędu równym zeru (cząstka  $\alpha$ , pion, jądro  $^{16}\text{O}$  itd.) nie mają magnetycznych momentów dipolowych. „Wewnętrzny” lub „spinowy” moment magnetyczny elektronu należy odróżnić od pozostałych, dodatkowych momentów magnetycznych, jakie może mieć elektron na skutek ruchu *orbitalnego* wewnątrz atomu; patrz przykład 2.

**Przykład 1.** Podać metody pomiaru  $\mu$  dla magnesu sztabkowego.

(a) Umieszczać magnes w zewnętrznym polu magnetycznym  $\mathbf{B}$  tak, aby moment  $\mu$  tworzył kąt  $\theta$  z wektorem  $\mathbf{B}$ . Wielkość momentu skręcającego działającego na magnes (patrz równ. (37-1)) jest dana wzorem

$$\tau = \mu B \sin \theta.$$

Mierząc  $\tau$ ,  $B$  i  $\theta$  możemy otrzymać w sposób prosty  $\mu$ .

(b) W drugiej metodzie zawieszamy magnes w jego środku ciężkości i obserwujemy drgania wykonywane w zewnętrznym polu  $\mathbf{B}$  wokół położenia równowagi trwałej. Dla małych drgań  $\sin \theta \approx \theta$  możemy zastąpić przez  $\theta$  i równanie poprzednie przechodzi w

$$\tau = -(\mu B)\theta = -\kappa\theta,$$

gdzie  $\kappa$  jest stałą. Znak minus oznacza, że  $\tau$  jest momentem przywracającym równowagę. Ponieważ  $\tau$  jest proporcjonalne do  $\theta$ , spełniony jest warunek dla prostego ruchu harmonicznego. Częstość jest dana odwrotnością równania (15-24).

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{I}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu B}{I}},$$

gdzie  $I$  jest bezwładnością obrotową.

Korzystając z tego wyrażenia możemy otrzymać wartość  $\mu$  mierząc  $\nu$ ,  $B$  i  $I$ .

**Przykład 2.** Elektron w atomie obiegający ustaloną orbitę kołową o promieniu  $r$  zachowuje się jak niewielki obwód z prądem i ma *orbitalny magnetyczny moment dipolowy*\* oznaczany zazwyczaj przez  $\mu_l$ . Mimo, że ten model jest zbyt mechanistyczny i niezgodny z duchem współczesnej fizyki kwantowej, nie mniejszej jednak stanowi dobry przykład do przestudiowania. Wyprowadzić związek między  $\mu_l$  i *orbitalnym momentem pędu  $L_l$* .

Z drugiej zasady Newtona ( $F = ma$ ) otrzymujemy po podstawieniu na  $F$  wzoru Coulomb'a

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = ma = \frac{mv^2}{r}$$

albo

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mr}}. \quad (37-4)$$

---

\* Momentu tego nie należy mylić ze spinowym magnetycznym momentem dipolowym  $\mu_s$  elektronu, który również istnieje.

Prędkość kątowa  $\omega$  jest równa

$$\omega = \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mr^3}}.$$

Prąd na orbicie jest określony przez ilość ładunku, jaki przechodzi w jednostce czasu przez dowolny punkt, a więc

$$i = ev = e \frac{\omega}{2\pi} = \sqrt{\frac{e^4}{16\pi^3 \epsilon_0 m r^3}}.$$

Orbitalny moment dipolowy  $\mu_l$  otrzymamy z równania (37-3), jeśli podstawimy  $N = 1$  i  $A = \pi r^2$ , a więc

$$\mu_l = NiA = (1) \sqrt{\frac{e^4}{16\pi^3 \epsilon_0 m r^3}} \pi r^2 = \frac{e^2}{4} \sqrt{\frac{r}{\pi \epsilon_0 m}}. \quad (37-5)$$

Orbitalny moment pędu  $L_l$  jest równy

$$L_l = mvr.$$

Uwzględnienie równania (37-4) daje

$$L_l = \sqrt{\frac{e^2 mr}{4\pi\epsilon_0}}.$$

Rugując  $r$  z tego równania oraz z równania (37-5) otrzymamy

$$\mu_l = L_l \frac{e}{2m},$$

skąd widać, że orbitalny moment magnetyczny elektronu jest proporcjonalny do jego orbitalnego momentu pędu. Czytelnik powinien się przekonać, że wektory  $\mu_l$  i  $L_l$  mają przeciwnie kierunki.

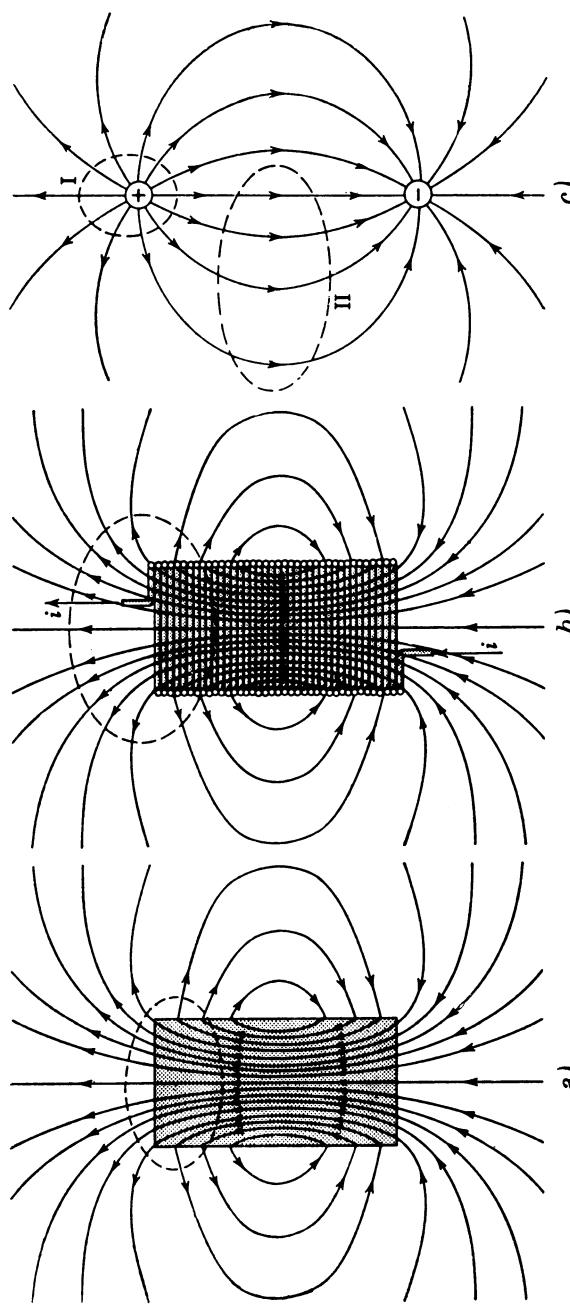
Dla  $r = 5,1 \cdot 10^{-11}$  m, co odpowiada atomowi wodoru w stanie podstawowym, z równania (37-5) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mu_l &= \frac{e^2}{4} \sqrt{\frac{r}{\pi \epsilon_0 m}} = \\ &= \frac{(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{4} \sqrt{\frac{5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}}{\pi (8,9 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)) (9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg})}} = 9,2 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2. \end{aligned}$$

Jak to wyjaśnia rys. 37-4 dla magnesu sztabkowego i solenoidu, linie pola  $\mathbf{B}$  wychodzą z górnego końca, a wchodzą do dolnego. Tak zlokalizowane obszary nazywamy „biegunem północnym” (górny koniec) i „biegunem południowym” (dolny koniec). Nie są to tak dokładnie zdefiniowane obszary jak w przypadku dipola elektrycznego z rys. 37-4c. Należy zwrócić uwagę, że linie  $\mathbf{B}$  i  $\mathbf{E}$  na rys. 37-4 są bardziej podobne do siebie (pole dipola) przy odległościach od źródła znacznie większych niż jego rozmiary i jednocześnie są bardziej odmienne przy bliskich odległościach od tego źródła, włączając w to punkty leżące wewnątrz źródła.

Symetria przyrody była zawsze wiodącą zasadą dla fizyków. Na przykład istnienie elektronu (ujemnego), sugerowało istnienie elektronu dodatniego, czyli pozytonu, który został następnie odkryty. Podobnie istnienie dodatniego protonu sugerowało, że także istnieje proton ujemny. Na uniwersytecie w Kalifornii (Berkeley) zbudowano wielki akcelerator głównie w celu odkrycia ujemnego protonu i rzeczywiście go znaleziono. Za odkrycia pozytonu i ujemnego protonu przyznano dwóm osobom nagrodę Nobla — patrz dodatek K.

Ze względu na taką motywację nie należy się dziwić, że fizycy od dawna myślą o eksperymentalnym dowodzie istnienia magnetycznych monopolii. Ich nieobecność jak to zo-



Rys. 37-4. Linie **B** (a) dla magnesu sztabkowego i (b) dla krótkiego solenoidego. (c) Linie E dla dipola elektrycznego. W dostatecznie dużych odległościach wszystkie trzy pola upodabniają się do pola dipola. Cztery linie przedstawiają przecięcia zamkniętych powierzchni Gaussa z płaszczyzną rysunku. Zauważmy, że  $\Phi_E$  znika w przypadkach (a) i (b). (c)  $\Phi_E$  znika na powierzchniach takich jak II, które nie zawierają żadnych ładunków.  $\Phi_E$  nie znika na powierzchniach, takich jak I. Patrz paragraf I.

baczymy dokładniej w Rozdziale 40 stanowi poważny brak symetrii między elektrycznością i magnetyzmem. Magnetyczne monopole były przewidziane w 1931 roku na podstawie teorii P. A. M. Diraca, od tamtego czasu fizycy nieprzerwanie ich poszukują.

### 37-2. Prawo Gaussa dla pola magnetycznego

*Prawo Gaussa dla pola magnetycznego* będące jednym z podstawowych równań elektromagnetyzmu (patrz tablica 40-2) jest formalnym stwierdzeniem wniosku wypływającego ze znanych faktów dotyczących magnetyzmu, mianowicie wniosku o *nieistnieniu izolowanych biegunków magnetycznych*. Prawo to stwierdza, że strumień  $\Phi_B$  przechodzący przez dowolną zamkniętą powierzchnię gaussowską musi być równy零, czyli

$$\Phi_B = \oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0, \quad (37-6)$$

gdzie całka jest wzięta po całej zamkniętej powierzchni. Porównajmy to równanie z prawem Gaussa dla pola elektrycznego, które ma postać

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = q. \quad (37-7)$$

Fakt, że po prawej stronie równania (37-6) występuje zero, a w równaniu (37-4) nie, oznacza, że w magnetyzmie zdaje się, że nie ma odpowiednika swobodnego ładunku elektrycznego.

Rysunek 37-4a przedstawia powierzchnię gaussowską otaczającą jeden koniec magnesu sztabkowego. Zauważmy, że linie pola  $\mathbf{B}$  wchodzą do powierzchni wewnętrz magnesu, a opuszczają ją poza magnesem. Wewnętrz magnesu istnieje więc strumień „wchodzący” (czyli ujemny), a poza magnesem strumień „wychodzący” (czyli dodatni). Pełny strumień dla całej powierzchni jest równy zero.

Rysunek 37-4b przedstawia podobną powierzchnię dla solenoidu o skończonej długości, który także jest dipolem magnetycznym. Tutaj strumień  $\Phi_B$  również jest równy zero. Patrząc na rysunki 37-4a i b widzimy, że nie ma „źródeł” pola  $\mathbf{B}$ , tzn. nie istnieją punkty, z których wychodzą linie pola  $\mathbf{B}$ . Nie ma także miejsc „upływu” pola  $\mathbf{B}$ , tzn. nie istnieją punkty, w których zbiegają się linie  $\mathbf{B}$ . Innymi słowy *nie ma swobodnych biegunków magnetycznych*.

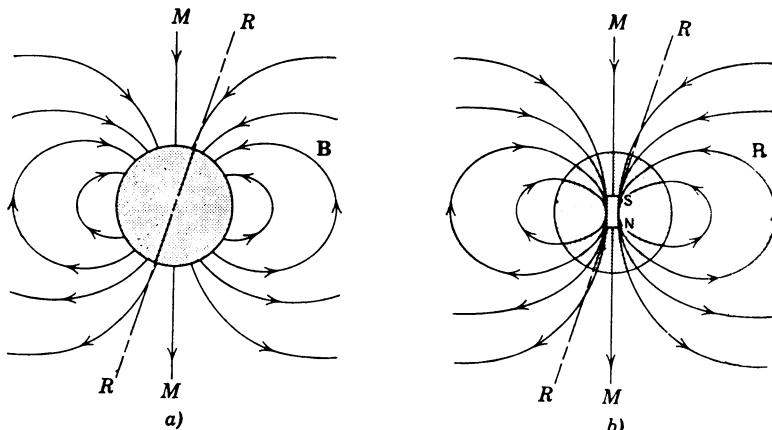
Rysunek 37-4c przedstawia powierzchnię gaussowską (I) otaczającą dodatni koniec dipola *elektrycznego*. Tutaj istnieje wypadkowy strumień linii  $\mathbf{E}$ . Jest tu także „źródło”  $\mathbf{E}$ , jest nim ładunek  $q$ . Jeśli ładunek  $q$  jest ujemny, mamy miejsce „upływu”  $\mathbf{E}$ , ponieważ linie pola  $\mathbf{E}$  kończą się na ładunkach ujemnych. Dla takich powierzchni, jak powierzchnia II na rys. 37-4c, dla której ładunek wewnętrz wynosi zero, strumień  $\mathbf{E}$  poprzez powierzchnię jest także równy zero.

### 37-3. Magnetyzm Ziemi

Magnesem, z którym jesteśmy najbardziej zaznajomieni, jest Ziemia, na której żyjemy. Przypuśćmy, że Ziemia jest wielkim magnesem z magnetycznymi biegunami i magnetycznym równikiem, jak to założył po raz pierwszy Sir William Gilbert (1544–1603), lekarz królowej Elżbiety I. Gilbert wykonał małą sferyczną kulkę (maleńką Ziemię) z naturalnie występującej rudy żelaza. Innymi słowy wykonał tzw. „kamień prowadzący”

albo kompas i oznaczył jego linie magnetyczne. Owe czasy nawigacji i odkryć charakterystyczne zawsze się zainteresowaniem kompasami i magnetyzmem ziemskim.

Wyidealizowany schemat linii magnetycznych  $\mathbf{B}$  związanych z ziemskim polem magnetycznym przedstawia rys. 37-5a.



Rys. 37-5. (a) Wyidealizowane przedstawienie linii  $\mathbf{B}$  związanych z magnetycznym polem Ziemi.  $MM$  jest magnetyczną osią Ziemi, a  $RR$  jej osią obrotową. (b) Zewnętrzne pole magnetyczne Ziemi można sobie wyobrazić jako pochodzące od „silnego magnesu sztabkowego” umieszczonego w środku Ziemi

W pierwszym przybliżeniu możemy odtworzyć to pole wyobrażając sobie silny magnes sztabkowy umieszczony w środku Ziemi, tak jak to przedstawia rys. 37-5b. Należy zwrócić uwagę, że magnetyczna osią Ziemi  $MM$  nie pokrywa się z jej osią obrotu  $RR$ , a jest odchylona o około 15°.

Biegun magnetyczny półkuli północnej leży w arktycznej Kanadzie. Należy pamiętać, że jest to *południowy* biegun magnetyczny, ponieważ linie  $\mathbf{B}$  wchodzą do niego jak na rys. 37-4. A *północny* biegun magnetyczny znajduje się na półkuli południowej na Antarktydzie; linie  $\mathbf{B}$  wychodzą z niego.

Oczywiście nie ma takiego magnesu sztabkowego, który byłby umieszczony w środku Ziemi. Magnetyzm ziemski musi wynikać z faktów, że centralny rdzeń Ziemi o promieniu równym 55% promienia Ziemi jest: (a) w stanie ciekłym, (b) wysokoprzewodzący, (c) uczestniczy w obrocie Ziemi. Ma tu z pewnością miejsce zjawisko podobne do zjawisk zachodzących w prądnicy prądu stałego z tym, że mamy do czynienia z prądami kołowymi w rdzeniu Ziemi, a mechanizm powstawania tych prądów nie jest całkowicie zrozumiały\*.

Kilka innych planet z naszego Układu Słonecznego, a wśród nich Merkury i Jowisz mają również swoje pola magnetyczne. To samo dotyczy Słońca i wielu innych gwiazd.

Również nasza Galaktyka to jest rodzina gwiazd, których płaszczyzną symetrii jest Droga Mleczna, ma swoje pole magnetyczne. To pole magnetyczne jest względnie słabe (średnio 2 pT), ale jego efekty mogą być ważne, ponieważ rozciąga się ono na wielkich przestrzeniach.

Są dwa proste narzędzia do badania ziemskiego pola magnetycznego: igła kompasu

\* Zobacz: S. K. Runcorn, The Earth's Magnetism, *Scientific American*, September 1955.

na osi pionowej i igła inklinacyjna zrównoważona grawitacyjnie, na osi poziomej a nie pionowej. Na przykład, w Tucson w Arizonie północny biegun igły kompasu skierowany jest około  $13^\circ$  na wschód od geograficznego bieguna północnego (wg pomiarów 1964 r.). Takie odchylenia należy znać i uwzględniać przy używaniu kompasu w nawigacji albo przy określeniu kierunku. Horyzontalna składowa ziemskiego pola magnetycznego  $B_h$ , które działa na igłę kompasu, wynosi w Tucson  $26 \mu\text{T}$  ( $= 0,26$  gausa).

Ustawmy teraz poziomą oś obrotu igły inklinacyjnej (kompasu żyroskopowego) w Tucson pod kątem prostym do składowej poziomej pola  $\mathbf{B}$ . Czy możemy się przekonać, że igła będzie pokazywać kierunek pola  $\mathbf{B}$ ? Tak, możemy zmierzyć w danym miejscu i danego dnia kąt inklinacji  $\varphi_i = 59^\circ$  względem poziomej płaszczyzny, na której leży jej oś obrotu. Poza tym zauważymy, że igła skierowana jest w stronę ziemi. Zatem tak jak oczekiwaliśmy na podstawie rys. 37-5a linie pola  $\mathbf{B}$  w danym miejscu wchodzą do powierzchni ziemi.

Pole magnetyczne ziemskie nie jest ani tak regularne, ani tak statyczne jak to sugeruje rys. 37-5. Obserwuje się także zjawiska inne niż odchylenia igły kompasu, które by nie wystąpiły, gdyby Ziemia nie miała pola magnetycznego.

Rozważmy co następuje:

1. *Różnice lokalne*. Pole magnetyczne Ziemi wykazuje ważne różnice lokalne, wynikające z magnetycznych właściwości skał skorupy ziemskiej i z obecności koncentracji rud magnetycznych.

2. *Zmiany czasowe*. Średnia magnetyczna deklinacja i inklinacja mierzalnie zmieniają się z roku na rok w każdym wybranym miejscu. Na przykład między latami 1600 i 1800 magnetyczna deklinacja mierzona w Londynie zmieniała się w ciągły sposób od  $11^\circ$  na wschód do  $24^\circ$  na zachód. Magnetyczny biegun północny (np. w 1948 r.) przesuwał się w kierunku północno-zachodnim około 8 km/rok.

To błędzenie osi magnetycznej Ziemi, a stąd zmiany w czasie lokalnych deklinacji i inklinacji, było powodem powstania nowej specjalności archeologicznej, tj. archeomagnetyzmu, który może ustalić wiek starożytnych pieców hutniczych. Zasada ustalenia wieku opiera się na fakcie, że większość glin użytych do budowy tych pieców zawiera małe ilości materiałów magnetycznych, których orientacja zostaje jakby zamrożona od czasu, kiedy te piece były używane. Porównując obecną orientację ziemskiego pola magnetycznego z tamtym, jakby zamrożonym uporządkowaniem, można oszacować przybliżony wiek archeologiczny.

W dłuższej (geologicznej) skali czasu istnieją dowody na to, że oś magnetyczna Ziemi aż 9 razy całkowicie się obróciła względem swego kierunku w ciągu ostatnich  $4 \cdot 10^6$  lat\*.

Dowody opierają się na pomiarach (stabego) magnetyzmu zamrożonego w skałach, w czasie ich tworzenia, których wiek geologiczny jest znany.

3. *Oddziaływanie z wiatrem słonecznym*. Słońce emituje stały strumień zjonizowanych atomów wodoru (protonów) i elektronów, które przenikają przez Układ Słoneczny z szybkościami naddźwiękowymi. Ten zawsze obecny „wiatr słoneczny” silnie oddziałuje na szereg sposobów z ziemskim polem magnetycznym\*\*. (a) Przypadkowe ostre wzrosty natężenia wiatru słonecznego wywołują ziemskie burze magnetyczne, które poważnie zakłócają radiokomunikację długozasięgową. (b) Protony i elektrony z wiatru słonecznego pod wpływem siły danej równ. (33-2) ( $\mathbf{F} = q_0 \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ) poruszają się po spirali wzdłuż linii  $\mathbf{B}$ .

\* Allan Cox, G. Brent Dalrymple, Richard R. Doel, Reversals of the Earth's Magnetic Field, *Scientific American*, February 1967.

\*\* E. N. Parker, The Solar Wind, *Scientific American*, April 1964.

tam i z powrotem pomiędzy północnym i południowym obszarem biegunowym. Te „wychwycone” elektrony i protony tworzą tzw. *pasy radiacyjne Van Allena*, odkryte przez Jamesa A. Van Allena z Uniwersytetu Stanowego Iowa zaraz na początku eksperymentów satelitarnych\*. (c) Wyłapane cząstki z wiatru słonecznego podczas oddziaływanego z ziemską atmosferą wywołują w niej zorzę polarną, która jest najbardziej widoczna na szerokości geograficznej  $\pm 75^\circ$ .

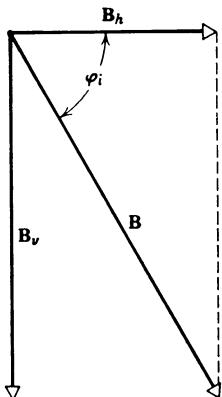
**Przykład 3.** Na podstawie danych podanych wcześniej w tym paragrafie znaleźć: a) pionową składową  $B_h$  ziemskiego pola magnetycznego, (b) wypadkowe pole magnetyczne  $B$  w Tuscon, Arizona.

Z rys. 37-6 mamy, że

$$a) \quad B_h = B_k \operatorname{tg} \varphi_i = 26 \mu\text{T} \operatorname{tg} 59^\circ = 44 \mu\text{T} (= 0,44 \text{ Gs}).$$

$$b) \quad B = \sqrt{B_h^2 + B_v^2} = \sqrt{(26 \mu\text{T})^2 + (44 \mu\text{T})^2} = 51 \mu\text{T} (= 0,51 \text{ Gs}).$$

Zwracamy uwagę, że magnetyczna deklinacja w Tuscon w tym przykładzie nie odgrywa roli.



Rys. 37-6. Przykład 3

#### 37-4. Paramagnetyzm

Magnetyzm, który znamy z codziennego doświadczenia, jest ważnym, ale tylko szczególnym przypadkiem zjawisk magnetycznych, zwanym *ferromagnetyzmem*; poświęcamy mu paragraf 37-6. Tutaj omówimy inną postać magnetyzmu, zwaną *paramagnetyzmem*.

Efekty magnetyczne pochodzące od elektronów, uwzględniając zarówno ich spiny, jak i momenty orbitalne, dla większości atomów i jonów dokładnie się znoszą, tak że cząstki te nie wykazują własności magnetycznych. Przypadek ten obserwujemy w gazach, takich jak neon, oraz dla jonów\*\*, takich jak  $\text{Cu}^+$ , z których składa się zwykła miedź. Dla innych atomów lub jonów efekty magnetyczne elektronów nie znoszą się, tak że atom jako całość ma magnetyczny moment dipolowy  $\mu$ . Przykłady takich atomów i jonów znajdują się wśród tzw. pierwiastków przejściowych, jak  $\text{Mn}^{2+}$ , pierwiastków ziem rzadkich, jak  $\text{Gd}^{3+}$  i aktynowców, jak  $\text{U}^{4+}$ .

Jeśli próbce zawierającą  $N$  atomów, z których każdy ma magnetyczny moment dipolowy  $\mu$ , umieścimy w polu magnetycznym, elementarne dipole atomowe będą usiłowały

\* Patrz: Brian J. O'Brien, Radiation Belts, *Scientific American*, May 1963; J. A. Ratcliffe, *The Magnetosphere, Contemporary Physics*, vol. 18, 1977.

\*\*  $\text{Cu}^+$  oznacza atom miedzi, z którego usunięto jeden elektron;  $\text{Al}^{3+}$  oznacza atom glinu, z którego usunięto trzy elektrony itd.

ustawić się w kierunku zgodnym z kierunkiem pola. Ta tendencja do ustawiania się nazywa się *paramagnetyzmem*. W przypadku ustawienia dokładnie zgodnego z kierunkiem pola próbka jako całość miałaby dipolowy moment magnetyczny  $N\mu$ . Jednakże proces ustawiania się dipoli w kierunku zgodnym z kierunkiem pola silnie zakłócają wibracje temperaturowe. Miernikiem znaczenia efektów temperaturowych może być porównanie dwu energii: jednej ( $= \frac{3}{2}kT$ ), średniej energii kinetycznej ruchu postępowego atomów gazu w temperaturze  $T$ , i drugiej ( $= 2\mu B$ ), różnicy energii dla dwu możliwych zwrotów przy ustawieniu atomów równoległym do kierunku pola magnetycznego. Efekt zderzeń, jak zobaczymy w przykładzie 4, dla zwykłych temperatur i pól jest bardzo duży. Próbka umieszczona w zewnętrznym polu magnetycznym uzyskuje pewien moment magnetyczny, ale zazwyczaj dużo mniejszy od maksymalnego, możliwego do uzyskania momentu  $N\mu$ .

**Przykład 4.** Gaz paramagnetyczny, którego atomy (patrz przykład 2) mają dipolowy moment magnetyczny równy około  $10^{-23}$  A · m<sup>2</sup>, umieszczony jest w zewnętrznym polu magnetycznym o wielkości 1,0 T (= 10 gausów). Obliczyć średnią energię kinetyczną  $U_T$  ruchu postępowego ( $= \frac{3}{2}kT$ ) w temperaturze pokojowej ( $T = 300$  K) i porównać ją z energią magnetyczną  $U_B$  ( $= 2\mu B$ )

$$U_T = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}(1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}) \cdot 300 \text{ K} = 6 \cdot 10^{-21} \text{ J},$$

$$U_B = 2\mu B = 2 \cdot 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2 \cdot 1,0 \text{ T} = 2 \cdot 10^{-23} \text{ J}.$$

$U_T$  równe jest  $300U_B$ , widzimy więc, że wymiana energii w zderzeniach może poważnie zakłócać ustawianie się dipoli w kierunku zgodnym z kierunkiem zewnętrznego pola.

Jeśli próbkę materiału paramagnetycznego umieścimy w niejednorodnym polu magnetycznym, jakie na przykład istnieje w pobliżu bieguna silnego magnesu, będzie ona przyciągana w kierunku obszaru o większym natężeniu pola, czyli w stronę bieguna. Dla zrozumienia tego zjawiska przeprowadźmy analogię do przypadku pola elektrycznego, odpowiadającą próbce dielektrycznej (kuli) umieszczonej w niejednorodnym polu elektrycznym (rys. 37.7). Wypadkowa siła elektryczna skierowana jest na rysunku w prawą stronę i wynosi

$$F_e = q(E_0 + \Delta E) - q(E_0 - \Delta E) = q(2\Delta E),$$

co możemy zapisać w postaci

$$F_e = \frac{q\Delta x}{\Delta x} 2\Delta E = p \frac{2\Delta E}{\Delta x} \cong p \left( \frac{dE}{dx} \right)_{\max}.$$

$p$  ( $= q\Delta x$ ) oznacza tutaj indukowany elektryczny moment dipolowy kuli. Dla bardzo małej kuli  $2\Delta E/\Delta x$  zbliża się w granicy do  $(dE/dx)_{\max}$ , czyli do gradientu pola elektrycznego w środku kuli. W przypadku pola magnetycznego, korzystając z analogii, mamy

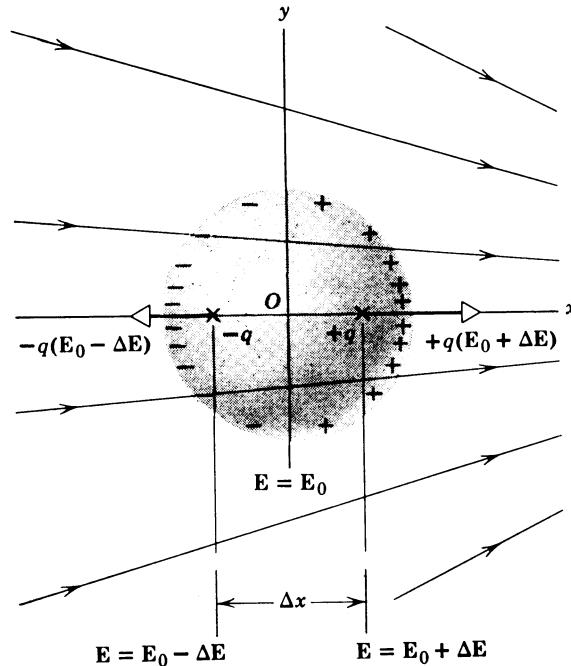
$$F_m = \mu \left( \frac{dB}{dx} \right)_{\max}. \quad (37-8)$$

Mierząc więc siłę magnetyczną  $F_m$  działającą na małą próbke paramagnetyka, umieszczoną w niejednorodnym polu magnetycznym o znanym gradiencie  $(dB/dx)_{\max}$ , możemytrzymać wielkość magnetycznego momentu dipolowego  $\mu$ . *Namagnesowanie*  $\mathbf{M}$  próbki określamy jako moment magnetyczny na jednostkę objętości, czyli

$$\mathbf{M} = \frac{\boldsymbol{\mu}}{V},$$

gdzie  $V$  oznacza objętość próbki. Wielkość ta jest wektorem, ponieważ moment dipolowy  $\mu$  próbki jest wielkością wektorową.

W roku 1895 Pierre Curie (1859–1906) wykazał doświadczalnie, że namagnesowanie  $M$  próbki paramagnetycznej jest wprost proporcjonalne do  $B$ , efektywnej indukcji magnetycz-



Rys. 37-7. Kula dielektryczna w niejednorodnym polu elektrycznym. Efektywne, indukowane ładunki są przedstawione jako ładunki punktowe  $+q$  i  $-q$

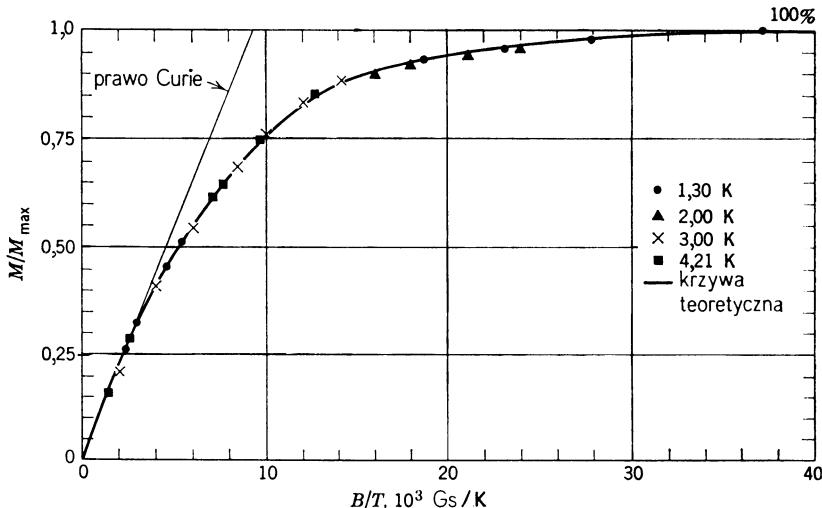
nej pola, w którym umieszczona jest próbka i odwrotnie proporcjonalnie do temperatury, czyli

$$M = C \frac{B}{T}, \quad (37-9)$$

gdzie  $C$  jest stałą. Równanie to nosi nazwę *prawa Curie*. Sens fizyczny tego prawa polega na tym, że wzrastająca indukcja  $B$  powoduje uporządkowanie elementarnych dipoli w próbce, a więc działa w kierunku zwiększenia  $M$ , podczas gdy wzrastająca temperatura  $T$  przeciwdziała temu uporządkowaniu, dążąc do zmniejszenia wartości  $M$ . Prawo Curie sprawdza się eksperymentalnie bardzo dobrze pod warunkiem, że stosunek  $B/T$  nie jest zbyt duży.

Namagnesowanie  $M$  nie może wzrastać nieograniczenie, jak wynikałoby z prawa Curie, ale musi zbliżać się do wartości  $M_{\max} (= \mu N/V)$  odpowiadającej całkowitemu uporządkowaniu  $N$  dipoli zawartych w objętości próbki  $V$ . Rysunek 37-8 przedstawia ten efekt nasycenia dla próbki  $\text{CrK}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$ . Za paramagnetyzm tej soli odpowiedzialne są jony chromu, wszystkie pozostałe pierwiastki są paramagnetycznie obojętne. W celu uzyskania 99,5% nasycenia trzeba stosować wysokie pola rzędu 50 000 Gs = 5,0 T i niskie temperatury rzędu 1,3 K. Zauważmy, że dla łatwiejszych do uzyskania warunków, np.  $B =$

$= 10\ 000$  Gs ( $= 1,0$  T) i  $T = 10$  K, wartość odciętej na rys. 37-8 wynosi zaledwie 1,0. Okazuje się więc, że prawo Curie dobrze stosuje się dla tej oraz wszystkich mniejszych wartości  $B/T$ . Krzywa przechodząca na rysunku przez punkty doświadczalne pochodzi z obliczeń opartych na nowoczesnej fizyce kwantowej, pozostaje ona w doskonałej zgodzie z doświadczeniem.



Rys. 37-8. Stosunek  $M/M_{\max}$  dla soli paramagnetycznej (ałun chromowo-potasowy) w różnych polach magnetycznych i przy różnych temperaturach. Krzywa przechodząca przez punkty doświadczalne jest krzywą teoretyczną, obliczoną na podstawie współczesnej fizyki kwantowej. (Z pomiarów W. W. Henry’ego)

### 37-5. Diamagnetyzm

W roku 1846 Michael Faraday odkrył, że próbka bizmutu zbliżona do bieguna silnego magnesu ulega *odpychaniu*. Materiały o takich właściwościach nazwał on *diamagnetykami* (w przeciwieństwie do próbek paramagnetycznych, które są przyciągane). Diamagnetyzm, występujący we wszystkich materiałach, jest efektem tak słabym, że obecność jego maskuje w ferromagnetykach i paramagnetykach posiadany przez te ciała wypadkowy moment magnetyczny atomów.

Rysunki 37-9a i b przedstawiają elektron poruszający się z prędkością kątową  $\omega_0$  w diamagnetycznym atomie po orbicie, będącej okręgiem o promieniu  $r$ . Każdy elektron porusza się pod wpływem elektrostatycznej siły dośrodkowej  $F_E$ ; z drugiej zasady Newtona mamy

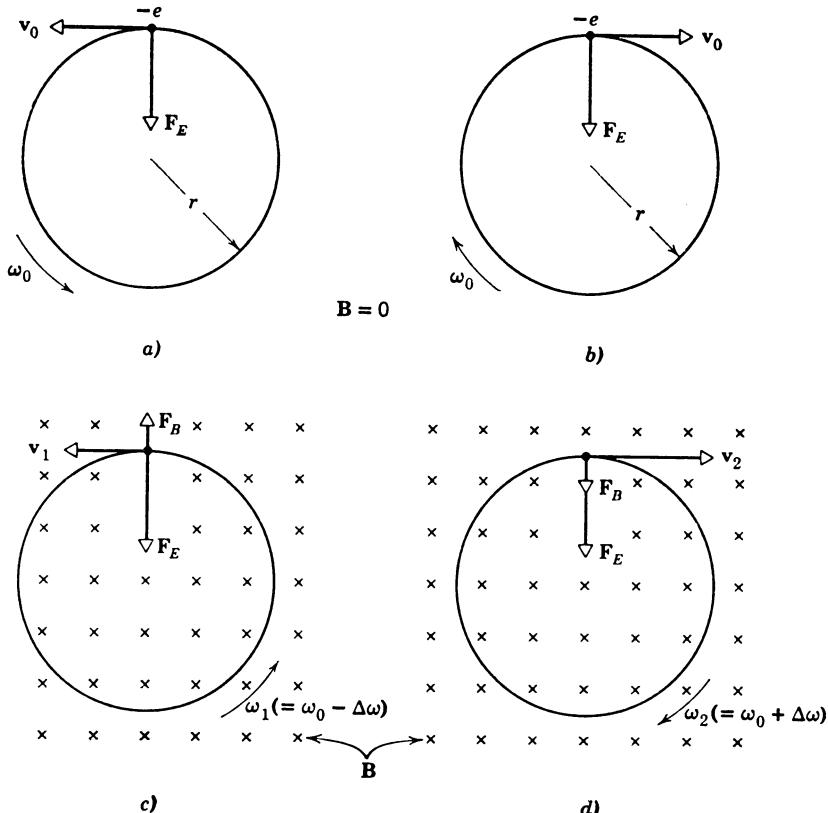
$$F_E = ma = m\omega_0^2 r. \quad (37-10)$$

Każdy obiegający jądro elektron ma orbitalny moment magnetyczny, ale w atomie, jako całości, orbity rozmieszczone są w sposób przypadkowy, tak że nie występuje wypadkowy moment magnetyczny. Na rysunku 37-9a, na przykład, magnetyczny moment dipolowy  $\mu$ , skierowany jest za płaszczyznę rysunku, na rys. 37-9 skierowany jest on przed sugerowaną płaszczyzną i momenty te dla dwu orbit znoszą się. To znoszenie się jest również sugerowane z lewej strony rys. 37-10.

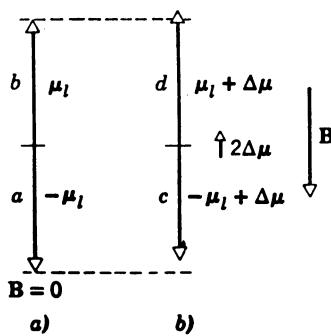
Jeśli elektron znajduje się w zewnętrznym polu magnetycznym  $\mathbf{B}$  (rys. 37-9c i d), to na elektron działa dodatkowa siła  $-e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ . Ta siła magnetyczna działa zawsze prostopadle do kierunku ruchu; jej wielkość wynosi

$$F_B = evB = e\omega_0 r B. \quad (37-11)$$

Czytelnik powinien wykazać, że na rys. 37-9c siły  $\mathbf{F}_B$  i  $\mathbf{F}_E$  są skierowane przeciwnie, a na rys. 37-9d zgodnie. Zauważmy także, że ponieważ siła dośrodkowa zmienia się po przyłożeniu pola magnetycznego (a można



Rys. 37-9. (a) Ruch elektronu w atomie. (b) Ten sam ruch w przeciwnym kierunku. (c) Przyłożone pole magnetyczne zmniejsza liniową prędkość elektronu w przypadku (a) i dlatego  $v_1 < v_0$ . (d) Pole magnetyczne zwiększa liniową prędkość elektronu w przypadku (b), co daje  $v_2 > v_0$ . Patrz zad. 15 — inny sposób postruktowania diamagnetyzmu. Tutaj traktujemy diamagnetyzm mechanicznie i klasycznie, lecz otrzymujemy rezultaty zgodne z doświadczeniem



Rys. 37-10. Momenty magnetyczne dwu przeciwnie poruszających się elektronów w atomie redukują się nawzajem w nieobecności zewnętrznego pola magnetycznego, (a) natomiast w zewnętrznym polu magnetycznym nie redukują się. (b) Moment wypadkowy jest skierowany *przeciwne* do  $\mathbf{B}$ . Porównać uważnie z rys. 37-9

wykazać, że promień orbity pozostaje stały), prędkość kątowa musi także się zmienić. Występująca więc w równaniu (37-11) wartość  $\omega$  różni się od wartości  $\omega_0$  z równania (37-10).

Stosując drugą zasadę Newtona do przypadków przedstawionych na rysunkach 37-9c i d oraz uwzględniając obydwa kierunki obiegu, otrzymujemy *sily wypadkowe* działające na elektryny:

$$F_E \pm F_B = ma = m\omega^2 r.$$

Podstawiając do tego równania wyrażenie (37-10) oraz (37-11) otrzymujemy

$$m\omega_0^2 r \pm e\omega r B = m\omega^2 r$$

albo

$$\omega^2 \pm \frac{eB}{m} \omega - \omega_0^2 = 0. \quad (37-12)$$

To równanie kwadratowe można rozwiązać względem nowej prędkości kątowej  $\omega$ . Skorzystamy tu jednakże raczej z faktu (podanego bez dowodu, patrz zadanie 14), że nawet w najsilniejszych zewnętrznych polach magnetycznych  $\omega$  różni się tylko nieznacznie od  $\omega_0$ .

A więc

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega, \quad (37-13)$$

gdzie  $\Delta\omega \ll \omega_0$ . Podstawiając to wyrażenie do równania (37-12) otrzymamy

$$[\omega_0^2 + 2\omega_0\Delta\omega + (\Delta\omega)^2] \pm [\beta\omega_0 + \beta\Delta\omega] - \omega_0^2 = 0,$$

gdzie  $\beta$  oznacza  $eB/m$ . Dwa członki  $\omega_0^2$  znoszą się wzajemnie, a członki  $(\Delta\omega)^2$  i  $\beta\Delta\omega$  są w porównaniu z członami pozostałymi bardzo małe i można je z niewielkim błędem przyjąć za równe零. Prowadzi to z bardzo dobrym przybliżeniem do równości

$$\Delta\omega \cong \pm \frac{1}{2}\beta = \pm \frac{eB}{2m} \quad (37-14)$$

lub, korzystając z równania (37-13),

$$\omega = \omega_0 \pm \frac{eB}{2m}.$$

A więc przyłożenie pola magnetycznego prowadzi w efekcie do zwiększenia lub zmniejszenia (w zależności d kierunku obiegu) prędkości kątowej, co z kolei zwiększa lub zmniejsza orbitalny moment magnetyczny poruszającego się elektronu (patrz przykład 2).

Na rys. 37-9c prędkość kątowa zmniejszyła się (ponieważ zmalała siła dośrodkowa), tak że wielkość momentu magnetycznego  $\mu_i$  jest mniejsza. Na rysunku 37-9d prędkość kątowa wzrosła, a więc wielkość  $\mu_i$  jest większa. Efekty te przedstawione są po prawej stronie rys. 37-10; można stwierdzić, że te dwa momenty magnetyczne już się *nie znoszą*.

Widzimy więc, że jeżeli przyłożymy pole magnetyczne  $B$  do diamagnetyka (zerowy wypadkowy moment magnetyczny w nieobecności przyłożonego pola), to zostanie indukowany moment magnetyczny, którego kierunek (poza płaszczyzną rys. 37-9) jest przeciwny do  $B$ ; patrz także rys. 37-10. Stanowi to dokładne odwrócenie paramagnetyzmu, gdzie (*stale istniejące*) dipole magnetyczne ustawiają się w kierunku przyłożonego pola.

Możemy teraz zrozumieć, dlaczego próbka diamagnetyczna jest odpychana, jeśli zbliżamy ją do bieguna silnego magnesu. Jeśli biegunem tym jest biegun północny, istnieje niejednorodne pole magnetyczne o indukcji  $B$  skierowanej od bieguna. Jeśli do tego bieguna zbliżymy kulkę wykonaną z diamagnetyka (powiedzmy bizmutu), indukowane w niej namagnesowanie  $M$  jest skierowane w stronę bieguna, a więc *przeciwne do B*. Ta strona kulki, która jest bliżej magnesu, zachowuje się zatem jak biegun północny i jest odpychana przez biegun północny magnesu. Dla kulki paramagnetycznej wektor  $M$  skierowany jest *zgodnie z B* i strona kulki bliższa magnesu jest biegunem południowym przyciąganym przez północny biegun magnesu.

**Przykład 5.** Obliczyć zmianę momentu magnetycznego elektronu poruszającego się po orbicie (jak w przykładzie 2), jeśli pole magnetyczne o indukcji  $B = 2,0$  T działa prostopadle do płaszczyzny orbity.

Z równania (37-3) otrzymujemy  $\mu$ , czyli

$$\mu = NiA = 1er\pi r^2 = 1 \frac{e\omega}{2\pi} \pi r^2 = \frac{1}{2}er^2\omega.$$

Zmiana  $\mu$  wynosi

$$\Delta\mu = \frac{1}{2}er^2\Delta\omega$$

lub, korzystając z (37-14),

$$\Delta\mu = \pm \frac{1}{2} er^2 \frac{eB}{2m} = \pm \frac{e^2 Br^2}{4m}.$$

Podstawiając wartości dostajemy

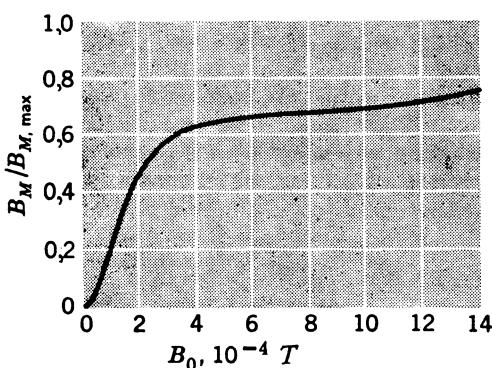
$$\Delta\mu = \pm \frac{(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2 2,0 \text{ T} (5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m})^2}{4 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} = \pm 4,0 \cdot 10^{-29} \text{ A} \cdot \text{m}^2.$$

Otrzymana w przykładzie 2 wartość momentu  $\mu_i$  wynosiła  $9,2 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ , tak że zmiana wywołana nawet przez bardzo silne zewnętrzne pole magnetyczne jest dość mała, stosunek  $\Delta\mu/\mu_i$  wynosi około  $4 \cdot 10^{-6}$ .

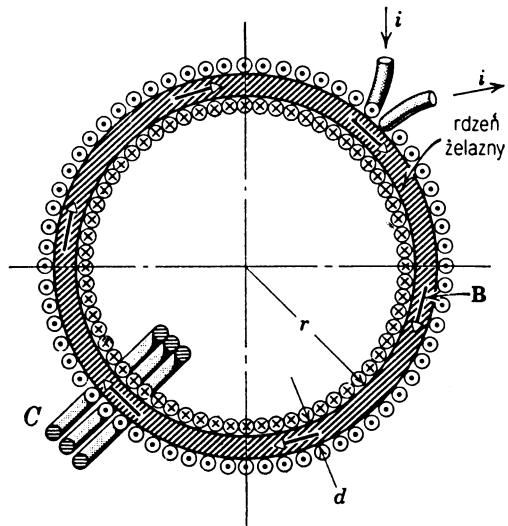
### 37-6. Ferromagnetyzm

W trzech pierwiastkach (Fe, Co i Ni) oraz w wielu stopach tych i innych pierwiastków występuje szczególny efekt pozwalający uzyskać duży stopień magnetycznego uporządkowania, pomimo przeciwdziałających temu termicznych ruchów atomów. W metalach tych, zwanych *ferromagnetykami*, występuje specjalna postać oddziaływania, zwana *sprzężeniem wymiennym*. Oddziaływanie to spręga magnetyczne momenty atomów ze sobą w sposób sztywno-równoległy\*. Jeśli temperatura wzrośnie powyżej pewnej krytycznej wartości, zwanej *temperaturą Curie*, sprzężenie wymienne nagle znika i próbka staje się po prostu paramagnetykiem. Temperatura Curie dla żelaza wynosi 1043 K. Ferromagnetyzm jest więc własnością nie tylko atomu lub jonu, lecz także własnością oddziaływania między sąsiednimi atomami lub jonami w sieci krystalicznej (rys. 21-5) ciała stałego.

Rysunek 37-11 przedstawia krzywą namagnesowania dla próbki żelaza. W celu uzyskania takiej krzywej nadajemy badanej próbce (zakładamy, że z początku jest ona nie namagnesowana) kształt pierścienia i nawijamy na nią toroidalną cewkę, tworząc tzw.



Rys. 37-11. Krzywa namagnesowania dla żelaza



Rys. 37-12. Pierścień Rowlanda z dodatkową cewką C

\* Sprzężenie wymienne jest efektem czysto kwantowym i nie może być wyjaśnione na gruncie fizyki klasycznej.

*pierścień Rowlanda* (rys. 37-12)\*. Kiedy przez cewkę *nie zawierającą rdzenia żelaznego* płynie prąd  $i$ , wewnątrz toroidu powstaje pole magnetyczne określone równaniem (34-7):

$$B_0 = \mu_0 n i, \quad (37-15)$$

gdzie  $n$  oznacza liczbę zwojów przypadających na jednostkę długości toroidu. Równanie to zostało wprawdzie wyprowadzone dla długiego solenoidu, ale stosuje się ono dla toroidu, jeśli tylko  $d \ll r$  (rys. 37-12). Wartość  $B$  wewnątrz toroidu z rdzeniem będzie w wielu wypadkach dużo większa od  $B_0$ , ponieważ elementarne dipole atomowe rdzenia porządkując się zgodnie z przyłożonym polem  $\mathbf{B}_0$  wytwarzają swe własne pole magnetyczne. Możemy więc napisać

$$B = B_0 + B_M, \quad (37-16)$$

gdzie  $B_M$  oznacza indukcję magnetyczną pochodzącą od rdzenia; jest ona proporcjonalna do namagnesowania rdzenia  $M$ . Wartość  $B_M$  często jest dużo większa od  $B_0$ .

Pole  $B_0$  jest proporcjonalne do natężenia prądu przepływającego przez toroid i można łatwo znaleźć jego wielkość korzystając z równania (37-15); wielkość pola  $B$  można zmieścić w sposób opisany poniżej. Eksperymentalną wartość  $B_M$  można wyliczyć z równania (37-16). Osiąga ona maksimum  $B_{M,\max}$ , przy pełnym uporządkowaniu dipoli atomowych w żelazie. Możemy więc wykreślić, jak na rys. 37-11 procentowy stopień uporządkowania ( $= B_M / B_{M,\max}$ ) funkcji  $B_0$ . Dla omawianej próbki 96,5% nasycenia osiąga się przy wartości  $B_0 = 0,13$  T (na rys. 37-9 punkt ten leży w odległości około 4,8 m po prawej stronie od początku układu), wzrost  $B_0$  do wartości 1,0 T (co odpowiada na rys. 37-11 punktowi położonemu w odległości około 36 m po prawej stronie od początku układu) zwiększa procentowe nasycenie zaledwie do 97,7%.

Stosowanie żelaza w magnesach, elektromagnesach itp. znacznie zwiększa natężenie pola magnetycznego wytwarzanego przez dany prąd przy danej liczbie zwojów w cewce. Z tego powodu bardzo często w równ. (37-16)  $B_M \gg B_0$ . Jednakże obecność żelaza określa granice maksymalnego pola magnetycznego ze względu na efekt nasycenia obserwowany na rys. 37-11. W celu wytworzenia pól magnetycznych silniejszych niż granice nasycenia należy wyeliminować żelazo i stosować metodę tzw. „siły uderzeniowej”, w której stosujemy wielkie (a często chwilowe) prądy\*\*.

Aby zmierzyć wartość  $B$  w układzie przedstawionym na rys. 37-12, zwiększamy prąd w uwojeniu toroidu od zera do wartości  $i$ . Strumień przechodzący przez dodatkową cewkę  $S$  zwiększa się o  $BA$ , gdzie  $A$  jest powierzchnią toroidu. Podczas zmian strumienia w cewce  $S$  pojawi się, zgodnie z prawem Faradaya, SEM indukcji. Przyjmijmy dla uproszczenia, że prąd w toroidzie jest tak dobrany, że (na rys. 37-13a) w przedziale  $\Delta t$  indukcja  $B$  wzrasta liniowo jako funkcja czasu. SEM w cewce  $S$  będzie według prawa Faradaya\*\*\* w tym czasie wynosić

$$\mathcal{E} = N \frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t} = \frac{NBA}{\Delta t},$$

gdzie  $N$  jest liczbą zwojów w cewce  $S$ . Ta SEM spowoduje powstanie w cewce  $S$  prądu  $i$  określonego wzorem

$$i_s = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{NBA}{R \Delta t}, \quad \text{czyli} \quad B = \frac{i_s \Delta t R}{NA} = \frac{qR}{NA},$$

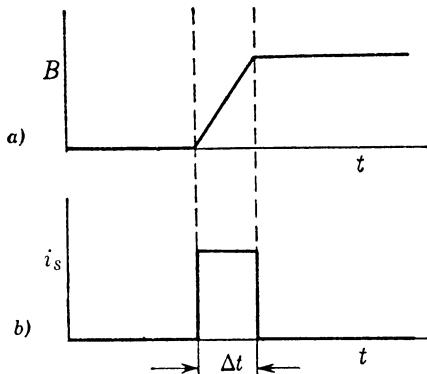
\* Patrz paragraf 33-1 — dalsze informacje o H. A. Rowlandzie.

\*\* Zobacz: C. M. Fowler, Megagauss Physics, *Science*, April 1973.

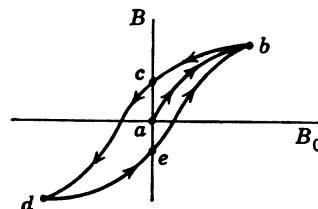
\*\*\* Zaniedbijemy znak minus, ponieważ interesuje nas jedynie wielkość  $\mathcal{E}$ .

gdzie  $R$  oznacza opór cewki, a  $i, \Delta t$  — ładunek  $q$ , jaki przepływa przez cewkę w czasie  $\Delta t$ . Jeśli do cewki  $S$  podłączymy tzw. galwanometr balistyczny, to jego odchylenie będzie miarą ładunku  $q$ . Tak więc można znaleźć wartość  $B$  dla dowolnej wartości prądu  $i$  w uzwojeniach toroidu. Bardziej szczegółowa analiza wykazuje, że nie jest konieczne, aby krzywa z rys. 37-13a była liniowa w przedziale  $\Delta t$ .

Jeżeli zwiększymy, a następnie zmniejszymy natężenie prądu płynącego w toroidzie, krzywe namagnesowania dla ferromagnetyków *nie pokrywają się wzajemnie* w obu tych przypadkach. Na rysunku 37-14 przedstawione jest następujące doświadczenie wykonane z pierścieniem Rowlanda: (1) Biorąc żelazo nie namagnesowane (punkt  $a$ ) zwiększymy prąd w toroidzie, aż do osiągnięcia przez  $B_0$  ( $= \mu_0 n i$ ) wartości



Rys. 37-13. (a) Zmiana indukcji  $B$  w pierścieniu Rowlanda w miarę wzrostu natężenia prądu  $i$  w uzwojeniu (od zera) w przedziale czasu  $\Delta t$ .  
(b) Prąd indukowany w dodatkowej cewce. Obydwie krzywe są wyidealizowane. Ostre kanty w rzeczywistości są zaokrąglone



Rys. 37-14. Krzywa namagnesowania dla próbki żelaza ( $ab$ ) i towarzysząca jej pętla histerezy ( $ebcde$ )

odpowiedzającej punktowi  $b$ . (2) Zmniejszamy prąd w toroidzie wracając do zera (punkt  $c$ ). (3) Zmieniamy kierunek prądu i zwiększamy jego natężenie, aż do osiągnięcia punktu  $d$ . (4) Zmniejszamy znów prąd do zera (punkt  $e$ ). (5) Zmieniamy jeszcze raz kierunek prądu i dochodzimy znów do punktu  $b$ . Fakt niepowtarzalności przebiegu, widoczny na rys. 37-14, nazywamy *histerezą*. Zauważmy, że w punktach  $c$  i  $e$  rdzenie żelazny jest namagnesowany, mimo że w uzwojeniach toroidu nie płynie żaden prąd; to dobrze znane zjawisko nosi nazwę *magnetyzmu szczytkowego (trwałego)*.

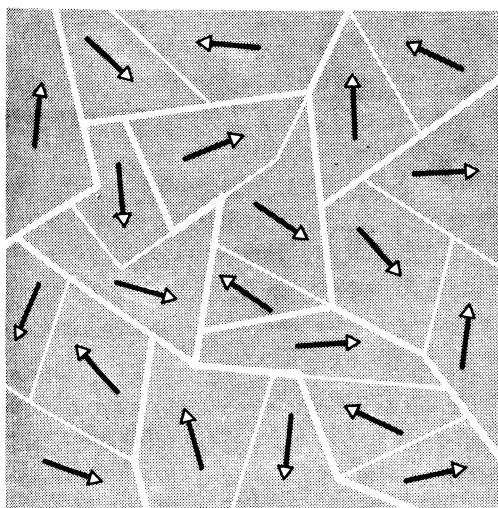
Kształt krzywej namagnesowania dla paramagnetyków (rys. 37-8) jest wynikiem dwu wzajemnie przeciwdziałających tendencji: porządkującej tendencji pola zewnętrznego i niszczącej uporządkowanie tendencji zakłóceń termicznych. W ferromagnetyzmie jednakże założyliśmy, że sąsiednie dipole atomowe są związane sztywno-równolegle. Dlaczego więc moment magnetyczny próbki nie osiąga wartości nasyżenia dla bardzo małej wartości  $B_0$ , a nawet dla  $B_0 = 0$ ? Wyjaśniamy to przyjmując, że istnieje tzw. *domeny*, tzn. lokalne obszary, wewnętrznych których występuje doskonale uporządkowanie, jednakże same domeny (rys. 37-15) przy niezbyt wysokich wartościach  $B_0$  są chaotycznie rozmiieszczane.

Rysunek 37-16 przedstawia fotografię kilku domen. Uzyskano ją skrapiając odpowiednio wytrawiony pojedynczy kryształ żelaza koloidalną zawiesiną drobno sproszkowanego tlenku żelaza. Granice domen będących niewielkimi obszarami o różnych kierunkach uporządkowania dipoli elementarnych są miejscami o silnym, dokładnie zlokalizowanym i niejednorodnym polu magnetycznym. Obszary te przyciągają koloidalne cząstki zawiesiny. Chociaż dipole atomowe w poszczególnych domenach są całkowicie uporządkowane, próbka jako całość może mieć jedynie bardzo mały wypadkowy moment magnetyczny. To właśnie ma miejsce w nie namagnesowanym żelaznym gwoździu.

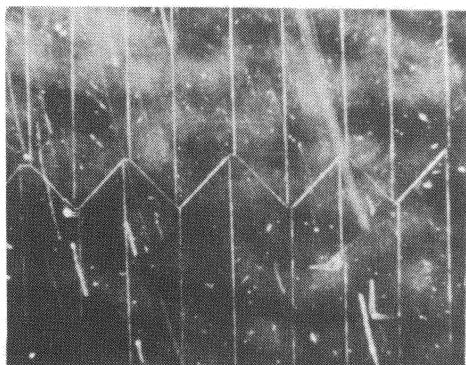
Kiedy namagnesujemy kawałek żelaza umieszczając go w zewnętrznym polu magnetycznym, obserwujemy dwa efekty. Jednym z nich jest wzrost wielkości domen korzystnie zorientowanych kosztem domen o innej orientacji (rys. 37-17). Drugi efekt polega na tym, że kierunek orientacji wszystkich dipoli wewnętrz domen może się zmieniać (jako całość) zbliżając się do kierunku pola. Histerea pochodzi stąd, że po-

usunięciu pola zewnętrznego  $B_0$  granice domen nie powracają całkowicie do swych początkowych położzeń.

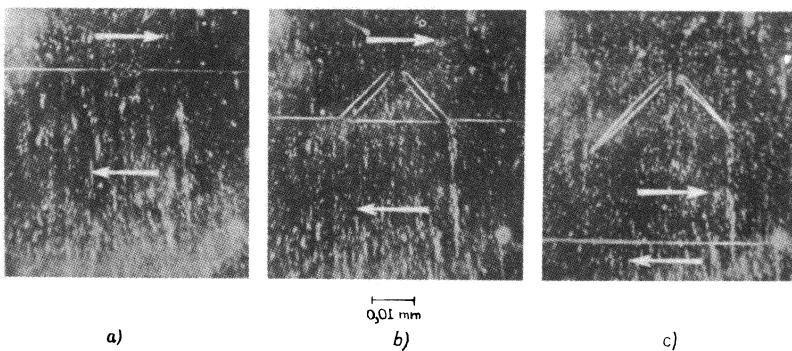
Dwoma innymi rodzajami magnetyzmu, ściśle związanymi z ferromagnetyzmem są: *antyferromagnetyzm i ferrimagnetyzm*. W substancjach antyferromagnetycznych, których przykładem jest  $MnO_2$ , sprężenie wymienne, o którym mówiliśmy na stronie 298, powoduje ustawienie sąsiednich jonów w *położeniu sztywno-antyrównoległym* (rys. 37-18). Materiały takie wykazują bardzo mały wypadkowy magnetyzm



Rys. 37-15. Oddzielne domeny magnetyczne w niezmagnetyzowanej polikrystalicznej próbce są tak zorientowane, że dają jedynie niewielki efekt zewnętrznego. Jednakże każda domena jest zbudowana z całkowicie uporządkowanych dipoli atomowych, jak to sugerują strzałki. Grube linie graniczne przedstawiają kryształy, z których utworzona jest próbka, a cienkie linie — domeny wewnętrzne kryształów

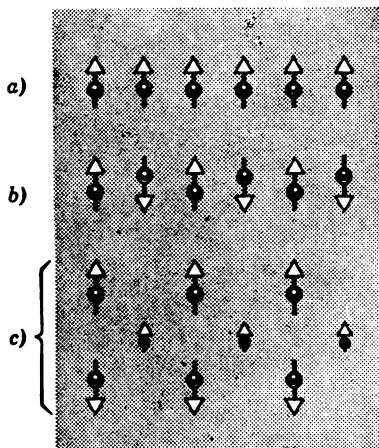


Rys. 37-16. Przykłady domen dla pojedynczego kryształu żelaza zawierającego 3,8% krzemiu. Linie białe oznaczają granice pomiędzy domenami. Granice są dosyć regularne w przeciwieństwie do granic przedstawionych na rys. 37-15, ponieważ próbka jest pojedynczym kryształem. Próbka z rys. 37-15 składa się z wielu kryształów. (Zamieszczono za zgodą H. J. Williamsa, Bell Telephone Laboratories)



Rys. 37-17. (a) Granice pomiędzy dwiema domenami. Każda z domen jest namagnesowana zgodnie z kierunkiem białych strzałek. (b) Jeżeli próbkę umieścimy w polu zewnętrznym skierowanym od strony lewej do prawej, to górną domeną będzie się powiększała kosztem dolnej. Granica między domenami będzie się przesuwać w dół w miarę odwracania się elementarnych dipoli. (c) Dalszy ciąg procesu. Granica przesunięta się poprzez obszar, w którym znajduje się defekt w krysztale. (Zamieszczono za zgodą H. J. Williamsa, Bell Telephone Laboratories)

zewnętrzny. Jeśli podwyższy się temperaturę tych materiałów powyżej pewnej wartości zwanej *temperaturą Néela*, sprzężenie wymienne przestaje działać i materiał staje się paramagnetykiem. W substancjach ferrimagnetycznych, których przykładem jest ferryt żelaza, występują dwa różne rodzaje jonów magnetycznych. W ferrycie jonami takimi są  $\text{Fe}^{2+}$  i  $\text{Fe}^{3+}$ . Sprzężenie wymienne powoduje ustawienie takich jonów tak, jak to przedstawia rys. 37-18c. Efekty zewnętrzne są tu pośrednie między ferromagnetyzmem i antyferromagnetyzmem. Również i tu sprzężenie wymienne znika, jeśli materiał zostanie podgrzany powyżej pewnej charakterystycznej temperatury.



Rys. 37-18. Ustawienie elementarnych dipoli magnetycznych przez międzyatomowe sprzężenie wymienne (a) w ferromagnetyku, (b) w antyferromagnetyku i (c) w ferrimagnetyku. Rzeczywiste ustawienie jest oczywiście trójwymiarowe

### 37-7. Magnetyzm jądrowy

Wiele jąder ma dipolowe momenty magnetyczne, co powoduje, że próbka materii może wykazywać na zewnątrz pewne właściwości magnetyczne, związane z zawartymi w niej jądrami. Momenty magnetyczne jąder są o kilka rzędów wielkości mniejsze od momentów związanych z ruchem elektronów w atomach lub jonach. Tak na przykład moment magnetyczny elektronu związany z jego spinem przewyższa odpowiedni moment protonu (jądra wodoru) o czynnik 660.

Efekty zewnętrzne, związane z magnetyzmem jądra, są mniejsze od odpowiednich efektów paramagnetycznych (jonowych) o czynnik proporcjonalny do kwadratu stosunku wielkości momentów magnetycznych i elektronowych. Przyczyny są następujące: (a) gdyby *wszystkie wielkości* z wyjątkiem wielkości momentów magnetycznych były w obu przypadkach jednakowe, zewnętrzny magnetyzm jądra byłby mniejszy o czynnik proporcjonalny do pierwszej potęgi stosunku wielkości momentów; (b) jednakże fakt, że dipolowe momenty magnetyczne jąder są mniejsze od odpowiednich momentów atomowych, oznacza (patrz przykład 4), że wibracje termiczne proporcjonalnie (z dobrym przybliżeniem) silniej redukują stopień uporządkowania elementarnych jądrowych dipoli magnetycznych w polu magnetycznym, aniżeli dipoli elektronowych. Powoduje to, że udział stosunku wielkości odpowiednich momentów w zewnętrznych właściwościach magnetycznych próbki jest dwukrotny.

Metody takie jak pierścień Rowlanda (rys. 37-12) są zbyt mało czułe dla wykrycia magnetyzmu jądrowego. Opiszemy tutaj technikę jądrowego rezonansu magnetycznego, za pomocą której możemy to zjawisko obserwować. Metoda ta jest również niezmiernie pożyteczna dla badania paramagnetyzmu, ferromagnetyzmu, antyferromagnetyzmu oraz ferrimagnetyzmu, chociaż we wszystkich tych przypadkach efekty magnetyczne związane są nie z jądrami, lecz z elektronami atomów. Technika rezonansu jądrowego została opracowana przez E. M. Purcella i jego współpracowników w Harvard, w 1946 roku. Jednocześnie i niezależnie F. Bloch ze współpracownikami odkryli, w Stanfordzie, bardzo podobną metodę. Za prace te obydwoi fizycy otrzymali nagrodę Nobla.

Zajmiemy się obecnie zagadnieniem pomiaru wielkości momentu magnetycznego  $\mu$  protonu. Moment ten możemy wyznaczyć umieszczając próbce zawierającą protony w zewnętrznym polu magnetycznym o indukcji  $\mathbf{B}$  i mierząc energię ( $= 2\mu B$ ) potrzebną do tego, aby nastąpił obrót protonu o  $180^\circ$ . Ażkolwiek

ścisły opis tego procesu nie jest możliwy bez użycia mechaniki kwantowej, ograniczymy się tutaj tylko do fizyki klasycznej, która również prowadzi do poprawnych wniosków.

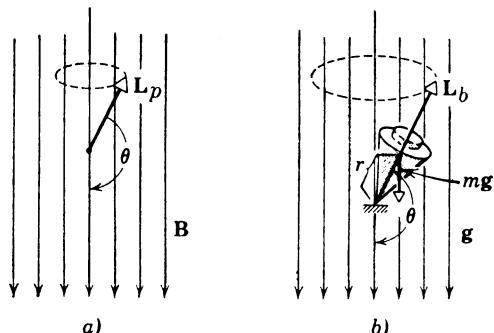
Rysunek 37-19a przedstawia wirjący proton, którego oś tworzy kąt  $\theta$  z kierunkiem jednorodnego pola magnetycznego  $\mathbf{B}$ . Na rysunku 31-19b przedstawiony jest wirujący bąk, którego oś tworzy kąt  $\theta$  z kierunkiem pola grawitacyjnego  $\mathbf{g}$ . W obydwu przypadkach występuje moment obrotowy, który dąży do ustalenia osi wirującego przedmiotu zgodnie z kierunkiem pola. Dla protonu (równ. (33-11)) moment obrotowy jest równy

$$\tau_p = \mu B \sin \theta, \quad (37-17a)$$

natomiast dla bąka

$$\tau_b = m g r \sin \theta, \quad (37-17b)$$

gdzie  $r$  oznacza położenie środka ciężkości bąka, a  $m$  — jego masę.



Rys. 37-19. (a) Precesja wirującego protonu w zewnętrznym polu magnetycznym. (b) Precesja wirującego bąka w zewnętrznym polu grawitacyjnym.  $\mathbf{L}_p$  i  $\mathbf{L}_b$  są wektorami momentu pędu

W paragrafie 13-2 widzieliśmy, że wirujący bąk obraca się wokół osi pionowej z częstością kołową daną wzorem

$$\omega_b = \frac{mgr}{L_b}, \quad (37-18a)$$

gdzie  $L_b$  oznacza moment spinowy bąka.

Proton, którego moment spinowy  $L_p$  jest skwantowany, będzie się również obracał wokół kierunku pola (magnetycznego) z powodu działania (magnetycznego) momentu obrotowego. Czytelnik powinien wyprowadzić wyrażenie dla częstości precesji protonu, posługując się rozumowaniem przeprowadzonym w paragrafie 13-2, z tą różnicą, że obecnie zamiast grawitacyjnego momentu obrotowego (równ. (37-17b)) należy użyć magnetycznego momentu obrotowego (równ. (37-17a)). Wyrażenie to jest następujące

$$\omega_p = \frac{\mu B}{L_p}. \quad (37-18b)$$

**Przykład 6.** Jaka jest częstość precesji protonu w polu magnetycznym o indukcji 0,5 T? Wielkości  $\mu$  i  $L_p$  w równaniu (37-18b) wynoszą odpowiednio  $1,4 \cdot 10^{-26} \text{ A} \cdot \text{m}^2$  i  $0,53 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ . Podstawiając je do tego równania otrzymujemy

$$\nu_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{\mu B}{2\pi L_p} = \frac{1,4 \cdot 10^{-26} \text{ A} \cdot \text{m}^2 \cdot 0,50 \text{ T}}{2\pi \cdot 0,53 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}} = 2,1 \cdot 10^7 \text{ Hz}.$$

Szukana częstość ( $= 21 \text{ MHz}$ ) znajduje się w pasmie częstości radiowych.

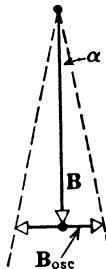
Energię każdego układu znajdującego się w ruchu okresowym można zmienić za pomocą czynnika zewnętrznego działającego na układ z tą samą częstością co częstość ruchu. Jest to ogólny warunek rezonansu. Jako czynnik zewnętrzny dla wirującego protonu zastosujemy małe zmienne pole magnetyczne  $\mathbf{B}_{\text{osc}}$  ustalone tak, aby tworzyło kąt prosty ze stałym polem  $\mathbf{B}$ . Pole oscylujące dodaje się wektorowo do pola stałego, tak że pole wypadkowe zmienia się „wahadłowo” w granicach oznaczonych na rys. 37-18 liniami przerywanymi. Typowe wartości dla  $\mathbf{B}$  oraz amplitudy  $\mathbf{B}_{\text{osc}}$  wynoszą odpowiednio 5000 Gs i 1 Gs, a więc kąt odchylenia  $\alpha$  na rys. 37-20 jest bardzo mały. Jeżeli częstość kołowa pola oscylującego  $\omega_0$  jest równa

częstości kołowej precesji protonu  $\omega_p$ , może on pochłonąć energię. Wzrost energii protonu oznacza zwiększenie kąta  $\theta$  na rys. 37-19a.

Warunek rezonansu

$$\omega_0 = \frac{\mu B}{L_p} \quad (37-19)$$

możemy wykorzystać do wyznaczenia  $\mu$ . Wirujący proton umieszczamy w polu  $B$  o znanej wielkości i prostopadlym do niego polu „zaburzającym”. Następnie zmieniamy częstość kołową  $\omega_0$  pola zaburzającego do chwili, kiedy pojawi się rezonans. O tym, kiedy równanie (37-19) jest spełnione, dowiadujemy się stąd, że w warunkach rezonansu duża liczba protonów doznaje w polu obrotu o  $180^\circ$ , a więc pochłonięta zostaje duża ilość energii, którą wyznaczamy za pomocą odpowiedniej aparatury elektronicznej.



Rys. 37-20. W metodzie magnetycznego rezonansu jądrowego słabe, oscylujące pole magnetyczne  $B_{osc}$  umieszcza się pod kątem prostym do silnego, stałego pola  $B$

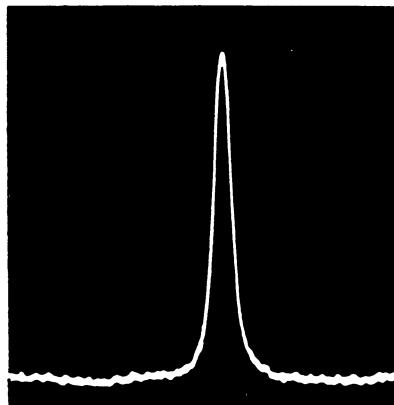
Rysunek 37-21 przedstawia schemat układu doświadczalnego. Mała ampulka z wodą  $V$  (zawierającą protony) umieszczona jest w silnym, stałym polu magnetycznym, wytwarzanym przez elektromagnes, którego biegury N i S pokazane są na rysunku. Przez cewkę  $C$  płynie szybkozmienny prąd wytwarzający słabe (poziome) zaburzające pole magnetyczne  $B_{osc}$ . Prąd ten dostarczany jest przez oscylator o regulowanej częstotliwości. Elektronowy „detektor rezonansu” połączony z oscylatorem reaguje na energię odprawianą z oscylatora do cewki, a więc rejestruje energię zużytą na „przeskok protonów”. Zmieniając częstotliwość oscylatora dochodzimy do wartości  $\omega_0$ , przy której spełnia się warunek rezonansu, równanie (37-19) (rys. 37-22). Moment magnetyczny  $\mu$  wyznaczamy więc przez pomiar  $B$  i  $\omega_0$ . Jest rzeczą dość zaskakującą, że momenty magnetyczne można zmierzyć opisaną metodą lub innymi podobnymi metodami, ze znacznie większą dokładnością niż  $\mu$  dla magnesu stałego. Dla protonu otrzymujemy

$$\mu_p = 1,410617 \cdot 10^{-26} \text{ A} \cdot \text{m}^2.$$

### 37-8. Trzy wektory magnetyczne

W rozdziale 30 widzieliśmy, że jeżeli dielektryk umieszczony jest w polu elektrycznym, to na jego powierzchni pojawiają się ładunki polaryzacyjne. Ładunki powierzchniowe pochodzące z elementarnych dipoli elektrycznych (stałych lub indukowanych) tworzących dielektryk wytwarzają własne pole, które

modyfikuje pole zewnętrzne. Prostym przykładem tego zjawiska (omawianym w rozdziale 30) jest płytka dielektryczna wprowadzona do płaskiego kondensatora. W tym przypadku dla określenia modyfikacji pola wystarcza znajomość wektora natężenia pola elektrycznego  $E$  oraz pewnych elektrycznych własności materiału płytki, takich jak stała dielektryczna. W zagadnieniach bardziej skomplikowanych



Rys. 37-22. Zdjęcie oscyloskopowe przedstawiające zależność energii absorbowanej przez proton (osi pionową) od częstotliwości oscylatora (osi pozioma). Widoczne maksimum rezonansowe (pik). (Wzięto z pracy: Bloembergen i in., *Phys. Rev.* 73, 679 (1948))

konieczne jest wprowadzenie dwóch pomocniczych wektorów elektrycznych, mianowicie: *polaryzacji elektrycznej P* oraz *przesunięcia elektrycznego D*. W tablicy 30-2 podane są pewne własności tych trzech wektorów.

W zagadnieniach magnetyzmu mamy podobną sytuację. Jeśli materiały magnetyczne umieszczaćmy w zewnętrznym polu magnetycznym, elementarne dipole magnetyczne (stałe lub indukowane) wytwarzają własne pole powodując zmianę pola zewnętrznego. Prostym przykładem, który był już omawiany w niniejszym rozdziale, jest pierścień Rowlanda z rdzeniem ferromagnetycznym. Modyfikację pola zewnętrznego można w tym przypadku wyznaczyć znając wektor indukcji  $B$  oraz własności magnetyczne materiału rdzenia, przedstawione np. krzywą namagnesowania (rys. 37-11). W zagadnieniach bardziej złożonych zachodzi konieczność wprowadzenia dwóch pomocniczych wektorów magnetycznych, mianowicie: *wektora namagnesowania (magnetyzacji) M* oraz *wektora natężenia pola magnetycznego H*. Zajmiemy się obecnie bliższym omówieniem tych wektorów.

Rozpatrzmy pierścień Rowlanda, w którego uzwojeniu płynie prąd  $i_0$ . Pierścień jest wykonany tak, że jego rdzeń, powiedzmy żelazny, może być usuwany. Indukcja magnetyczna  $B$  (mierzona metodą opisaną w paragrafie 37-5) będzie dużo większa w obecności rdzenia, niż gdy rdzeń usuniemy, przy założeniu, że prąd w uzwojeniu nie ulega zmianie.

Dużą wartość  $B$  w rdzeniu żelaznym tłumaczmy uporządkowaniem elementarnych dipoli rdzenia. Weźmy pod uwagę wycinek rdzenia żelaznego, jak na rys. 37-23b, którego moment magnetyczny  $d\mu$  równy jest sumie wektorowej momentów magnetycznych wszystkich elementarnych dipoli w nim zawartych. Pierwszy z wektorów pomocniczych (*magnetyzację M*) definiujemy jako moment magnetyczny materiału rdzenia przypadający na jednostkę objętości. Dla wycinka z rys. 37-23b mamy

$$d\mu = MAdl,$$

gdzie  $Adl$  oznacza objętość wycinka,  $A$  — przekrój poprzeczny rdzenia.

Omawiając w rozdziale 34 prawo Ampère'a zakładaliśmy, że w otoczeniu obwodu nie ma żadnych materiałów magnetycznych. Jeżeli zastosujemy to prawo

$$\oint \mathbf{B} dl = \mu_0 i \quad (37-20)$$

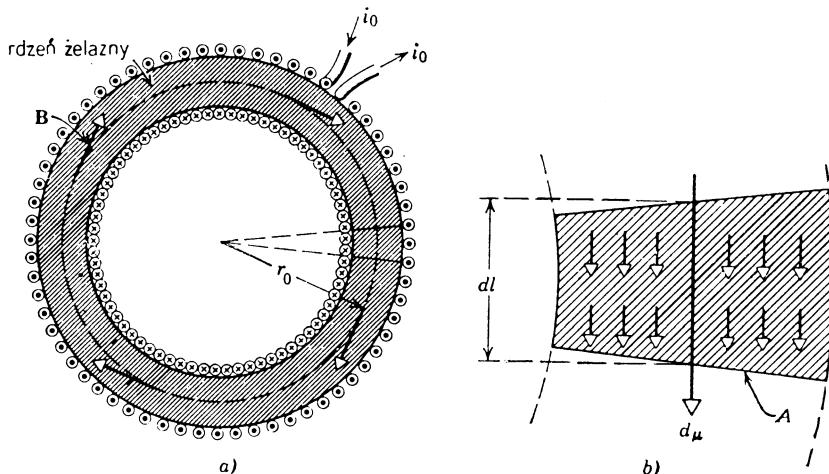
całując wzduż okręgu (zaznaczonego na rys. 37-23a linią przerywaną) otrzymamy

$$2\pi r_0 B = \mu_0 N_0 i_0, \quad (37-21)$$

gdzie  $r_0$  oznacza średni promień rdzenia,  $N_0$  — liczbę zwojów,  $i_0$  — natężenie prądu w każdym zwoju. Widzimy więc, że prawo Ampère'a w postaci danej równaniem (37-20) nie jest słuszne, jeśli w otoczeniu

występują materiały magnetyczne. Z równania (37-21) wynika, że ponieważ wyrażenie z prawej strony nie zależy od obecności rdzenia, więc i indukcja  $B$  również powinna być od tego niezależna, co jest sprzeczne z doświadczeniem.

Możemy uzyskać wzrost wartości  $B$  w nieobecności rdzenia, do wartości, jaką miałoby z rdzeniem, przez zwiększenie prądu w uzwojeniu o pewną wartość  $i_{M,0}$ . Magnetyzacja rdzenia żelaznego ma na  $B$



Rys. 37-23. (a) Pierścień Rowlanda z rdzeniem żelaznym. (b) Wycinek rdzenia z momentem magnetycznym  $d\mu$  wytworzonym na skutek uporządkowania elementarnych dipoli magnetycznych w żelazie

równoważny wpływ, jak pewien hipotetyczny wzrost prądu. Dochodzimy w ten sposób do zmodyfikowanego prawa Ampèrea, wprowadzając do pierwotnego sformułowania *magnesujący prąd  $i_M$* , mianowicie

$$\oint \mathbf{B} dl = \mu_0(i + i_M). \quad (37-22)$$

Jeżeli dla  $i_M$  w obecności rdzenia wybierzemy odpowiednią wartość, to prawo Ampèrea w nowej postaci pozostanie słuszne. Pozostaje nam jeszcze znalezienie związku między prądem magnesującym (dotychczas jedynie hipotetycznym pojęciem) a wielkością fizyczną, jaką jest magnetyzacja  $M^*$ .

Stosując równanie (37-22) do pierścienia żelaznego (rys. 37-23a) otrzymujemy

$$2\pi r_0 B = \mu_0 N_0 i_0 + \mu_0 N_0 i_{M,0}. \quad (37-23)$$

Aby znaleźć związek między magnetyzacją  $M$  a  $i_{M,0}$ , wróćmy do równania (33-10), które głosi, że moment magnetyczny dipola magnetycznego danego w postaci obwodu prądu jest równy

$$\mu = NiA,$$

gdzie  $N$  oznacza liczbę zwojów,  $i$  — natężenie prądu w obwodzie,  $A$  — powierzchnię obwodu. Zastosujmy to równanie do znalezienia wartości  $i_{M,0}$ , tzn. wartości przyrostu natężenia prądu w uzwojeniu wokół wycinka (rys. 37-23b) jaki jest potrzebny do wytworzenia momentu magnetycznego, równoważnego momentowi powstającemu w wycinku rdzenia dzięki uporządkowaniu dipoli elementarnych. Mamy więc

$$MAdl = N_0 \frac{dl}{2\pi r_0} i_{M,0} A.$$

\* Prądem magnesującym można nadać pewien sens rzeczywisty, traktując go jako prąd płynący wokół magnesu po jego powierzchni. Prąd ten jest wypadkowym efektem makroskopowym wszystkich mikroskopowych obwodów prądu, jakie tworzą orbity elektronów w atomach. W rozumowaniu tym nie uwzględnia się jednakże namagnesowania pochodzącego od spinu elektronów. Ponieważ nie możemy zmierzyć doświadczalnie prądu magnesującego inaczej niż poprzez jego (postulowane) efekty magnetyczne, wygodniej jest traktować go jako umowny formalizm.

Wyrażenie  $N_0 dl / 2\pi r_0$  oznacza liczbę zwojów leżących wokół wycinka o grubości  $dl$ . Po przekształceniu otrzymujemy

$$N_0 i_{M,0} = 2\pi r_0 M. \quad (37-24)$$

Podstawiając otrzymane wyrażenie do równania (37-23) mamy

$$2\pi r_0 B = \mu_0 N_0 i_0 + 2\pi r_0 \mu_0 M. \quad (37-25)$$

Spróbujmy teraz uogólnić przypadek szczególny związany z pierścieniem Rowlanda. Piszemy równanie (37-25) w postaci

$$\oint \mathbf{B} dl = \mu_0 i + \mu_0 \oint \mathbf{M} dl$$

albo

$$\oint \frac{\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}}{\mu_0} dl = i.$$

Wielkości  $(\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M})/\mu_0$ , występującej bardzo często w opisach zjawisk magnetycznych, nadajemy specjalną nazwę — *nateżenie pola magnetycznego H*. A więc

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}}{\mu_0},$$

co również możemy zapisać jako

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}. \quad (37-26)$$

Prawo Ampère'a możemy zapisać w postaci

$$\oint \mathbf{H} dl = i, \quad (37-27)$$

która jest słuszna w obecności materiałów magnetycznych i w której  $i$  oznacza tylko rzeczywisty prąd, nie obejmujący prądu magnesującego. Przypomina nam to, że w podobny sposób, mając wektor przesunięcia elektrycznego  $\mathbf{D}$  możemy napisać prawo Gaussa w obecności materiałów dielektrycznych w postaci, w której występują tylko *swobodne ładunki*, tzn. bez ładunków polaryzacji; patrz tablica 30-2.

Przymijmy teraz bez dowodu (patrz zadania 23 i 24), że na granicy między dwoma ośrodkami (1) składowa wektora  $\mathbf{H}$  styczna do powierzchni odgraniczającej ma po obydwu jej stronach tę samą wartość\*; (2) składowa wektora  $\mathbf{B}$  prostopadła do tej powierzchni ma po obydwu jej stronach tę samą wartość. Te warunki brzegowe mają ogromne znaczenie przy rozwiązywaniu skomplikowanych zagadnień.

Aby znaleźć  $H$  w pierścieniu Rowlanda, zastosujemy prawo Ampère'a w postaci uogólnionej (równ. (37-27)). Mamy więc

$$2\pi r_0 H = N_0 i_0,$$

gdzie  $i_0$  oznacza prąd (rzeczywisty) w uzwojeniu. Stąd otrzymujemy

$$H = \frac{N_0}{2\pi r_0} i_0 = n i_0, \quad (37-28)$$

gdzie  $n$  jest liczbą zwojów na jednostkę długości. Ponieważ prawo Ampère'a jest słusze niezależnie od założeń dotyczących rdzenia, wartość  $H$  obliczona według równania (37-28) jest niezależna od materiału, z jakiego wykonany jest rdzeń.

Wartość  $B$  możemy wyznaczyć doświadczalnie metodą podaną w paragrafie 37-5,  $M$  można obliczyć z równania (37-26). Należy tu zwrócić uwagę na to (patrz rów. (37-15)), że odcięta  $B_0$  na rys. 37-11 jest proporcionalna do  $H$  ( $= \mu_0 H$ ), rzędna zaś jest proporcionalna do  $B$ . Krzywe takie jak na rys. 37-14 nazywamy *krzywymi B-H*.

Załóżmy, że zmierzyliśmy  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  i  $\mathbf{M}$  dla wielu różnych materiałów magnetycznych stosując metodę opisaną powyżej lub inną równoważną. Dla materiałów *paramagnetycznych* i *diamagnetycznych* znaleźliśmy jako wynik doświadczeń, że  $\mathbf{B}$  jest wprost proporcjonalne do  $\mathbf{H}$ ;

$$\mathbf{B} = \alpha_m \mu_0 \mathbf{H}, \quad (37-29)$$

\* Zakładamy przy tym, że na tej powierzchni nie ma żadnych prądów rzeczywistych, takich jak np. w pierścieniu Rowlanda z rys. 37-23a.

gdzie przenikalność magnetyczna  $\kappa_m$  ośrodka jest stała dla danej temperatury i danej gęstości materiału. Eliminując  $B$  z równań (37-29) i (37-26) otrzymujemy

$$M = (\kappa_m - 1)H; \quad (37-30)$$

jest to inny sposób wyrażenia liniowego (proporcjonalnego) charakteru właściwości materiałów paramagnetycznych.

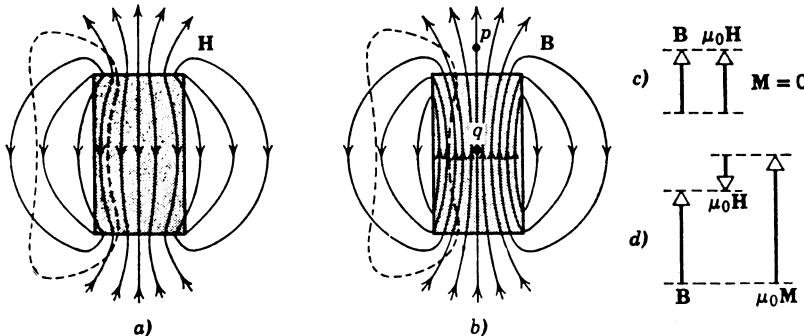
Dla próżni, gdzie nie występują żadne dipole magnetyczne, magnetyzacja  $M$  musi być równa zeru. Podstawiając  $M = 0$  do równania (37-26) otrzymujemy

$$B = \mu_0 H \quad (\text{dla próżni}). \quad (37-31)$$

Porównując ten wynik z równaniem (37-29) widzimy, że dla próżni  $\kappa_m = 1$ . Równanie (37-30) potwierdza fakt, że magnetyzacja znika, jeżeli  $\kappa_m$  jest równe jedności. Dla materiałów paramagnetycznych  $\kappa_m$  jest nieco większe od jedności. Dla materiałów diamagnetycznych jest nieco mniejsze od jedności, a wobec tego, jak wynika z równania (37-30),  $M$  i  $H$  muszą być skierowane przeciwnie. Fakt ten był już omawiany w parafrazie 37-4.

W materiałach ferromagnetycznych związek między  $B$  i  $H$  daleko odbiega od liniowości, co widać na rys. 37-11 i 37-14. Jak wynika z doświadczenia  $\kappa_m$  jest nie tylko funkcją  $H$ , lecz również, ze względu na histerezę, funkcją zależną od magnetycznej i termicznej „historii” próbki\*.

Interesującym przypadkiem szczególnym ferromagnetyzmu jest magnes stały, dla którego  $H$ ,  $M$  i  $B$  mają zawsze wartości nie znikające, nawet jeśli nie ma żadnego prądu rzeczywistego. Na rysunku 37-24 pokazane są typowe linie  $B$  i  $H$  dla takiego magnesu. Linie  $B$  tworzą zamknięte obwody, przy czym tam gdzie linie wchodzą lub wychodzą z magnesu, spełniony jest wymieniony wyżej warunek brzegowy (2).



Rys. 37-24. (a) Linie  $H$  i (b) linie  $B$  dla magnesu stałego. Zamknięte krzywe przerywane przedstawiają drogi całkowania przy stosowaniu prawa Ampère'a. Zależność  $B = \mu_0 H + \mu_0 M$  zilustrowana jest przez rys. (c) dla punktu zewnętrznego  $p$  i (d) dla punktu wewnętrznego  $q$

Z równania (37-22) wynika, że wektor  $B$  związany jest z prądem całkowitym (rzeczywistym i magnesującym). Na rysunku 37-24b  $\oint B dl$  wzduż dowolnego obwodu, np. zaznaczonego linią przerywaną, jest różna od zera i musi być związana z prądem magnesującym  $i_M$ , który płynie wokół magnesu po jego powierzchni; prąd rzeczywisty ( $i$ ) w tym zagadnieniu nie występuje. Rysunek 37-24a pokazuje, że  $H$  zmienia kierunek na powierzchni granicznej. Ponieważ  $H$  (patrz rów. (37-27)) związane jest tylko z prądami rzeczywistymi, więc  $\oint H dl = 0$  wzduż dowolnego obwodu musi być taka sama, jak wzduż obwodu zaznaczonego linią przerywaną. Jest to możliwe, gdy  $H$  zmienia kierunek na powierzchni granicznej. Zauważmy, że  $M$  i  $H$  mają wewnątrz magnesu kierunki przeciwnie. Właściwości wektorów  $B$ ,  $H$  i  $M$  zestawione są w tablicy 37-1.

**Przykład 7.** W pierścieniu Rowlanda prąd (rzeczywisty) płynący w uzwojeniu  $i_0$  wynosi 2,0 A, a liczba zwojów na jednostkę długości toroidu ( $n$ ) jest równa 10 zwojów/cm.  $B$ , zmierzone metodą podaną w pa-

\* W przypadku dielektryków istnieją materiały woskowate, zwane *ferroelektrykami*, dla których związek między  $D$  i  $E$  jest nieliniowy. Wykazują one histerezę i można z nich tworzyć quasi-stałe dipole elektryczne zwane *elektretami*. Jednakże ogólnie używane materiały dielektryczne są prawie wyłącznie liniowe, magnetyczne zaś nielinowe.

ragrafie 37-6, wynosi 1,0 T. Obliczyć: (a)  $H$ , (b)  $M$  i (c) prąd magnesujący  $i_{M,o}$  z rdzeniem i bez. (d) Jakie jest  $\chi_m$  w tym przypadku?

(a)  $H$  nie zależy od materiału rdzenia i może być wyznaczone z równania (37-28):

$$H = ni = (10 \text{ zwojów/cm}) \cdot 2,0 \text{ A} = 2,0 \cdot 10^3 \text{ A/m.}$$

Tablica 37-1. Wektory magnetyczne

Nazwa	Symbol	Związek	Warunki brzegowe
indukcja magnetyczna	$B$	z wszelkimi prądem	składowa normalna ciągła
natężenie pola magnetycznego	$H$	tylko z prądem rzeczywistym	składowa styczna ciągła*
magnetyzacja (dipolowy moment magnetyczny na jednostkę objętości)	$M$	tylko z prądem magnesującym	znika w próżni
równania definiujące $B$	$F = qv \times B$ albo $= il \times B$		równ. (33-2) równ. (33-6a)
ogólny związek pomiędzy trzema wektorami	$B = \mu_0 H + \mu_0 M$		równ. (37-26)
prawo Ampère'a w obecności materiałów magnetycznych	$\oint H dl = i$ ( $i$ = tylko prąd rzeczywisty)		równ. (37-27)
zależności empiryczne dla pewnych materiałów magnetycznych**	$B = \chi_m \mu_0 H$ $M = (\chi_m - 1)H$		równ. (37-29) równ. (37-30)

\* Przy założeniu, że żadne prądy rzeczywiste nie występują na powierzchni granicznej.

\*\* Słuszne tylko dla materiałów para- i diamagnetycznych, jeżeli  $\chi_m$  jest niezależne od  $H$ .

(b) Kiedy rdzeń jest usunięty,  $M$  jest równe zeru. W obecności rdzenia wielkość  $M$  otrzymujemy rozwiązuając równanie (37-26) względem  $M$ :

$$M = \frac{B - \mu_0 H}{\mu_0} = \frac{1,0 \text{ T} - (4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A})(2,0 \cdot 10^3 \text{ A/m})}{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}} = 7,9 \cdot 10^5 \text{ A/m.}$$

(c) Efektywny prąd magnesujący znajdujemy z równania (37-24)

$$i_{M,o} = M \frac{2\pi r_0}{N_0} = \frac{M}{n} = \frac{7,9 \cdot 10^5 \text{ A/m}}{2,0 \cdot 10^3 \text{ zwojów/m}} = 390 \text{ A.}$$

Dodatkowy prąd o tej wielkości płynący w uzwojeniu pierścienia powinien w nieobecności rdzenia wytworzyć pole  $B$ , takie samo jak to, które powstaje dzięki uporządkowaniu elementarnych dipoli, gdy rdzeń jest usunięty.

(d) Przenikalność magnetyczną  $\chi_m$  znajdujemy z równania (37-29):

$$\chi_m = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{1,0 \text{ T/m}^2}{(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A})(2,0 \cdot 10^3 \text{ A/m})} = 397.$$

Zaznaczamy, że otrzymana wartość  $\chi_m$  odnosi się tylko do podanych warunków doświadczenia.

## **Pytania**

1. Dwa pręty żelazne wyglądają na zewnątrz identycznie. Jeden z nich jest magnesem. W jaki sposób można odróżnić, który pręt jest namagnesowany? Nie wolno przy tym użyć kompasu ani żadnego innego przyrządu.
2. Dwa pręty żelazne przyciągają się zawsze, niezależnie od wzajemnego ustawienia ich końców. Czy można stąd wywnioskować, że jeden z prętów jest nie namagnesowany?
3. Neutron nie mający ładunku elektrycznego ma magnetyczny moment dipolowy. Czy jest to możliwe w klasycznej teorii elektromagnetyzmu, czy też, na podstawie tego jednego faktu, należałoby tę teorię odrzucić?
4. Czy we wszystkich stałych magnesach można zidentyfikować biegun północny i południowy? Rozważyć inne figury niż magnesy w postaci prostej sztabki.
5. Jeżeli istnieją monopole magnetyczne, to czy istnieją całe ich rodziny, o różnych nazwach, siłach pola magnetycznego, wewnętrznych momentach pędu itd? Porównać dodatek F.
6. Założymy, że pewien krótki żelazny pręt ma bieguny północne na obu końcach. Pręt zostaje posypany pyłem żelaznym. Gdzie (w najprostszym przypadku) zgromadzi się pyłek? Naszkicuj jak będą wyglądały linie pola  $B$  wewnętrz i na zewnątrz pręta. Patrz: Jerry D. Wilson, A Three-Pole Bar Magnet, *The Physics Teacher*, September 1976.
7. Rozpatrzyć następujące dwie sytuacje: (a) Hipotetyczny monopol magnetyczny został przesunięty przez jednozwojową, przewodzącą pętlę wzdłuż jej osi, ze stałą prędkością. (b) Krótki magnes sztabkowy (magnetyczny dipol) został przesunięty w podobny sposób. Porównać jakościowo ilość ładunku przenoszonego przez którykolwiek odcinek pętli podczas tych dwóch procesów.
8. Promienie kosmiczne są to cząstki naładowane, które docierają do naszej atmosfery z pewnego źródła wewnętrznego. Wiemy, że promienie o niskiej energii silniej bombardują w pobliżu biegunów magnetycznych północnego i południowego niż równika (magnetycznego). Wytlumaczyć dlaczego.
9. W jaki sposób można zmierzyć dipolowy moment magnetyczny Ziemi?
10. Podać trzy powody, dla których strumień ziemskiego pola magnetycznego  $\Phi_B$  jest większy na obszarze Alaski niż Teksasu.
11. Zakładamy, że czytelnik jest producentem kompasów. (a) Opisać sposoby namagnesowania igły. (b) Koniec igły pokazujący północ jest zazwyczaj pomalowany na charakterystyczny kolor. Jak można odkryć, który koniec należy pomalować, nie umieszczając igły w ziemskim polu magnetycznym? (c) Czy pomalowany koniec stanowi biegun północny czy południowy?
12. Spróbować opisać mechanizm zakłócania komunikacji radiowej przez burzę magnetyczną, tj. nagle zakłócenia w ziemskim polu magnetycznym.
13. Przekonać się, biorąc pod uwagę relację  $F = q_0 v \times B$  (równanie (33-2)), że elektrony i protony wiatru słonecznego, które są wychwytywane w ziemskich pasach promieniowania Van Allena, będą w istocie poruszały się po spirali dookoła linii pola  $B$  i będą odbijane do tyłu w pobliżu ziemskich biegunów, północnego i południowego (magnetyczny efekt zwierciadlany). W jaki sposób różnią się ruchy wychwytywanych elektronów i protonów?
14. Zorze polarne można najczęściej zaobserwować, nie na biegunach północnym i południowym, lecz na szerokościach geograficznych  $23^\circ$  (np. mijając Zatokę Hudsona na północnej półkuli geomagnetycznej). Jaka może być przyczyna (jakościowa), dla której aktywność zorzy polarnych nie jest najsilniejsza na samych biegunach?
15. Czy namagnesowanie próbek para- i ferromagnetycznej o tych samych wymiarach w stanie nasyżenia różni się znacznie?
16. Namagnesowanie kuli diamagnetycznej, wywołane przez zewnętrzne pole magnetyczne, nie zmienia się ze zmianami temperatury, przeciwnie niż w przypadku kuli paramagnetycznej. Czy to jest zrozumiałe na podstawie tego co wiemy o pochodzeniu diamagnetyzmu?
17. Wytlumaczyć, dlaczego magnes stały przyciąga nie namagnesowane przedmioty żelazne, np. gwoździe.
18. W jednorodnym polu magnetycznym umieszczone są (a) nie namagnesowany pręt żelazny i (b) stały magnes sztabkowy. Czy na wymienione przedmioty działa jakaś wypadkowa siła albo moment obrotowy?
19. Na gładkim blacie stołu, w pobliżu silnego magnesu kładziemy gwóźdź. Pod wpływem przycią-

gania zaczyna on poruszać się w kierunku magnesu. Skąd pochodzi energia kinetyczna, jaką ma gwóźdź tuż przed uderzeniem w powierzchnię magnesu?

20. Porównać krzywe namagnesowania dla substancji paramagnetycznej (rys. 37-8) i ferromagnetycznej (rys. 37-11). Czy odpowiednia krzywa dla substancji diamagnetycznej powinna być podobna? Czy materiał diamagnetyczny powinien wykazywać efekty nasycenia w silnych polach zewnętrznych (np. 10 T)?

21. Dlaczego pyłek żelazny układają się na liniach pola  $B$ , jak na rys. 37-1? Ostatecznie nie jest on wewnętrznie namagnesowany.

22. Omówić różnicę pomiędzy częstością precesji i częstością cyklotronową protonu w polu magnetycznym.

23. Omawiając magnetyzm jądrowy powiedzieliśmy, że kiedy dipole doznają obrotu o  $180^\circ$ , pochłaniana jest energia. Jednakże możliwe są dwa stany początkowe; stan, w którym dipole ustawione są zgodnie z kierunkiem pola, oraz stan, w którym ustawione są przeciwnie. W pierwszym przypadku powinno zchodzić *pochłanianie* energii, natomiast w drugim *emisja*, przy czym w obydwu przypadkach energia równa jest  $2\mu B$ . Dlaczego jako wynik wypadkowy obserwujemy pochłanianie? Można by sądzić, że oba te procesy redukują się.

24. Omówić podobieństwa i różnice między tablicami 30-2 i 37-1.

25. W jakim sensie równoległy kondensator płaski wypełniony dielektrykiem i pierścień Rowlanda (rys. 37-12) z żelaznym rdzeniem wykazują formalne podobieństwa pod względem  $E$  i  $B$  (i powiązanych z nimi wektorów). Omówić biorąc pod uwagę tablice 30-2 i 37-1.

26. Pierścień Rowlanda (rys. 37-12) przewodzi prąd stały. Jeżeli wywiercimy małą dziurę na wylot w rdzeniu żelaznym, jakie zmiany zajdą w  $B$ ,  $H$  i  $M$  rdzenia?

27. Dany jest magnes sztabkowy, z biegunem północnym u góry i biegunem południowym u dołu. Jakie są kierunki  $B$ ,  $H$  i  $M$  dla punktów: (a) wewnątrz magnesu w pobliżu jego środka, (b) na zewnątrz i tuż nad magnesem, (c) na zewnątrz i tuż pod magnesem?

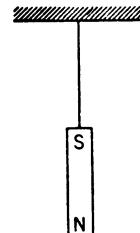
## Zadania

### Paragraf 37-1

1. Dipolowy moment małej, jednozwojowej, przewodzącej pętli wynosi  $2,0 \cdot 10^{-4} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ . Jakie jest pole magnetyczne na osi dipola 8 cm od pętli?

Odp.:  $7,8 \cdot 10^{-8} \text{ T}$ , wzduż osi.

2. Prosty magnes sztabkowy jest zawieszony na lince, jak na rys. 37-25. Naszkicować wypadkowy kierunek ustawienia magnesu i linki w sytuacji, gdy ustaliło się jednorodne pole magnetyczne  $B$  o kierunku równoległym do sufitu.



Rys. 37-25. Zadanie 2

3. Obliczyć (a) natężenie pola elektrycznego  $E$  i (b) indukcję magnetyczną pola  $B$  w punkcie odległym od protonu o 0,10 mm, leżącym na przedłużeniu osi jego spinu. Moment magnetyczny protonu wynosi:  $1,4 \cdot 10^{-26} \text{ A} \cdot \text{m}^3$ .

Odp.: (a)  $1,4 \cdot 10^{11} \text{ V/m}$ . (b)  $2,8 \cdot 10^{-3} \text{ T}$ .

4. Pokazać, że w teorii klasycznej magnetyczny moment spinowy wirującego ładunku dodatniego będzie skierowany zgodnie ze spinowym momentem pędu.

5. Spinowy moment pędu elektronu wynosi:  $0,53 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ , a moment magnetyczny  $\mu$  wynosi  $9,3 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ . Porównać  $\mu/L$  i  $e/m$  dla elektronu.

Odp.:  $\mu/L$  i  $e/m$  dla elektronu są równe.

6. Całkowity ładunek  $q$  jest rozmieszczony jednorodnie na pierścieniu dielektrycznym o promieniu  $r$ . Znaleźć wartość i kierunek wypadkowego momentu magnetycznego w sytuacji, gdy pierścień obraca się dookoła osi prostopadłej do jego płaszczyzny i przechodzącej przez jego środek z prędkością kątową  $\omega$ .

7. Wykazać, szkicując pole magnetyczne dipola magnetycznego, że (a) jeżeli momenty dipolowe dwóch znajdujących się obok siebie dipoli są równoległe, to nie utrzymają się w tej pozycji, (b) jeżeli są antyrównoległe, to utrzymają się w tej pozycji. W każdym przypadku rozważyć moment obrotowy oddziałujący na drugi dipol w polu pierwszego.

8. Założyćmy, że elektron jest małą kulką o promieniu  $R$ . Ładunek i masa elektronu rozłożone są w jego objętości w sposób równomierny. Taki elektron ma „spinowy” moment pędu  $L = 0,53 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  oraz moment magnetyczny  $\mu = 9,3 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ . Wykazać, że  $e/m = 2\mu/L$ . Czy wynik ten jest zgodny z doświadczeniem? (Wskazówka: Kulisty elektron należy podzielić na infinitezymalne obwody prądu i znaleźć przez całkowanie wyrażenie na moment magnetyczny. Taki model elektronu ma zbyt mechanistyczny charakter i jest niezgodny z duchem fizyki kwantowej.)

### Paragraf 37-3

9. Z danych występujących w tekście znaleźć (a) średnią składową pionową ziemskiego pola magnetycznego w Tucson w roku 1964 i (b) średnią wartość pola  $\mathbf{B}$ .

Odp.: (a)  $44 \mu\text{T}$ . (b)  $51 \mu\text{T}$ .

10. Dipolowy moment magnetyczny Ziemi wynosi  $8,0 \cdot 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ . (a) Jaki prąd powinien płynąć przez pojedynczy zwój drutu, opasujący Ziemię wzdłuż równika magnetycznego, aby wytworzyć taki sam moment dipolowy? (b) Czy w ten sposób można by usunąć ziemskie pole magnetyczne daleko od Ziemi? (c) Na powierzchni Ziemi?

11. (a) Ile wynosi moment magnetyczny właściwy ruchowi orbitalnemu elektronu w atomie, gdy orbitalny moment pędu wynosi jedną jednostkę kwantową ( $= h/2\pi = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ). (b) Wewnętrzny spinowy moment magnetyczny elektronu wynosi  $0,928 \cdot 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ . Jaka jest różnica między magnetycznymi energiami potencjalnymi  $U$ , gdy momenty magnetyczne ustawione są zgodnie z kierunkiem zewnętrznego pola magnetycznego  $1,2 \text{ T}$ , i gdy ustawiione są w kierunku przeciwnym? (c) W jakiej temperaturze absolutnej ta różnica energii wyróżniałaby średnią energię cieplną  $kT/2$ ?

Odp.: (a)  $9,2 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ . (b)  $2,2 \cdot 10^{-23} \text{ J}$ . (c)  $3,2 \text{ K}$ .

12. W jakiej temperaturze średnia energia cieplna gazu paramagnetycznego będzie się równała energii magnetycznej pola  $0,50 \text{ T}$ , jeżeli momenty dipolowe atomów wynoszą około  $10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ ?

### Paragraf 37-5

13. Elektron porusza się po kołowej orbicie dookoła stałego dodatniego ładunku punktowego w obecności jednorodnego pola magnetycznego  $\mathbf{B}$  o kierunku prostopadłym do płaszczyzny tego ruchu. Wartość siły elektrycznej jest  $N$  razy większa od wartości siły magnetycznej oddziałującej na elektron. (a) Określić dwie możliwe prędkości kątowe ruchu elektronu. (b) Podać prędkość liczbową, jeżeli  $B = 0,427 \text{ T}$  i  $N = 100$ .

Odp.: (a)  $(N \pm 1) \frac{eB}{m}$ . (b)  $7,43 \cdot 10^{12} \text{ rad/s}$ ;  $7,57 \cdot 10^{12} \text{ rad/s}$ .

14. Udowodnić, że w równaniu (37-13)  $\Delta\omega \ll \omega_0$ .

15. Czy na podstawie prawa indukcji Faradaya można wyjaśnić zjawisko diamagnetyzmu? Spójrzmy na rys. 37-9a i b. Jakich efektów indukcyjnych możemy oczekiwać, gdy pole magnetyczne rośnie od zera do określonej wartości końcowej  $\mathbf{B}$ ?

### Paragraf 37-6

16. Moment dipolowy atomu żelaza wynosi  $1,8 \cdot 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ . Założyćmy, że w przecie żelaznym o długości 5 cm i przekroju poprzecznym  $1 \text{ cm}^2$  momenty dipolowe wszystkich atomów ustawione są w jednym kierunku. (a) Jaki jest moment dipolowy pręta? (b) Jaki moment obrotowy trzeba przyłożyć, aby utrzymać ten magnes prostopadle do zewnętrznego pola o indukcji  $1,5 \text{ T}$ . Gęstość żelaza  $7,9 \text{ g/cm}^3$ .

17. Pierścień Rowlanda o przekroju kołowym wykonany jest z materiału ferromagnetycznego. Wewnętrzna średnica przekroju wynosi  $5,0 \text{ cm}$ , zewnętrzna  $6,0 \text{ cm}$ . Uzwojenie pierścienia składa się z 400 zwojów drutu. (a) Jaki prąd powinien płynąć w uzwojeniu, aby otrzymać  $B_0 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ T}$  (rys. 37-11)? (b) Dodatkowa cewka, nawinięta wokół toroidu, składa się z 50 zwojów, jej opór wynosi  $8,0 \Omega$ . Jaki

ładunek przepływa przez tę cewkę przy zmianie kierunku prądu, jeżeli dla powyższej wartości  $B_0$ ,  $B_M = 800B_0$ ?

Odp.: (a) 0,14 A. (b)  $7,9 \cdot 10^{-5}$  C.

18. *Oddziaływanie między dipolami.* Sprzężenie wymienne, opisane w paragrafie 37-6 występujące w ferromagnetyzmie nie jest związane z energią wzajemnego oddziaływania magnetycznego między dwoma elementarnymi dipolami magnetycznymi. Aby to wykazać: (a) Obliczyć  $B$  w odległości  $a$  ( $= 10$  nm) od dipola, którego moment  $\mu$  ( $= 1,8 \cdot 10^{-23}$  A  $\cdot$  m $^2$ ); (b) obliczyć energię ( $= 2\mu B$ ) potrzebną do obrócenia drugiego dipola w tym polu o  $180^\circ$ . Jakie wnioski możemy wyciągnąć na temat siły oddziaływania między dipolami? Porównać z wynikami otrzymanymi w przykładzie 4. (Uwaga: w tej samej odległości od dipola pole w płaszczyźnie prostopadłej do jego osi jest równe połowie wartości pola na osi; patrz równanie (37-2).)

### Paragraf 37-7

19. Założymy, że w 1 g wody wszystkie jądra wodoru (protony) ustawione są w tym samym kierunku. Jaka będzie indukcja magnetyczna  $B$  w odległości 5,0 cm od próbki, wzdłuż osi ustawienia protonów?

Odp.:  $7,5 \cdot 10^{-6}$  T.

20. Wartość  $e/m$  dla elektronu można wyznaczyć przez pomiar: (a) częstości cyklotronowej elektrońów  $v_c$  w danym polu magnetycznym, (b) częstości precesji protonów  $v_p$ , w tym samym polu. Pokazać, że istnieje zależność

$$\frac{e}{m} = \frac{v_c}{v_p} \frac{\mu_s}{L_s}.$$

Gdy wartości  $\mu_s$  i  $L_s$  dla protonu są dokładnie znane, doświadczenie to daje nam obecnie najdokładniejszą wartość  $e/m$ .

21. Najogólniejsze wyrażenie dla gęstości energii pola magnetycznego

$$\mu_B = \frac{1}{2} BH.$$

Czy dla próżni wyrażenie to przechodzi w znany wzór?

Odp.: Tak.

22. Magnes żelazny zawierający żelazo o względnej przenikalności 5000 ma długość 1,0 m i szczele wewnętrzne 0,01 m. Zarówno żelazo jak i szczelina mają przekrój 0,02 m $^2$ . Jaki jest niezbędny prąd w 500 uwijeniach nawiniętych na ten magnes, aby gęstość strumienia pola w szczelinie wynosiła 1,8 T?

23. *Warunek brzegowy dla H.* Udowodnić, że składowa styczna  $H$  na powierzchni granicznej między dwoma ośrodkami ma po obydwu jej stronach tę samą wartość przy założeniu, że po powierzchni nie płynie żaden prąd. (Wskazówka: Należy skonstruować pętlę prostokątną, której dłuższe brzegi, równolegle do powierzchni, leżą w różnych ośrodkach. Zastosować uogólnione prawo Ampère'a, słusze w obecności materiałów magnetycznych.)

24. *Warunek brzegowy dla B.* Udowodnić, że składowa normalna  $B$  na powierzchni granicznej między dwoma ośrodkami ma po obydwu jej stronach tę samą wartość. (Wskazówka: Skonstruować zamkniętą powierzchnię gaussowską w kształcie płaskiego, okrągłego pudełka, którego ścianki, górna i dolna, leżą w różnych ośrodkach i zastosować prawo Gaussa dla magnetyzmu.)

# 38. Drgania elektromagnetyczne

## 38-1. Drgania obwodu LC

Obwód  $LC$  (rys. 38-1) (zakłada się brak oporu\*) przypomina układ mechaniczny składający się z masy przyczepionej do sprężyny (patrz rys. 8-4) (zakłada się brak tarcia\*). Dla obu tych układów charakterystyczną wielkością jest m.in. częstość drgań. Ta analogia w rzeczywistości sięga dalej, co zaobserwujemy ilościowo w paragrafie 38-3. Początkowo jednak zbadajmy drgania obwodu  $LC$  z fizycznego, lecz półilościowego punktu widzenia.

Załóżmy, że w chwili początkowej w kondensatorze  $C$  (rys. 38-1a) zgromadzony jest ładunek  $q_m$ , a prąd  $i$  w cewce indukcyjnej jest równy零. W tym momencie energia zawarta w kondensatorze dana jest równaniem (30-7):

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{q_m^2}{C}. \quad (38-1)$$

Energia zgromadzona w cewce indukcyjnej, dana równaniem

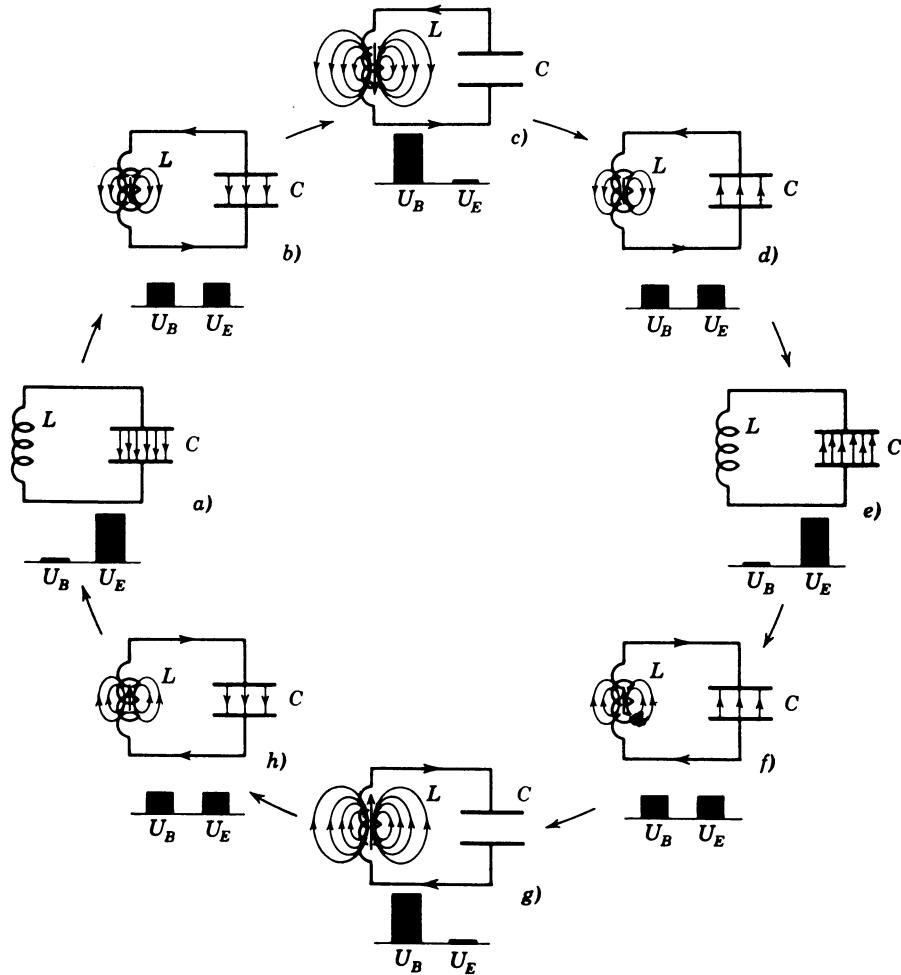
$$U_B = \frac{1}{2} L i^2 \quad (38-2)$$

jest równa零, gdyż  $i = 0$ . Kondensator zaczyna rozładowywać się przez cewkę, przy czym ładunki dodatnie poruszają się przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara, jak pokazuje rys. 38-1b. Oznacza to, że w obwodzie ustala się prąd  $i$  dany przez  $\frac{dq}{dt}$  i płynący w kierunku dolnego końca cewki indukcyjnej.

W miarę jak  $q$  maleje, zmniejsza się energia zawarta w polu elektrycznym kondensatora. Energia ta zamienia się na energię pola magnetycznego, które pojawia się wokół cewki indukcyjnej w miarę narastania w niej prądu  $i$ . W rezultacie pole elektryczne maleje, pole magnetyczne wzrasta, a energia zawarta w polu elektrycznym zamienia się na energię pola magnetycznego.

W chwili, której odpowiada rys. 38-1c, cały ładunek zebrany w kondensatorze znika. Pole elektryczne jest równe零, a energia zawarta w tym polu została całkowicie przeka-

\* Powszechnym terminem do opisania sytuacji z rys. 8-4 i 38-1 jest ruch „bez tłumienia”. A przy obecności tarcia (jak na rys. 15-19) albo oporze (jak na rys. 38-3) mówimy, że ruch jest „tłumiony”.



Rys. 38-1. Osiem faz oscylacji w doskonale przewodzącym obwodzie  $LC$ . Pole powierzchni zaczernionych prostokątów wyobraża wielkość magnetyczną i elektryczną energii. Pionowe strzałki na osi cewek przedstawiają natężenie prądu. Czytelnik powinien porównać ten rysunek z rys. 8-4, który jest jego mechanicznym odpowiednikiem

zana polu magnetycznemu cewki. Zgodnie z równaniem (38-2) musi istnieć prąd, i to jego maksymalna wartość, w cewce indukcyjnej. Sytuacje podobne do przedstawionych na rys. 8-4 i rys. 38-1 określa się jako „nietłumione”. Jeżeli tarcie istnieje (jak na rys. 15-19) lub istnieje opór (jak na rys. 38-3), określamy sytuację jako „stłumioną”. Zauważmy, że nawet wtedy, gdy ładunek  $q$  jest równy零, prąd (który jest określony przez  $dq/dt$ ) nie zniką.

Prąd płynący w cewce (rys. 38-1c) przenosi ładunek dodatni z górnej płyty kondensatora na dolną, jak pokazuje rys. 38-1d. Energia przepływa z powrotem z cewki do kondensatora, w którym narasta pole elektryczne. Rysunek 38-1e przedstawia sytuację, kiedy cała energia została z powrotem zgromadzona w kondensatorze. Stan ten odpowiada sytuacji początkowej, z tą różnicą, że obecnie kondensator naładowany jest odwrotnie.

Kondensator znowu zaczyna się rozładowywać, przy czym prąd płynie teraz zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, jak na rys. 38-1f. Rozumując jak poprzednio stwierdzamy, że obwód  $LC$  wraca do swego stanu początkowego i że procesy te powtarzają się z określoną częstotliwością  $\nu$  (mierzoną np. w Hz), która odpowiada określonej częstotliwości kołowej  $\omega$  ( $= 2\pi\nu$ , mierzonej np. w rd/s). Raz rozpoczęte drgania  $LC$  (opisano tutaj przypadek idealny, kiedy w obwodzie nie występuje żaden opór) trwają nieskończonie długo, przy czym energia przekazywana jest kolejno z pola elektrycznego kondensatora do pola magnetycznego cewki indukcyjnej i na odwrót. Każdy stan na rys. 38-1 można uważać za stan początkowy. Począwszy od tego stanu, drgania będą przebiegać w kolejności przedstawionej na rysunku, przy czym następujące po sobie stany wyznaczane są przez kierunek ruchu wskazówek zegara. Czytelnik powinien uważnie i szczegółowo porównać drgania w obwodzie  $LC$  z drganiami układu mechanicznego — masa + sprężyna — przedstawionego na rys. 8-4.

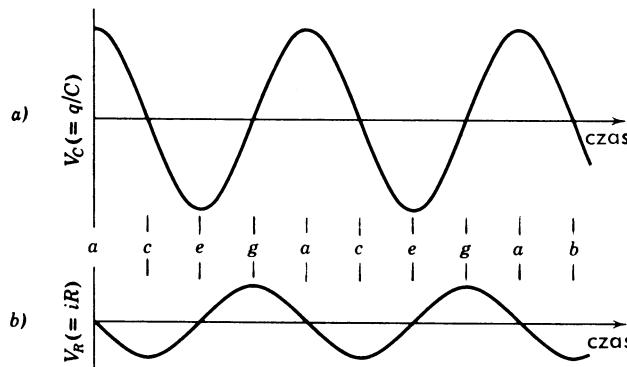
Aby wyznaczyć ładunek  $q$  jako funkcję czasu, możemy mierzyć zmienną różnicę potencjałów  $V_C(t)$ , występującą na kondensatorze  $C$ . Związek

$$V_C = \frac{1}{C} q$$

pokazuje, że  $V_C$  jest proporcjonalne do  $q$ . Aby wyznaczyć natężenie prądu  $i$ , wprowadzamy do obwodu mały opór  $R$  i mierzymy spadek potencjału na tym oporze. Jest on proporcjonalny do  $i$  zgodnie z wzorem

$$V_R = Ri.$$

Zakładamy tutaj, że  $R$  jest małe, że jego wpływ na zachowanie się obwodu możemy pominać. Zarówno  $q$ , jak i  $i$  lub, bardziej poprawnie, proporcjonalne do nich  $V_C$  i  $V_R$  można obserwować na ekranie oscyloskopu. Typowy przebieg  $q(t)$  oraz  $i(t)$ , jaki otrzymuje się na ekranie oscyloskopu, przedstawia rys. 38-2.



Rys. 38-2. Oszczędzony obraz różnic potencjałów proporcjonalnych do (a) ładunku, (b) natężenia prądu w obwodzie z rys. 38-1, w zależności od czasu. Litery oznaczają odpowiadające poprzedniemu rysunkowi fazy oscylacji. Ponieważ  $i = dq/dt$ , krzywa dolna jest proporcjonalna do pochodnej krzywej górnej. Czytelnik powinien to sprawdzić

**Przykład 1.** Kondensator o pojemności  $1,0 \mu\text{F}$  naładowany jest do potencjału 50 V. W pewnej chwili baterię ładującą odłączamy, a zamiast niej równolegle do kondensatora dodajemy cewkę o indukcyjności 10 mH. W tak utworzonym obwodzie  $LC$  pojawiają się drgania. Jaki jest maksymalny prąd w cewce? Zakładamy, że w obwodzie nie ma żadnego oporu.

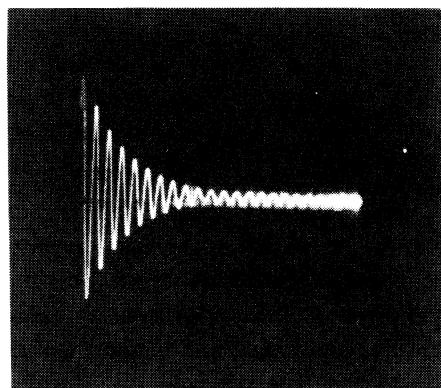
Maksymalna energia zawarta w kondensatorze musi być równa maksymalnej energii przekazanej do cewki indukcyjnej, zgodnie z zasadą zachowania energii. Z równania (38-1) i (38-2) wynika, że

$$\frac{1}{2} \frac{q_m^2}{C} = \frac{1}{2} L i_m^2,$$

gdzie  $i_m$  oznacza *maksymalny* prąd, a  $q_m$  — *maksymalny* ładunek. Zwróćmy uwagę na to, że jak widać na rys. 38-1 i 38-2, maksymalny prąd i maksymalny ładunek nie występują jednocześnie, lecz są przesunięte względem siebie o  $\frac{1}{2}$  cyklu. Rozwiązuając powyższe równanie względem  $i_m$  i podstawiając  $q_m = CV_0$ , otrzymujemy

$$i_m = V_0 \sqrt{\frac{C}{L}} = 50 \text{ V} \sqrt{\frac{1,0 \cdot 10^{-6} \text{ F}}{10 \cdot 10^{-3} \text{ H}}} = 0,50 \text{ A.}$$

W rzeczywistym układzie  $LC$  drgania nie trwają nieskończonie długo, gdyż zawsze istnieje pewien opór, który odprowadza z układu energię z pól magnetycznego i elektrycznego wydzielającą się jako ciepło Joule'a. Powstałe oscylacje będą znikać, jak pokazuje rys. 38-3. Obraz ten jest analogiczny do rys. 15-19, który przedstawia zanik drgań thumionych przez tarcie, w układzie mechanicznym masa + sprężyna.



Rys. 38-3. Oscyloskopowy obraz zaniku energii z powodu wytwarzania ciepła Joule'a na oporze  $R$  w obwodzie  $LRC$ . Jest to wykres spadku napięcia na oporze  $R$  w zależności od czasu

Możemy otrzymać niegasnące drgania elektromagnetyczne, jeżeli układ  $LC$  będzie zasilany okresowo (raz na 1 cykl) przez zewnętrzne źródło energii. Służy ono do kompensowania strat energii na ciepło\*. Układ taki przypomina pewne urządzenie mechaniczne zwane wychwytem zegarowym. Działanie jego polega na przekazywaniu energii ze sprężyny lub spadającej masy do drgającego wahadła. Straty energii spowodowane tarciem są kompensowane, a to zapobiega zanikowi drgań. W sprzedaży dostępne są generatory  $LC$  będące źródłami drgań o częstotliwościach  $v$  zmieniających się w określonym zakresie od częstotliwości radiowych (niższych niż 10 Hz) do częstotliwości mikrofalowych (wyższych od 10 GHz).

### 38-2. Analogia do prostego ruchu harmonicznego

Rysunek 8-4 pokazuje, że w układzie złożonym z masy zawieszonej na sprężynie, wykonującym prosty ruch harmoniczny, podobnie jak w obwodzie drgającym  $LC$ , występują dwa rodzaje energii: energia potencjalna ściskanej lub rozciąganej sprężyny oraz

\* Z drugiej strony obwód można zasilić „ujemnym oporem”, w stopniu wystarczającym do zniwelowania oporu rzeczywistego. Patrz: Edwin A. S. Lewis, Negative Resistor to Provide Self-Oscillation in  $RLC$  Circuits, *American Journal of Physics*, December 1976.

energia kinetyczna poruszającej się masy. Energie te wyrażone w obydwu układach przez analogiczne wzory, zestawione są w tablicy 38-1. Tablica ta sugeruje, że kondensator jest w pewien formalny sposób odpowiednikiem sprężyny, cewka indukcyjna — masy.

Tablica 38-1. Energia w układach drgających

Mechanika (rys. 8-4)	Elektromagnetyzm (rys. 38-1)
sprężyna $U_P = \frac{1}{2} kx^2$	pojemność $U_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$
masa $U_K = \frac{1}{2} mv^2$	indukcyjność $U_B = \frac{1}{2} Li^2$
$v = \frac{dx}{dt}$	$i = \frac{dq}{dt}$

Pewne wielkości elektromagnetyczne odpowiadają wielkościom mechanicznym, a mianowicie:

$q$  jest odpowiednikiem  $x$ ,

$i$  jest odpowiednikiem  $v$ ,

$C$  jest odpowiednikiem  $1/k$ ,

$L$  jest odpowiednikiem  $m$ .

Porównując rys. 38-1, który przedstawia drgania w doskonale przewodzącym obwodzie  $LC$ , z rys. 8-4, przedstawiającym drgania idealnego układu masa-sprężyna, widzimy, że podobieństwo jest bardzo bliskie. Zwróćmy uwagę, w jaki sposób „odpowiadają” sobie przedstawione na tych rysunkach wielkości  $v$  i  $i$  oraz  $x$  i  $q$ . Czytelnik powinien również przeanalizować zamianę energii magnetycznej na elektryczną w układzie  $LC$  oraz kinetycznej na potencjalną w układzie mechanicznym, masa-sprężyna.

W paragrafie 15-3 określiliśmy częstość kołową drgań nietłumionych w idealnym układzie masa-sprężyna następująco:

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Metoda „odpowiedniości” sugeruje, że dla otrzymania częstości drgań doskonale przewodzącego obwodu  $LC$  należy zastąpić  $k$  przez  $1/C$ , a  $m$  przez  $L$ . Mamy więc

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (38-3)$$

O słuszności tego wzoru przekonamy się w następnym paragrafie.

### 38-3. Drgania elektromagnetyczne. Opis ilościowy

Wprowadzimy obecnie wyrażenie dla częstości drgań obwodu  $LC$  wychodząc z zasad zachowania energii. W każdej chwili całkowita energia  $U$  zawarta w układzie drgającym  $LC$  jest równa

$$U = U_B + U_E = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}.$$

Równanie to wyraża fakt, że w dowolnej chwili czasu energia układu zawarta jest częściowo w polu magnetycznym cewki, a częściowo w polu elektrycznym kondensatora. Jeżeli założymy, że opór obwodu jest równy zeru, a więc energia nie może zamieniać się na energię cieplną,  $U$  pozostaje stałe w czasie, nawet jeśli zmienia się  $i$  lub  $q$ . Matematycznie oznacza się to, że  $dU/dt$  musi być równe零. Dochodzimy więc do równania różniczkowego:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right) = Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{G} \frac{dq}{dt} = 0, \quad (38-4)$$

$q$  oraz  $i$  nie są tu zmiennymi niezależnymi. Są one związane zależnością

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

Różniczkując to wyrażenie otrzymujemy

$$\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}.$$

Podstawiając dwa ostatnie wzory do równania (38-4) otrzymujemy

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0. \quad (38-5)$$

Jest to równanie różniczkowe opisujące drgania doskonale przewodzącego obwodu  $LC$ . Aby je rozwiązać, należy zauważyc, że równanie to ma taką samą postać matematyczną jak równanie (15-6),

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0, \quad (15-6)$$

które opisuje drgania masy zawieszonej na sprężynie. Właśnie podobieństwo tych dwóch równań wskazuje na bliską analogię między wielkościami obydwu układów: o analogii tej mówiliśmy w poprzednim paragrafie.

Rozwiązanie równania (15-6) jest następujące

$$x = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (15-8)$$

gdzie  $A$  ( $= x_m$ ) jest amplitudą drgań, a  $\varphi$  przesunięciem fazowym. Ponieważ  $q$  jest odpowiednikiem  $x$ , możemy napisać rozwiązanie równania (38-5) w postaci

$$q = q_m \cos(\omega t + \varphi), \quad (38-6)$$

gdzie  $\omega$  jest nieznaną jeszcze częstotliwością kołową drgań elektromagnetycznych.

Mogemy sprawdzić, czy wyrażenie (38-6) jest rzeczywiście rozwiązaniem równania (38-5), podstawiając je oraz jego drugą pochodną do tego równania.

Aby znaleźć drugą pochodną, obliczamy

$$\frac{dq}{dt} = i = -\omega q_m \sin(\omega t + \varphi), \quad (38-7a)$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\omega^2 q_m \cos(\omega t + \varphi). \quad (38-7b)$$

Podstawiając  $q$  i  $d^2q/dt^2$  do równania (38-5) otrzymujemy

$$-L\omega^2 q_m \cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{C} q_m \cos(\omega t + \varphi) = 0.$$

Po podzieleniu przez  $q_m \cos(\omega t + \varphi)$  i uporządkowaniu otrzymamy

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

A zatem, jeśli  $\omega$  jest równe stałej wielkości  $1/\sqrt{LC}$ , to wyrażenie (38-6) jest rzeczywiście rozwiązaniem równania (38-5). Wyrażenie to zgadza się ze wzorem (38-3), który został wyprowadzony przy zastosowaniu metody porównawczej.

Kąt fazowy  $\varphi$  we wzorze (38-6) jest określony warunkami panującymi w chwili  $t = 0$ . Jeżeli warunek początkowy jest taki jak pokazany na rys. 38-1a, to w celu otrzymania  $q = q_m$  dla  $t = 0$  w równaniu (38-6) należy podstawić  $\varphi = 0$ . Jaki byłby warunek początkowy (na rys. 38-1), gdyby  $\varphi$  było równe  $90^\circ$ ?

**Przykład 2.** (a) Jaki ładunek, wyrażony jako funkcja ładunku maksymalnego, jest zgromadzony na kondensatorze drgającego obwodu  $LC$ , gdy energia jest równo rozłożona między pole elektryczne i magnetyczne? (b) Ile czasu upłynie do chwili osiągnięcia tego stanu przy założeniu, że w chwili początkowej kondensator był całkowicie naładowany? Przyjmijmy, że  $L = 10 \text{ mH}$ , a  $C = 1 \mu\text{F}$ .

(a) Energia nagromadzona w kondensatorze oraz jej maksymalna wielkość odpowiednio wynoszą

$$U_E = \frac{q^2}{2C}, \quad U_{E,m} = \frac{q_m^2}{2C}.$$

Podstawiając  $U_E = \frac{1}{2}U_{E,m}$  otrzymamy

$$\frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} \frac{q_m^2}{2C} \quad \text{lub} \quad q = \frac{1}{\sqrt{2}} q_m.$$

(b) W celu znalezienia czasu napiszmy, zakładając, że w równaniu (38-6)  $\varphi = 0$ ,

$$q = q_m \cos \omega t = \frac{1}{\sqrt{2}} q_m,$$

stąd otrzymujemy

$$\omega t = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}, \quad \text{czyli} \quad t = \frac{\pi}{4\omega}.$$

Częstość kołową  $\omega$  można znaleźć z równania (38-3)

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{10 \cdot 10^{-3} \text{ H} \cdot 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ F}}} = 1,0 \cdot 10^4 \text{ rd/s.}$$

Stąd czas  $t$  równa się

$$t = \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi}{4 \cdot 1,0 \cdot 10^4 \text{ rd/s}} = 7,9 \cdot 10^{-5} \text{ s.}$$

Ile wynosi częstość  $v$  w hercach?

Energia zmagazynowana w obwodzie  $LC$ , po podstawieniu równania (38-6), jest równa

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{q_m^2}{2C} \cos^2(\omega t + \varphi), \tag{38-8}$$

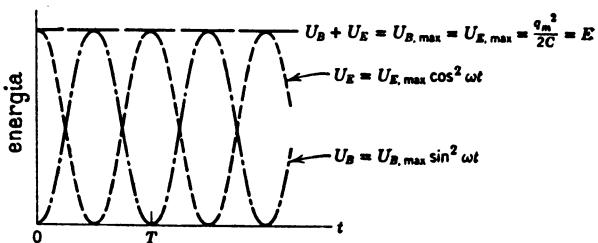
a energia pola magnetycznego po podstawieniu równania (38-7a) wynosi

$$U_B = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} L \omega^2 q_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi).$$

Podstawiając wielkość  $\omega$  z równania (38-3) do tego wyrażenia otrzymujemy

$$U_B = \frac{q_m^2}{2C} \sin^2(\omega t + \varphi). \quad (38-9)$$

Na rysunku 38-4 przedstawione są krzywe  $U_E(t)$  i  $U_B(t)$  dla przypadku  $\varphi = 0$ . Należy podkreślić, że: (a) wielkość maksymalna  $U_E$  równa się wielkości maksymalnej  $U_B (= q_m^2/2C)$ ; (b) w każdej chwili suma  $U_E$  i  $U_B$  jest stała ( $= q_m^2/2C$ ); (c) jeżeli  $U_E$  przejmuje wielkość maksymalną, to  $U_B$  równa się zeru i na odwrót. Analiza ta potwierdza jakościową analizę z paragrafu 38-1. Czytelnik powinien porównać te rozważania z rozwiązaniami z paragrafu 15-4 na temat przekazywania energii w układzie złożonym z masy zawieszonej na sprężynie.



Rys. 38-4. Energia elektryczna i magnetyczna zawarte w obwodzie z rys. 38-1. Należy zwrócić uwagę na stałość ich sumy. Litery ozaczają odpowiednie fazy oscylacji z rys. 38-1

**Przykład 3. Obwód LRC.** (a) Znaleźć wyrażenia na wielkości  $q(t)$  dla pojedynczego obwodu zamkniętego, zawierającego opór  $R$ , indukcyjność  $L$  i pojemność  $C$ . (b) Po jakim czasie nastąpi zmniejszenie amplitudy oscylacji do połowy, jeżeli  $L = 10 \text{ mH}$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$ ,  $R = 0,1 \Omega$ ?

(a) Jeżeli  $U$  jest całkowitą, zmagazynowaną energią, to mamy jak poprzednio

$$U = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}.$$

$U$  nie jest teraz stałe, lecz spełnia zależność

$$\frac{dU}{dt} = -i^2 R,$$

gdzie znak minus oznacza, że zmagazynowana energia  $U$  maleje z czasem, zmieniając się w energię termiczną (Joule'a) równą w jednostce czasu  $i^2 R$ . Podstawwszy  $U$  z poprzedniego równania, otrzymujemy

$$Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = i^2 R.$$

Wstawiając  $dq/dt$  zamiast  $i$  oraz  $d^2q/dt^2$  zamiast  $di/dt$  otrzymujemy ostatecznie

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0.$$

Jest to równanie różniczkowe opisujące drgania tłumione obwodu  $LC$ . Jeśli podstawimy  $R = 0$ , to otrzymamy równanie (38-5), jak można było oczekiwać.

Czytelnik powinien porównać to równanie różniczkowe dla drgań tłumionych obwodu  $LC$  z równaniem (15-37)

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0, \quad (15-37)$$

opisującym tłumione drgania masy zawieszonej na sprężynie. Równania te są matematycznie identyczne; opór  $R$  odpowiada stałej tłumienia mechanicznego  $b$  i  $q$  odpowiadającego  $x$ .

Rozwiązywanie dla obwodu  $LRC$  możemy otrzymać przez analogię do rozwiązywania równania (15-37) (patrz równ. (15-38) i (15-39)). Dla  $R$  dostatecznie małego i przy warunku początkowym takim, że kondensator jest maksymalnie naładowany (to jest  $\varphi = 0$ ), otrzymujemy

$$q = q_m e^{-Rt/2L} \cos \omega' t, \quad (38-10)$$

gdzie

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}. \quad (38-11)$$

Należy zwrócić uwagę na to, że równanie (38-10), które można traktować jako funkcję cosinus z wykładniczo malejącą amplitudą, jest równaniem krzywej zaniku z rys. 38-3, a również na to, że (równ. 38-11)) obecność oporu zmniejsza częstotliwość drgań. Te dwa równania przechodzą w równanie poprzednio wyprowadzone, gdy  $R \rightarrow 0$ .

(b) Amplituda drgań zmniejszy się do połowy amplitudy początkowej, gdy czynnik  $e^{-Rt/2L}$  w równaniu (38-10) będzie równy  $\frac{1}{2}$ :

$$\frac{1}{2} = e^{-Rt/2L}.$$

W jakiej chwili pojawi się  $t$ ? Co to jest  $\omega'$ ?

Otrzymujemy

$$t = \frac{2L}{R} \ln 2 = \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ H} \cdot 0,69}{0,10 \Omega} = 0,14 \text{ s}.$$

Częstość kołowa z równania (38-11), wynosi

$$\begin{aligned} \omega' &= \sqrt{\frac{1}{10 \cdot 10^{-3} \text{ H} \cdot 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ F}} - \left(\frac{0,10 \Omega}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ H}}\right)^2} = \\ &= \sqrt{10^8 \text{ rd/s}^2 - 25 \text{ rd/s}^2} = 1,0 \cdot 10^4 \text{ rd/s}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że drugi składnik jest dosyć mały, tak że w tym przypadku, jak i w wielu innych, opór ma zaledwie mały wpływ na częstotliwość. Czytelnik powinien pokazać, że 0,14 s — czas w jakim amplituda drgań maleje do połowy, odpowiada częstotliwości drgań równej około 220 Hz. A więc tłumienie jest o wiele mniejsze od pokazanego na rys. 38-3.

### 38-4. Uklady drgające o elementach skupionych i elementach rozłożonych

W tym paragrafie odłożymy na chwilę drgania elektromagnetyczne i powrócimy do drgających układów mechanicznych, aby rozwinąć temat układów drgających o *elementach skupionych* i *elementach rozłożonych*. W paragrafie 38-5 zajmiemy się ponownie układami elektromagnetycznymi i dokonamy porównania.

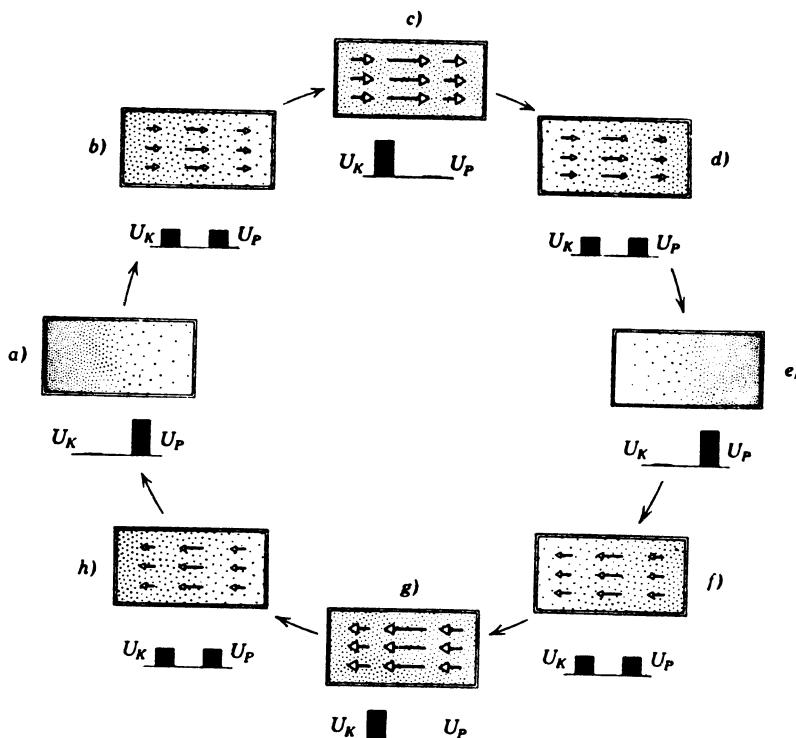
W drgającym układzie złożonym z masy zawieszonej na sprężynie (rys. 8-4) istnieją dwa rodzaje energii, każdy związany z całkiem inną częścią układu — energia potencjalna zawarta jest w sprężynie, a energia kinetyczna w poruszającej się masie. Piszczałka organowa (rys. 20-6b) jest drgającym układem mechanicznym, w którym te dwie formy energii nie są rozdzielone w przestrzeni. Zarówno energia kinetyczna związana z poruszającymi się cząsteczkami powietrza, jak i energia potencjalna związana z ich sprężaniem lub rozrzedzaniem mogą występować w każdym punkcie piszczałki. Mówimy, że taki

układ drgający jest przykładem układu drgającego o *rozłożonych*, a nie skupionych (tak jak w układzie złożonym z masy zawieszonej na sprężynie) elementach.

Widzimy natychmiast różnicę między układami drgającymi o elementach skupionych i elementach rozłożonych. Układ o elementach skupionych ma pojedynczą częstotliwość drgań podaną dla masy zawieszonej na sprężynie w równaniu (15-11). W paragrafie 15-5 podane są przykłady innych mechanicznych układów drgających o elementach skupionych. Z drugiej strony, układy o elementach rozłożonych, takie jak piszczałka organowa (rys. 20-6) i drgająca struna (rys. 20-4) mają pewną liczbę odrębnych częstotliwości drgań (składowych harmonicznych). Wartości dla dwóch wymienionych przypadków podano w paragrafie 20-5.

Teraz zbadajmy bardzo szczegółowo, biorąc pod uwagę elementy rozłożone, zachowanie zamkniętej piszczałki organowej, którą będziemy traktować jako *akustyczną wnękę rezonansową*.

Na rysunku 38-5 seria „zdjęć migawkowych” robionych co jedną ósmą okresu pokazuje zmiany ciśnienia i prędkości dla podstawowej częstotliwości drgań powietrza w pewnej akustycznej wnęce rezonansowej. Węzeł ciśnienia występuje tu w środku, a strzałki ciśnienia na każdym z końców rezonatora. Węzeł prędkości\* znajduje się na każdym z koń-



Rys. 38-5. Osiem faz oscylacji w cylindrycznej, akustycznej wnęce rezonansowej sugerującej piszczałkę organową. Zaczernione (pod każdym rysunkiem) prostokąty przedstawiają wielkość energii kinetycznej i potencjalnej. Strzałki reprezentują kierunkowe prędkości małych elementów objętości gazu

\* Prędkość rozpatrywana tutaj jest wektorem prędkości  $v_{\text{gas}}$  małego elementu objętości gazu, zawierającego jednakże dużą liczbę cząsteczek. Prędkości termiczne cząsteczek nie mają wypadkowego kierunku i są zaniedbywane.

ców, a strzałka w środku rezonatora. W chwili gdy zmiana ciśnienia jest największa, prędkość równa się zeru (rys. 38-5a i e). Gdy ciśnienie jest wszędzie jednakowe, prędkość ma wielkość maksymalną (rys. 38-5c i g).

W rezonatorze akustycznym następują kolejne zmiany energii kinetycznej, związanej z poruszającym się gazem, na energię potencjalną związaną ze sprężeniem i rozrzedzaniem gazu i na odwrotnie. Na rysunku 38-5c i g energia jest wyłącznie kinetyczna, a na rys. 38-5a i e — wyłącznie potencjalna. W stanach pośrednich jest częściowo kinetyczna i częściowo potencjalna.

Energia kinetyczna małej masy gazu  $\Delta m$  poruszającej się równolegle do osi cylindra z prędkością  $v_{\text{m}}$  równa się  $\frac{1}{2} \Delta m v_{\text{gas}}^2$ . Gęstość energii kinetycznej równa energii kinetycznej na jednostkę objętości wynosi

$$u_k = \frac{1}{2} \frac{\Delta m}{\Delta V} v_{\text{gas}}^2 = \frac{1}{2} \rho_0 v_{\text{gas}}^2,$$

gdzie  $\Delta V$  jest objętością elementu gazu, a  $\rho_0$  — średnią gęstością gazu.

Energia potencjalna na jednostkę objętości gazu, czyli gęstość energii potencjalnej związanej ze sprężaniem i rozrzedzaniem gazu, jest dana równaniem (założenie)

$$u_p = \frac{1}{2} B \left( \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \right)^2,$$

gdzie  $B$  jest modelem\* sprężystości objętościowej gazu, a  $\Delta \rho / \rho_0$  — względową zmianą gęstości gazu, dodatnią przy sprężaniu i ujemną przy rozrzedzaniu w jakimkolwiek punkcie.

Częstość kołowa drgań dla wnęki z rys. 38-5 dla podstawowego rodzaju drgań (o najniższej częstotliwości) pokazanego na tym rysunku, wynosi

$$\omega_1 = 2\pi\nu = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{\pi v}{l'},$$

gdzie  $v$  jest prędkością dźwięku w gazie, a  $l'$  — długością wnęki. Korzystając z równania (20-1) możemy napisać  $v$  jako  $\sqrt{B/\rho_0}$ . Zauważmy, że w powyższym równaniu podstawiono  $\lambda = 2l$ , co odpowiada najniższemu rodzajowi drgań. Jakie są częstotliwości  $\omega_2, \omega_3$  itd. wyższych rodzajów drgań?

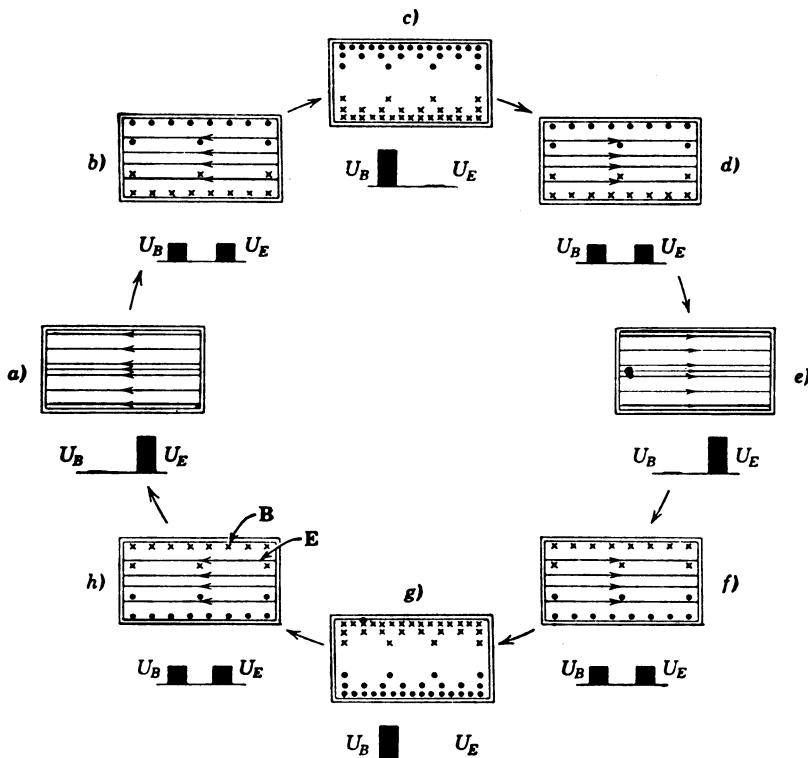
### 38-5. Elektromagnetyczna wnęka rezonansowa

Rozważmy teraz inny zamknięty cylinder o promieniu  $a$  i długości  $l$ , którego ściany są zrobione z miedzi lub innego dobrego przewodnika. W takiej wnęce może powstać zespół drgających pól magnetycznych i elektrycznych. Taka elektromagnetyczna wnęka rezonansowa jest oscylatorem elektromagnetycznym o elementach rozłożonych, w przeciwieństwie do obwodu  $LC$  będącego układem o elementach skupionych. Podobnie jak dla rezonatora akustycznego, tak i tu możliwe jest wiele rodzajów drgań z różnymi częstotliwościami; będziemy opisywać wyłącznie podstawowy rodzaj drgań o najniższej częstotliwości. Drgania we wnęce mogą być wywołane przez odpowiednie połączenie wnęki przez mały otwór w ścianie bocznej ze źródłem promieniowania elektromagnetycznego, takim jak magnetron. Jeżeli wymiary wnęki są rzędu kilku centymetrów, to częstotliwości rezonansowe będą rzędu  $10^{10}$  Hz, czyli dużo wyższe niż częstotliwości akustyczne we wnęce o tych samych wymiarach. Wynika to z faktu, że prędkość fal elektromagnetycznych w próżni ( $= 3 \cdot 10^8$  m/s) jest dużo większa od prędkości dźwięku w powietrzu (około 350 m/s).

\* Patrz str. 499, t. 1.

Na rysunku 38-6 seria „zdjęć migawkowych”, wykonywanych co jedną ósmą okresu, pokazuje za pomocą poziomych kresek, jak pole elektryczne  $E$  zmienia się w czasie we wnęce. Elektryczne linie sił zaczynają się na dodatnich ładunkach z jednej strony cylindra, a kończą na ujemnych ładunkach z drugiej. Jeżeli  $E$  zmienia się w czasie, ewentualnie zmieniając kierunek, to prądy płyną od jednego końca cylindra do drugiego po wewnętrznej stronie ściany cylindra. W każdym punkcie wnęki gromadzi się energia elektryczna, a jej wielkość w jednostce objętości dana jest równaniem (30-9) lub

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2. \quad (38-12)$$



Rys. 38-6. Osiem faz oscylacji w cylindrycznej, elektromagnetycznej wnęce rezonansowej. Zaczernione prostokąty (pod każdym rysunkiem) przedstawiają wielkość energii elektrycznej i magnetycznej. Punkty i krzyżyki reprezentują zamknięte kołowe linie indukcji  $B$ ; linie poziome reprezentują pole  $E$ . Porównać z rys. 38-5. Oba rysunki są przykładami elementów rozłożonych

Na rysunku 38-6 pokazano również, za pomocą kropiek i krzyżyków, jak pole magnetyczne  $B$  zmienia się z czasem. Linie magnetyczne tworzą koła wokół osi cylindra. Należy zauważyć, że pole magnetyczne ma wielkość maksymalną, gdy pole elektryczne równe jest zeru. W każdym punkcie wnęki gromadzi się energia magnetyczna, a jej wartość w jednostce objętości dana jest równaniem (36-19) lub

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2. \quad (38-13)$$

A więc, podobnie jak w obwodzie  $LC$ , występują tu kolejne zmiany energii pola magne-

tycznego na energię pola elektrycznego i na odwrót. Jednakże teraz pola te nie zajmują oddzielnych obszarów przestrzeni. W paragrafie 40-5 wyjaśniamy dlaczego pola elektryczne i magnetyczne na rys. 38-6 oddziałują na siebie w sposób, który opisaliśmy.

Podamy teraz bez dowodu, że kołowa częstość drgań we wnęce elektromagnetycznej (rys. 38-6) dla podstawowego rodzaju drgań pokazanego na tym rysunku wynosi

$$\omega_1 = \frac{2,41c}{a},$$

gdzie  $a$  jest promieniem wnęki, a  $c$  prędkością rozchodzenia się promieniowania elektromagnetycznego w próżni. Zobaczmy w paragrafie 41-5, że  $c$  możemy wyrazić za pomocą stałych elektromagnetycznych jako  $1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ . Jak sugerują wykresy pola (rys. 38-6), rezonansowa częstość drgań we wnęce dla pokazanego rodzaju drgań zależy jedynie od promienia wnęki, a nie od jej długości.

Tablica 38-2. Właściwości układów drgających

	Układy mechaniczne (doskonale gładkie)	Układy elektromagnetyczne (doskonale przewodzące)
układy o elementach skupionych	masa + sprężyna $U_K = \frac{1}{2}mv^2$ $U_P = \frac{1}{2}kx^2$ $\omega = \sqrt{k/m}$ (rys. 8-4)	obwód $LC$ $U_B = \frac{1}{2}Li^2$ $U_E = \frac{1}{2}(1/C)q^2$ $\omega = \sqrt{1/(LC)}$ (rys. 38-1)
układy o elementach rozłożonych	wnęka akustyczna $u_K = \frac{1}{2}\rho_0 v_{\text{gaz}}^2$ $u_P = \frac{1}{2}B(\Delta\rho/\rho_0)^2$ $\omega_1 = \frac{\pi v}{l}, v = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}}$ (rys. 38-5)	wnęka elektromagnetyczna $u_B = \frac{1}{2}(1/\mu_0)B^2$ $u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ $\omega_1 = \frac{2,41c}{a}, c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}$ (rys. 38-6)

W tablicy 38-2 zebrano podstawowe właściwości czterech omówionych dotychczas układów drgających. Dla układu o elementach rozłożonych podano wyrażenie na dwa rodzaje gęstości energii oraz na podstawową częstość drgań. Dla układu o elementach skupionych podane zostały wyrażenia na dwa występujące rodzaje energii i na częstość drgań. Czytelnik powinien dokładnie przestudiować wszystkie podobieństwa i różnice występujące w tej tablicy.

**Przykład 4.** Jaka jest zależność między „średnią” wielkością  $E$  we wnęce z rys. 38-6 zmierzoną w chwili odpowiadającej rys. 38-6a, a „średnią” wielkością  $B$  zmierzoną w chwili odpowiadającej rys. 38-6c?

W pierwszym przypadku energia ma wyłącznie postać energii elektrycznej, a w drugiej — wyłącznie magnetycznej. Całkowita energia  $U$  znaleziona przez scałkowanie gęstości energii po objętości wnęki musi w obydwu przypadkach być taka sama, czyli

$$U = \int u_{E,m} dV = \int u_{B,m} dV,$$

gdzie  $dV$  jest elementem objętości wnęki, a  $u_{E,m}$  są maksymalnymi wielkościami  $u_E$  i  $u_B$  w tym elemencie objętości. Te maksymalne wielkości występują co jedna czwarta okresu, jak pokazuje rys. 38-6. Wykorzystanie równań (38-12) i (38-13) prowadzi do

$$\int \frac{\epsilon_0 E^2 m}{2} dV = \int \frac{B_m^2}{2\mu_0} dV,$$

czyli

$$\mu_0 \epsilon_0 \int E_m^2 dV = \int B_m^2 dV.$$

Wielkość  $\int E_m^2 dV$  można napisać jako  $\overline{E_m^2 V}$ , gdzie  $V$  jest objętością wnęki, a  $\overline{E_m^2}$  jest średnią wielkością  $E_m^2$  we wnęce. Postępując podobnie z  $B_m$  otrzymujemy

$$\mu_0 \epsilon_0 \overline{E_m^2} = \overline{B_m^2}$$

czyli, po wyciągnięciu pierwiastków,

$$\sqrt{\overline{B_m^2}} = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sqrt{\overline{E_m^2}}.$$

Oznaczmy  $\sqrt{\overline{B_m^2}}$  przez  $B_{\text{śr. kw.}}$ . Jest to tzw. „średnia kwadratowa”  $B_m$ . Zauważmy, że przy obliczaniu  $B_{\text{śr. kw.}}$  uśrednienie zostało przeprowadzone po objętości wnęki w chwili odpowiadającej rys. 38-6c. Nie jest ono średnią czasową dla pewnego punktu wnęki. Czyniąc to samo dla  $E$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} E_{\text{śr. kw.}} / B_{\text{śr. kw.}} &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \\ &= [(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m}/\text{A})(8,9 \cdot 10^{-12} \text{C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2))]^{-1/2} = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Jeżeli to przypomina czytelnikowi o prędkości światła, to nieprzypadkowo. Zbadamy problem szczegółowo w paragrafie 41-8.

Jeżeli  $E_{\text{śr. kw.}}$  powyżej wynosi  $1,0 \cdot 10^4 \text{ V/m}$ , co jest wielkością często spotykana, to otrzymujemy

$$B_{\text{śr. kw.}} = (1,0 \cdot 10^4 \text{ V/m}) (3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}) = 3,3 \cdot 10^{-5} \text{ T} = 0,33 \text{ Gs}.$$

Jaka jest całkowita energia nagromadzona we wnęce, jeżeli założymy, że wnęka ma 10 cm długości i 3 cm średnicy? Czytelnik powinien przypomnieć sobie że, jak pokazaliśmy w przykładzie 6 rozdziału 36, gęstość energii pola magnetycznego o „przeciętnej”, laboratoryjnej wielkości (np. 1 T) jest o wiele większa niż gęstość energii przeciętnego pola elektrycznego (np.  $10^5 \text{ V/m}$ ). Fakt ten jest zgodny z powyższym przykładem.

### Pytania

1. Dlaczego w obwodzie  $LC$  z rysunku 38-1 nie nastąpi przerwanie drgań, gdy kondensator całkowicie się rozładowuje?
2. Jak można pobudzić obwód  $LC$  do drgań przy warunkach początkowych takich jak na rys. 38-1c? Podać schemat układu służącego do tego celu.
3. Co określa w obwodzie  $LC$ , przy założeniu braku oporu: (a) częstotliwość, (b) amplitudę drgań?
4. W nawiązaniu do rys. 38-1c i g, wyjaśnić jak może płynąć prąd w induktorze, jeżeli kondensator nie jest naładowany?
5. Czy możemy mieć na rys. 38-1: (a) doskonale przewodzący obwód  $LC$  lub (b) induktor bezewnętrznej pojemności, lub (c) kondensator bez wewnętrznej indukcyjności? Omówić praktyczną wartość obwodu  $LC$  z rys. 38-1, w którym żadna z wyżej wymienionych możliwości nie jest brana pod uwagę. Patrz: Samuel Derman, Selfresonant Effects in Coils and Capacitors an Experiment, *The Physics Teacher*, September 1976.
6. Jakie zmiany są wymagane na rys. 38-1, jeżeli drgania mają mieć kierunek przeciwny do ruchu wskazówek zegara, dookoła rysunku?
7. Jakie przesunięcia fazowe  $\varphi$  w równaniu (38-6) odpowiadają ośmiu przedstawionym na rys. 38-1 sytuacjom w obwodzie?
8. Wszystkie rzeczywiste obwody  $LC$  muszą zawierać jakiś opór, a więc są to obwody  $RCL$ . Jednakże, można kupić gotowy generator drgań akustycznych utrzymujący stałą amplitudę, która nie maleje, jak na rys. 38-3. Jak to się dzieje? (Wskazówka: Rozważyć analogię z zegarem wahadłowym posiadającym ciężarki.)
9. Czy można znaleźć jakąś fizyczną przyczynę dla założenia, że  $R$  jest „małe” w równaniach (38-10) i (38-11)? (Wskazówka: Rozważyć co by się stało, gdyby tłumiące  $R$  było tak duże, że w równaniu (38-10) nie nastąpiłby nawet jeden pełny cykl drgań, zanim  $q$  nie zostałoby zredukowane praktycznie do zera. Czy jest to możliwe? Jeżeli tak, jak wyglądałby rys. 38-3?)
10. Ułożyć tablicę zawierającą wszystkie, jakie można wymyślić, układy elektryczne lub mecha-

niczne mające określoną częstotliwość własną oraz podać wzory na tę częstotliwość, jeżeli zostały one podane w tekście.

11. Przedyskutować cykliczny przepływ energii (jeśli taki istnieje) od punktu do punktu w akustycznej wnęce rezonansowej.

12. Czy możliwe jest, by pewien element obwodu, np. kondensator, zachowywał się pod pewnymi względami jak element „skupiony”, a pod innymi jak element „rozłożony”?

13. Podaj wszystkie, jakie znasz, drgające układy mechaniczne (a) o elementach skupionych i (b) elementach rozłożonych?

14. Czy wszystkie układy drgające (np. mechaniczne) mają elementy skupione lub rozłożone? Czy to znaczy, że nie istnieje stan pośredni? (a) Rozważyć układ o elementach skupionych taki jak doskonaly układ złożony z masy zawieszonej na sprężynie. Jakich fizycznych zmian należy dokonać, aby elementy stały się bardziej rozłożone? (b) Rozważyć układ o elementach rozłożonych taki jak drgająca struna. Jakich fizycznych zmian należy dokonać, aby elementy stały się bardziej skupione?

15. Indukcyjność cewki wynosi  $L$ . Ma ona również pojemność  $C$ , ponieważ przyległe zwoje zachowują się jak „płytki”. Można spowodować drganie cewki o stałej częstotliwości nie dodając jej do zewnętrznej pojemności. Czy jest to przypadek elementów rozłożonych. Czy drgania cewki mogą mieć inne częstotliwości? Omówić to.

16. Struna skrzypiec jest mechanicznym układem drgającym o elementach rozłożonych. Podać kilka jakościowych szczegółów wyjaśniających dlaczego tak jest. Na przykład, gdzie znajduje się energia kinetyczna i energia potencjalna. (Porównaj rysunki 19-16 i 38-5.)

17. Napełniona powietrzem akustyczna wnęka rezonansowa i elektromagnetyczna wnęka rezonansowa tych samych rozmiarów mają częstotliwości rezonansowe pozostające w stosunku  $10^6$ . Która z nich ma większą częstotliwość rezonansową i dlaczego?

18. Jakie trudności techniczne napotykamy przy konstruowaniu obwodu  $LC$  z rys. 38-1 drgającego z częstotliwością (a)  $0,01$  Hz i (b)  $10^{10}$  Hz?

19. Wyjaśnić, dlaczego wnęki elektromagnetyczne są często pokrywane wewnętrz srebrem.

### Zadania

#### Paragraf 38-1

1. Znaleźć pojemność obwodu  $LC$ , jeżeli maksymalny ładunek kondensatora wynosi  $1,0 \mu\text{C}$  i energia całkowita wynosi  $1,4 \cdot 10^{-4} \text{ J}$ .

Odp.:  $3,6 \cdot 10^{-9} \text{ F}$ .

2. Indukcyjność  $1,5 \text{ mH}$  w obwodzie  $LC$  magazynuje maksymalną energię  $1,0 \cdot 10^{-5} \text{ J}$ . Ile wynosi szczytowe natężenie prądu?

3. W drgającym obwodzie  $LC$ ,  $L = 1,0 \text{ mH}$ ,  $C = 4,0 \mu\text{F}$  i maksymalny ładunek na  $C$  wynosi  $3,0 \mu\text{C}$ . Znaleźć maksymalne natężenie prądu.

Odp.:  $47 \text{ mA}$ .

4. Szczytowe napięcie drgającego obwodu  $LC$  składającego się z kondensatora o pojemności  $1,0 \text{ nF}$  ( $= 1,0 \text{ nanofarad} = 1,0 \cdot 10^{-9} \text{ F}$ ) i cewki o indukcyjności  $3,0 \text{ mH}$  wynosi  $3,0 \text{ V}$ . (a) Ile wynosi maksymalne naładowanie kondensatora? (b) Jakie jest szczytowe natężenie w obwodzie? (c) Ile wynosi maksymalna energia zmagazynowana w polu magnetycznym cewki?

5. Jaki ładunek istnieje w drgającym obwodzie  $LC$  biorąc pod uwagę maksymalne naładowanie kondensatora, (a) gdy energia jest rozmieszczona równo między polem elektrycznym a magnetycznym? (b) Aby ten warunek zaistniał, jaki ułamek okresu musi minąć od chwili, gdy kondensator był całkowicie naładowany?

Odp.: (a)  $q = q_m/\sqrt{2}$ . (b)  $t = T/8$ .

6. W pewnej chwili w drgającym obwodzie  $LC$ , trzy czwarte całkowitej energii zostaje zmagazynowane w polu magnetycznym cewki. (a) Biorąc pod uwagę maksymalne naładowanie kondensatora, jaki jest wtedy ładunek kondensatora? (b) Biorąc pod uwagę maksymalne natężenie prądu, ile wtedy wynosi natężenie prądu w cewce?

#### Paragraf 38-2

7. Jak można pobudzić indukcyjność  $1,0 \text{ mH}$  do drgań z częstotliwością  $1,0 \text{ MHz}$  ( $1,0 \text{ MHz} = 1,0 \cdot 10^6 \text{ Hz}$ )?

*Odp.:* Połączyć z kondensatorem o pojemności  $25 \text{ pF}$  i używać całości jako elementu rezonansowego w oscylatorze.

8. Mamy indukcyjność  $10 \text{ mH}$  i dwa kondensatory o pojemnościach  $5,0 \mu\text{F}$  i  $2,0 \mu\text{F}$ . (a) Znaleźć cztery rezonansowe częstotliwości, które można otrzymać łącząc te elementy na różne sposoby. (b) Czy istnieją jeszcze jakieś częstotliwości oprócz tych czterech?

9. Obwód  $LC$  ma indukcyjność  $L = 3,0 \text{ mH}$  i pojemność  $C = 10 \mu\text{F}$ . (a) Obliczyć częstotliwość kątową  $\omega$  drgań. (b) Znaleźć okres  $T$  drgań. (c) W czasie  $t = 0$  ładunek kondensatora wynosi  $200 \mu\text{C}$ , a natężenie prądu wynosi zero. Naszkicuj ładunek kondensatora jako funkcję czasu.

*Odp.:* (a)  $5,8 \cdot 10^3 \text{ rad/s.}$  (b)  $1,1 \cdot 10^{-3} \text{ s.}$

10. Ile czasu będzie się ładował nie naładowany kondensator o pojemności  $4,0 \text{ pF}$  w obwodzie  $LC$ , jeżeli jego końcowe napięcie wynosi  $1,0 \text{ mV}$ , a maksymalne natężenie prądu  $50 \text{ mA}$ ?

11. Połączono szeregowo solenoid z kondensatorem, którego pojemność można zmieniać za pomocą obracania gałki. Chcemy, by częstotliwość drgań obwodu  $LC$  zmieniała się liniowo wraz ze zmianąkąta obrotu gałki od  $2 \cdot 10^5 \text{ Hz}$  do  $4 \cdot 10^5 \text{ Hz}$  przy zmianie kąta o  $180^\circ$ . Sporządzić wykres pojemności  $C$  kondensatora (dla  $L = 1 \text{ mH}$ ) jako funkcję tego kąta obrotu.

*Odp.:*  $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$  i  $180^\circ$  odpowiadające kolejno  $6,4; 4,1; 2,8; 2,1$  i  $1,6 \cdot 10^{-10} \text{ F.}$

12. Kondensator o pojemności zmiennej od  $10 \text{ pF}$  do  $365 \text{ pF}$  używany jest wraz z cewką do nastrajania częstotliwości odbieranej przez radio. (a) Jaki stosunek częstotliwości maksymalnych do minimalnych może być nastrojony tym kondensatorem? (b) Jeżeli ten kondensator ma stroić w częstotliwościach od  $0,54$  do  $1,60 \text{ MHz}$ , to stosunek obliczony w (a) jest za duży. Zakres strojenia można dopasować do wymagań dołączając kondensator równolegle do kondensatora zmiennego. Jaki duży powinien być ten kondensator i jaką indukcyjność należy wybrać, aby nastroić do wymaganego zakresu częstotliwości?

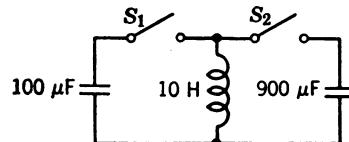
13. Drgający obwód  $LC$  jest tak skonstruowany, że działa w szczytowym natężeniu  $i$  ( $30 \text{ mA}$ ). Indukcyjność  $L$  ( $0,042 \text{ H}$ ) jest stała, a częstotliwość zmienia się wraz ze zmianami  $C$ . (a) Jeżeli maksymalne, szczytowe napięcie w kondensatorze wynosi  $V_m$  ( $50 \text{ V}$ ), to czy obwód może bezpiecznie działać w częstotliwości  $v = 1,0 \text{ MHz}$ ? (b) Ile wynosi maksymalna, bezpieczna częstotliwość, w której może działać? (c) Ile wynosi najmniejsza pojemność?

*Odp.:* (a)  $1300 \text{ V; nie;}$  (b)  $6300 \text{ Hz;}$  (c)  $1,8 \cdot 10^{-8} \text{ F.}$

14. Masa  $10 \text{ kg}$  oscyluje na sprężynie tak, że gdy zostaje odcięgnięta o  $2 \text{ cm}$  od położenia równowagi siła kierująca ją z powrotem wynosi  $5,0 \text{ N}$ . (a) Znaleźć pojemność analogicznego układu  $LC$  z  $L = 1,0 \times 10^{-3} \text{ H}$ . (b) Czy jest prostą sprawą skonstruowanie analogicznego obwodu?

15. Początkowo kondensator o pojemności  $900 \mu\text{F}$  zostaje naładowany do  $100 \text{ V}$ , a kondensator o pojemności  $100 \mu\text{F}$  pozostaje nie naładowany (rys. 38-7). (a) Opisać szczegółowo, jak można naładować kondensator o pojemności  $100 \mu\text{F}$  do potencjału  $300 \text{ V}$  używając odpowiednio  $S_1$  i  $S_2$ . (b) Opisać szczegółowo analogiczną sytuację z mechanicznym układem masy umieszczonej na sprężynie.

*Odp.:* Niech  $T_2$  będzie okresem drgań cewki indukcyjnej i kondensatora o pojemności  $900 \mu\text{F}$ , a  $T_1$  okresem drgań cewki indukcyjnej i kondensatora o pojemności  $100 \mu\text{F}$ . Wtedy (a) zamknąć  $S_2$ , poczekać  $T_2/4$ ; szybko zamknąć  $S_1$ , potem otworzyć  $S_2$ ; poczekać  $T_1/4$  i potem otworzyć  $S_1$ .



Rys. 38-7. Zadanie 15

### Paragraf 38-3

16. Obwód zawiera  $L = 10 \text{ mH}$  i  $C = 1 \mu\text{F}$ . Jak duży opór należy dołączyć do tego obwodu w celu zmniejszenia częstotliwości rezonansowej (nietlumionej) o  $0,01\%$ ?

17. W drgającym obwodzie  $LC$ ,  $L = 3,0 \text{ mH}$  i  $C = 2,7 \mu\text{F}$ . W  $t = 0$  ładunek  $q = 0$  i natężenie  $i = 2,0 \text{ A}$ . (a) Jak maksymalnie może naładować się kondensator? (b) Biorąc pod uwagę okres drgań  $T$ , ile czasu upłynie po  $t = 0$ , zanim energia magazynowana w kondensatorze będzie wzrosła naj szybciej? (c) Jaka jest największa szybkość, przy której energia zgromadzona w kondensatorze będzie wzrosła?

*Odp.:* (a)  $1,8 \cdot 10^{-4} \text{ C.}$  (b)  $T/8.$  (c)  $67 \text{ W.}$

18. W tłumionym obwodzie  $LC$  znaleźć czas wymagany do zmniejszenia o połowę początkowej maksymalnej energii w czasie jednego cyklu drgań. Przyjąć  $q = q_m$  w  $t = 0$  (np. skorzystać z równania (38-10)).

19. Wyprowadzić równanie różniczkowe dla obwodu  $LC$  (wzór (38-5)) używając II prawa Kirchhoffa.

20. Pokazać, że prąd w tłumionym obwodzie  $LC$  jest dany wzorem

$$i = q_m \omega' e^{-Rt/2L} \sin(\omega't + \varphi),$$

gdzie

$$\varphi = \arctg \frac{R}{2L\omega'}.$$

Skorzystać z równania (38-10).

21. Założyćmy, że w drgającym obwodzie  $RCL$  amplituda drgań ładunku spada do połowy swej wielkości początkowej po  $n$  cyklach. Pokazać, że względne zmniejszenie częstości rezonansowej spowodowane obecnością oporu z dobrym przybliżeniem wynosi

$$\frac{\omega - \omega'}{\omega} = \frac{0,0061}{n^2},$$

a więc nie zależy od  $L$ ,  $R$  i  $C$ . Zastosować to do krzywej zaniku z rys. 38-3.

22. *Współczynnik dobroci  $Q$  obwodu*\*. Pokazać, że w tłumionym obwodzie  $LC$  z przykładu 3 względna strata energii na jeden cykl drgań  $\Delta U/U$  wynosi, z dobrym przybliżeniem,  $2\pi R/\omega L$ . Wielkość  $\omega L/R = Q$  nazywana jest często dobrocią obwodu. Obwód z dużą dobrocią ma mały opór, małą względną stratę energii na cykl ( $= 2\pi/Q$ ).

#### Paragraf 38-5

23. Jakie byłyby rozmiary cylindrycznej, elektromagnetycznej wnęki rezonansowej (jak ta opisana w tekście) działającej w częstotliwości podstawowej 60 Hz, częstotliwości domowego prądu zmennego? *Odp.*: Promień =  $1,9 \cdot 10^3$  km, niezależny od długości.

24. Naszkicować diagramy jak na rys. 38-6 pokazujące cykl drgań cylindrycznej, elektromagnetycznej wnęki rezonansowej działającej nie w częstotliwości podstawowej, lecz w pierwszej harmonicznej.

---

\* Nazywamy często *współczynnikiem przepięcia* (przyp. red.).

# 39. Prądy zmienne

## 39-1. Wstęp

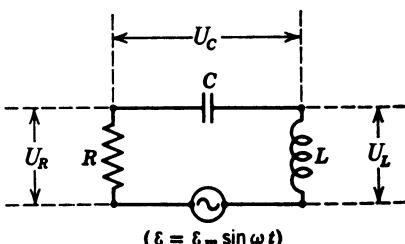
Dotychczas zastanawialiśmy się nad tym, jakie prądy powstaną w obwodach zawierających elementy oporności  $R$ , pojemności  $C$  oraz indukcyjności  $L$  połączone na różne możliwe sposoby, jeżeli do obwodów tych przyłożymy siły elektromotoryczne (SEM) zmieniające się w różny sposób w czasie.

W rozdziale 32 omawialiśmy (stałe) prądy powstające w sieciach zawierających wyłącznie oporności czysto omowe, po przyłożeniu do nich (stałych) SEM. W paragrafie 32-8 rozważaliśmy zachowanie się pojedynczego (jednooczkowego) obwodu  $RC$ , po przyłożeniu do niego „prostokątnej” SEM, rys. 32-13. W paragrafie 36-3 opisywaliśmy zachowanie się pojedynczego obwodu  $RL$  po przyłożeniu analogicznie zmiennej SEM, rys. 36-6. Na zakończenie, w rozdziale 38, przeanalizowaliśmy zachowanie się pojedynczego obwodu  $LC$  oraz  $RLC$ , do których przyłożono SEM jedynie chwilowo, w celu zapoczątkowania „swobodnych oscylacji”; patrz rysunki 38-1, 38-2b oraz 38-3.

W tym rozdziale będziemy mieć do czynienia z *prądami zmiennymi\**, wzbudzanymi w pojedynczych obwodach  $RLC$ , takich jak na rys. 39-1, przez SEM zmieniające się w czasie zgodnie z zależnością

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin \omega t, \quad (39-1)$$

w której  $\omega (= 2\pi\nu$ , gdzie  $\nu$  mierzone w Hz) jest ustaloną częstotliwością kołową (w elektronice częstotliwością lub częstotliwością kątową). Tego rodzaju SEM można otrzymać, na przykład



Rys. 39-1. Pojedynczy obwód  $RLC$  zawierający źródło napięcia przemienneego.  $U_R$ ,  $U_L$  i  $U_C$  są to zmieniające się w czasie napięcia odpowiadnie na opornik, cewce i kondensatorze

\* Chodzi tu o prądy o zmiennej nie tylko wartości, ale i znaku, nazywane często *prądami przemiennymi* (przyp. tłum.).

w elektrowni z generatora prądu przemiennego o częstotliwości  $\nu = 60 \text{ Hz}^*$  (patrz zadanie 6, rozdz. 35). Symbolem źródła SEM zmieniającej się w czasie zgodnie z równaniem (39-1) jest . Odpowiednie urządzenia nazywane są *generatorami prądu zmiennego*\*\* lub *generatorami AC*\*\*\*.

Prądy zmienne są ważne z dwóch powodów: (1) Z praktycznego punktu widzenia, nowoczesna technika oraz styl życia w krajach wysoko uprzemysłowionych byłyby zupełnie inne, gdyby nie były dostępne źródła sił elektromotorycznych (SEM), takich jak opisana równaniem (39-1) oraz odpowiadające im prądy zmienne. Gdyby nie było zmiennych SEM oraz wytwarzanych przez nie zmiennych prądów, nie istniałyby w ogóle lub działałyby znacznie mniej efektywnie takie układy, jak sieć dostarczająca energię elektryczną, radio, telewizja, systemy łączności satelitarnej, systemy komputerowe i wiele innych. (2) Z teoretycznego punktu widzenia, jeżeli znamy reakcję *dowolnego* obwodu *RLC* (o dowolnej ilości elementów i zamkniętych oczek) na przyłożoną do niego SEM daną równaniem (39-1), wówczas możemy opisać reakcję, tzn. prądy wytworzone przez dowolną SEM, niezależnie od tego jak złożona jest jej postać. Korzystamy tu z tego, że funkcję opisującą dowolny kształt możemy przedstawić przy pomocy szeregu Fouriera jako sumę oddzielnych wyrazów zawierających sinusy (i cosinusy) oraz z tego, że obowiązuje tu zasada superpozycji. Porównaj analogiczne postępowanie w paragrafie 19-4 oraz rys. 19-5.

## 39-2. Elementy RLC rozważane pojedynczo

Głównym celem tego rozdziału jest znalezienie prądu zmiennego płynącego w obwodzie *RLC* z rys. 39-1 i wyrażenie go przez wartości  $\mathcal{E}_m$ ,  $\omega$ ,  $R$ ,  $C$  oraz  $L$ . Zauważmy, że w warunkach przedstawionych na rys. 39-1\*\*\*\* prąd płynący we wszystkich odcinkach obwodu jest taki sam (podobnie jak prądy w pojedynczych obwodach z rozdz. 32) i możemy bezpiecznie założyć, że  $i$  jest dane wyrażeniem

$$i = i_m \sin(\omega t - \varphi), \quad (39-2)$$

w którym  $\omega$  jest częstotliwością kołową przyłożonej zmiennej SEM danej równaniem 39-1.

W równaniu (39-2)  $i_m$  jest amplitudą prądu, a stała fazowa (kąt fazowy)  $\varphi$  — przesunięciem fazowym pomiędzy zmiennym prądem z równania (39-2) a zmienną SEM z równania (39-1). Naszym zadaniem jest wyrażenie wielkości  $i_m$  oraz  $\varphi$  z równania (39-2) poprzez wielkości  $\mathcal{E}_m$ ,  $\omega$ ,  $R$ ,  $C$  i  $L$ \*\*\*\*\*.

Aby to uczynić podzielimy problem przedstawiony na rys. 39-1 na trzy oddzielne problemy, w których będziemy rozważać  $R$ ,  $C$  i  $L$  pojedynczo i po kolej\*\*\*\*\*. Zaczniemy od oporności  $R$ .

\* W Polsce częstotliwość prądu zmiennego w sieci miejskiej wynosi 50 Hz (przyp. tłum.).

\*\* Termin „generator prądu zmiennego” nie jest terminem ścisłym; powinno się raczej mówić „generator zmiennego napięcia”.

\*\*\* Skrót od angielskiego *alternating current* (przyp. tłum.).

\*\*\*\* Jak widać na rys. 39-1, przyjęliśmy założenie, że możemy oddzielnie zlokalizować  $R$ ,  $L$  i  $C$  jako łatwe do zidentyfikowania części obwodu. Podstawy tego założenia (o skupionej indukcyjności) przedyskutujemy obszerne w rozdziale 40. Założenie jest tym bardziej usprawiedliwione, im niższa jest przyłożona częstotliwość.

\*\*\*\*\* Jak zobaczymy później (równ. 39-14),  $\varphi$  nie zależy od  $\mathcal{E}_m$ .

\*\*\*\*\* Do obwodu z rys. 39-1 moglibyśmy zastosować II prawo Kirchhoffa i rozwiązać otrzymane równanie różniczkowe, ale wymagałoby to od nas znajomości matematyki wykraczającej poza zakres tej książki. Posłużymy się opisem nie tak bezpośrednim, ale również wartościowym, natomiast fizycznie bardziej pouczającym.

1. *Obwód opornościowy.* Rysunek 39-2a przedstawia obwód zawierający jedynie oporność omową, połączoną ze źródłem zmiennej SEM danej równaniem (39-1). Na podstawie II prawa Kirchhoffa oraz korzystając z definicji oporu, możemy napisać

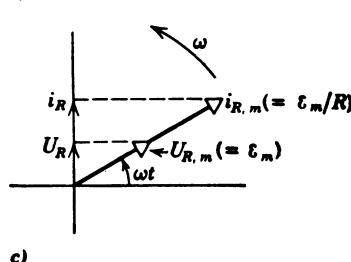
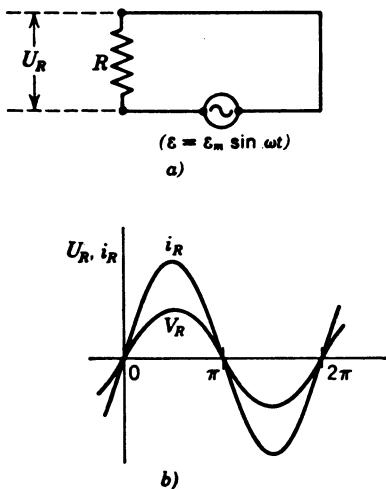
$$U_R = \mathcal{E}_m \sin \omega t \quad (\text{II prawo Kirchhoffa}), \quad (39-3a)$$

$$U_R = i_R R \quad (\text{z definicji } R), \quad (39-3b)$$

czyli

$$i_R = \frac{\mathcal{E}_m}{R} \sin \omega t. \quad (39-3c)$$

Z porównania zależności (39-3a) i (39-3c) widać, że zmienne z czasem wielkości  $U_R$  oraz  $i_R$  są zgodne w fazie, tzn. osiągają swoją maksymalną wartość w tym samym czasie. Jak widać z równania (39-2) mają one również taką samą częstotliwość kołową  $\omega$ . Oba te fakty przedstawiamy na rys. 39-2b, będącym wykresem równań (39-3a) i (39-3c).



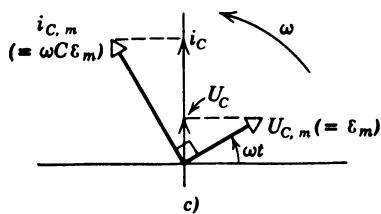
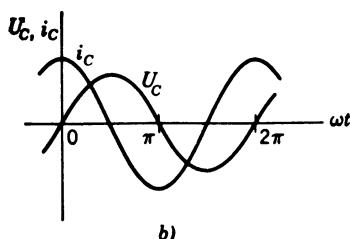
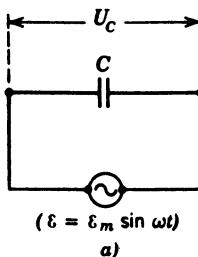
Rys. 39-2. (a) Pojedynczy obwód czysto omowy zawierający źródło napięcia przemiennego. (b) Natężenie prądu oraz napięcie na oporniku są zgodne w fazie. W równaniu (39-2),  $\varphi = 0$ . (c) Diagram strzałkowy lustrujący to samo co b. Strzałki na osi pionowej przedstawiają wartości chwilowe

Na rysunku 39-2c pokazano inny sposób przedstawienia sytuacji. Jest to wykres, nazywany tutaj *diagramem strzałkowym*, na którym przedstawiono strzałki zakończone trójkątami, obracające się z częstotliwością kołową  $\omega$  dookoła wspólnego początku. Strzałki te nazwane strzałkami fazowymi\* mają następujące właściwości: (a) Długość strzałki

\* W elektronice takie obracające się wektory nazywane są *wskazami* (przyp. tłum.).

jest proporcjonalna do maksymalnej wartości rozważanej zmiennej wielkości, a więc  $\mathcal{E}_m$  dla  $U_R$  (równ. 39-3a) i  $(\mathcal{E}_m/R)$  dla  $i_R$  (równ. 39-3c)), oraz (b) rzuty strzałek na oś pionową dają chwilowe wartości rozważanych zmiennych wielkości. Rzuty strzałek fazowych na osi pionowej przedstawiają więc zmieniające się z czasem wielkości  $U_R$  oraz  $i_R$ , podobnie jak odpowiednie równania (39-3a) i (39-3c). To, że  $U_R$  oraz  $i_R$  są w tej samej fazie, wynika z faktu, że odpowiednie strzałki fazowe na rys. 39-2c układają się wzdłuż tej samej linii.

Prześledźcie obrót strzałek fazowych na rys. 39-2c i upewnijcie się, że podany diagram kompletnie i poprawnie ilustruje równania (39-3a) i (39-3c).



Rys. 39-3. (a) Pojedynczy obwód czysto pojemnościowy zawierający źródło napięcia przemiennego. (b) Napięcie na kondensatorze opóźnia się względem prądu o jedną czwartkę okresu. W równaniu (39-2),  $\varphi = -90^\circ$ . (c) Diagram strzałkowy ilustrujący to samo co b. Strzałki na osi pionowej przedstawiają wartości chwilowe

**2. Obwód pojemnościowy.** Rysunek 39-3a przedstawia obwód zawierający jedynie pojemność połączoną ze źródłem zmiennej SEM danej równaniem (39-1). Korzystając z II prawa Kirchhoffa oraz z definicji pojemności możemy napisać

$$U_C = \mathcal{E}_m \sin \omega t \quad (\text{II prawo Kirchhoffa}) \quad (39-4a)$$

oraz

$$U_C = q/C \quad (\text{definicja pojemności}). \quad (39-4b)$$

Z tych dwóch zależności otrzymujemy

$$q = \mathcal{E}_m C \sin \omega t,$$

skąd

$$i_C \left( = \frac{dq}{dt} \right) = \omega C \mathcal{E}_m \cos \omega t. \quad (39-4c)$$

Porównując zależności (39-4a) oraz (39-4c) stwierdzamy, że zmieniające się z czasem wielkości  $U_C$  oraz  $i_C$  są przesunięte w czasie względem siebie o jedną czwartą okresu. Widac to na rysunku 39-3b będącym wykresem równań 39-4a i 39-4c. Widzimy również, że  $U_C$  opóźnia się względem  $i_C$ , to znaczy, że z upływem czasu  $U_C$  osiąga swoje maksimum o jedną czwartą okresu później niż  $i_C$ .

Równie jasno przedstawia to diagram na rys. 39-3c. Jest oczywiste, że podczas obrotu strzałek fazowych w zadanym kierunku, przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara,  $U_{C,m}$  opóźnia się względem  $i_{C,m}$  o jedną czwartą okresu.

Przesunięcie fazowe  $\varphi$  pomiędzy  $U_C$  oraz  $i_C$  na rys. 39-3 wynosi  $-90^\circ$ . Aby to pokazać, przyjmijmy, że w równaniu (39-2)  $\varphi = -90^\circ$ . Po obliczeniach otrzymamy

$$i = i_m \cos \omega t,$$

zgodnie z równaniem (39-4c).

W celu ujednolicenia notacji przepiszmy równanie (39-4c) w postaci

$$i_C = \frac{\mathcal{E}_m}{X_C} \cos \omega t. \quad (39-5a)$$

Musimy wówczas przyjąć, że

$$X_C = \frac{1}{\omega C}. \quad (39-5b)$$

$X_C$  nazywamy *opornością pojemnościową (reaktancją pojemnościową)*. Porównując wzory (39-3c) i (39-5a) widzimy, że amplitudy prądów wynoszą odpowiednio ( $\mathcal{E}_m/R$ ) i ( $\mathcal{E}_m/X_C$ ). Na podstawie tego wnioskujemy, że jednostkę  $X_C$  musi być om. Czy można pokazać to bezpośrednio, korzystając z równania (39-5b)?

Zauważmy również, że  $\mathcal{E}_m$  w równaniu (39-4a) jest maksymalną wartością  $U_C$  ( $= U_{C,m}$ ). Wobec tego, korzystając z równania (39-5a) możemy napisać

$$U_{C,m} = i_{C,m} X_C. \quad (39-6a)$$

Oznacza to, że jeżeli przez kondensator przepływa *jakikolwiek* prąd zmienny o amplitudzie  $i_m$  i częstotliwości kołowej  $\omega$ , maksymalne napięcie na kondensatorze (*niezależnie od stopnia złożoności obwodu, w którym znajduje się kondensator*) wynosi

$$U_{C,m} = i_m X_C. \quad (39-6b)$$

**Przykład 1.** Niech na rys. 39-3a  $C = 150 \mu\text{F}$ ,  $\nu = 60 \text{ Hz}$ , a  $\mathcal{E}_m = 300 \text{ V}$ . Znajdzie (a)  $U_{C,m}$ , (b)  $X_C$  oraz (c)  $i_{C,m}$ .

(a) Z równania (39-4a)

$$U_{C,m} = 300 \text{ V}.$$

(b) Z równania (39-5b),

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi\nu C} = \frac{1}{(2\pi)(60 \text{ Hz})(150 \cdot 10^{-6} \text{ F})} = 18 \Omega.$$

(c) Z równania (39-6a)

$$i_{C,m} = \frac{U_{C,m}}{X_C} = \frac{300 \text{ V}}{18 \Omega} = 17 \text{ A}.$$

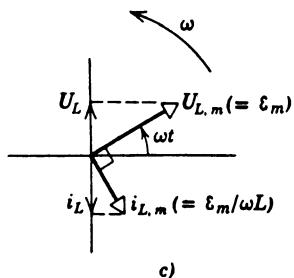
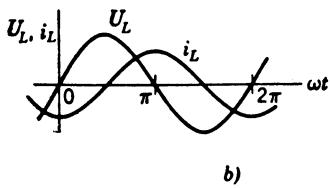
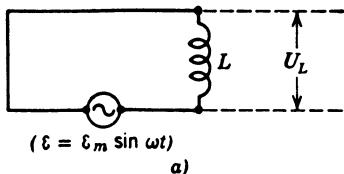
Jak zmieniłoby się  $i_{C,m}$  gdybyśmy podwoili częstotliwość? Czy intuicyjnie wydaje się to oczywiste?

**3. Obwód indukcyjny.** Na rysunku 39-4a przedstawiono obwód zawierający jedynie indukcyjność, połączoną ze zmienną siłą elektromotoryczną o postaci danej równaniem (39-1). Na podstawie II prawa Kirchhoffa oraz definicji indukcyjności możemy napisać

$$U_L = \mathcal{E}_m \sin \omega t \quad (\text{II prawo Kirchhoffa}) \quad (39-7a)$$

oraz

$$U_L = L di/dt \quad (\text{definicja } L). \quad (39-7b)$$



Rys. 39-4. (a) Pojedynczy obwód czysto indukcyjny zawierający źródło napięcia przemiennego. Napięcie na cewce wyprzedza prąd o jedną czwartą okresu. W równaniu (39-2),  $\varphi = +90^\circ$ . (c) Diagram strzałkowy ilustrujący to samo co b. Strzałki na osi pionowej przedstawiają wartości chwilowe

Z tych dwóch zależności widzimy, że  $di = (\mathcal{E}_m/L) \sin \omega t dt$ , a więc

$$i_L = \int di = -\frac{\mathcal{E}_m}{\omega L} \cos \omega t. \quad (39-7c)$$

Porównując zależności (39-7a) i (39-7c) widzimy, że zmieniające się z czasem wielkości  $U_L$  oraz  $i_L$  są przesunięte w fazie o jedną czwartą okresu. Pokazujemy to na rysunku 39-4b będącym ilustracją równań (39-7a) oraz (39-7c). Widzimy, że  $U_L$  wyprzedza  $i_L$ , to znaczy, że z upływem czasu  $U_L$  osiąga swoje maksimum o jedną czwartą okresu wcześniejszej niż  $i_L$ .

Równie jasno widzimy to na diagramie z rys. 39-4c. Jest oczywiste, że jeżeli strzałki fazowe obracają się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara,  $U_{L,m}$  wyprzedza  $i_{L,m}$  o jedną czwartą okresu.

Przesunięcie fazowe  $\varphi$  pomiędzy  $U_L$  oraz  $i_L$  wynosi  $+90^\circ$ . Aby to pokazać przyjmijmy, że w równaniu (39-2)  $\varphi = +90^\circ$ . Po przekształceniach otrzymujemy

$$i = -i_m \cos \omega t,$$

zgodnie z równaniem (39-70).

Podobnie jak poprzednio, w celu ujednolicenia notacji przepiszmy równanie (39-7c) w postaci

$$i_L = -\frac{\mathcal{E}_m}{X_L} \cos \omega t, \quad (39-8a)$$

przyjmując, że

$$X_L = \omega L. \quad (39-8b)$$

$X_L$  nazywamy *opornością indukcyjną (reaktancją indukcyjną)*. Podobnie jak w przypadku oporności pojemnościowej (równ. (39-5)) widzimy, że jednostką układu SI dla  $X_L$  musi być  $\Omega$ . Czy można pokazać to jawnie, korzystając bezpośrednio z równania (39-8b)?

Zauważmy również, że  $\mathcal{E}_m$  w równ. (39-7a) jest maksymalną wartością  $U_L (= U_{L,m})$ . Wobec tego, korzystając z równania (39-7a) możemy napisać

$$U_{L,m} = i_{L,m} X_L. \quad (39-9a)$$

Oznacza to, że jeżeli w cewce płynie *jakikolwiek* prąd zmienny o amplitudzie  $i_m$  i częstotliwości kołowej  $\omega$ , wówczas maksymalne napięcie na cewce (niezależnie od stopnia złożoności obwodu, w którym się ona znajduje) jest dane przez

$$U_{L,m} = i_m X_L. \quad (39-9b)$$

**Przykład 2.** Niech na rysunku 39-4  $L = 60 \text{ mH}$ ,  $\nu = 60 \text{ Hz}$ , a  $\mathcal{E}_m = 300 \text{ V}$ . Znajdzieć (a)  $U_{L,m}$ , (b)  $X_L$  oraz (c)  $i_{L,m}$ .

(a) Na podstawie równania (39-7a)

$$U_{L,m} = \mathcal{E}_m = 300 \text{ V}.$$

(b) Na podstawie równania (39-8b)

$$X_L = \omega L = 2\pi\nu L = (2\pi)(60 \text{ Hz})(60 \cdot 10^{-3} \text{ H}) = 23 \Omega.$$

(c) Na podstawie równania (39-9a)

$$i_{L,m} = \frac{U_{L,m}}{X_L} = \frac{300 \text{ V}}{23 \Omega} = 13 \text{ A}.$$

Jak zmieniłoby się  $i_{L,m}$ , gdybyśmy podwoili częstotliwość? Czy odpowiedź wydaje się intuicyjnie oczywista?

### 39-3. Pojedynczy obwód RLC

Skończysz oddzielne analizowanie pojedynczych obwodów  $R$ ,  $C$  i  $L$  powróćmy obecnie do rys. 39-1, który przedstawia obwód zawierający wszystkie te (trzy) elementy. Przyłożona SEM jest dana równaniem (39-1)

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin \omega t, \quad (39-1)$$

a prąd płynący w obwodzie (wszędzie jednakowy) ma postać taką jak w równaniu (39-2)

$$i = i_m \sin(\omega t - \varphi), \quad (39-2)$$

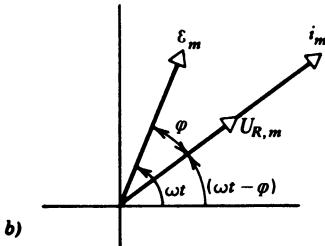
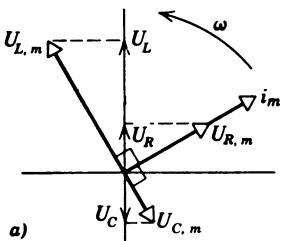
w którym należy określić  $i_m$  oraz  $\varphi$ .

Zaczynamy od zastosowania do obwodu z rys. 39-1 II prawa Kirchhoffa otrzymując

$$\mathcal{E} = U_R + U_C + U_L. \quad (39-10)$$

Wszystkie trzy napięcia są wielkościami zmieniającymi się sinusoidalnie w czasie, a ich maksymalne wartości wynoszą kolejno:  $\mathcal{E}_m$  (patrz równ. (39-1)),  $U_{R,m} (= i_m R)$ ,  $U_{C,m} (= i_m X_C)$ ; patrz równ. (39-6b)), oraz  $U_{L,m} (= i_m X_L)$ ; patrz równ. (39-9b)).

Mimo że równanie (39-10) jest prawdziwe w dowolnej chwili czasu, nie możemy w łatwy sposób wykorzystać go w celu znalezienia  $i_m$  oraz  $\varphi$  z równania (39-2) z powodu różnicy faz, jakie istnieją pomiędzy poszczególnymi wyrazami. Musimy więc posłużyć się diagramem przedstawionym na rys. 39-5a, na którym podane są maksymalne wartości  $i$ ,  $U_R$ ,  $U_C$  i  $U_L$ . Wracając do paragrafu 39-2, możemy przekonać się, że różnice faz są tu przedstawione właściwie, tzn.  $U_R$  jest *zgodne w fazie* z prądem (rys. 39-2),  $U_C$  jest *opóźnione* względem prądu o jedną czwartą okresu (rys. 39-3), a  $U_L$  *wyprzedza* prąd o jedną czwartą okresu (rys. 39-4).



Rys. 39-5. (a) Diagram strzałkowy odpowiadający obwodowi z rys. 39-1. Zwróćcie uwagę na strzałki fazowe, których długości przedstawiają amplitudy, oraz na wartości chwilowe zaznaczone na osi pionowej. (b) Taki sam diagram ilustrujący zależność SEM  $\mathcal{E}$  oraz natężeniem prądu  $i$  z równań (39-1) oraz (39-2), odpowiednio. Pokazany jest wyraźnie kąt fazowy  $\varphi$  z równania (39-2)

Podobnie jak w paragrafie 39-2, rzuty strzałek fazowych na os pionową przedstawiają chwilowe wartości rozważanych wielkości. Wobec tego *algebraiczna suma* rzutów na os pionową  $U_R$ ,  $U_C$  i  $U_L$  jest równa  $\mathcal{E}$ , zgodnie z równaniem (39-10).

Z drugiej strony twierdzimy, że (za założenia) *wektorowa suma* reprezentujących amplitudy strzałek fazowych  $U_{R,m}$ ,  $U_{C,m}$  i  $U_{L,m}$  daje strzałkę fazową, której amplitudą jest  $\mathcal{E}_m$  z równania (39-1). Rzut  $\mathcal{E}_m$  na os pionową będzie, oczywiście, zmieniającą się z czasem wartością  $\mathcal{E}$  z równania (39-1), tzn. będzie to  $U_R + U_C + U_L$ , jak stwierdza równanie (39-10). Zauważmy, że przy działaaniach na wektorach suma (algebraiczna) rzutów dowolnej liczby wektorów na jakąś linię prostą jest równa rzutowi sumy (wektorowej) tych wektorów na tę prostą.

Aby znaleźć  $\mathcal{E}_m$ , korzystamy z rys. 39-5, na którym tworzymy różnicę  $U_{L,m} - U_{C,m}$ . Jest ona prostopadła do  $U_{R,m}$ , wobec czego mamy

$$\mathcal{E}_m = \sqrt{U_{R,m}^2 + (U_{L,m} - U_{C,m})^2} = \sqrt{(i_m R)^2 + (i_m X_L - i_m X_C)^2} = i_m \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}. \quad (39-11)$$

Wielkość, przez którą jest pomnożone  $i_m$  nazywamy *zawadą (impedancją) Z* obwodu z rys. 39-1. Wobec tego możemy napisać

$$i_m = \frac{\mathcal{E}_m}{Z}, \quad (39-12)$$

co przypomina nam zależność  $i = \mathcal{E}/R$  dla pojedynczego obwodu z opornością czysto omową oraz stałą SEM (równ. (32-2)). Jednostką zawady w układzie SI jest oczywiście om.

Równanie (39-12) możemy przepisać (patrz równ. (39-11), (39-5b) oraz (39-8b)) w postaci

$$i_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}. \quad (39-13)$$

W ten sposób rozwiązałyśmy pierwsze z zadań postawionych na początku paragrafu 39-2; wyraźiliśmy  $i_m$  przy pomocy  $\mathcal{E}_m$ ,  $\omega$ ,  $R$ ,  $C$  i  $L$ . Pozostaje jeszcze znalezienie przesunięcia fazowego  $\varphi$  pomiędzy  $i$  oraz  $\mathcal{E}$ ; porównaj wzory (39-1) oraz (39-2).

Patrząc na kąt  $\varphi$  na rys. 39-5b możemy napisać

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{L,m} - U_{C,m}}{U_{R,m}} = \frac{i_m(X_L - X_C)}{i_m R} = \frac{X_L - X_C}{R}. \quad (39-14)$$

Jest to rozwiązanie drugiego zadania postawionego na początku paragrafu 39-2; wyraźiliśmy  $\varphi$  przy pomocy  $\omega$ ,  $R$ ,  $C$  i  $L$ . Jak stwierdziliśmy już wcześniej,  $\varphi$  nie zależy od  $\mathcal{E}_m$ . Zwiększenie  $\mathcal{E}_m$  powoduje wzrost  $i_m$  (patrz równ. (39-13)), natomiast nie zmienia  $\varphi$ ; zostaje zmieniona skala, ale nie *natura zjawiska*.

Na rysunku 39-5b przyjęliśmy umownie, że  $X_L > X_C$ , tzn. założyliśmy, że obwód z rysunku 39-1 jest bardziej indukcyjny niż pojemnościowy. Przy tych założeniach  $\mathcal{E}_m$  *wyprzedaża*  $i_m$  (ale nie o jedną czwartą okresu, jak w przypadku czysto indukcyjnego obwodu z rys. 39-4, lecz o mniej niż  $+90^\circ$ ). Przesunięcie fazowe w równaniu (39-14) (a również w równ. (39-2)) jest dodatnie.

Gdybyśmy mieli do czynienia z drugą możliwością, tzn.  $X_C > X_L$ , obwód byłby bardziej pojemnościowy niż indukcyjny i  $\mathcal{E}_m$  byłoby *opóźnione* względem  $i_m$  (jak w czysto pojemnościowym obwodzie z rys. 39-3, ale nie aż o jedną czwartą okresu). Kąt  $\varphi$  w równaniu (39-14) (a również w równ. (39-2)) stałby się wówczas automatycznie ujemny, zgodnie z faktem, że byłoby to przejście od sytuacji, w której mamy do czynienia z wyprzedzaniem prądu przez napięcie do sytuacji odwrotnej.

**Przykład 3.** Niech, na rys. 39-1,  $R = 4,0 \Omega$ ,  $C = 150 \mu F$ ,  $L = 60 \text{ mH}$ ,  $v = 60 \text{ Hz}$ , a  $\mathcal{E}_m = 300 \text{ V}$ . Znaleźć: (a)  $X_C$ , (b)  $X_L$ , (c)  $Z$ , (d)  $i_m$  oraz (e)  $\varphi$ .

(a)  $X_C = 18 \Omega$ , jak w przykładzie 1. Zauważmy, że  $X_C$  zależy wyłącznie od  $C$  i  $\omega$  (w równ. (38-5b)), a nie zależy od rodzaju obwodu, w którym  $C$  jest elementem.

(b)  $X_L = 23 \Omega$ , jak w przykładzie 2. Zauważmy, że  $X_L$  zależy wyłącznie od  $L$  i  $\omega$  (równ. (39-8b)), a nie zależy od rodzaju obwodu, w którym  $L$  jest elementem.

(c) Korzystając z równania (39-11), mamy

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(4,0 \Omega)^2 + (23 \Omega - 18 \Omega)^2} = 6,4 \Omega.$$

Zauważmy, że obwód jest bardziej indukcyjny niż pojemnościowy, tzn.  $X_L > X_C$ , jak w równaniu (39-5).

(d) Korzystając z równania (39-12) mamy

$$i_m = \frac{\mathcal{E}_m}{Z} = \frac{300 \text{ V}}{6,4 \Omega} = 47 \text{ A}.$$

(e) Korzystając z równania (39-14), mamy

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{23 \Omega - 18 \Omega}{4,0 \Omega} = 1,25,$$

czyli  $\varphi = +51^\circ$ . Ponieważ  $X_L > X_C$ ,  $\varphi$  jest dodatnie, więc jak widać na rys. 39-5b,  $\mathcal{E}_m$  wyprzedza  $i_m$ , ale zgodnie z tym czego oczekiwaliśmy, o mniej niż  $+90^\circ$ .

### 39-4. Moc w obwodzie prądu zmiennego

Moc jest sprawą bardzo ważną z praktycznego punktu widzenia. Gdy zapalacie światło w pokoju, macie do czynienia bezpośrednio z podstawowymi zagadnieniami omawianymi w tym paragrafie. Zaczniemy od stwierdzenia, że wydzielanie mocy w obwodzie  $RLC$  (skoncentrujemy naszą uwagę, przykładowo, na obwodzie z rys. 39-1) występuje *jedynie* na oporze omowym,  $R$ ; na elementach czysto pojemnościowych lub czysto indukcyjnych nie występują czynniki, które mogłyby powodować rozpraszanie energii.

Rozważmy więc czysto omowy, pojedynczy obwód z rys. 39-2a, z dwóch punktów widzenia. Najpierw zastąpmy zmienną SEM przez stałą SEM o wartości  $\mathcal{E}_m$ . Moc (stała) wydzielona na oporze  $R$  (patrz rówн. (31-17)) jest dana przez

$$P = \frac{\mathcal{E}_m^2}{R} \quad (\text{stała SEM}). \quad (39-15)$$

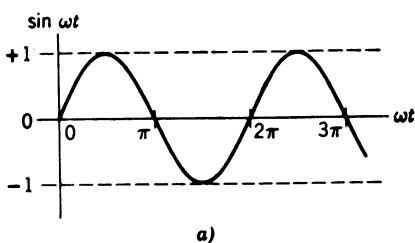
Natomiast jeżeli przyłożymy zmienną SEM daną równaniem (39-1), otrzymujemy

$$P(t) = \frac{(\mathcal{E}_m \sin \omega t)^2}{R} \quad (\text{zmienna SEM}). \quad (39-16)$$

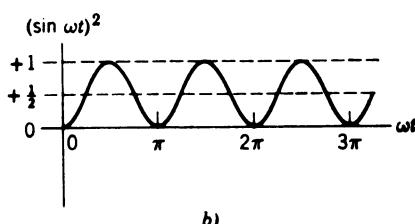
Tym co nas rzeczywiście interesuje nie jest jednak  $P(t)$ , wynosząca czasami zero, lecz średnia wartość  $P(t)$  ( $= P_{\text{sr}}$ ), czyli

$$P_{\text{sr}} = \frac{\mathcal{E}_m^2}{R} \overline{(\sin \omega t)^2}. \quad (39-17)$$

Na rysunku 39-6 przedstawiono (a) wykres  $\sin \omega t$  oraz (b) wykres  $(\sin \omega t)^2$ . Zauważmy, że wartość średnia  $\sin \omega t = 0$  (wartości dodatnie znoszą się z wartościami ujemnymi).



a)



b)

Rys. 39-6. (a) Wykres  $\sin \omega t$ . Widać, że wartość średnia tej funkcji dla całkowitej liczby okresów jest równa零. Odcinki krzywej, leżące powyżej osi odciętych znoszą się dokładnie z odcinkami leżącymi poniżej tej osi. (b) Wykres  $(\sin \omega t)^2$ . Widać, że wartość średnia tej funkcji dla całkowitej liczby okresów jest równa  $\frac{1}{2}$ . Odcinki krzywej leżące powyżej linii poziomej „ $\frac{1}{2}$ ” znoszą się dokładnie z odcinkami leżącymi poniżej tej linii. Krzywa nie ma wartości ujemnych

Natomiast wartość średnia  $\overline{(\sin \omega t)^2} = 1/2$  (nie ma wartości ujemnych, a każdej wartości większej od 1/2 odpowiada wartość o tyle samo mniejsza od 1/2). Wobec tego

$$P_{\text{sr}} = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{E}_m^2}{R} = \left( \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{1}{R}. \quad (39-18)$$

Wielkość  $\mathcal{E}_m/\sqrt{2}$  będziemy nazywać *wartością średnią kwadratową*  $\mathcal{E}$  lub *wartością skuteczną* ( $= \mathcal{E}_{sk}$ ). Nazwa ta ma swoje uzasadnienie. Najpierw podnosimy  $\mathcal{E}_m$  do kwadratu, następnie dokonujemy uśrednienia (czyli znajdujemy *wartość średnią*) dla całkowitej liczby okresów (czynnik uśredniający dla przypadku funkcji sinusoidalnej wynosi 1/2), a na zakończenie wyciągamy *pierwiastek kwadratowy*\*. Równanie (39-18) możemy więc przepisać w postaci

$$P_{sk} = \frac{\mathcal{E}_{sk}^2}{R}. \quad (39-19)$$

Równanie (39-19) ma postać podobną do równania (31-17), wobec tego możemy stwierdzić, że *średnia moc* wydzielana w obwodzie prądu zmiennego a więc to co nas zwykle interesuje, jest równa mocy prądu stałego o wartościach  $\mathcal{E}$ ,  $U$  oraz  $i$  równych odpowiednim wartościom skutecznym dla prądu zmiennego. Przyrządy pomiarowe dla prądu zmiennego, takie jak amperomierz i woltomierz, mają na ogół zbyt dużą bezwładność mechaniczną, aby móc nadążać za aktualnymi zmianami oscylujących wielkości. Są one więc wyskalowane w ten sposób, że dają odczyty wartości  $\mathcal{E}_{sk}$ ,  $U_{sk}$  oraz  $i_{sk}$ . Jeżeli więc woltomierz prądu zmiennego podłączymy do gniazdk elektrycznego i odczytamy wartość 220 V, będzie to oznaczało, że maksymalna różnica potencjałów na zaciskach tego gniazdk wynosi  $\sqrt{2}$  (220 V) czyli 310 V. Jednym powodem wprowadzenia pojęcia wartości skutecznych przy rozważaniu obwodów prądu zmiennego jest chęć korzystania z dobrze znanych z paragrafu 31.5 wzorów na moc prądu stałego. Przypomnijmy więc:

$$\mathcal{E}_{sk} = \mathcal{E}_m/\sqrt{2}, \quad U_{sk} = U_m/\sqrt{2} \quad \text{oraz} \quad i_{sk} = i_m/\sqrt{2}.$$

Ponieważ stała proporcjonalności ( $= 1/\sqrt{2}$ ) jest we wszystkich przypadkach jednakowa, bardzo ważną zależność (39-13) możemy przepisać w najczęściej spotykanej postaci

$$i_{sk} = \frac{\mathcal{E}_{sk}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}. \quad (39-21)$$

**Przykład 4.** (a) Do pojedynczego obwodu opornościowego o  $R = 150 \Omega$  przyłożono stałą SEM ( $\mathcal{E}_0 = 120$  V). Jaka moc wydziela się w obwodzie? (b) Stałą SEM  $\mathcal{E}_0$  zastępujemy zmienną SEM ( $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin \omega t$ ). Jaką wartość powinno mieć  $\mathcal{E}_m$ , żeby średnia moc pozostała nie zmieniona?

$$(a) \quad P = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R} = \frac{(120 \text{ V})^2}{150 \Omega} = 96 \text{ W}.$$

(b) Korzystając z równania (39-18) i warunków zadania możemy napisać

$$P_{\text{sr}} (= 96 \text{ W}) = \left( \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{1}{R},$$

---

\* Z wartościami średnimi kwadratowymi spotkaliśmy się już wcześniej, mianowicie przy okazji średniej kwadratowej prędkości cząsteczek (patrz paragraf 23-4; patrz również s. 327).

skąd

$$\mathcal{E}_m = \sqrt{2P_{sr}R} = \sqrt{2 \cdot 96 \text{ W} \cdot 150 \Omega} = 170 \text{ V}.$$

Na podstawie równania (39-20) mamy więc

$$\mathcal{E}_{sk} = \mathcal{E}_m / \sqrt{2} = 170 \text{ V} / \sqrt{2} = 120 \text{ V},$$

jak należało oczekiwać.

Przejedźmy teraz od obwodu czysto opornościowego do rozważania zagadnień mocy dla bardziej złożonego obwodu przedstawionego na rys. 39-1, zawierającego wszystkie trzy elementy,  $R$ ,  $C$  i  $L$ . Dla mocy chwilowej możemy napisać (porównaj równ. (31-15))

$$P(t) = \mathcal{E}(t)i(t) = \mathcal{E}_m \sin \omega t i_m \sin(\omega t - \varphi). \quad (39-22)$$

Jeżeli rozwiniemy czynnik  $\sin(\omega t - \varphi)$  korzystając z trygonometrycznej tożsamości otrzymamy

$$\begin{aligned} P(t) &= \mathcal{E}_m i_m \sin \omega t (\sin \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi) = \\ &= \mathcal{E}_m i_m \sin^2 \omega t \cos \varphi - \mathcal{E}_m i_m \sin \omega t \cos \omega t \sin \varphi. \end{aligned} \quad (39-23)$$

Znajdując  $\overline{P(t)}$  ( $= P_{sr}$ ), co jest naszym głównym zadaniem, dostajemy

$$P_{sr} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_m i_m \cos \varphi + 0, \quad (39-24)$$

ponieważ, jak widzieliśmy,  $\sin^2 \omega t = \frac{1}{2}$ , natomiast (patrz zadanie 9)  $\sin \omega t \cos \omega t = 0$ . Podstawiając  $\mathcal{E}_{sk} = \mathcal{E}_m / \sqrt{2}$  oraz  $i_{sk} = i_m / \sqrt{2}$  (równ. (39-20)) równanie (39-24) możemy przepisać w postaci

$$P_{sr} = \mathcal{E}_{sk} i_{sk} \cos \varphi, \quad (39-25)$$

przy czym czynnik  $\cos \varphi$  będziemy nazywać *współczynnikiem mocy*. Obwód przedstawiony na rys. 39-2, z obciążeniem czysto opornościowym, charakteryzuje się wartością  $\varphi = 0$  (czyli  $\cos \varphi = 1$ ), ostatnie równanie przyjmuje więc tu postać

$$P_{sr} = \mathcal{E}_{sk} i_{sk} \quad (\text{obciążenie czysto opornościowe}). \quad (39-26)$$

Opuszczając indeksy otrzymujemy taką samą zależność (por. równ. (31-15)), jaką moglibyśmy napisać dla obwodu prądu stałego o natężeniu i napięciu równym podanym wartościami średnim kwadratowym.

**Przykład 5.** Założmy, że elementy na rys. 39-1 mają takie same wartości, jakie przyjęliśmy w przykładzie 3, a mianowicie  $R = 4,0 \Omega$ ,  $C = 150 \mu\text{F}$ ,  $L = 60 \text{ mH}$ ,  $v = 60 \text{ Hz}$ , a  $\mathcal{E}_m = 300 \text{ V}$ . Znaleźć (a)  $\mathcal{E}_{sk}$ , (b)  $i_{sk}$ , (c)  $\varphi$ , (d)  $\cos \varphi$  oraz (e)  $P_{sr}$ .

(a)  $\mathcal{E}_{sk} = \mathcal{E}_m / \sqrt{2} = (300 \text{ V}) / \sqrt{2} = 210 \text{ V}$ .

(b)  $i_{sk} = i_m / \sqrt{2} = (47 \text{ A}) / \sqrt{2} = 33 \text{ A}$ ; patrz przykład 3, część (d).

(c)  $\varphi = 51^\circ$ , jak w przykładzie 3, część (e).

(d) Współczynnik mocy,  $\cos \varphi$ , jest równy  $\cos 51^\circ$ , czyli 0,63.

(e)  $P_{sr} = \mathcal{E}_{sk} i_{sk} \cos \varphi = (210 \text{ V})(33 \text{ A})/0,63 = 4,4 \text{ kW}$ .

### 39-5. Rezonans w obwodach prądu przemiennego

W tym paragrafie powrócimy do obwodu z rys. 39-1 i rozważmy, jaki wpływ na średnią wartość prądu  $i_{sk}$  mają zmiany częstotliwości kołowej przyłożonej SEM, danej równaniem (39-1), przy założeniu, że  $\mathcal{E}_m$ ,  $R$ ,  $C$  i  $L$  pozostają nie zmienione.

Podkreślimy już analogię między układami mechanicznymi, takimi jak masy zaczepione na sprężybach (rys. 8-4) oraz układami elektromagnetycznymi (rys. 38-1). Pamiętając o tym, możemy patrzeć na

obwód  $RCL$  z rys. 39-1 jako na układ posiadający własną częstotliwość drgań, poddany działaniu pewnych zewnętrznych wpływów, w tym wypadku zmiennej siły elektromotorycznej (danej równaniem (39.1))  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin \omega t$ , w którym  $\omega$  jest częstotliwością kołową „siły wymuszającej”. Możemy oczekiwać, że w przypadku swobodnych drgań obwodu, maksymalną wartość „reakcji”, określonej tutaj jako  $i_{sk}$  z równania (39.21), otrzymamy wówczas, gdy częstotliwość kołowa „siły wymuszającej” będzie równa częstotliwościowej  $\omega_0$  obwodu. Sprawdźmy, czy te analogie oraz nasze oczekiwania są zgodne z rzeczywistością.

Z równ. (39.21) widać, że  $i_{sk}$  osiąga maksymalną wartość wówczas, gdy  $X_L = X_C$ . Jest ona równa

$$i_{sk, \max} = \frac{\mathcal{E}_{sk}}{R}, \quad (39.27)$$

tzn. maksymalna wartość  $i_{sk}$  zależy wyłącznie od oporności omowej obwodu. Jeżeli  $R \rightarrow 0$ ,  $i_{sk, \max} \rightarrow \infty$ . Przyjmując, że  $X_L = X_C$  otrzymujemy

$$\omega L = \frac{1}{\omega C},$$

czyli

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (39.28)$$

Prawa strona równości (patrz równ. (38-3)) jest własną częstotliwością kołową  $\omega_0$  obwodu z rys. 39-1 po usunięciu  $R$  oraz  $\mathcal{E}$ . Oznacza to, że maksymalna wartość  $i_{sk}$  występuje wówczas, gdy częstotliwość  $\omega$  siły wymuszającej  $[\mathcal{E}(t)]$  z równ. (39-1) jest równa częstotliwościowej  $\omega_0$  nie tłumionego ( $R = 0$ ) obwodu z rys. 39-1.

Gdy warunek ten jest spełniony,

$$\omega = \omega_0, \quad (39.29)$$

mówimy, że wystąpił *rezonans*. Ze zjawiskiem rezonansu spotkaliśmy się już przy omawianiu cyklotronu (patrz paragraf 33-7) i w wielu równoważnych układach mechanicznych.

Rysunek 39-7 przedstawia wykres zależności  $i_{sk}$  od  $\omega$  (patrz równ. (39.21) dla ustalonych wartości  $\mathcal{E}_m$ ,  $C$  i  $L$  oraz trzech różnych wartości  $R$ ). Zwróćmy uwagę jak szybko następuje rozmycie maksimum rezonansowego w miarę wzrostu  $R$ .

Rysunek 39-7 ilustruje znany nam z codziennego doświadczenia przykład strojenia odbiorników radiowych. To, co robimy kręcząc gałkę z napisem „strojenie”, to właśnie dopasowanie częstotliwościowej  $\omega_0$  obwodu wewnętrznego do częstotliwości  $\omega$  sygnału emitowanego przez antenę urządzenia nadawczego, tak aby była spełniona równość (39.29). Na obszarze wielkich metropolii, gdzie nakłada się na siebie wiele nadchodzących sygnałów o niewiele różniących się częstotliwościach, ostrość (inaczej „jakość”; patrz zadanie 17) strojenia jest rzeczą bardzo istotną.

Rozważmy obecnie zjawisko rezonansu z punktu widzenia diagramu z rys. 39-5b. Jeżeli, jak wymaga warunek rezonansu,  $X_L = X_C$ , to  $U_{L, m} (= i_m X_L)$  oraz  $U_{C, m} (= i_m X_C)$  znoszą się nawzajem, a przesunięcie fazowe  $\varphi = 0$ . Fakt, że  $\varphi = 0$ , gdy  $X_L = X_C$ , widać jawnie w równaniu (39-14). Jeżeli  $\varphi > 0$ , jak na rys. 39-5b, mamy  $X_L > X_C$  i w obwodzie przeważa indukcyjność. W przeciwnym wypadku, tj. gdy  $\varphi < 0$ , mamy  $X_C > X_L$  i w obwodzie przeważa pojemność.

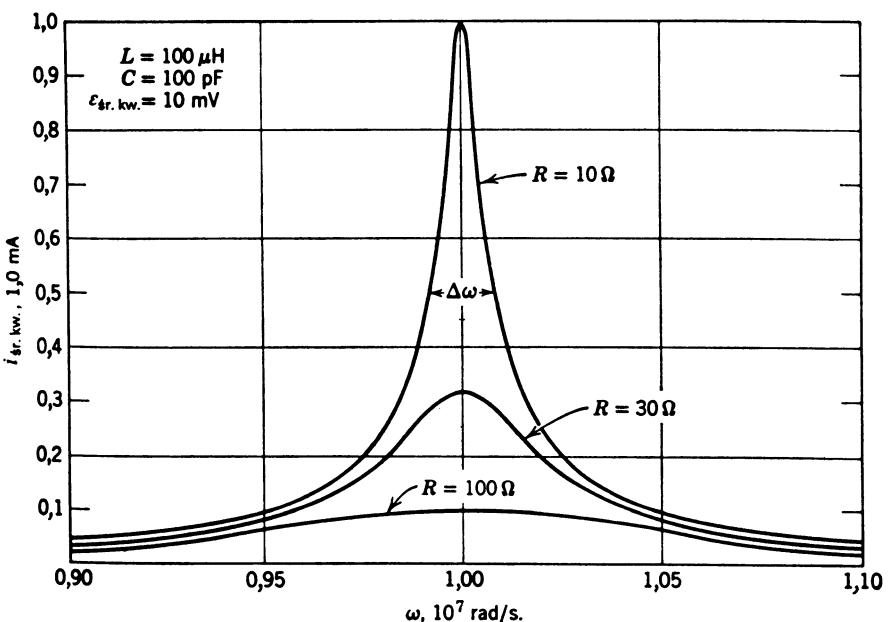
**Przykład 6.** Na rysunku 39-7 (a) pokaźać, że częstotliwość kołowa przyłożonej z zewnątrz SEM, przy której występuje rezonans, wynosi  $1,0 \cdot 10^7$  rad/s; (b) pokazać również, że maksymalna wartość  $i_{sk}$  w punkcie rezonansu, dla  $R = 10 \Omega$  wynosi  $1,0 \text{ mA}$ .

(a) W punkcie rezonansu  $X_L = X_C$ , czyli

$$\omega L = \frac{1}{\omega C},$$

skąd otrzymujemy

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(100 \mu\text{H})(100 \text{ pF})}} = 1,0 \cdot 10^7 \text{ rad/s.}$$



Rys. 39-7. Krzywe ilustrujące rezonans w obwodzie  $RLC$  z rys. 39-1, dla trzech różnych wartości  $R$ . Na osi poziomej odkładamy (zmienną) częstotliwość kołową  $\omega$  przyłożonej SEM. Zaznaczoną strzałkami w połowie wysokości krzywej dla  $R = 10 \Omega$  szerokość „ $\Delta\omega$ ” nazywamy szerokością „półkową”

(b) W punkcie rezonansu obowiązuje równanie (39-27), wobec czego

$$i_{sk} = \frac{\mathcal{E}_{sk}}{R} = \frac{10 \text{ mV}}{10 \Omega} = 1,0 \text{ A.}$$

### 39-6. Prostowniki oraz filtry prądu przemiennego

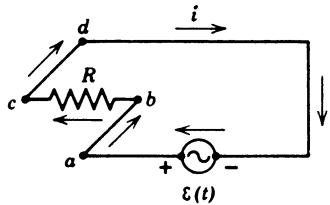
Często mamy dostęp do źródła zmiennej siły elektromotorycznej (danej na przykład równaniem (39-1),  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin \omega t$ ), a chcemy uzyskać, metodami elektronicznymi, stałe napięcie. Na przykład w urządzeniach telewizyjnych, urządzeniach odtwarzających dźwięki itp., dostępną siłą elektromotoryczną na wejściu jest zwykle zmienna SEM o wartościach\* 120 V ( $= \mathcal{E}_{sk}$ ) oraz 60 Hz ( $= \omega/2\pi$ ). Korzystając z tej SEM chcemy uzyskać jedno lub więcej stałych napięć (50 V, 300 V, 1500 V itd.), potrzebnych do uruchomienia elektronicznych obwodów urządzeń. Proces ten nazywamy *prostowaniem prądu przemiennego*, a urządzenia prostujące nazywamy *prostownikami*.

Prostowniki są to nieomówne elementy mające tę właściwość (patrz paragraf 31-3), że opór ich zależy od bieguności (polaryzacji) przyłożonej różnicy potencjałów. W tym paragrafie przyjmiemy, że prostownik jest idealny, tzn. ma opór  $R = 0$  dla danej bieguności, a opór  $R \rightarrow \infty$ , gdy bieguność zostaje odwrócona.

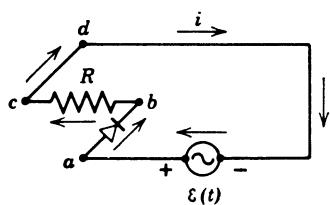
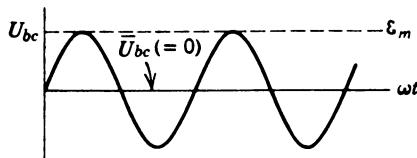
Prostownikami mogą być urządzenia półprzewodnikowe lub lampa diody próżniowe. Symbolem prostownika jest znak  $\rightarrowtail$ , przy czym strzałka wskazuje kierunek „przewodzenia prądu”.

\* Napięcie używane w sieci miejskiej USA. W Polsce odpowiednio 220 V i 50 Hz (przyp. tłum.).

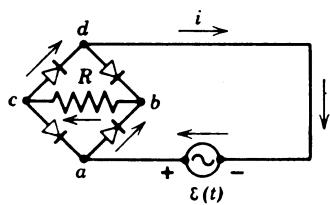
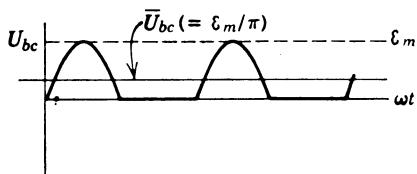
Na rysunku 39-8 przedstawiono pracę prostownika. Jako bazę rozważmy rys. 39-8a identyczny z rys. 39-2a. W obwodzie jest tylko źródło zmiennej SEM  $\mathcal{E}$  ( $= \mathcal{E}_m \sin \omega t$ ) połączone z oporem omowym  $R$ , a nie ma żadnych prostowników. Strzałki wskazują kierunek prądu przy danej bieguności SEM. Gdy kierunek SEM zostanie odwrócony strzałki zmieniają również kierunek na przeciwny.



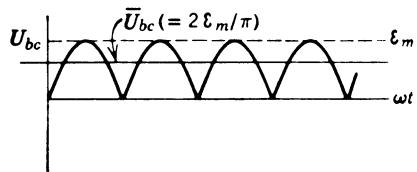
a)



b)



c)



Rys. 39-8. Źródło napięcia przemennego  $\mathcal{E}$  ( $= \mathcal{E}_m \sin \omega t$ ) dołączamy kolejno do trzech obwodów przedstawionych na rysunku. Na prawo pokazano odpowiednie napięcie  $U_{bc}$ . Zauważcie, że  $U_{bc}$  wzrasta od zera przez  $\mathcal{E}_m/\pi$  do  $2\mathcal{E}_m/\pi$ .

Jeżeli między punktami  $b$  i  $c$  włączymy oscyloskop katodowy, na ekranie zobaczymy obraz o kształcie pokazanym z prawej strony rysunku. Zauważmy, że w tym przypadku  $U_{bc} = 0$ , ponieważ dodatnie połówki sinusoidy znoszą się dokładnie z jej połówkami ujemnymi. Nie ma prostowania prądu, co jest zrozumiałe, ponieważ w obwodzie nie ma prostowników.

Jeżeli pomiędzy punktami  $b$  i  $c$  na rys. 39-8a włączymy woltomierz prądu stałego\*

\* Woltomierz taki możemy skonstruować dołączając szeregowo duży opornik  $R_0$  do cewki czulego galwanometru pokazanego na rysunku 33-9. Duży szeregowy opór  $R_0$  ( $\gg R$  na rys. 39-8a) jest konieczny po to, aby być pewnym, że włączenie woltomierza między punktami  $b$  i  $c$  na rys. 39-8a nie zmieni w stopniu zauważalnym rozkładu prądu w tym obwodzie.

(woltomierz *DC*)\*, wskaże on zero, ponieważ cewka przyrządu jest zbyt bezwładna, aby mogła nadążyć za zmianami kształtu pokazanymi na rys. 39-8a. Dla typowego woltomierza prądu stałego, przy częstotliwości np. 60 Hz, wskazówka będzie szybko oscylowała, z małą amplitudą, wokół swojego zerowego położenia. Dlaczego?

Na rysunku 39-8b, na odcinku *ab*łączamy prostownik tak, aby kierunek przewodzenia był od *a* do *b*. Gdy polaryzacja SEM zmienia się na przeciwną, obwód jest praktycznie biorąc otwarty, ponieważ (idealny) prostownik ma nieskończony opór.

Jeżeli pomiędzy punktami *b* i *c*łączymy oscyloskop katodowy, na ekranie zobaczymy kształt pokazany z prawej strony. Jest oczywiste, że  $\overline{U_{bc}} > 0$ . Rzeczywiście,

$$\overline{U_{bc}} = \frac{\mathcal{E}_m}{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \sin \omega t d(\omega t) + \int_0^{2\pi} 0 d(\omega t) \right\} = \frac{\mathcal{E}_m}{\pi}. \quad (39-30)$$

Urządzenie przedstawione na rys. 39-8b jest nazywane *prostownikiem jednopolówkowym* (lub *półokresowym*). Nie daje ono wprawdzie dokładnie stałej różnicy potencjałów, ale stanowi pewien krok w tym kierunku. Jeżeli pomiędzy punktami *b* i *c* na rys. 39-8b łączymy woltomierz prądu stałego, wskaże on określone napięcie. Podobnie jak dla rys. 39-8a, będziemy obserwować szybkie oscylacje wskazówki, z małą amplitudą, wokół jej położenia równowagi.

Na rysunku 39-8c mamy cztery prostowniki. Przy pokazanej polaryzacji prąd płynie w kierunku wskazanym przez strzałki. Gdy polaryzacja SEM zmieni się na przeciwną, prąd będzie płynął w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, a w układzie prostowników\*\* będzie miał kierunek *dbca*. *Zauważcie, że kierunek prądu płynącego przez opór *R* pozostaje nie zmieniony*; prąd ten płynie zawsze od *b* do *c*, niezależnie od polaryzacji źródła SEM.

Jeżeli pomiędzy punktami *b* i *c*łączymy oscyloskop katodowy, na ekranie zobaczymy kształt pokazany z prawej strony rysunku. Upewnijcie się, że  $\overline{U_{bc}} = 0$  jest dokładnie dwukrotnie większe od wartości podanej dla prostownika jednopolówkowego z rys. 39-8b, tzn.

$$\overline{U_{bc}} = \frac{2\mathcal{E}_m}{\pi}. \quad (39-31)$$

Urządzenie przedstawione na rys. 39-8c jest nazywane *prostownikiem dwupolówkowym* (lub *pełnookresowym*). Jeżeli pomiędzy punktami *b* i *c*łączymy woltomierz prądu stałego, wskazówka jego wychyli się dwukrotnie dalej niż w przypadku obwodu z rys. 39-8b. W dalszym ciągu będziemy obserwować oscylacje wskazówki, ale będą one miały mniejszą amplitudę. Dlaczego?

**Przykład 7.** Na rysunku 39-8 SEM wynosi  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin \omega t$ , przy czym  $\mathcal{E}_m = 300 \text{ V}$ , natomiast  $R = 15 \Omega$ . Jaka średnia moc  $P_{sr}$  wydziela się na oporze w trzech przedstawionych przypadkach?

(a) Dla obwodu z rys. 39-8a mamy, na podstawie równań (39-18) i (39-19),

$$P_{sr} = \frac{\mathcal{E}_m^2}{2R} \left( 1 - \frac{\mathcal{E}_{ik}^2}{R} \right) = \frac{(300 \text{ V})^2}{(2)(15 \Omega)} = 3,0 \text{ kW}.$$

(b) Ponieważ obwód przedstawiony na rys. 39-8b przez połowę czasu nie przewodzi prądu (obwód otwarty),  $P_{sr}$  jest dokładnie równe połowie wartości podanej powyżej, w punkcie (a), czyli wynosi 1,5 kW.

\* *DC* — od angielskiego *direct current* (przyp. tłum.).

\*\* Układ taki nazywany jest *układem Graetza* (przyp. tłum.).

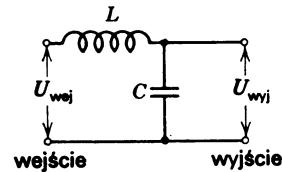
(c) Na rysunku 39-8c  $P_{\text{sr}}$  ma wartość taką samą ( $= 3,0 \text{ kW}$ ) jak w punkcie (a). Zauważcie, że  $P_{\text{sr}}$  nie zależy od kierunku i ani  $U$ ; obie wielkości występują w kwadracie.

Przebieg napięcia pokazany na rys. 39-8c w dalszym ciągu nie przedstawia różnicy potencjałów nie zmieniającej się w czasie. Możemy jednak wyróżnić w nim składową stałą oraz szereg sinusoidalnie zmiennych napięć o różnych częstościach kołowych  $\omega$ , amplitudach  $U$  i względnych fazach  $\varphi$ . Zmienne składowe napięcia nazywamy *tętnieniami*. Możemy przekonać się, jakościowo, wykonując odpowiednie doświadczenie, że taki podział dla przebiegu napięciowego przedstawionego na rys. 39-8c ma sens. Moglibyśmy również (ale nie będziemy tego robić) wykazać to ilościowo przy pomocy fourierowskiej analizy kształtu.

To, co chcemy zrobić teraz, to pokazać napięcie pomiędzy punktami  $b$  i  $c$  obwodu z rys. 39-8c, a dokładniej kształt tego napięcia, po przejściu przez obwód *filtrujący*, który ma następujące właściwości: (1) przepuszcza stałą składową potencjału z praktycznie biorąc nie zmienioną wartością na wyjściu i (2) w znacznym stopniu zmniejsza amplitudę składowych zmiennych, tzn. tętnień.

Na rysunku 39-9 pokazano najprostszy filtr. Zawiera on idealną cewkę  $L$  (nie posiadającą oporu ani pojemności) oraz idealny kondensator  $C$  (nie posiadający oporu ani indukcyjności). Napięcie na wejściu  $U_{\text{wej}}$  może być stałe albo sinusoidalnie zmienne. Aby zbadać właściwości filtra, oba te przypadki rozważymy oddzielnie.

Rys. 39-9. Najprostszy filtr, przepuszczający napięcie od wejścia do wyjścia praktycznie bez osłabienia lecz silnie wygładzający składowe tego napięcia zmieniające się w czasie. Sprawdźcie, że jeśli zarówno  $L$  jak i  $C$  oraz  $\omega$  mają „duże” wartości, zmniejszanie amplitud składowych zmiennych napięcia wejściowego będzie bardziej efektywne



Dla  $U_{\text{wej}} = \text{stałe}$  widzimy, że

$$U_{\text{wej}} = U_{\text{wyj}} = \text{tej samej stałej.}$$

Ani  $L$ , ani  $C$  nie odgrywają tu żadnej roli. Istotnie,  $L$  możemy zastąpić prostym drutem (zewrzeć), a  $C$  usunąć z obwodu (odłączyć) bez żadnego wpływu na  $U_{\text{wyj}}$ .

Dla składowej zmiennej natomiast sytuacja na wejściu jest zupełnie inna. Od początku zakładamy tu, że zarówno  $L$  jak i  $C$  są „duże”, tak że  $X_L (= \omega L) \gg X_C (= 1/\omega C)$ . Jeżeli  $\omega$  i  $C$  są dostatecznie duże, wówczas  $X_C \rightarrow 0$  i kondensator praktycznie biorąc zwiera obwód dla składowych zmiennych, mimo że na składową stałą nie ma żadnego wpływu.

Przyjmijmy, że

$$U_{\text{wej}} = U_{\text{wej, m}} \sin \omega t. \quad (39-32)$$

Z równania (39-2) mamy

$$i = i_m \sin(\omega t - \varphi). \quad (39-2)$$

Na podstawie równania (39-13) z  $R = 0$  i  $\mathcal{E}_m$  zastąpionym przez  $U_{\text{wej, m}}$ , mamy

$$i = \frac{U_{\text{wej, m}}}{X_L - X_C} \sin(\omega t - \varphi). \quad (39-33)$$

Ponieważ założyliśmy, że  $X_L \gg X_C$ , ostatnie równanie możemy przepisać w postaci

$$i \cong \frac{U_{\text{wej, m}}}{X_L} \sin(\omega t - \varphi). \quad (39-34)$$

Aby znaleźć kąt fazowy  $\varphi$ , wracamy do równania (39-14), tj.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R}. \quad (39-14)$$

Dla  $X_L \gg X_C$  i  $R \rightarrow 0$  mamy  $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow +\infty$ , czyli  $\varphi = +90^\circ$ . Wobec tego równanie (39-33) przyjmuje postać

$$i = -\frac{U_{\text{wej, m}}}{X_L} \cos \omega t. \quad (39-35)$$

Zauważcie, że funkcja cosinus jest przesunięta w fazie dokładnie o  $90^\circ$  względem funkcji sinus.

Napięcie  $U_{wyj}$  na wyjściu jest równe  $q/C$ , wobec tego musimy znaleźć ładunek  $q$  dla kondensatora. Z równania (39-35) mamy

$$\begin{aligned} q &= \int idt = \frac{1}{\omega} \int i d(\omega t) = -\frac{1}{\omega} \frac{U_{wej, m}}{X_L} \int \cos \omega t d(\omega t) = \\ &= -\frac{1}{\omega} \frac{U_{wej, m}}{X_L} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (39-36)$$

Ponieważ  $X_C = 1/\omega C$ , więc

$$U_{wyj} = \frac{q}{C} = -X_C \frac{U_{wej, m}}{X_L} \sin \omega t. \quad (39-37)$$

Współczynnik osłabienia  $\alpha$  dla składowej zmiennej jest równy stosunkowi amplitudy  $U_{wyj}$  do amplitudy  $U_{wej}$  (patrz równ. (39-32)), czyli

$$\alpha = U_{wyj, m}/U_{wej, m} = X_C/X_L. \quad (39-38)$$

Ponieważ z założenia  $X_L \gg X_C$ , widzimy, że osłabienie „tętnień” jest bardzo duże. Jak dobrze wiedzą amatorzy zajmujący się konstrukcją urządzeń odtwarzających dźwięki istnieją filtry znacznie bardziej efektywne od filtru z rys. 39-9 (patrz zadanie 23).

**Przykład 8.** Przyjmijmy, że na rys. 39-9  $U_{wej} = U_{wej, m} \sin \omega t$ , przy czym  $U_{wej, m} = 300$  V, a  $\omega/2\pi = 60$  Hz. Niech  $L = 10$  H, a  $C = 300 \mu\text{F}$ . Znaleźć  $U_{wyj, m}$ .

Z równania (39-37) mamy

$$\begin{aligned} U_{wyj, m} &= U_{wej, m} X_C \frac{1}{X_L} = U_{wej, m} \frac{1}{\omega C} \frac{1}{\omega L} = \frac{U_{wej, m}}{\omega^2 LC} = \\ &= \frac{300 \text{ V}}{(2\pi \cdot 60 \text{ Hz})^2 10 \text{ H} \cdot 300 \cdot 10^{-6} \text{ F}} = 0,70 \text{ V}. \end{aligned}$$

Współczynnik osłabienia w tym przypadku wynosi

$$U_{wyj, m}/U_{wej, m} = 0,70 \text{ V}/300 \text{ V},$$

czyli  $2,3 \cdot 10^{-3}$ . Sprawdźcie, że jest on równy stosunkowi  $X_C/X_L$  (przy założeniu, że  $X_L \gg X_C$ ).

### 39-7. Transformator

W obwodach prądu stałego moc wydzielana na obciążeniu opornościowym dana jest równaniem (31-15) ( $P = Ui$ ). Oznacza to, że przy określonej żądanej mocy mamy wybór pomiędzy względnie dużą wartością prądu  $i$  oraz względnie małą wartością różnicy potentjałów  $U$  lub na odwrót, przy założeniu, że iloczyn tych wartości pozostaje stały. Analogicznie, średnia moc wydzielana w obwodach prądu zmiennego jest dana równaniem (39-25) ( $P_{śr} = U_{sk}$ ) i w taki sam sposób możemy wybierać pomiędzy wartościami  $i_{sk}$  oraz  $U_{sk}^*$ .

Jasne jest, że w systemach dystrybucji energii elektrycznej zarówno wytwórcy (elektrownia) jak i odbiorca mocy (dom lub fabryka) wolą mieć do czynienia z względnie niskimi napięciami, ze względu na bezpieczeństwo oraz ekonomię projektowania. Na przykład, nikt nie chce, by elektryczny opiekacz do robienia grzanek lub dziecięca kolejka elektryczna działały pod napięciem, powiedzmy, 10 kV.

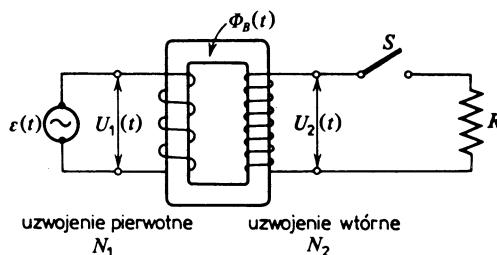
Z drugiej strony, przy przesyłaniu energii elektrycznej z elektrowni do odbiorcy, aby zmniejszyć do minimum straty na oporze omowym linii wynoszące  $i^2R$ , chcielibyśmy, aby prąd płynący w linii przesyłowej był jak najmniejszy (a więc napięcie jak największe).

\* Przy założeniu, że obwód jest obciążony oporem omowym, wobec czego w równ. (39-25)  $\cos \varphi = 1$

Napięcie  $U_{sk} = 350$  kV nie jest tu niezwykłe. Istnieje więc istotne „niedopasowanie” pomiędzy wymaganiami związanymi z wydajnością przesyłania z jednej strony a bezpieczeństwem i wydajnością wytwarzania i konsumpcji z drugiej. Potrzebne jest więc urządzenie, które, w zależności od wymagań, mogłoby podwyższać (lub obniżać) napięcie w obwodzie, utrzymując praktycznie stałą wartość iloczynu  $Ui$ . Urządzeniem takim jest *transformator* prądu zmiennego z rys. 39-10. Dla prądu stałego nie ma równie prostego odpowiednika tego urządzenia i dlatego systemy dystrybucji prądu stałego proponowane przez Edisona zostały obecnie w zasadzie całkowicie wyparte przez wykorzystujące prąd zmienny systemy Tesli i innych.

W ciągu ostatnich kilku dziesiątek lat obserwuje się powrót do idei przesyłania prądu stałego w przypadku bardzo dużych odległości oraz w specjalnych sytuacjach, takich jak podziemne lub podwodne kable transmisyjne. W Związku Radzieckim na przykład zbudowano ok. 500 km linię przesyłową prądu stałego pracującą przy różnicy potencjałów 800 kV. Generowany jest prąd zmienny, którego napięcie zostaje podniesione do wymaganej wysokości, następnie przekształcone na napięcie stałe, z kolei w punkcie docelowym ponownie przetworzone na napięcie zmienne, a jego wartość obniżona zgodnie z wymaganiami dalszej transmisji. Korzyści płynące z przesyłania wysokonapięciowego prądu stałego związane są z tym, że nie trzeba uwzględniać właściwości pojemnościowych oraz indukcyjnych linii przesyłowej. Należy zauważyć, że transformatory będące przedmiotem rozważań tego rozdziału są przy tym w dalszym ciągu niezbędne\*.

Na rysunku 39-10 pokazano dwie cewki nawinięte na rdzeń wykonany z miękkiego żelaza. Uzwojenie pierwotne, o  $N_1$  zwojach, połączone jest z generatorem prądu zmiennego, którego SEM  $\mathcal{E}_1(t)$  dana jest wzorem  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_m \sin \omega t$ . Uzwojenie wtórne, o  $N_2$  zwojach, jest obwodem otwartym dopóty, dopóki nie zostanie zamknięty klucz  $S$ , w chwili początkowej z założenia otwarty. Zakładamy ponadto, że można zaniedbać oporności uzwojenia pierwotnego i wtórnego oraz „straty” magnetyczne w rdzeniu żelaznym. W chwili obecnej dobrze zaprojektowane transformatory wysokiej mocy mogą mieć straty energii nie przekraczające jednego procenta, tak że nasze założenie o idealnym transformatorze nie jest nierozsądne.



Rys. 39-10. Dwa uzwojenia idealnego transformatora nawinięte na ten sam rdzeń z miękkiego żelaza. Do uzwojenia pierwotnego dołączone jest źródło napięcia zmiennego. Uzwojenie wtórne jest nieobciążone (jeśli klucz  $S$  jest otwarty) lub połączone z obciążeniem opornościowym  $R$  (jeśli klucz  $S$  jest zamknięty).

Przy wyżej podanych warunkach uzwojenie pierwotne jest czystą indukcyjnością; porównaj rys. 39-4. Wobec tego (bardzo mały) prąd płynący w tym uzwojeniu, nazywany

\* Patrz: L. O. Barthold, H. G. Pfeiffer, High-Voltage Power Transmission, *Scientific American*, May 1964.

*prądem magnesującym*  $i_{\text{mag}}(t)$ , jest opóźniony w fazie w stosunku do pierwotnej różnicy potencjałów o  $90^\circ$ ; współczynnik mocy ( $= \cos \varphi$  w równaniu (39-25)) jest równy zeru, wobec czego nie ma przekazywania mocy z generatora do transformatora.

Mały, płynący w uzwojeniu pierwotnym prąd  $i_{\text{mag}}(t)$  indukuje jednakże zmienny strumień magnetyczny  $\Phi_B(t)$  w rdzeniu żelaznym. Zakładamy, że cały ten strumień przenika przez zwoje uzwojenia wtórnego, i na podstawie prawa indukcji Faradaya (patrz rów. (35-2)) stwierdzamy, że przypadająca *na jeden zwój SEM*  $\mathcal{E}_T$  jest taka sama w uzwojeniu wtórnym, jak i w pierwotnym. Wobec tego, posługując się wartościami skutecznymi możemy napisać

$$(\mathcal{E}_T)_{\text{sk}} = - \left( \frac{d\Phi_B}{dt} \right)_{\text{sk}} = \frac{U_{1,\text{sk}}}{N_1} = \frac{U_{2,\text{sk}}}{N_2},$$

skąd

$$U_{2,\text{sk}} = U_{1,\text{sk}}(N_2/N_1). \quad (39-39)$$

Jeżeli  $N_2 > N_1$  transformator *podwyższa* napięcie; jeżeli  $N_2 < N_1$  transformator *obniża* napięcie.

Wszedzie powyżej zakładaliśmy, że obwód wtórny jest otwarty, tak że transformator nie przenosi mocy. Jeżeli jednak zamknimy klucz  $S$  na rys. 39-10, będziemy mieli do czynienia z sytuacją, w której uzwojenie wtórne jest połączone z obciążeniem opornościowym  $R$ . W ogólnym przypadku obciążenie może zawierać również elementy pojemnościowe i indukcyjne, ale obecnie ograniczymy się do tej szczególnej sytuacji.

Gdy zamykamy klucz  $S$ , występuje kilka zjawisk. (1) W obwodzie wtórnym pojawia się prąd  $i_2(t)$  i towarzyszy temu wydzielanie się na obciążeniu opornościowym mocy  $i_{\text{sk}}^2 R (= U_{2,\text{sk}}^2/R)$ . (2) Prąd ten indukuje swój *własny* zmienny strumień magnetyczny w rdzeniu żelaznym, a ten strumień (zgodnie z prawami Faradaya i Lenza) indukuje w obwodzie pierwotnym SEM skierowaną *przeciwne* do istniejącej. Oba uzwojenia stanowią teraz całkowicie wzajemnie sprzężone indukcyjności; patrz paragraf 36-6. (3) Napięcie  $U_1(t)$  jednakże nie może ulec zmianie, mimo pojawienia się przeciwnie skierowanej SEM, ponieważ musi ona zawsze równać się wartości  $\mathcal{E}(t)$  na wyjściu generatora; zamknięcie klucza  $S$  nie może zmienić tego faktu. (4) Konieczne staje się więc pojawienie się w uzwojeniu pierwotnym *nowego* wypadkowego prądu  $i_1(t)$  o wartości i fazie dokładnie takiej, aby zrównoważyć SEM wytwarzaną w uzwojeniu pierwotnym przez prąd  $i_2(t)$ . W szczególności przesunięcie fazowe  $\varphi$  pomiędzy  $i_1(t)$  oraz  $\mathcal{E}(t)$  dla idealnego transformatora musi dążyć do  $0^\circ$ , ponieważ współczynnik mocy w równaniu (39-25), musi dążyć do jedności.

Wszystkie powyższe rozważania są zgodne z zasadą zachowania energii. Gdy zamykamy klucz  $S$ , na obciążeniu opornościowym wydziela się moc. Pociąga to za sobą konieczność dostarczenia przez generator takiej samej mocy do (idealnego) transformatora, wobec czego, przy założeniu że  $\varphi = 0^\circ$  ( $\cos \varphi = 1$ ),

$$\mathcal{E}_{\text{sk}} i_{1,\text{sk}} = U_{2,\text{sk}}^2/R. \quad (39-40)$$

Zależność ta wyraża fakt, że dla idealnego transformatora z obciążeniem opornościowym moc dostarczana przez generator po stronie pierwotnej jest dokładnie równa mocy wydzielanej na obciążeniu opornościowym po stronie wtórznej.

**Przykład 9.** Transformator na słupie elektrycznym pracuje pod napięciem  $U_{1,\text{sk}} = 8,0 \text{ kV}$  (rys. 39-10) po stronie pierwotnej i dostarcza do okolicznych domów energię elektryczną pod napięciem  $U_{2,\text{sk}} = 120 \text{ V}$ .

(a) Jaki jest stosunek zwojów  $N_1/N_2$ ? (b) Jakie są średnie kwadratowe prądów w uzwojeniu pierwotnym i wtórnym transformatora, jeżeli średnie zużycie mocy w osiedlu, w pewnym okresie czasu, wyniosło  $70 \text{ kW}$ ? Zakładamy, że transformator jest idealny, obciążenie czysto opornościowe, a współczynnik mocy równy jedności. (c) Jaki jest wypadkowy opór obciążenia,  $R$ , w obwodzie wtórnym?

(a) Z równania (39-39)

$$N_1/N_2 = U_{1,\text{sk}}/U_{2,\text{sk}} = 8,0 \text{ kV}/120 \text{ V} = 67.$$

(b) Z równania (39-25), przy  $\cos\varphi = 1$ , mamy

$$i_{2,\text{sk}} = P_{\text{tr}}/(U_{2,\text{sk}} \cos\varphi) = 70 \text{ kW}/(120 \text{ V} \cdot 1) = 580 \text{ A},$$

a także

$$i_{1,\text{sk}} = P_{\text{tr}}/(U_{1,\text{sk}} \cos\varphi) = 70 \text{ kW}/(8,0 \text{ kV} \cdot 1) = 8,8 \text{ A}.$$

Zauważmy że, jak powinno być w przypadku idealnego transformatora,

$$i_{1,\text{sk}} U_{1,\text{sk}} = i_{2,\text{sk}} U_{2,\text{sk}} = 70 \text{ kW}.$$

(c) W obwodzie wtórnym mamy

$$R = (U_{2,\text{sk}})^2/P_{\text{tr}} = (120 \text{ V})^2/70 \text{ kW} = 0,21 \Omega.$$

Pokażcie, że taki sam wynik otrzymujesz przy wyznaczaniu  $R$  z równania (39-40).

## Pytania

1. Wielkości występujące we wzorze  $\omega = 2\pi\nu$  są mierzone w radianach na sekundę ( $\omega$ ) i w hercach, czyli cyklach na sekundę ( $\nu$ ). Radian jest miarą kąta. Co mają wspólnego kąty z prądem zmiennym?

2. Treść zadania 35-6 sugeruje sposób wytwarzania przemiennej siły elektromotorycznej (SEM), takiej jak opisana równ. (39-1). Co będzie podstawowym źródłem mocy rozpraszanej w obwodzie  $RCL$ , takim jak na rys. 39-1, gdy zostanie on przyłączony do wyjścia generatora prądu przemiennego omówionego wyżej? W której części obwodu będzie się wydzielać moc?

3. Dlaczego można uznać za sensowne założenie, że dla obwodu z rys. 39-1: (a) prąd zmienny opisany równaniem (39-2) ma taką samą częstotliwość kołową  $\omega$ , jak zmienna SEM opisana równaniem (39-1) oraz że (b) kąt fazowy  $\varphi$  w równaniu (39-2) nie zmienia się z czasem, co mogłoby się zdarzyć, gdyby którekolwiek z tych (prawdziwych) zdań było fałszywe?

4. Czy istnieje choćby luźna analogia między tym, że (a) kąt fazowy  $\varphi$  w równaniu (39-2) nie zależy od wartości w równaniu (39-1), a tym, że (b) częstotliwość drgań układu masa + sprężyna nie zależy od amplitudy drgań? Pamiętajcie o rozróżnieniu pomiędzy naturą zjawiska fizycznego a jego skalą.

5. Czym różni się strzałka fazowa od wektora? Wiemy na przykład, że siły elektromotoryczne, napięcia oraz natężenia nie są wektorami. W jaki sposób możemy uzasadnić konstrukcję taką jak na rys. 39-5?

6. Jak zmienia się maksymalna wartość natężenia prądu przemiennego,  $i_m$ , w czysto opornościowym obwodzie z rys. 39-2 w zależności od częstotliwości kołowej przyłożonej SEM?

7. Czy gdyby strzałki fazowe obracały się zgodnie z ruchem wskazówek zegara, a nie przeciwnie do nich, cokolwiek z dyskusji w paragrafie 39-2 byłoby nieważne?

8. Czy wydaje się intuicyjnie sensowne, że reaktancja pojemnościowa ( $= 1/\omega C$ ) powinna zmieniać się odwrotnie proporcjonalnie do częstotliwości kątowej, podczas gdy reaktancja indukcyjna ( $= \omega L$ ) zmienia się wprost proporcjonalnie do tej wielkości?

9. Podczas II wojny światowej w wielkim laboratorium naukowym USA generator prądu przemiennego zasilający budynek tego laboratorium zlokalizowano w odległości około mili od budynku. Jeden z techników zwiększył szybkość obrotów generatora dla skompensowania jak to powiedział, „strat częstotliwości wzdłuż linii transmisyjnej” łączącej generator z budynkiem laboratorium. Co o tym sądzisz?

10. Omów własnymi słowami co znaczy stwierdzenie, że napięcie „wyprzedza” lub też „jest wyprzedzane” przez natężenie prądu.

11. Jeżeli, z czym zetknęliśmy się w paragrafie 39-3, dany obwód jest „bardziej indukcyjny niż pojemnościowy”, czyli że  $X_L > X_C$ , czy to oznacza, że dla ustalonej częstotliwości kołowej (a)  $L$  jest względnie

„duże”, a  $C$  względnie „małe”, czy też (b) zarówno  $L$  jak i  $C$  są względnie „duże”? (c) A może to znaczy, że dla ustalonych wartości  $L$  i  $C$ , względnie „duże” lub względnie „małe” jest  $\omega$ .

12. Dokonajmy na rys. 39-1 przejścia granicznego  $\omega \rightarrow 0$ . Czy wówczas wyrażenie z równania (39-13) zmierza do wartości, której można się spodziewać? Przedyskutuj to.

13. Jak to jest, że na rys. 39-2 strzałka prądu ma ten sam kierunek co strzałka napięcia, podczas gdy na rys. 39-3, 39-4 oraz 39-5 strzałki prądu mają trzy różne kierunki? Przecież SEM (równanie (39-1)) jest taka sama we wszystkich czterech przypadkach.

14. Rozważmy stwierdzenie: „Gdy  $X_L > X_C$ , wtedy niezależnie od częstotliwości, mamy  $L > 1/C$ ”. Co w tym stwierdzeniu jest niewłaściwe?

15. Czy prawo Kirchhoffa o napięciach w obwodzie zamkniętym (patrz paragraf 32-2) i prawo Kirchhoffa o rozgałęzieniach prądu (patrz paragraf 32-5) stosują się równie dobrze do złożonych (wieloboczkowych) obwodów prądu zmiennego, jak do obwodów prądu stałego?

16. Jaki wpływ na  $P_{sr}$  w przykładzie 5 miałoby zwiększenie (a)  $R$ , (b)  $C$  oraz (c)  $L$ ? Jak zmieniłoby się  $\varphi$  z rys. 39-25 w tych trzech przypadkach?

17. Czy inżynierowie elektrowni wolą, aby współczynnik mocy (patrz równania (39-25)) był niski czy wysoki, czy też nie ma to dla nich znaczenia. W jakich granicach może się zmieniać ten współczynnik? Co decyduje o wartości współczynnika mocy; czy jest on cechą charakterystyczną generatora, linii przesyłowej, obwodu, do którego jest przyłączona linia przesyłowa czy też całego układu tych elementów?

18. Jeśli dla danego obwodu  $RLC$  jest znany współczynnik mocy ( $= \cos\varphi$  w równaniu (39-25)), czy można powiedzieć, że przyłożona przemienna SEM opóźnia się lub wyprzedza prąd? Jeśli tak, to dla czego? Jeśli nie, to dlaczego?

19. Gdy na rys. 39-1 jest  $R = 0$ , w obwodzie nie ma rozpraszania energii na ciepło Joule'a. Niemniej nadal występuje przemienna SEM i przemienny prąd. Omów przepływ energii w obwodzie w tych warunkach.

20. Jeżeli chcemy, by rachunki za światło były mniejsze, czy powinniśmy życzyć sobie by współczynnik mocy ( $= \cos\varphi$  w równaniu (39-25)) był duży czy mały; czy to w ogóle ma jakiś wpływ? Jeśli ma, czy można coś zmienić? Przedyskutuj to.

21. Jak zmieniałyby się prąd chwilowy w funkcji czasu w układzie z rys. 39-1 dla przypadku  $R = 0$ ? Jaką wartość miałby kąt fazowy  $\varphi$ ? Jakie byłoby średnie rozpraszanie mocy?

22. Czy  $\varphi$  w równaniu (39-25) jest przesunięciem fazowym między  $\vartheta(t)$  a  $i(t)$  czy też pomiędzy  $\vartheta_{ik}$  a  $i_{ik}$ ? Przedyskutuj to.

23. W obwodach  $RLC$  rezonans występuje wtedy, jak stwierdza równanie (39-29) oraz rys. 39-7, gdy częstotliwość kołowa przemiennej SEM (sily wymuszającej) jest dokładnie równa częstotliwości własnej (nietłumionego) obwodu  $LC$ . Natomiast, jak widzieliśmy w paragrafie 15-10 i jak stwierdza równanie (15-41) i rys. 15-20, rezonans dla tlumionego układu masa+sprężyna pojawia się wówczas, gdy częstotliwość kołowa sily wymuszającej jest bliska, ale nie dokładnie równa, własnej częstotliwości kołowej układu masa+sprężyna (nietłumionego). Czy zasada korespondencji załamaże się w tym przypadku? (Wskazówka: Czy wielkości umieszczone na pionowych osiach rysunków 15-20 i 39-7 naprawdę „korespondują” ze sobą? patrz zadanie 15.)

24. Należy zdawać sobie sprawę z tego, że obwody filtrujące, takie jak pokazano na rys. 39-9 dla ustalonych wartości  $L$  i  $C$ , ze wzrostem częstotliwości  $\omega$  stają się coraz bardziej skuteczne. Co w tym przypadku rozumiemy przez bardziej skuteczne?

25. Dlaczego prąd na rys. 39-8c, po wejściu do węzła  $c$  nie dzieli się równo pomiędzy gałęzie  $cd$  i  $ca$ ? Przecież potencjalnie obie są przewodzące.

26. Naszkicuj z grubsza przebiegi dla rys. 39-8b,  $c$  w przypadku prostowników, które nie są „idealne”, tzn. gdy ich oporność w kierunku przewodzenia, choć mała, nie jest dokładnie równa zeru, a oporność w kierunku wstecznym, nie jest nieskończona.

27. Narysuj zależności  $i$  od  $U$  (patrz rys. 31-4, 31-5 i 31-6) dla idealnego prostownika, o jakim jest mowa w paragrafie 39-6. Uwzględnij na swoim wykresie obie polaryzacje przykładowego napięcia (oraz odpowiadające natężenia  $i$  prądu).

28. Mamy transformator dzwonkowy zaprojektowany na skuteczne napięcie pierwotne (wejściowe) 120 V oraz skuteczne napięcie wtórne (wyjściowe) 6,0 V. Co mogłoby się zdarzyć, gdyby przy instalacji transformatora zostały przypadkowo zamienione podłączenia pierwotne i wtórne? Czy trzeba by czekać, aż ktoś naciśnie dzwonek, żeby to stwierdzić? Przedyskutuj to.

29. Transformator zamknięty jest w drewnianym pudełku. Zewnętrznie dostępne są tylko końcówki uwojenia pierwotnego i wtórnego, umieszczone po przeciwnych stronach pudełka. W jaki sposób można wyznaczyć stosunek ilości zwojów bez otwierania pudełka?

### Zadania

#### Paragraf 39-1

1. Typową częstotliwością dla prądu wytwarzanego przez generator prądu przemiennego w elektrowni jest  $v = 50$  Hz. Jaka jest częstotliwość kołowa  $\omega$  i w jakich jednostkach się ją wyraża?

Odp.  $\omega = 2\pi v = 307$  rad/s.

#### Paragraf 39-2

2. Do generatora prądu przemiennego dającego  $\mathcal{E}_m = 300$  V przyłączono, tak jak na rys. 39-3a, kondensator o pojemności  $0,50 \mu\text{F}$ . Jaka będzie amplituda  $i_m$  prądu, który popłynie, jeśli częstotliwość kołowa wynosi (a)  $100$  rad/s, (b)  $1000$  rad/s?

3. Opór bierny (reaktancja)  $X_L$  cewki o indukcyjności  $45 \text{ mH}$  wynosi  $1300 \Omega$ . Przy jakiej (a) częstotliwości kołowej  $\omega$  i (b) częstotliwości  $v$  jest to prawdziwe? (c) Jaka będzie amplituda  $i_m$  prądu przemiennego, który popłynie przez tę cewkę w układzie takim jak na rys. 39-4a, jeśli włączymy przemienną SEM o amplitudzie  $\mathcal{E}_m = 300$  V?

Odp.: (a)  $2,9 \cdot 10^4$  rad/s; b)  $4,6$  kHz; (c)  $0,23$  A.

4. Opór bierny (reaktancja)  $X_C$  kondensatora o pojemności  $1,5 \mu\text{F}$  wynosi  $12 \Omega$ . Przy jakiej (a) częstotliwości kołowej  $\omega$  i (b) częstotliwości  $v$  jest to prawdziwe? (c) Jaka będzie amplituda  $i_m$  prądu przemiennego, który popłynie przez ten kondensator w układzie takim jak na rys. 39-3a, jeśli włączymy przemienną SEM o amplitudzie  $\mathcal{E}_m = 300$  V?

5. (a) Przy jakiej częstotliwości  $v$  indukcyjność  $6,0 \text{ mH}$  i pojemność  $10 \mu\text{F}$  mają taki sam opór bierny? (b) Jaka będzie wartość tego oporu? (c) Jaka będzie relacja między tą częstotliwością a częstotliwością własną swobodnych drgań oscylatora  $LC$  (nietlumionego) zbudowanego z tych elementów?

Odp. (a)  $650$  Hz; (b)  $24 \Omega$ ; (c) Będą takie same.

#### Paragraf 39-3

6. Przelicz przykład 3 dla  $C = 20 \mu\text{F}$  przy nie zmienionych pozostałych danych. Czy w tej nowej sytuacji  $\mathcal{E}_m$  wyprzedza  $i_m$ , czy opóźnia się względem  $i_m$ ? Naszkicuj wykres odpowiadający rys. 39-5.

7. Narysuj (z grubsza) diagramy jak na rys. 39-5a i 39-5b dla przypadków  $X_C > X_L$  i  $X_C = X_L$ .

#### Paragraf 39-4

8. Widzieliśmy, że  $\overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1}{2}$  (wartość średnia). Oblicz wartość średnią wyrażenia  $\overline{\sin^2(\omega t + \varphi)}$ , w którym  $\varphi$  jest (stałym) przesunięciem fazowym.

9. Korzystając z tożsamości trygonometrycznej  $2\sin \omega t \cos \omega t = \sin 2\omega t$ , wykaż, że  $\overline{\sin \omega t \cos \omega t} = 0$  (patrz równanie (39-23)). Naszkicuj również wykres przebiegu  $\sin \omega t \cos \omega t$  i wykaż graficznie, że wartość średnia jest równa零.

10. Średnia wartość  $\overline{\mathcal{E}_m \sin \omega t}$  dla wielu okresów (patrz rys. 39-6a) wynosi zero. Przekonaliśmy się również, że  $\mathcal{E}_{\text{sr.kw.}} = \mathcal{E}_m / \sqrt{2}$ . Jaka jest relacja pomiędzy wartością średnią  $\overline{\mathcal{E}_m \sin \omega t}$  dla połowy okresu, a  $\mathcal{E}_m$  i  $\mathcal{E}_{\text{sr.kw.}}$ ?

11. Dla obwodu  $RLC$ , takiego jak na rys. 39-1, przyjąć dane:  $R = 5,0 \Omega$ ,  $L = 60 \text{ mH}$ ,  $v = 60$  Hz oraz  $\mathcal{E}_m = 300$  V. Dla jakich wartości  $C$  w tym obwodzie  $P_{\text{sr}}$  będzie (a) największa oraz (b) najmniejsza? (c) Jakie są te wartości największa i najmniejsza, a także jakie są odpowiednie kąty fazowe i współczynniki mocy? (d) Mogliby się wydawać, że gdy w równaniu (39-25)  $\cos \varphi$  jest ujemny, będzie również ujemne  $P_{\text{sr}}$ . Co to może oznaczać? Czy możesz znaleźć graniczną wartość  $C$ , powyżej której  $\cos \varphi$  będzie ujemny? Przedyskutuj to.

Odp. (a)  $120 \mu\text{F}$ . (b) Nieskończoność. (c)  $9000 \text{ W}, 420 \text{ W}; 0^\circ, 78^\circ; 1,0, 0,22$ .

#### Paragraf 39-5

12. W obwodzie  $RLC$ , takim jak na rys. 39-1,  $R = 20 \Omega$ ,  $C = 20 \mu\text{F}$  oraz  $L = 1,0 \text{ H}$ . (a) Przy jakiej częstotliwości kołowej  $\omega$  generatora prądu przemiennego obwód będzie rezonować i odpowiedź prądowa będzie największa? (b) Przy jakiej częstotliwości kołowej  $\omega$  odpowiedź obwodu wyniesie połowę wartości maksymalnej? Miarą „odpowiedzi” jest wartość średnia kwadratowa natężenia prądu (jak na rys. 39-7).

13. Obwód zawierający opór, pojemność i indukcyjność o wartościach  $R_1$ ,  $C_1$ ,  $L_1$ , połączone jak na rys. 39-1, wykazuje rezonans przy tej samej częstotliwości co inny obwód zestawiony z  $R_2$ ,  $C_2$  i  $L_2$ . Przy jakiej częstotliwości wystąpi rezonans pojedynczego obwodu, w którym obydwa zestawy elementów połączone są szeregowo?

Odp.  $\omega = \sqrt{1/L_1 C_1} = \sqrt{1/L_2 C_2}$ , niezależnie od  $R_1$  i  $R_2$ .

14. W odniesieniu do rys. 39-7 wykaż, że dla częstotliwości wyższych niż częstotliwość rezonansowa obwód jest głównie indukcyjny, a dla niższych głównie pojemnościowy. Jaki jest sens tego zdania? Jak to zinterpretujesz przy pomocy diagramów strzałkowych z rys. 39-5b?

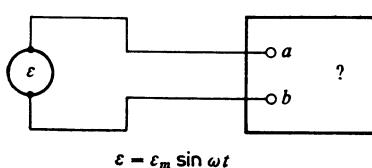
15. Wykaż, że amplituda oscylacji ładunku (nie prądu) w obwodzie  $RLC$  takim jak na rys. 39-1 wynosi

$$q_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{(\omega^2 L - 1/C)^2 + (\omega R)^2}}.$$

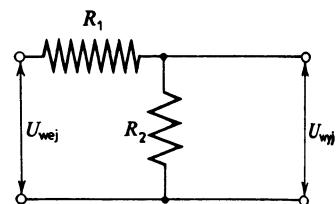
(a) Dla jakiej wartości  $\omega$  amplituda  $q_m$  osiągnie maksimum? (b) Czy wynik ten rzuca jakieś światło na porównanie rysunków 15-20 i 39-7, sugerowane w pytaniu 23?

Odp. (a)  $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$ .

16. Rysunek 39-11 przedstawia generator prądu przemiennego podłączony do zacisków  $a$  i  $b$ , „czarnej skrzynki” zawierającej obwód  $RLC$ , którego elementów ani ich układu nie znamy. Przez doprowadzające przewody przepływa prąd, dany wzorem  $i = i_m \sin(\omega t + \varphi)$ . Jaki jest współczynnik mocy? (b) Czy obwód wewnątrz skrzynki ma charakter pojemnościowy czy indukcyjny? (c) Czy SEM opóźnia się względem prądu, czy go wyprzedza? (d) Jaką średnią moc  $P_{\text{sr}}$  dostarcza źródło SEM do skrzynki, jeśli  $\mathcal{E}_m = 750 \text{ V}$ , a  $i_m = 12 \text{ A}$ ? (e) Dlaczego do odpowiedzi na poprzednie pytanie nie jest potrzebna znajomość częstotliwości kołowej  $\omega$ ? (f) Jakiego typu element obwodu należy dołączyć do zacisków  $a$  i  $b$ , gdy chce się, by obwód rezonował w sensie, którego ilustracją jest rys. 39-7? (g) Jakie wartości będą mieć  $\varphi$  i  $P_{\text{sr}}$  w rezonansie?



Rys. 39-11. Zadanie 16



Rys. 39-12. Zadanie 21

17. Wykaż, że względna szerokość połówkowa krzywej rezonansu z rys. 39-7 jest z dobrym przybliżeniem opisana wzorem

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\sqrt{3}R}{\omega L},$$

w którym  $\omega$  jest częstotliwością rezonansową, a  $\Delta\omega$  jest szerokością krzywej dla  $i = \frac{1}{2}i_m$ . Zauważ (patrz zad. 38-22), że wyrażenie to można zapisać w postaci  $\sqrt{3}/Q$ , z której jasno widać, że obwód o wysokiej dobroci  $Q$  ma ostry pik rezonansowy, tj. małą wartość stosunku  $\Delta\omega/\omega$ .

#### Paragraf 39-6

18. Jakie wartości przyjmują (a)  $U_{bc}$ ,  $\text{tr.kw.}$  oraz (b)  $P_{\text{sr}}$  na oporze  $R$  w układzie z rys. 39-8, w każdym z pokazanych przypadków?

19. Zacieniu we wszystkich trzech przypadkach na rys. 39-8 pola, które wygaszają się podczas znajdowania  $\overline{U_{bc}}$ :

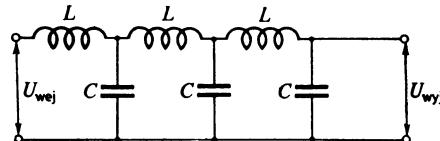
20. Jaka jest podstawowa (najniższa) częstotliwość  $\omega_0$  tętnień dla dwupołówkowo wyprostowanego przebiegu z rys. 39-8c. Załóż, że generator prądu przemiennego daje częstotliwość  $v = \omega/2\pi = 60 \text{ Hz}$ .

21. Na rys. 39-12  $R_1 \gg R_2$ , a zarówno  $U_{w1}$  jak i  $U_{w2}$  są napięciami stałymi. Wykaż, że współczynnik osłabienia  $U_{w2}/U_{w1} = R_2/R_1$ . Porównaj to z rys. 39-9 i równaniem (39-38), gdzie (zmiennoprądowy) współczynnik osłabienia wynosi (w przybliżeniu)  $X_C/X_L$ . Przedyskutuj podobieństwa i różnice.

22. (a) Wykaż, że współczynnik osłabienia  $U_{wyj, m}/U_{wej, m}$  (patrz równanie (39-38) i rys. 39-9) można dla częstości  $\omega \gg \omega_0$  napisać w postaci  $(\omega_0/\omega)^2$ . W tym wyrażeniu  $\omega$  jest częstością kołową przyłożonego napięcia, a  $\omega_0$  jest rezonansową częstością kołową ( $= \sqrt{1/LC}$ ) filtrującego układu  $LC$ . (b) Wykaż, że założeniu  $\omega \gg \omega_0$  odpowiada  $X_L \gg X_C$ . Czy to jest sensowne?

23. Stosując argumenty jakościowe wykaż, że trzystopniowy filtr przedstawiony na rys. 39-13 jest bardziej wydajny niż jednostopniowy filtr z rys. 39-9. Naszkicuj jego oporowy odpowiednik dla prądu stałego, tj. zastęp  $L$  przez  $R_1$ , a  $C$  przez  $R_2$ , przy czym  $R_1 \gg R_2$ . Wyprowadź wzór na stałoprądowy współczynnik tłumienia  $U_{wyj}/U_{wej}$ , przy założeniu, że obie te wielkości są stałymi napięciami.

Odp.  $(R_2/R_1)^3$ .



Rys. 39-13. Zadanie 23

24. Wykaż, że w zastosowaniu do urządzeń niskoprądowych i wysokonapięciowych (takich jak zasilacze napięciowe lamp kineskopowych) możemy na rys. 39-9 zastąpić cewkę  $L$  „dużą” opornością  $R$  uzyskując nadal istotne obniżenie zmiennej składowej  $U_{wej}$  i nie powodując nadbytu wielkiego obniżenia składowej stałej.

#### Paragraf 39-7

25. Linia przesyłowa prądu zmiennego przenosi energię z elektrowni do fabryki z szybkością  $P_{kr} = 5,0 \text{ MW}$ . (a) Jaki prąd  $i_{kr, kw}$  przepływa przez linię, jeśli przenoszone napięcie  $U_{sk}$  wynosi 120 V? (b) Jeśli  $U_{kr, kw} = 80 \text{ kV}$ ? (c) W jakim stosunku mają się do siebie straty energii w linii na ciepło (Joule'a) w tych dwóch przypadkach? Załóż, że współczynnik mocy  $\cos\varphi = 1$ .

Odp. (a) 42 kA. (b) 63 A. (c)  $4,5 \cdot 10^5$ .

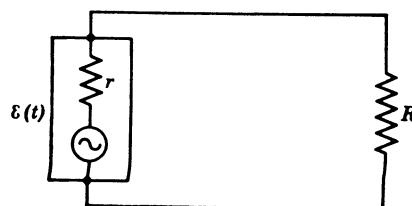
26. Transformator ma 500 zwojów w uzwojeniu pierwotnym i 10 we wtórnym. (a) Jakie jest napięcie  $U_{2, sk}$  na otwartym uzwojeniu wtórnym, jeśli dla pierwotnego napięcia  $U_{1, sk}$  wynosi 120 V? (b) Jakie prądy  $i_{1, sk}$  oraz  $i_{2, sk}$  popłyną, jeśli uzwojenie wtórne obciążymy opornością  $R = 15 \Omega$ ? Zakładamy, że transformator jest idealny, tj.  $\varphi = 0$ .

27. Transformator (idealny) o przekładni 2:1 jest zasilany z wyjścia dwupołówkowego prostownika (patrz rys. 39-8c). Naszkicuj kształt przebiegu pojawiącego się na uzwojeniu wtórnym, przy założeniu, że nie jest ono obciążone.

28. Porównaj wielkości  $\Phi_B(t)$ ,  $\mathcal{E}(t)$ ,  $U_1(t)$ ,  $U_2(t)$ ,  $U_{1, sk}$ ,  $U_{2, sk}$ ,  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$ ,  $i_{1, sk}$  oraz  $i_{2, sk}$  dla układu z rys. 39-10 w dwóch sytuacjach: (a) klucz  $S$  otwarty i (b) klucz  $S$  zamknięty. Załóż, że transformator jest idealny, tj.  $\varphi = 0$ .

29. Wykaż, że przez uzwojenie pierwotne transformatora z rys. 39-10 płynie prąd  $i_1(t)$  taki sam, jaki popłynie, jeśli zamiast transformatora wraz z jego obciążeniem do generatora bezpośrednio podłączymy oporność  $R'$  [ $= R(N_1/N_2)^2$ ], tj. prąd  $i_1(t) = \mathcal{E}(t)/R'$ . W tym sensie widać, że transformator „transformuje” nie tylko napięcia i prądy, ale także oporności. W przypadku ogólniejszym, tj. wtedy, gdy wtórne obciążenie (rys. 39-10) zawiera niekoniecznie opór, ale elementy pojemnościowe lub indukcyjne, mówimy, że transformator transformuje *impedancję*. Jako przykład zobacz zadanie 31.

30. W zadaniu 7 z rozdziału 32 twierdziliśmy (rys. 32-3a), że dla prądu stałego moc wydzielana w zewnętrznym oporze  $R$  osiąga maksimum dla  $R = r$ , gdzie  $r$  jest wewnętrznym oporem (stałoprądowego)



Rys. 39-14. Zadanie 30

źródła SEM. W odniesieniu do rys. 39-14 wykaż w podobny sposób, że średnia moc  $P_{\text{sr}}$  wydzielająca się w  $R$  osiąga maksimum dla  $R = r$ , gdzie  $r$  jest wewnętrznym oporem generatora napięcia przemiennego. W tekście rozdziału milcząco zakładaliśmy, że  $r = 0$ , tu zakładamy, że  $r \neq 0$ .

31. *Dopasowanie impedancji.* Widzieliśmy w zadaniu 29, że transformator może być użyty jako przyrząd transformujący opór (a ogólniej impedancję). Przekonaliśmy się również (w zadaniu 30, rys. 39-14), że przekaz mocy z generatora prądu przemiennego (o oporze wewnętrznym  $r$ ) do obciążenia oporowego  $R$  jest maksymalny, gdy  $R = r$ . Założmy (dla rys. 39-14), że  $r = 1,0 \text{ k}\Omega$ ,  $R = 10 \Omega$ ,  $\omega/2\pi = 60 \text{ Hz}$ , a  $\mathcal{E}_{\text{ok}} = 120 \text{ V}$ . Zaprojektuj transformator, który umieszczony pomiędzy zmiennoprądowym generatorem a obciążeniem zapewni maksymalny przekaz mocy do  $R$ . Załóż, że będzie to transformator idealny, dla którego  $\varphi = 0$ . Taką technikę stosuje się np. wtedy, gdy trzeba z wysoką sprawnością przekazywać moc ze wzmacniacza akustycznego (o wysokiej impedancji wyjściowej) do (niskooporowego) głośnika.

Odp.:  $N_1/N_2 = 10$ .

# 40. Równania Maxwell'a

## 40-1. Podstawowe równania elektromagnetyzmu

W mechanice klasycznej oraz termodynamice poszukiwaliśmy najmniejszego, najbardziej zwartego układu równań (praw), pozwalającego na możliwie pełne określenie przedmiotu zainteresowania. Okazało się, że w mechanice są to trzy zasady dynamiki Newtona (paragrafy 5-2, 5-4 i 5-5) oraz związane z nimi prawa dotyczące sił, na przykład prawo grawitacji Newtona (paragraf 16-2). W termodynamice natomiast były to trzy zasady opisane w paragrafach 21-2, 22-7 oraz 25-4.

W tym rozdziale, w kolejnych kilku krokach, chcemy zrobić to samo dla elektromagnetyzmu. Po pierwsze, przedstawmy w tablicy 40-1 próbny układ takich równań. Po przestudiowaniu tablicy, na podstawie rozważań dotyczących symetrii wnioskujemy, że równania te nie są kompletne i że w jednym z nich musi brakować (i istotnie brakuje) pewnego wyrazu.

Później okaże się, że brakujący wyraz nie jest drobną poprawką i że dopiero po jego dodaniu otrzymujemy kompletny opis elektromagnetyzmu, a ponadto że wyraz ten czyni optykę integralną częścią tego działu. W szczególności pozwala on udowodnić, że prędkość światła w próżni,  $c$ , jest związana z czysto elektrycznymi i magnetycznymi wielkościami zależnością

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (40-1)$$

Dodanie tego wyrazu pozwala również na wprowadzenie pojęcia widma elektromagnetycznego, w skład którego obok eksperymentalnie wykrytych fal radiowych wchodzą jeszcze inne fale.

Widzieliśmy już, że przenikająca fizykę zasada symetrii często ujawniała nowe fakty i prowadziła do nowych odkryć. Na przykład: (a) jeżeli ciało  $A$  przyciąga ciało  $B$  siłą  $F$ , to ciało  $B$  przyciąga ciało  $A$  siłą  $-F$  (istotnie tak jest), (b) jeżeli istnieje ujemnie naładowany elektron, może również istnieć dodatnio naładowany elektron (rzeczywiście istnieje) itd.

Prześledźmy tablicę 40-1 z tego punktu widzenia. Po pierwsze stwierdzamy, że jeżeli

mamy do czynienia wyłącznie z rozważaniami dotyczącymi symetrii (to znaczy nie wykonujemy obliczeń ilościowych), to możemy pominąć  $\varepsilon_0$  i  $\mu_0$ . Stałe te wynikają z naszego wyboru układu jednostek i nie odgrywają żadnej roli przy wyciąganiu wniosków związanych z symetrią. Wiadomo że istnieją układy jednostek, w których  $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$ .

Tablica 40-1. Próbne\* podstawowe równania elektromagnetyzmu

Symbol	Nazwa	Równanie	Numer równania w tekście
I	prawo Gaussa dla elektryczności	$\varepsilon_0 \oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = q$	(28-6)
II	prawo Gaussa dla magnetyzmu	$\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$	(37-6)
III	prawo indukcji Faradaya	$\oint \mathbf{E} dl = - \frac{d\Phi_B}{dt}$	(35-9)
IV	prawo Ampère'a	$\oint \mathbf{B} dl = \mu_0 i$	(34-1)

\* Termin „próbne” oznacza, jak przekonamy się poniżej, że równanie IV jest niekompletne, brakuje w nim pewnego wyrazu; patrz tablica 40-2.

Pamiętając o powyższych uwagach, stwierdzamy że lewe strony równań w tablicy 40-1 są parami idealnie symetryczne. Równania I i II są to całki powierzchniowe, odpowiednio  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$ , po zamkniętych powierzchniach. Równania III i IV są to całki liniowe, odpowiednio  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$ , po zamkniętych torach.

Prawe strony tych równań *nie* są symetryczne. W rzeczywistości istnieją dwa rodzaje asymetrii, które omówimy oddzielnie.

1. Pierwszy rodzaj asymetrii, który właściwie nie dotyczy tego rozdziału, związany jest z dobrze znanym faktem, że choć istnieją izolowane centra ładunku (na przykład elektrony i protony) wydaje się, że nie ma izolowanych centrów magnetyzmu (magnetycznych monopoli; patrz paragraf 37-1). Wyjaśnia to dlaczego po prawej stronie równania I mamy „ $q$ ”, a po prawej stronie równania II „ $0$ ”. Z tego samego powodu po prawej stronie równania IV pojawia się wyraz  $\mu_0 i (= \mu_0 dq/dt)$ , a nie ma podobnego wyrazu (prądu magnetycznych monopoli) po prawej stronie równania III. Wy tłumaczenie tej asymetrii wiąże się z tym, że dotychczas nie odkryto magnetycznych monopoli. Rozważania na temat symetrii skłoniły fizyków do bardzo poważnych, wielokierunkowych poszukiwań magnetycznych monopoli. Można powiedzieć, że natura jak gdyby inspirowała fizyków i kierowała tymi poszukiwaniami.

2. Drugi rodzaj asymetrii, z którym mamy do czynienia w tym rozdziale, łatwo rzuca się w oczy. Po prawej stronie równania III (prawa indukcji Faradaya; patrz równanie (35-9)) znajduje się wyraz  $-d\Phi_B/dt$ , a sens tego prawa w swobodnej interpretacji jest następujący:

Zmieniając pole magnetyczne ( $d\Phi_B/dt$ ), wytwarzamy pole elektryczne ( $\oint \mathbf{E} dl$ ).

Wiemy o tym z paragrafu 35-1, gdzie pokazywaliśmy, że wsuwanie namagnesowanej sztabki w środek przewodzącej, zamkniętej pętli powoduje indukowanie się w tej pętli pola elektrycznego, a więc przepływ prądu.

Korzystając z zasady symetrii mamy prawo przypuszczać, że obowiązuje również zależność odwrotna, to znaczy że:

Zmieniając pole elektryczne ( $d\Phi_E/dt$ ), wytwarzamy pole magnetyczne ( $\oint \mathbf{B} dl$ ).

Słuszność zasady symetrii w tym wypadku rzeczywiście daje się potwierdzić eksperymentalnie; będziemy o tym mówić szczegółowo w następnym paragrafie. To przypuszczenie pozwala nam uzupełnić równanie IV w tablicy 40-1 o ważny „brakujący” wyraz.

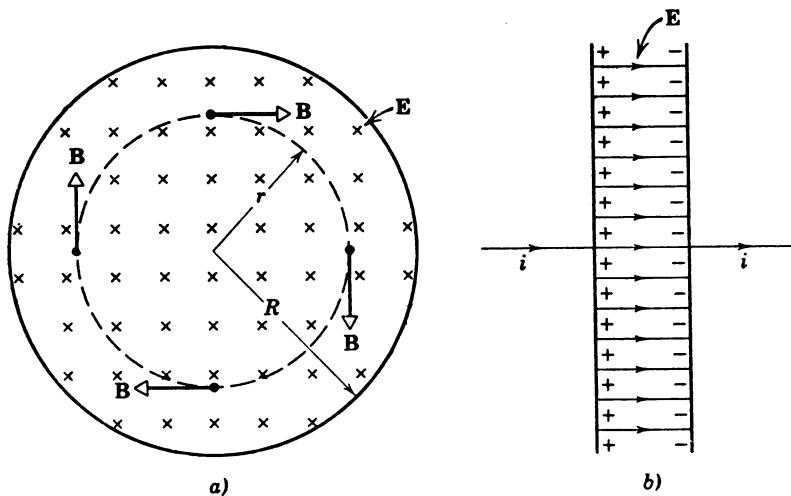
## 40-2. Indukowane pola magnetyczne

Obecnie omówimy szczegółowo dowody na to, że słuszne były przewidywania z poprzedniego paragrafu, a mianowicie że:

„Zmieniające się pole elektryczne indukuje pole magnetyczne”.

Chociaż przewodnikiem naszym będą rozważania dotyczące symetrii, będziemy się również odwoływać do bezpośredniej doświadczalnej weryfikacji słuszności tych rozważań.

Rysunek 40-1a przedstawia jednorodne pole elektryczne  $E$  wypełniające cylindryczny obszar przestrzeni. Może ono być wytworzone przez kondensator płaski o kołowych okładkach, taki jak na rys. 40-1b. Założmy, że  $E$  wzrasta ze stałą szybkością  $dE/dt$ , co oznacza, że do okładek kondensatora dopływa ze stałą szybkością ładunek elektryczny; dla dostarczenia takiego ładunku potrzebny jest stały prąd  $i$  dopływający do płyty ładowanej dodatnio i taki sam stały prąd  $i$  wypływający z płyty ładowanej ujemnie.



Rys. 40-1. (a) Wektory przedstawiają indukcję  $B$  pola magnetycznego w czterech punktach pola wytworzonym przez wzrastające pole elektryczne  $E$ . Porównać z rys. 35-10. (b) Takie zmieniające się pole elektryczne można wytworzyć ładując kondensator płaski

Doświadczenie pokazuje (patrz zadanie 4), że powstaje tam pole magnetyczne wytworzone przez zmieniające się pole elektryczne. Rysunek 40-1a przedstawia  $B$  w czterech dowolnie wybranych punktach. Rysunek 40-1 stanowi piękny przykład występowania symetrii w przyrodzie. Zmieniające się pole magnetyczne indukuje pole elektryczne (prawo Faradaya), a tu widzimy, że zmieniające się pole elektryczne indukuje pole magnetyczne.

Aby opisać ten nowy fakt ilościowo, wykorzystamy analogię do prawa indukcji Faradaya:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (40-2)$$

które głosi, że pole elektryczne (lewa strona) jest wytwarzane przez zmieniające się pole magnetyczne (prawa strona). Jako symetryczny odpowiednik możemy napisać\*

$$\oint \mathbf{B} dl = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \quad (40-3)$$

Z równania (40-3) wynika, że pole magnetyczne (lewa strona) może być wytwarzane przez zmieniające się pole elektryczne (prawa strona). Czytelnik powinien dokładnie porównać rys. 35-10, na którym przedstawiono wytwarzanie pola elektrycznego przez zmienne pole magnetyczne, z sytuacją na rys. 40-1a. W każdym z tych przypadków odpowiedni strumień  $\Phi_B$  lub  $\Phi_E$  wzrasta. Jednakże doświadczenie pokazuje, że linie E na rys. 35-10 są skierowane przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, podczas gdy linie B na rys. 40-1a są skierowane zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Różnica ta powoduje brak znaku minus we wzorze (40-3) w porównaniu ze wzorem (40-2).

W paragrafie 34-1 widzieliśmy, że pole magnetyczne może również być wytworzone przez prąd płynący w przewodniku. Opisujemy to ilościowo za pomocą prawa Ampère'a,

$$\oint \mathbf{B} dl = \mu_0 i,$$

w którym  $i$  jest natężeniem prądu przewodzenia przepływającego przez powierzchnię ograniczoną pętlą, wzdłuż której wykonujemy całkowanie. Tak więc pole magnetyczne jest wytwarzane przynajmniej na dwa sposoby: (a) przez zmienne pole elektryczne i (b) przez przepływ prądu. W ogólnym równaniu należy uwzględnić obydwie możliwości, czyli\*\*

$$\oint \mathbf{B} dl = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 i. \quad (40-4)$$

W ten sposób Maxwell uogólnił prawo Ampère'a. Jak już podkreślimy wcześniej, jest to uogólnienie bardzo ważne, stanowiące istotną nowość.

W rozdziale 34 zakładaliśmy brak zmiennych pól elektrycznych, tzn. przyjmowaliśmy, że człon  $d\Phi_E/dt$  w równaniu (40-4) równa się零. W powyższych rozważaniach założyliśmy, że brak jest prądów przewodzenia w przestrzeni zawierającej pole elektryczne, czyli że człon zawierający  $i$ , w równaniu (40-4), równa się zero. Widzimy teraz, że każdy z tych przypadków jest przypadkiem szczególnym.

**Przykład 1.** Płaski kondensator o kołowych okładkach jest ładowany jak na rys. 40-1. (a) Podać wyrażenie na indukowane pole magnetyczne dla różnych odległości  $r$ . Rozważyć przypadek, gdy  $r < R$  oraz  $r > R$ .

Korzystając z równania (40-3)

$$\oint \mathbf{B} dl = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt},$$

\* Stosowany tu układ jednostek wymaga umieszczenia stałych  $\epsilon_0$  i  $\mu_0$  w równaniu (40-3). W przypadku stosowania niektórych innych układów jednostek wielkości te nie występowałyby.

\*\* W rzeczywistości istnieje jeszcze trzeci sposób wytwarzania pola magnetycznego — przez ciała namagnesowane. W paragrafie 37-8 widzieliśmy, że można to uwzględnić przez dodanie członu z prądem magnesującym  $i_M$  po prawej stronie prawa Ampère'a.

Prawo to można wówczas zapisać w sposób najbardziej ogólny następująco:

$$\oint \mathbf{B} dl = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 i + \mu_0 i_M.$$

W dalszym ciągu tej książki będziemy przyjmować, że nie ma ciał namagnesowanych, czyli  $i_M = 0$ .

możemy napisać dla  $r \leq R$ :

$$2B\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} (E\pi r^2) = \mu_0 \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt}.$$

Wyznaczając  $B$  otrzymujemy

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 \varepsilon_0 r \frac{dE}{dt} \quad (r \leq R).$$

Dla  $r \geq R$  równanie (40-3) daje

$$2B\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} (E\pi R^2) = \mu_0 \varepsilon_0 \pi R^2 \frac{dE}{dt},$$

czyli

$$B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 R^2}{2r} \frac{dE}{dt} \quad (r \geq R).$$

(b) Obliczyć  $B$  w odległości  $r = R$  dla  $dE/dt = 10^{12}$  V/m · s i dla  $R = 5,0$  cm. Dla  $r = R$  obydwa wyrażenia na  $B$  są sobie równe, czyli

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} \mu_0 \varepsilon_0 R \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} (4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m}/\text{A}) (8,9 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)) = \\ &= (5,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}) (10^{12} \text{ V}/(\text{m} \cdot \text{s})) = 2,8 \cdot 10^{-7} \text{ T} = 0,0028 \text{ Gs}. \end{aligned}$$

Widać, że indukowane w tym przypadku pola magnetyczne są tak małe, że trudno jest je zmierzyć za pomocą prostej aparatury. W przeciwieństwie do tego indukowane pole elektryczne (prawo Faradaya) można łatwo zadeemonstrować. Ta doświadczalna różnica jest częściowo spowodowana faktem, że indukowane SEM możemy łatwo powiększać używając cewki o wielu zwojach. Nie znamy natomiast równie prostego sposobu powiększania pól magnetycznych. W doświadczeniach wykorzystujących drgania o bardzo dużych częstotliwościach  $dE/dt$  może być bardzo duże, co powoduje znaczny wzrost wielkości indukowanego pola magnetycznego.

### 40-3. Prąd przesunięcia

Z równania (40-4) widać, że człon  $\varepsilon_0 d\Phi_E/dt$  ma wymiar prądu. Mimo że nie mamy tu do czynienia z ruchem ładunków, to jednak istnieją podstawy do nazwania tego członu prądem przesunięcia\*. A więc możemy mówić, że pole magnetyczne może być wytworzone przez prąd przewodzenia  $i$  lub prąd przesunięcia  $i_p$  ( $= \varepsilon_0 d\Phi_E/dt$ ) i przepisać równanie (40-4) w postaci\*\*

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 (i_p + i). \quad (40-5)$$

Koncepcja prądu przesunięcia pozwala na utrzymanie zasady ciągłości prądu obowiązującej, jak widzieliśmy w paragrafie 31-1, dla stałego prądu przewodzenia. Na przykład, na rys. 40-1b prąd  $i$  wpływa do płyty dodatniej i wypływa z płyty ujemnej. Prąd przewodzenia nie jest ciągły między okładkami kondensatora, gdyż w przestrzeni między nimi nie jest przenoszony żaden ładunek. Jednakże prąd przesunięcia  $i_p$  w tym obszarze jest dokładnie równy prądowi  $i$ , dzięki czemu możemy utrzymać koncepcję ciągłości prądu.

\* Słowo „przesunięcie” zostało wprowadzone z powodów historycznych, tutaj nieistotnych.

\*\* Równanie to możemy jeszcze bardziej uogólnić, uwzględniając obecność ciał namagnesowanych, pisząc

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 (i_p + i + i_M).$$

Patrz notka na s. 360.

Aby obliczyć wielkość prądu przesunięcia, przypomnijmy sobie (patrz równ. (30-2)), że  $E$  w obszarze między płytami wynosi

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 A}.$$

Różniczkując otrzymujemy

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0 A} \frac{dq}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0 A} i.$$

Prąd przesunięcia  $i_p$  z definicji wynosi

$$i_p = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \epsilon_0 \frac{d(EA)}{dt} = \epsilon_0 A \frac{dE}{dt}.$$

Eliminacja  $dE/dt$  z tych dwu równań daje

$$i_p = (\epsilon_0 A) \left( \frac{1}{\epsilon_0 A} i \right) = i.$$

Widzimy, że prąd przesunięcia w obszarze między okładkami kondensatora jest równy prądowi przewodzenia w przewodach łączących.

**Przykład 2.** Jaki jest prąd przesunięcia dla sytuacji z przykładu 1? Z definicji, prąd przesunięcia wynosi

$$\begin{aligned} i_p &= \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} [E(\pi R^2)] = \epsilon_0 \pi R^2 \frac{dE}{dt} = \\ &= (8,9 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2))(\pi)(5,0 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 (10^{12} \text{ V}/(\text{m} \cdot \text{s})) = 0,070 \text{ A}. \end{aligned}$$

Mimo że prąd ten jest dosyć duży, to jednak wytwarza on małe pole magnetyczne (patrz przykład 1), gdyż jest rozłożony na dużej powierzchni. Przeciwnie, prąd przewodzenia  $i$  w przewodach doprowadzających (także  $= 0,070 \text{ A}$ , ponieważ  $i = i_p$ ) może wytwarzać w pobliżu tych (cienkich) przewodów efekty magnetyczne łatwo wykrywalne przy pomocy igły kompasu. Z dyskusji przeprowadzonej w paragrafie 34-2 widać, że efekty magnetyczne są największe na powierzchni drutu. Kondensator z rys. 40-1 zachowuje się jak „przewodnik” o promieniu 5,0 cm przewodzący prąd (przesunięcia) 0,070 A. Największy efekt magnetyczny dla tego prądu obserwujemy na krawędziach płyt kondensatora, tzn. dla  $r = 5,0 \text{ cm}$  i jest on dany równaniem (34-4) ( $B = \mu_0 i / 2\pi r$ ).

#### 40-4. Równania Maxwella

Równanie (40-4) jest ostatnim z prezentowanego układu podstawowych równań elektromagnetyzmu zwanych *równaniami Maxwella*\*. Zebrane są one razem w tablicy 40-2, która została uzupełniona, w stosunku do „próbnej” tablicy 40-1 „brakującym” wyrazem w równ. IV tej tablicy. Wszystkie równania fizyki wiążące ze sobą, jak powyższe równania, doświadczenia z bardzo szerokiego zakresu i pozwalające przewidywać nowe wyniki doświadczeń, są w pewien sposób piękne. Mogą to ocenić ci, którzy je dobrze rozumieją. Takie są równania ruchu Newtona, zasady termodynamiki, teoria względności i teorie fizyki kwantowej. Ludwig Boltzmann, fizyk, napisał o równaniach Maxwella (cytując Goethego): „Czy to był Bóg, co napisał te wiersze...”. W późniejszych czasach J. R. Pierce

\* W poprzednich paragrafach przedstawiając równania Maxwella zebrane w tablicy 40-2 oparliśmy się na argumentach dostarczonych przez rozważania dotyczące symetrii. W rzeczywistości Maxwell w swojej pracy nie korzystał z takich argumentów. Pierwszym, który wskazał na istnienie symetrii pomiędzy  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$  był, jak się wydaje, brytyjski fizyk Oliver Heaviside (1850–1925). Interesujące uwagi historyczne na ten temat można znaleźć w artykule: Alfred M. Bork, Maxwell, Displacement Current, and Symmetry, *American Journal of Physics*, November 1963.

Tablica 40-2. Podstawowe równania elektromagnetyzmu (równania Maxwella)\*

Numer	Nazwa	Równanie	Czego dotyczy	Główne fakty doświadczalne	Omówione w
I	prawo Gausса dla elektryczności	$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = q$	ładunek i pole elektryczne	1. Ładunki jednoimienne odpychają się, a ładunki różnoimienne przyciągają z siłą odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości między nimi 1'. Ładunek umieszczony na izolowanym przewodniku przemieszcza się w kierunku jego powierzchni zewnętrznej	rozdział 28
II	prawo Gausса dla magnetyzmu	$\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$	pole magnetyczne	2. Dotychczas nie stwierdzono istnienia odosobnionego biegunu magnetycznego	paragraf 37-2
III	prawo indukcji Faradaya	$\oint \mathbf{E} dl = - \frac{d\Phi_B}{dt}$	efekt elektryczny zmieniającego się pola magnetycznego	3. Sztabka magnetyczna przesuwana przez zamknięty obwód powoduje powstanie prądu w tym obwodzie	rozdział 35
IV	prawo Ampère'a (rozszerzone przez Maxwell'a)	$\oint \mathbf{B} dl = \mu_0 \left( \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + i \right)$	efekt magnetyczny zmieniającego się pola elektrycznego lub prądu	4. Prędkość światła można wyliczyć z pomiarów czysto elektromagnetycznych 4'. Prąd płynący w przewodniku tworzy wokół siebie pole magnetyczne	paragraf 39.5 rozdział 34

\* Przedstawione równania podano przy założeniu, że w ośrodku nie ma materiałów magnetycznych ani dielektryków.

w rozdziale książki, zatytułowanym „Cudowne równania Maxwella” napisze: „Każdemu, kogo interesują nie tylko codzienne praktyczne sprawy, warto jest wyjaśnić sens równań Maxwella po prostu dla dobra jego duszy”. Zakres zastosowań równań Maxwella jest niezwykle duży, obejmuje on podstawowe zasady działania wszystkich makroskopowych urządzeń elektromagnetycznych, takich jak silniki, synchrotrony, telewizja i radar\*.

\* O jednym z ostatnich efektownych przykładów zastosowań równań Maxwella można przeczytać w artykule: Henry H. Kohn, Richard D. Thornton, Electromagnetic Flight, *Scientific American*, October 1973. Artykuł stwierdza: „Przyszłość szybkiej komunikacji naziemnej być może będzie należała nie do pojazdów kołowych, lecz do pojazdów „leczących” na wysokości kilkudziesięciu centymetrów ponad wyznaczonym torem, unoszących i napędzanych za pomocą sił elektromagnetycznych”.

W paragrafie 40-1 stwierdziliśmy, że równania Maxwella (z tablicy 40-2) są dla elektromagnetyzmu tym samym co zasady dynamiki Newtona dla mechaniki. Istnieje jednak ważna różnica. Po około 200 latach od odkrycia praw ruchu przez Newtona i 40 lat po równaniach Maxwella, w roku 1905, Einstein przedstawił swoją szczególną teorię względności (patrz uzupełnienie V). Okazało się wówczas, że równania ruchu Newtona należy drastycznie zmodyfikować w przypadku gdy względne prędkości zbliżają się do prędkości światła. Natomiast *równania Maxwella nie wymagały żadnych zmian*. Możemy więc stwierdzić (patrz uzupełnienie V), że „równania Maxwella są niezmienne względem transformacji Lorentza, natomiast równania ruchu Newtona nie są”.

### 40-5. Równania Maxwella a drgania we wnęce

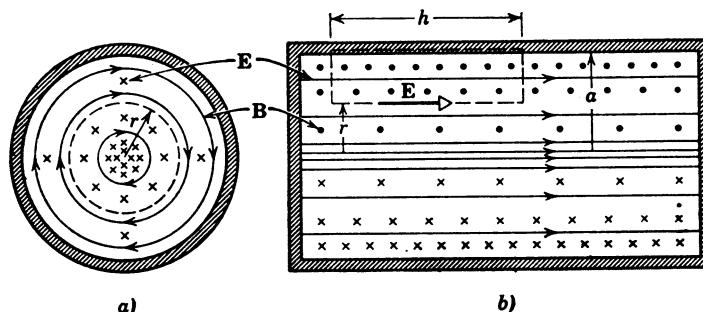
Obecnie, gdy stwierdziliśmy już, że równania Maxwella stanowią podstawowe równania elektromagnetyzmu, chcemy przetestować te równania w kilku różnych sytuacjach. W tym paragrafie powrócimy do drgań elektromagnetycznych we wnęce z paragrafu 38-5 (patrz rys. 38-6). W rozdziale 41 pokażemy, że wychodząc z równań Maxwella można przewidywać: że istnieją fale elektromagnetyczne, że światło jest taką falą oraz że szybkość rozchodzenia się promieniowania elektromagnetycznego (światła),  $c$ , jest rzeczywiście określona równaniem 40-1.

Całkowicie formalne potraktowanie drgań we wnęce z rys. 38-6, leżące poza zakresem tego podręcznika, powinno rozpoczynać się od równań Maxwella i kończyć na wyrażeniach matematycznych, określających zależność  $\mathbf{B}$  i  $\mathbf{E}$  od czasu i położenia we wnęce dla wszystkich rodzajów drgań. Tutaj ograniczymy się jedynie do podstawowego rodzaju drgań przedstawionego na rys. 38-6, dla którego *założyliśmy*, że pola  $\mathbf{B}$  i  $\mathbf{E}$  zmieniają się tak, jak pokazano na tym rysunku; sprawdzimy, że zmiany te są zgodne z równaniami Maxwella.

Rysunek 40-2 przedstawia dwa przekroje wnęki z rys. 38-6, na których widać zarówno pole elektryczne jak i magnetyczne. Z rysunku 38-8 wynika, że w tej fazie drgań  $\mathbf{B}$  maleje, a  $\mathbf{E}$  rośnie. Zastosujmy prawo Faradaya

$$\oint \mathbf{E} dl = - \frac{d\Phi_B}{dt},$$

do prostokąta o wymiarach  $h$  i  $a-r$ . Przez prostokąt ten przechodzi określony strumień  $\Phi_B$ .



Rys. 40-2. Dwa przekroje elektromagnetycznej wnęki rezonansowej w fazie oscylacji odpowiadającej rys. 38-6d. (a) Przerywany okrąg przedstawia dogodną drogę całkowania przy obliczaniu indukcji z prawa Ampèrea. (b) Przerywany prostokąt przedstawia dogodną drogę całkowania przy obliczaniu natężenia z prawa Faradaya

Strumień ten maleje z czasem, gdyż  $\mathbf{B}$  maleje. Całka liniowa po konturze prostokąta wynosi

$$\oint \mathbf{E} dl = h E(r),$$

gdzie  $E(r)$  jest wartością  $E$  w odległości  $r$  od osi wnęki.

Zauważmy, że  $\mathbf{E}$  równa się zeru dla górnej części drogi całkowania (która leży w ścianie wnęki) i że  $\mathbf{E}$  i  $dl$  są wzajemnie prostopadłe na dwu bocznych odcinkach. Łącząc powyższe dwa równania otrzymujemy

$$E(r) = -\frac{1}{h} \frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (40-6)$$

Z równania (40-6) widać, że  $E(r)$  zależy od szybkości, z jaką zmienia się strumień  $\Phi_B$  przechodzący przez pokazany obszar i ma wielkość maksymalną dla maksymalnej wartości  $d\Phi_B/dt$ . Zachodzi to dla  $\mathbf{B} = 0$ , czyli wówczas, gdy  $\mathbf{B}$  zmienia swój kierunek. Czytelnik powinien przypomnieć sobie, że sinus lub cosinus zmienia się najszybciej, czyli ma najbardziej stromą styczną w punktach, w których przecina oś między wielkościami ujemnymi i dodatnimi. A więc składowa pola elektrycznego we wnęce ma wartość maksymalną, gdy pole magnetyczne równa się zeru w całej objętości, co jest zgodne z rys. 38-6a i 38-6e oraz z koncepcją zamiany energii elektrycznej na magnetyczną i na odwrotnie. Czytelnik może pokazać, wykorzystując prawo Lenza, że gdy pole magnetyczne maleje, pole elektryczne na rys. 40-2 jest rzeczywiście skierowane w prawo, jak widać na rysunku.

Rysunek 40-2a pokazuje wnękę od podstawy; elektryczne linie sił wychodzą ze stronicy książki pod kątami prostymi, a linie magnetyczne tworzą zamknięte koła. Zastosujmy prawo Ampère'a dane w postaci

$$\oint \mathbf{B} dl = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 i \quad (40-4)$$

do kołowego obwodu o promieniu  $r$ , pokazanego na rysunku. Ponieważ przez to koło nie przepływa żaden ładunek, więc prąd przewodzenia w równaniu (40-4) równa się zeru. Całka liniowa po lewej stronie wynosi  $2\pi r B$ , a więc z równania tego otrzymujemy

$$B(r) = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{2\pi r} \frac{d\Phi_E}{dt}. \quad (40-7)$$

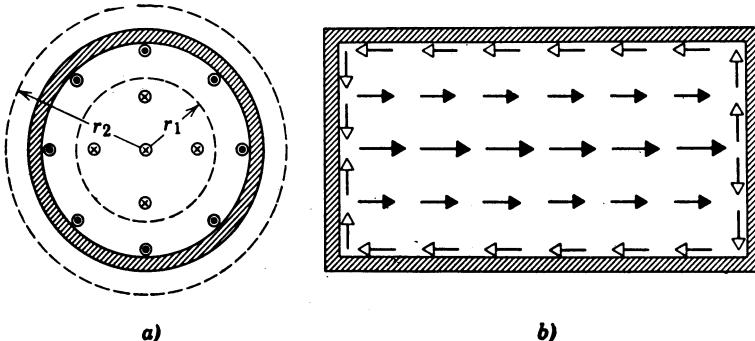
Z równania (40-7) widać, że pole magnetyczne  $B(r)$  jest proporcjonalne do szybkości, z jaką strumień elektryczny  $\Phi_E$  przechodzący przez to koło zmienia się w czasie. Pole  $B(r)$  ma wielkość maksymalną, gdy  $d\Phi_E/dt$  jest maksymalne; zachodzi to dla  $\mathbf{E} = 0$ , czyli gdy  $\mathbf{E}$  zmienia swój kierunek. A więc  $\mathbf{B}$  ma wartość maksymalną, gdy  $\mathbf{E}$  równa się zeru we wszystkich punktach wnęki. Jest to zgodne z rys. 38-6c i 38-6g oraz z koncepcją zamiany energii elektrycznej na magnetyczną i na odwrotnie. Z porównania z rys. 40-1a, który podobnie jak rys. 40.2a odpowiada wzrastającemu polu magnetycznemu, widać, że linie  $\mathbf{B}$  mają rzeczywiście kierunek zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, gdy patrzy się wzdłuż kierunku pola elektrycznego.

Patrząc na równ. (40-6) i (40-7) widzimy, że we wnęce istnieje ścisła zależność między polami  $\mathbf{B}$  i  $\mathbf{E}$ . Gdy pole magnetyczne zmienia się w czasie, indukuje ono pole elektryczne zgodnie z prawem Faradaya. To pole elektryczne, które również zmienia się w czasie, indukuje pole magnetyczne zgodnie z prawem Ampère'a rozszerzonym przez Maxwell. Jeżeli choć raz powstaną takie drgania, będą się one nawzajem podtrzymywać i, przy braku

strat na wydzielanie energii cieplnej w ścianach wnęki oraz wypływu energii przez otwory mogące znajdować się w ścianach, będą trwać nieskończoność dłucho. W rozdziale 41 pokażemy, że takie wzajemne zmiany pól **B** i **E** zachodzą nie tylko w stojących falach elektromagnetycznych we wnękach, lecz również w falach elektromagnetycznych rozchodzących się w przestrzeni, takich jak fale radiowe lub światło widzialne.

**Przykład 3.** Przeanalizujcie, patrząc na rys. 40-2, jakie prądy (przewodzenia i przesunięcia) płyną we wnęce (zarówno w przewodzących ścianach, jak i wewnętrz objętości). Pokażcie, jaka zależność istnieje pomiędzy tymi prądami a polami elektrycznym i magnetycznym. Pokażcie także, że uwzględniając zarówno prąd przewodzenia jak i przesunięcia, można wywnioskować, że prąd płynący po drogach zamkniętych jest ciągły.

Na rysunku 40-3 widzimy dwa przekroje wnęki zrobione w chwili odpowiadającej rys. 40-2. Dla uproszczenia pola **B** i **E** nie zostały pokazane; strzałki przedstawiają płynące tam prądy. Ponieważ na rys. 40-2 i 40-3 **E** wzrasta, dodatni ładunek na podstawie wnęki (z lewej strony na rys. 40-3b) musi wzrastać. Wobec tego wzdłuż ścianek muszą płynąć prądy przewodzenia, od prawej do lewej strony na rys. 40-3b. Prądy te zostały również pokazane na rys. 40-3a za pomocą punktów (symbolizujących ostrza strzałek) umieszczonych przy ściankach wnęki.



Rys. 40-3. Wnęka z rys. 40-2 z widocznym (a) prądem przewodzenia skierowanym przed rysunek i prądem przesunięcia we wnęce skierowanym za rysunek oraz prądem przesunięcia (czarne ostrza strzałek) w objętości wnęki i prądem przewodzenia (białe ostrza strzałek) w ścianach. Wielkości strzałek charakteryzuje gęstości prądów. Zwróćcie uwagę na ciągłość prądu (przesunięcia + przewodzenia), pozwalającą na tworzenie zamkniętych pętli prądu

Pamiętając o tym, że  $\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$  jest prądem przesunięcia, możemy równanie (40-7) przepisać w postaci

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{\mu_0}{2\pi r} i_p.$$

Równanie to głosi, że pole **B** we wnęce jest związane z prądem przesunięcia; porównajcie je ze wzorem (34-4). Stosując regułę prawej ręki do rys. 40-2a, widzimy, że prąd przesunięcia  $i_p$  musi być skierowany w stronę płaszczyzny rysunku, jeśli ma być związany z liniami **B** mającymi kierunek zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara.

Prąd przesunięcia pokazują na rys. 40-3 strzałki skierowane w prawo, a na rys. 40-3a krzyżyki symbolizujące strzałki wchodzące w stronę książki. Z rysunku 40-3 widać, że prąd jest ciągły, gdyż płynie w ścianach jako prąd przewodzenia i wraca przez obszar wnęki jako prąd przesunięcia. Jeżeli zastosujemy rozszerzone przez Maxwell'a prawo Ampèrea

$$\oint \mathbf{B} dl = \mu_0 (i_p + i), \quad (40-8)$$

do kołowego konturu o promieniu  $r_1$ , jak na rys. 40-3a, to stwierdzimy, że pole **B** istniejące wzdłuż tego konturu jest w całości wytworzone przez prąd przesunięcia; prąd przewodzenia *wewnętrz tego koła* równa się zeru.

Dla konturu o promieniu  $r_2$  całkowity prąd zawarty wewnętrz równa się zero, gdyż prąd przewodzenia

w ścianach jest dokładnie równy, lecz ma przeciwny znak niż prąd przesunięcia w objętości wnęki. Ponieważ  $i$  co do wielkości równa się  $i_p$ , a znaki mają różne, więc, jak wynika z równania (40-8),  $B$  musi być równe zeru dla wszystkich punktów leżących na zewnątrz wnęki. Jest to zgodne z doświadczeniem.

### Pytania

1. Wyjaśnij własnymi słowami dlaczego równ. III z tablicy 40-1 można interpretować następująco: „Zmieniające się pole magnetyczne może generować pole elektryczne”.
2. Jak może być prawdziwe równ. (40-1), jeśli (co jest prawda) istnieją układy jednostek, w których pojawiają się  $\epsilon_0$  i  $\mu_0$ ?
3. Czy kierunek indukowanego pola magnetycznego jest zgodny czy przeciwny do ruchu wskaźówek zegara (patrząc wzdłuż kierunku  $E$ ), gdy jednorodny strumień  $\Phi_E$  przechodzący przez płaski, kolisty pierścień maleje w czasie? Czy ma na to wpływ (a) jednorodność pola elektrycznego oraz (b) prostopadłość tego pola do płaszczyzny pierścienia?
4. Porównaj tablice 40-1 i 40-2. Czy dla wprowadzenia brakującego wyrazu w równ. IV wystarczy powołać się na samą zasadę symetrii, czy też wymaga to weryfikacji doświadczalnej?
5. Dlaczego tak łatwo jest wykazać, że „zmieniające się pole magnetyczne wytwarza pole elektryczne”, a tak trudno w prosty sposób wykazać, że „zmieniające się pole elektryczne wytwarza pole magnetyczne”?
6. Rozważmy okrąg o promieniu  $r > R$  na rys. 40-1a. Dlaczego wzdłuż tego okręgu indukowane jest pole magnetyczne, o czym mowa w przykładzie 1? Przecież w miejscu, gdzie jest ten okrąg, nie ma pola elektrycznego i  $dE/dt = 0$ .
7. Na rysunku 40-1a wektor  $E$  jest zwrócony za rysunek, a jego wartość rośnie. Znajdź kierunek pola  $B$ , jeśli: (a)  $E$  jest skierowane za rysunek i maleje, (b)  $E$  jest zwrócone przed rysunek i rośnie, (c)  $E$  jest zwrócone przed rysunek i maleje oraz (d)  $E$  pozostaje stałe.
8. Aby zapewnić ciągłość prądu przy przejściu przez kondensator, na rys. 38-1c, trzeba uwzględnić prąd przesunięcia. Jak może istnieć taki prąd, skoro w kondensatorze nie ma ładunków?
9. W jakich częściach cyku będzie równy零 (a) prąd przewodzenia i (b) prąd przesunięcia we wnęce przedstawionej na rys. 38-6?
10. Jaki jest kierunek prądu przesunięcia  $i_p$  na rysunkach 40-1a i 40-1b? Czy możesz wymyślić regułę wiążącą kierunki  $B$  i  $E$  na tych samych rysunkach?
11. Jakie korzyści mamy z nazwania członu  $\epsilon_0 d\Phi_E/dt$  w równaniu IV, tablica 40-2, *prądem przesunięcia*?
12. Dlaczego efekty magnetyczne związane z prądem przewodzenia w drutach są tak łatwe do zaobserwowania, a efekty magnetyczne związane z prądem przesunięcia w kondensatorze tak trudne?
13. Przedyskutować zmienność czasową ładunków, znajdujących się w różnych punktach wewnętrznych ścian elektromagnetycznej wnęki rezonansowej z rys. 38-6 w ciągu całego cyklu.
14. Czy można oczekiwac, że konfiguracja pól magnetycznego i elektrycznego na rys. 40-2 jest jedyną możliwą? Jeśli istnieją inne konfiguracje, czy można oczekiwac dla nich częstości wyższych, czy niższych niż dla pokazanej na rys. 40-2?
15. W jakim sensie podstawy wnęki na rys. 40-3 mogą być traktowane jako okładki kondensatora? W jakim sensie cylindryczna ścianka może być traktowana jako cewka? (Uwaga. Rysunek 40-3 przedstawia oczywiście układ o elementach rozłożonych, ale musi istnieć ciągłe przejście od elementów rozłożonych do skupionych).
16. (a) Czy jest możliwe zastosowanie prawa Faradaya do przerywanego okręgu na rys. 40-2a? (b) Czy jest możliwe sensowne zastosowanie prawa Ampère'a do przerywanego prostokąta na rys. 40-2b? Przedyskutuj to.

### Zadania

#### Paragraf 40-2

1. (a) Sprawdź, że w sytuacji takiej jak na rys. 40-1, indukowane pole magnetyczne jest największe na krawędzi kondensatora. (b) Podaj przybliżony, nie numeryczny, wykres zależności  $B(r)$  w obszarze od  $r = 0$  do  $r \gg R$ .
2. Mamy kondensator płaski o pojemności  $1 \mu F$ . W jaki sposób w obszarze między płytami można wytworzyć chwilowy prąd przesunięcia  $1,0 \text{ A}$ ?

3. Udowodnić, że prąd przesunięcia w kondensatorze o równoległych okładkach możemy zapisać w sposób następujący:

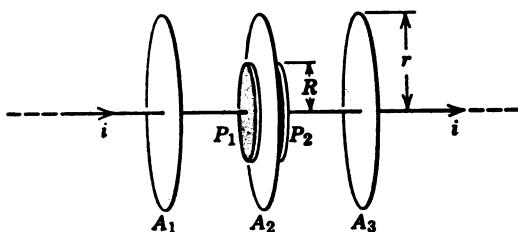
$$i_p = C \frac{dV}{dt}.$$

4. W 1929 r. M. R. Van Cauwenerghowi udało się po raz pierwszy bezpośrednio zmierzyć prąd przesunięcia  $i_p$  między okładkami kondensatora płaskiego, do których przyłożona była zmienna różnica potencjałów, tak jak na rys. 40-1. Posłużył się on płaskimi kołowymi płytami o efektywnej średnicy 40 cm, których wzajemna pojemność wynosiła  $1,0 \cdot 10^{-10}$  F. Zastosowana różnica potencjałów miała wartość maksymalną  $V_m = 174$  kV i częstotliwość 50 Hz. (a) Jaka była maksymalna wartość prądu przesunięcia między płytami (patrz zadanie 3)? Dlaczego posłużyono się tak wielką różnicą potencjałów? [Pomiary te wymagają takiej subtelności, że były one jedynymi przeprowadzonymi w sposób bezpośredni w ciągu ponad 60-ciu lat od czasu, gdy Maxwell ogłosił koncepcję prądu przesunięcia! Patrz: *Journal de Physique*, No. 8, 303 (1929)].

#### Paragraf 40-3

5. Na rysunku 40-4 przedstawione są okładki  $P_1$  i  $P_2$  kołowego kondensatora płaskiego o promieniu płyty  $R$ . Są one połączone, jak widać na rysunku, z długimi prostymi drutami, przez które płynie stały prąd przewodzenia o wartości  $i$ .  $A_1$ ,  $A_2$  i  $A_3$  są hipotetycznymi kołami o promieniach  $r$ , z których dwa znajdują się na zewnątrz kondensatora, a jedno pomiędzy okładkami. Napisz wzory na pole magnetyczne  $B$  na obwodzie każdego z tych kół.

Odp.  $\mu_0 i / (2\pi r)$ , we wszystkich przypadkach.



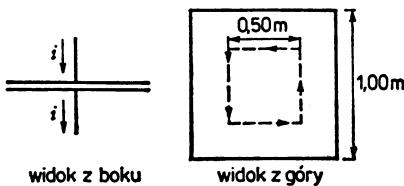
Rys. 40-4. Zadanie 5

6. Pokazać, że w przykładzie 1 gęstość prądu przesunięcia  $j_p$  dla  $r < R$  wynosi

$$j_p = \epsilon_0 \frac{dE}{dt}.$$

7. Płaski kondensator ma kwadratowe okładki o krawędzi 1,00 m, jak na rys. 40-5. Prąd ładowania dopływający do (i odpływający z) kondensatora wynosi 2,00 A. (a) Jaki jest prąd przesunięcia w obszarze między okładkami? (b) Jaka jest wartość  $dE/dt$  w tym obszarze? (c) Jaki jest prąd przesunięcia przez kwadrat ograniczony linią przerywaną? (d) Jaka jest wartość  $\oint B dl$  wzdłuż obwodu tego kwadratu?

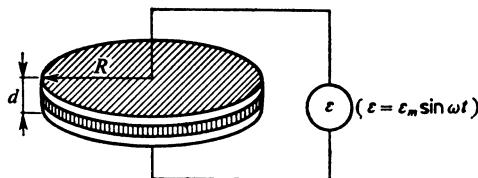
Odp. (a) 2,00 A. (b)  $2,3 \cdot 10^{11}$  V/(m · s). (c) 0,50 A. (d)  $6,3 \cdot 10^{-7}$  T · m.



Rys. 40-5. Zadanie 7

8. Kondensator z rys. 40-6 składający się z dwóch kołowych płyt o powierzchni  $A = 0,10 \text{ m}^2$  podłączono do źródła napięcia  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin \omega t$ , przy czym  $\mathcal{E}_m = 200$  V oraz  $\omega = 100$  rad/s. Maksymalna wartość prądu przesunięcia  $i_p = 8,9 \cdot 10^{-6}$  A. Zaniedbać rozproszenie pola elektrycznego na krawędziach płyt. (a) Jaka jest maksymalna wartość prądu  $i$ ? (b) Jaka jest maksymalna wartość  $d\Phi_E/dt$ , gdzie  $\Phi_E$  jest strumieniem

mieniem elektrycznym w obszarze między płytami? (c) Jaka jest odległość  $d$  między płytami? (d) Oblicz maksymalną wartość wektora  $B$  między płytami, w odległości  $R = 0,10$  m od osi.



Rys. 40-6. Zadanie 8

9. Jak zmienia się w zależności od promienia  $r$  prąd przesunięcia przechodzący przez kołowy obwód z przykładu 1. Założyć, że (a)  $r < R$  i (b)  $r > R$ .

Odp. (a)  $\pi \epsilon_0 r^2 (dE/dt)$  i (b)  $\pi \epsilon_0 R^2 (dE/dt)$ .

10. Płaski kondensator, którego kołowe okładki mają średnice 20,0 cm jest ładowany jak na rys. 40-1a. Gęstość prądu przesunięcia jest jednorodna w obszarze płyt i ma zwrot ku powierzchni rysunku, a jej wartość wynosi  $20,0 \text{ A/m}^2$ . (a) Znajdź pole magnetyczne  $B$  w odległości  $R = 5,0 \text{ cm}$  od osi symetrii kondensatora. (b) Oblicz  $dE/dt$  w obszarze kondensatora.

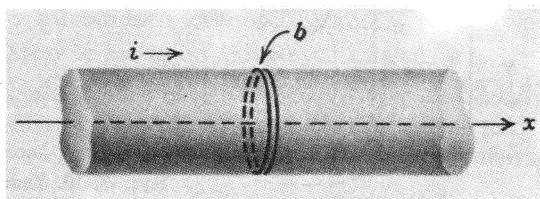
11. Wskaż równanie Maxwella, które jest równoważne lub zawiera sformułowanie: (a) Elektryczne linie sił kończą się wyłącznie na ładunkach elektrycznych. (b) Prąd przesunięcia. (c) W sytuacji statycznej nie może istnieć żaden ładunek wewnętrz przewodnika. (d) Zmieniającemu się polu elektrycznemu musi towarzyszyć pole magnetyczne. (e) Sumaryczny strumień magnetyczny przez powierzchnię zamkniętą jest zawsze równy零. (f) Zmieniającemu się polu magnetycznemu musi towarzyszyć pole elektryczne. (g) Linie pola magnetycznego nie mają końców. (h) Sumaryczny strumień elektryczny przez powierzchnię zamkniętą jest proporcjonalny do całkowitego ładunku wewnętrz tej powierzchni. (i) Ładunkowi elektrycznemu zawsze towarzyszy pole elektryczne. (j) Nie istnieją monopole magnetyczne. (k) Prądomiernemu zawsze towarzyszy pole magnetyczne. (l) Prawo Coulomba. (m) Pole elektrostatyczne jest zachowawcze.

Odp. Patrz tablica 40-2. (a) I. (b) IV. (c) I. (d) IV. (e) II. (f) III. (g) II. (h) I. (i) I. (j) II. (k) IV. (l) I. (m) III.

12. Zebrać i zapisać w postaci tablicy wyrażenia na podane niżej cztery wielkości, przyjmując  $r < R$  oraz  $r > R$ . Podpisać te równania stronami pod sobą i przeanalizować jako interesujące zastosowanie równań Maxwella do problemów o symetrii cylindrycznej. (a)  $B(r)$  dla prądu  $i$  w długim przewodniku o promieniu  $R$  (patrz paragraf 34-2). (b)  $E(r)$  dla długiego, naładowanego walca jednorodnego o promieniu  $R$  (patrz paragraf 28-8; również zad. 27 rozdz. 28). (c)  $B(r)$  dla płaskiego kondensatora o kołowych okładkach o promieniu  $R$ , w którym  $E$  zmienia się ze stałą szybkością (patrz paragraf 40-2). (d)  $E(r)$  dla obszaru cylindrycznego o promieniu  $R$ , w którym jednorodne pole magnetyczne  $B$  zmienia się ze stałą szybkością (patrz paragraf 35-5).

13. Długi cylindryczny przewód przewodzący o promieniu  $a$  ma oś pokrywającą się z osią  $x$ , tak jak na rys. 40-7. Pręt przecięto cienką piłą w miejscu  $x = b$ . W kierunku na prawo przepływa wzduż pręta prąd przewodzenia  $i$ , rosnący w czasie z zależnością  $i = \alpha t$ , gdzie  $\alpha$  jest (dodatnią) stałą proporcjonalności. W chwili  $t = 0$  nie ma żadnych ładunków na płaszczyznach cięcia w pobliżu  $x = b$ . (a) Znajdź wartość ładunków na tych płaszczyznach, w funkcji czasu. (b) Posługując się równaniem I z tablicy 40-2 znajdź zależność od czasu pola  $E$  w przewie. (c) Narysuj linie pola  $B$  dla  $r < a$ , gdzie  $r$  jest odległością od osi  $x$ . (d) Korzystając z równania IV w tablicy 40-2 znajdź zależność  $B(r)$  w przewie dla  $r < a$ . (e) Porównaj powyższy wynik z zależnością  $B(r)$  w przecie dla  $r < a$ .

Odp.: (a)  $\frac{1}{2} \alpha t^2$ . (b)  $\alpha t^2 / 2\pi \epsilon_0 a^2$ . (c) Gdy patrzymy się wzduż osi pręta w kierunku z lewa na prawo



Rys. 40-7. Zadanie 13

na rys. 40-7, linie pola  $\mathbf{B}$  tworzą koła i mają zwrot zgodny z ruchem wskazówek zegara. Tak jest zarówno w przeciwieństwie jak i w przeciwnie. (d)  $\mu_0 \alpha t / 2\pi a^2$ . (e) Taka sama jak dla (d).

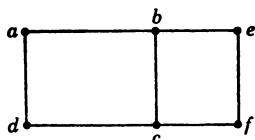
14. Korzystając z definicji strumienia  $\Phi$ , objętościowej gęstości ładunku  $q$  i gęstości prądu  $i$ , napisz równania Maxwella z tablicy 40-2 w taki sposób, by wszystkie strumienie, prądy i ładunki pojawiały się jako całki objętościowe lub powierzchniowe.

#### Paragraf 40-4

15. Załóż, że istnienie monopoli magnetycznych jest potwierdzone przez doświadczenie. (a) W jaki sposób mógłbyś zmodyfikować równania tablicy 40-2? Niech  $q_m$  będzie symbolem wielkości monopola magnetycznego, analogicznym do elementarnego ładunku elektrycznego  $e$ . (b) Jaka jednostkę powinno mieć  $q_m$  w układzie SI?

Odp. (a)  $\oint \mathbf{B} dS = q_m$ ,  $\oint \mathbf{E} dl = -\frac{d\Phi_B}{dt} + \mu_0 \frac{dq_m}{dt}$ ; pozostałe równania bez zmian. (b) A · m.

16. Samozgodność dwóch równań Maxwella (numery III i IV w tablicy 40-2). Dwa sąsiednie równoległe boki,  $abca$  i  $efcb$ , mają wspólną krawędź  $bc$  (rys. 40-8). (a) Do każdego z tych równoległoboków oddzielnie możemy zastosować równanie  $\oint \mathbf{E} dl = -d\Phi_B/dt$ . Pokazać na podstawie tego, że równanie  $\oint \mathbf{E} dl = -d\Phi_B/dt$  dla utworzonego z nich wypadkowego równoległoboku  $abefcda$  jest spełnione automatycznie. (b) Powtórzyć to samo dla równania  $(1/\mu_0) \oint \mathbf{B} dl = i + \epsilon_0 d\Phi_E/dt$ .



Rys. 40-8. Zadanie 16



Rys. 40-9. Zadanie 17

17. Samozgodność dwóch równań Maxwella (numery I i II w tablicy 40-2). Dwa przylegające do siebie równoległe ściany mają jedną wspólną ściankę (rys. 40-9). (a) Do obu zamkniętych powierzchni tych równolegloscianów możemy zastosować równanie  $\epsilon_0 \oint \mathbf{E} dS = q$ . Pokazać na podstawie tego, że równanie  $\epsilon_0 \oint \mathbf{E} dS = q$  jest spełnione automatycznie również dla łącznej, zamkniętej powierzchni obu równolegloscianów. (b) Powtórzyć to samo dla równania  $\oint \mathbf{B} dS = 0$ .

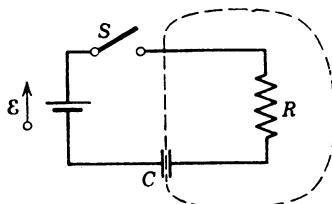
#### Paragraf 40-5

18. W cylindrycznej wnęce elektromagnetycznej o średnicy 5,0 cm i długości 7,0 cm wytwarzamy organizma pokazane na rys. 38-6. (a) Załóżmy, że na osi wnęki  $E_m = 10^4$  V/m. Jaka jest maksymalna szybkość  $(dE/dt)_m$  zmiany  $E$  dla punktów na osi? (b) Załóżmy, że średnia wartość  $(dE/dt)_m$  dla wszystkich punktów leżących na przekroju poprzecznym wnęki jest równa mniej więcej połowie wartości znalezionej powyżej dla punktów na osi. Jaka jest maksymalna wartość  $B$  dla cylindrycznej powierzchni wnęki przy tym założeniu?

19. Zasadę ciągłości prądu można wyrazić w postaci „mikroskopowej”

$$\oint (\mathbf{j} + \mathbf{j}_p) dS = 0,$$

gdzie  $j$  jest gęstością prądu przewodzenia, a  $j_p$  gęstością prądu przesunięcia. Całkę oblicza się po dowolnej powierzchni zamkniętej; równanie głosi, że jeśli jakikolwiek prąd wpłynie do objętości zamkniętej, to musi z niej wypływać. (a) Zastosować to równanie do powierzchni zaznaczonej na rys. 40-10 linią przerywaną, w chwilę po zamknięciu przełącznika  $S$ . (b) Zastosować to równanie do różnych powierzchni, które można narysować we wnęce z rys. 40-3 uwzględniając i takie, które przecinają ściany wnęki.



Rys. 40-10. Zadanie 19

# 41. Fale elektromagnetyczne

## 41-1. Wstęp

W rozdziale 40 stwierdziliśmy bez dowodu, że równania Maxwella przewidują istnienie fal elektromagnetycznych o prędkości rozchodzenia się w próżni danej równaniem (40-1), czyli

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \quad (40-1)$$

Wielkość  $c$  nazwaliśmy „prędkością światła”, jednakże ponieważ w równ. (40-1) nie występuje ani  $\lambda$ , ani  $\nu$  (przypominamy, że  $c = \lambda\nu$ ),  $c$  jest prędkością rozchodzenia się wszystkich fal elektromagnetycznych, niezależnie od ich długości fali ( $\lambda$ ) ani częstotliwości ( $\nu$ ).

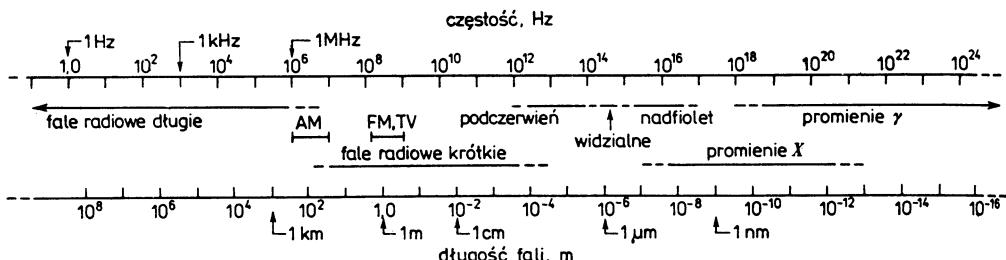
Fale możemy dzielić na fale stojące oraz fale rozchodzące się w przestrzeni. W paragrafie 40-5 (patrz rys. 40-2 i 40-3) badaliśmy *stojące* fale elektromagnetyczne w elektromagnetycznej wnęce rezonansowej. W tym rozdziale będziemy zajmować się falami elektromagnetycznymi *rozchodzącymi się* wzdłuż linii przesyłowej w przestrzeni ograniczonej ściankami przewodzącymi (paragrafy 41-4,5,6) oraz w wolnej przestrzeni (paragrafy 41-3,7,8).

## 41-2. Widmo fal elektromagnetycznych

Rysunek 41-1 przedstawia znany nam obecnie zakres widma (spectrum\*) fal elektromagnetycznych. Na podstawie równań Maxwella wnioskujemy, że wszystkie te fale mają tę samą naturę i prędkość rozchodzenia się, a różnią się jedynie częstotliwościami i długościami fal. Nazwy nadane różnym obszarom tego widma związane są z odpowiednimi eksperymentalnymi technikami wytwarzania i wykrywania tych fal. Jeśli chodzi o zakresy AM i FM (radiowe z modulacją amplitudy i z modulacją częstotliwości) oraz TV (telewizyjne) są one określone z dużą dowolnością; zakresy te zależą od aktualnych ustaleń.

\* *Spectrum* (widmo) to słowo łacińskie oznaczające ducha, zjawę. W sensie podanym wyżej słowo to zostało użyte po raz pierwszy przez Izaaka Newtona w roku 1671 dla nazwania podobnego do tęczy obrazu otrzymanego na ścianie zaciemnionego pokoju, po umieszczeniu przyzmatu na drodze promieni wchodzących przez mały otwór w zasłonie okiennej.

W widmie nie ma żadnych przerw. Fale elektromagnetyczne o częstotliwości  $\nu \cong 3 \cdot 10^{11}$  Hz, na przykład, możemy wytworzyć zarówno za pomocą techniki mikrofalowej (oscyulatory mikrofalowe), jak i za pomocą techniki podczerwieni (źródła wysokotemperaturowe). Nie istnieje również ani góra, ani dolna granica skali częstotliwości lub długości fal. Na powierzchni Ziemi odebrano na przykład leżące na jednym z krańców widma fale o częstotliwości



Rys. 41-1. *Widmo elektromagnetyczne*. Zauważcie, że obie skale są logarytmiczne. (Mikrometr ( $\mu\text{m}$ ) oraz nanometr (nm) wymawiając akcentującym na pierwszej sylabie)

$\nu \cong 10^{-2}$  Hz, co odpowiada okresowi 100 s i długości około 5000 razy większej od promienia Ziemi\*.

Trudno jest w pełni uświadomić sobie rozmiar naszego „pogążenia” w falach elektromagnetycznych. Najistotniejszym dla nas źródłem tych fal jest Słońce, w tym sensie, że promieniowanie słoneczne jest składnikiem otoczenia, do którego ludzkość przystosowała się jako gatunek biologiczny.

Zajmijmy się również źródłami promieniowania elektromagnetycznego znajdującymi się na Ziemi. Ze wszystkich stron jesteśmy otoczeni sygnałami radiowymi i telewizyjnymi. Dochodzą do nas również mikrofale z układów radarowych, łączy telekomunikacyjnych i tym podobnych. Fale elektromagnetyczne wysypane są przez żarówki, rozgrzane silniki samochodowe, aparaturę wytwarzającą promieniowanie X, świetliki, sygnalizację świetlną, promienie  $\gamma$  pochodzące z substancji radioaktywnych znajdujących się w Ziemi itd.

Duża ilość fal elektromagnetycznych dociera do nas ze źródeł pozaziemskich i wasadzie wszystko co wiemy na temat otaczającego nas Wszechświata zawdzięczamy właśnie tym falom. Fale elektromagnetyczne w zakresie widzialnym dochodzące spoza Ziemi były oczywiście obserwowane już od zarania ludzkości. Nasze możliwości badania fal elektromagnetycznych docierających do nas z kosmosu rozszerzyły się znacznie w wyniku rozwoju trzech gałęzi techniki pomiarowej. Mamy tu na myśli:

#### *Teleskop* (patrz paragraf 44-6)

Instrument ten został po raz pierwszy użyty do obserwacji astronomicznych przez Galileusza w roku 1610. Przy jego pomocy Galileusz (a) odkrył istnienie gór i kraterów na Księżyco, który do tego czasu uważano za doskonale kulisty; (b) stwierdził, że Droga Mleczna utworzona jest ze skupisk pojedynczych gwiazd; (c) odkrył cztery księżyce Jowisza, najbliższe jego powierzchni, uwidaczniając kopernikowski model Układu Słonecznego; (d) obserwował fazy planety Wenus, co stanowi ważne potwierdzenie słuszności teorii Kopernika dotyczącej budowy Układu Słonecznego; (e) rzucił trochę światła na szczególny charakter Saturna (przy pomocy swojego teleskopu nie mógł rozróżnić pier-

\* Patrz: James R. Heitzler, *The longest Electromagnetic Waves*, *Scientific American*, March 1962.

cieni Saturna, ale przynajmniej stwierdził, że różni się on od innych planet) oraz (f) uczy- nił krok naprzód w kierunku wyjaśnienia plam na Słońcu. Nie mieści się w głowie, że pojedynczy człowiek w tak krótkim przedziale czasu dokonał przy pomocy lunety astronomicznej tylu odkryć. Ostatnio dużym osiągnięciem astronomii optycznej bazującej na powierzchni Ziemi stało się skonstruowanie 6,0 m (= 236 cali) teleskopu odbiciowego w Związku Radzieckim\*.

#### *Okoloziemskie stacje satelitarne i inne statki kosmiczne*

W październiku 1957 roku w ZSRR został wystrzelony na orbitę okoloziemską satelita Sputnik I (o masie 83 kg). Zapoczątkowało to gwałtowny rozwój wysiłków w celu opanowania przestrzeni kosmicznej, o których wszyscy doskonale wiemy. Satelita UHURU umieszczony na orbicie przez Stany Zjednoczone w roku 1970 zapoczątkował badanie promieniowania X wysyłanego przez obiekty pozaziemskie\*\*. Od tego czasu przy pomocy wielu innych satelitów badano fale elektromagnetyczne dochodzące do Ziemi zarówno w tym, jak i innych obszarach widma elektromagnetycznego.

#### *Rozwój radioastronomii*

Badając elektromagnetyczne zakłócenia telefonicznej łączności transoceanicznej inżynier Karl G. Jansky\*\*\* (Bell Laboratory) stwierdził w roku 1931 obecność pozaziemskich sygnałów o częstościach radiowych. Był to początek nowej nauki, radioastronomii, bazującej na wysokiej jakości radioteleskopach, takich jak paraboliczne zwierciadło o średnicy 1000 stóp w Arecibo, w Puerto Rico. Innym przykładem jest układ radioteleskopów Obserwatorium Radioastronomicznego w Mullard koło Cambridge, w Anglii. Ten 5-km układ, który zaczął pracować w 1972 r., składa się z czterech nieruchomych oraz czterech ruchomych zwierciadeł parabolicznych tego typu co pokazane na rys. 41-2.

### **41-3. Fale elektromagnetyczne z przestrzeni pozaziemskiej**

W tym paragrafie rozważymy cztery najważniejsze odkrycia dotyczące natury Wszechświata dokonane dzięki badaniu fal elektromagnetycznych dochodzących do nas z przestrzeni pozaziemskiej.

1. Obojętne atomy wodoru\*\*\*\*, znajdujące się w przestrzeni pomiędzy gwiazdami tworzącymi naszą Galaktykę\*\*\*\*\* wysyłają promieniowanie elektromagnetyczne o długości fali  $\lambda = 21,1$  cm ( $\nu = 1420$  MHz). Gęstość atomów wodoru w przestrzeni międzygwiezdnej wynosi zaledwie 1 atom/cm<sup>3</sup>, a średni czas, jaki upływa do chwili, gdy atom

\* Patrz: Bazart K. Ioannisiani, The Soviet 6-meter Altazimuth Reflector, *Sky and Telescope*, November 1977.

\*\* Patrz: Alan P. Lightman, Some Recent Advances in X-ray Astronomy, *Sky and Telescope*, October 1976. Dzięki satelitom możliwe jest badanie pozaziemskiego promieniowania elektromagnetycznego, pochłanianego przez atmosferę ziemską.

\*\*\* Na jego cześć jednostka strumienia energii w radioastronomii nazwana została *jansky*.

\*\*\*\* Patrz: R. D. Davies, Radio Emission from Interstellar Neutral Hydrogen, *Contemporary Physics*, August 1961.

\*\*\*\*\* Nasza Galaktyka jest skupiskiem gwiazd mającym kształt dysku o średnicy około  $10^5$  lat świetlnych, którego płaszczyznę wyznacza Droga Mleczna. Słońce jest w niej położone mniej więcej w połowie odległości pomiędzy środkiem Galaktyki, a jej krawędzią. We Wszechświecie istnieje wiele innych galaktyk; każdy nowy wyższej jakości teleskop pozwala odkryć coraz to nowe galaktyki.



Rys. 41-2. Jedna z ośmiu podobnych części 5 km układu radioteleskopów w Mullard Radioastronomy Observatory koło Cambridge w Anglii. Dla długości fali 6 cm, układ ten ma zdolność rozdzielczą  $2''$  (sekundy łuku) porównywalną ze zdolnościami rozdzielczymi dużych teleskopów optycznych. Patrz: John B. Irwin, Radio Astronomy and Cosmology, *Sky and Telescope*, December 1976

wodoru zdolny do promieniowania wyśle je, jest równy około  $10^7$  lat. Jednakże nasza Galaktyka jest tak ogromna, że promieniowanie to łatwo daje się wykryć.

Dokładna wartość długości fali wysyłanej przez atomy wodoru spoczywające względem ziemskich detektorów ich promieniowania wynosi 21,1061 cm ( $\nu = 1420,406$  MHz). Nasza Galaktyka nie jest jednakże tworem sztywnym, jej obszary zewnętrzne poruszają się względem leżącego wewnątrz rdzenia. Podobnie jak dla dźwięku, wykorzystując zjawisko Dopplera możemy mierzyć radialne prędkości emitujących światło źródeł; patrz paragrafy 20-7 i 42-5. Obserwując te dopplerowskie przesunięcia częstości możemy dowiedzieć się bardzo wiele o budowie i ruchach wewnętrznych naszej Galaktyki. W ostatnich latach zostało wykryte promieniowanie wysyłane przez cząsteczki chemiczne znajdujące się w przestrzeniach międzygwiazdowych naszej Galaktyki. Możemy tu wymienić cząsteczki formaldehydu (HCHO), amoniaku ( $\text{NH}_3$ ) oraz tlenku węgla (CO).

2. W roku 1962 zostały odkryte quasi-gwiezdne źródła promieniowania radiowego

(*kwasary*). Są to obiekty optyczne, wysyłające zarazem duże ilości promieniowania o częstotliwościach radiowych. Najbardziej interesujące jest to, że w ich widmach obserwujemy bardzo duże „przesunięcie ku czerwieni”, co zgodnie z dzisiejszym stanem wiedzy w dziedzinie astrofizyki każe nam wierzyć, że są to obiekty znajdujące się w ogromnych odległościach od nas, leżące poza naszą własną Galaktyką. Z drugiej strony, jeżeli rzeczywiście są one tak oddalone, muszą wysyłać ogromne ilości energii, czego przyczyn obecnie nie potrafimy wytłumaczyć. Natura tych obiektów jest obecnie intensywnie badana.

3. Promieniowanie pierwotnej kuli ognistej\*. Wielu astrofizyków w chwili obecnej wierzy, że Wszechświat powstał około  $7 \cdot 10^9$  lat temu w wyniku eksplozji skupiska materii i promieniowania o bardzo dużej gęstości. Jest to tak zwana teoria wielkiego wybuchu\*\* tłumacząca powstanie Wszechświata. Odłamki powstałe w wyniku tej eksplozji rozbiegły się na zewnątrz, równomiernie we wszystkich kierunkach (stąd pojęcie rozszerzającego się Wszechświata), a materia stopniowo skupiała się tworząc galaktyki, gwiazdy i planety w postaci takiej jak znamy je obecnie.

W roku 1965 Robert Dicke, fizyk Uniwersytetu w Princeton, stwierdził, że gdyby przy pomocy radioteleskopów udało się wykryć pozostałości promieniowania elektromagnetycznego z tej pierwotnej kuli ognistej, dostarczyłoby to przekonywającego dowodu na potwierdzenie teorii wielkiego wybuchu.

Nie wiedział on o tym, że dwaj naukowcy z Bell Laboratory A. Penzias i R. Wilson istotnie wykryli promieniowanie elektromagnetyczne pochodzenia pozaziemskiego nie zdając sobie sprawy ze znaczenia tego odkrycia dla kosmologii. Swojego odkrycia dokonali oni podczas badań związanych z problemami łączności satelitarnej. W ciągu kilku lat istnienie promieniowania pochodzącego z pierwotnej kuli ognistej zostało dobrze potwierdzone.

Epizod ten przypomina nam, że radioastronomię jako naukę zapoczątkował w roku 1931 Jansky, również pracujący w Bell Laboratory. W obu przypadkach czysto inżynierijne badania doprowadziły do nieoczekiwanej kroku naprzód w kierunku naszego poznania Wszechświata\*\*\*.

4. W roku 1968 grupa brytyjskich radioastronomów z Uniwersytetu w Cambridge, których pracami kierował Antony Hewish, odkryła pierwszy z szeregu obiektów emitujących krótkie, silne impulsy promieniowania elektromagnetycznego w odstępach niewiarygodnie krótkich z punktu widzenia astronomii, rzędu 1 sekundy. Obiekty te nazwano *pulsarami*\*\*\*\*.

Obecnie naukowcy zgadzają się co do tego, że pulsary są zwykłymi gwiazdami, w których podczas procesu kurczenia się pod wpływem wewnętrznych sił przyciągania grawitacyjnego elektrony łączą się z protonami tworząc gęste skupisko neutronów. Typowe gwiazdy neutronowe (patrz zadanie 4-23 oraz 16-5) mają następujące właściwości: (a) pro-

\* Patrz: P. I. E. Peebles i D. T. Wilkinson, The Primeval Fireball, *Scientific American*, June 1976.

\*\* Z angielskiego *Big Bang* (przyp. tłum.).

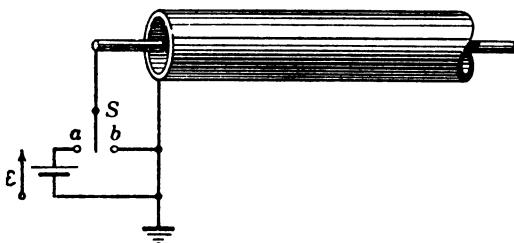
\*\*\* Patrz: Lillian Hartmann Hoddeson, The Roots of Solid-State Research at Bell Labs, *Physics Today*, March 1977. Znajduje się tam fascynujący opis historii wzajemnego oddziaływania nauki i technologii w konkretnym laboratorium przemysłowym. W roku 1937 oraz 1956 naukowcy z Bell Laboratory otrzymali nagrody Nobla.

\*\*\*\* Patrz: A. Hewish, Pulsars, *Scientific American*, October 1968, oraz J. P. Ostriker, The Nature of Pulsars, *Scientific American*, January 1971. Za swoje odkrycie Hewish otrzymał w roku 1974 nagrodę Nobla.

mieniu rzędu 10 km (promień Słońca jest równy około  $7 \cdot 10^5$  km), (b) gęstości rzędu  $10^{16}$  kg/m<sup>3</sup> (średnia gęstość Słońca wynosi około  $10^3$  kg/m<sup>3</sup>) i (c) okres obrotu wynoszący około  $10^{-2}$  s (okres obrotu Słońca dokoła własnej osi jest równy około  $10^6$  s). Wydaje się, że obserwowane impulsy pochodzą z wysyłających promieniowanie w zakresie radiozym niewielkich obszarów na powierzchni tych gwiazd neutronowych. Wysyłane promieniowanie elektromagnetyczne okresowo omiata obserwatorów na Ziemi na skutek ruchu obrotowego gwiazdy dokoła własnej osi; widoczna jest tu analogia z obracającą się lampą latarni morskiej.

#### 41-4. Linie transmisyjne

W paragrafie tym przechodzimy od biernej obserwacji dochodzących do nas fal elektromagnetycznych do rozważań dotyczących wytwarzania tych fal oraz przenoszenia ich pomiędzy dwoma punktami za pomocą *linii transmisyjnej*. Na rysunku 41-3 przedstawiony jest jeden z rodzajów takiej linii — kabel koncentryczny, którego początek jest połączony z przełącznikiem *S*. Na razie będziemy zakładać, że kabel jest nieskończonie długi i że jego elementy mają zerową oporność. (Kablem koncentrycznym jest kabel przeciagnięty przez Atlantyk, czynny od roku 1866, ale nie jest to kabel doskonale przewodzący.)



Rys. 41-3. Przełączając klucz *S* z punktu *b* do *a* możemy przesyłać sygnał wzduż linii transmisyjnej (kabla koncentrycznego)

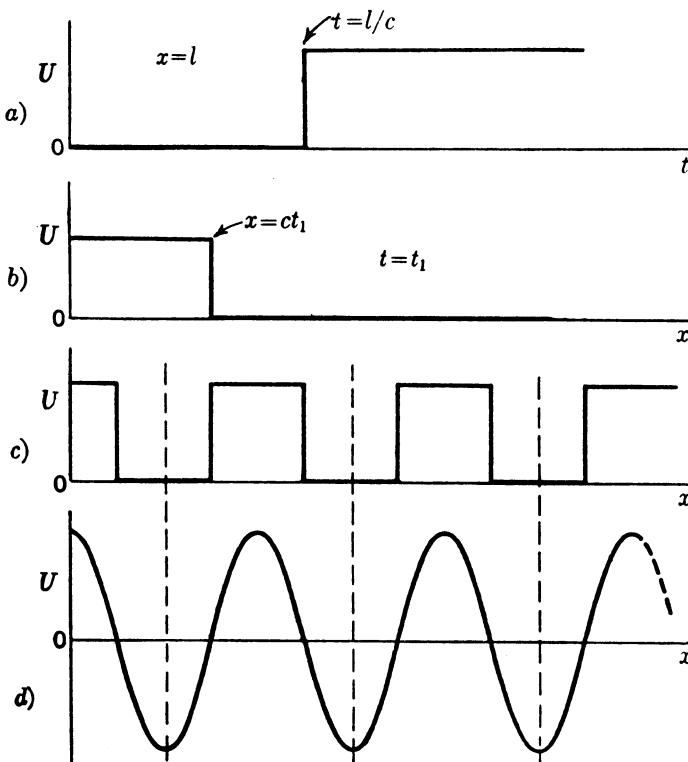
Jeżeli przełącznik *S* jest połączony z punktem *b*, to przewodnik zewnętrzny i wewnętrzny mają ten sam potencjał. Jeżeli następnie przełącznik *S* połączymy z punktem *a*, to między przewodnikami pojawi się nagle różnica potencjałów *U*. Ta różnica potencjałów nie wystąpi równocześnie w całym kablu, lecz przenosić się będzie ze skończoną prędkością *c*, która, jak się okaże, przy założeniu że linia jest doskonale przewodząca, jest dokładnie równa prędkości światła. Rysunek 41-4a pokazuje, że różnica potencjałów między przewodnikami w odległości *l* od początku linii, po czasie jaki upłynął od chwili zmiany położenia przełącznika równym  $t = l/c$ , skacze nagle od zera do wielkości równej SEM baterii. Możemy rozważyć jak zmienia się *U* w zależności od położenia *x* na linii, w danej chwili *t*<sub>1</sub> po zmianie położenia przełącznika. Na rysunku 41-4b pokazano takie „zdjęcie migawkowe”. Wskazuje on również na istnienie czoła fali poruszającego się wzduż linii transmisyjnej z prędkością *c*. Dla  $t = t_1$  sygnał nie osiągnął jeszcze punktów, dla których  $x > ct_1$ .

Jeżeli przełącznik *S* będziemy okresowo przerzucać od punktu *b* do *a* i z powrotem, wzduż linii przenosić się będzie zaburzenie falowe, takie jak przedstawiono na rys. 41-4c. Sugeruje to, że jeśli baterię i przełącznik zastąpić generatorem elektromagnetycznym z napędem wyjściowym sinusoidalnie zmiennym o częstotliwości *v*, to wzduż linii biec będzie fala, taka jak na rys. 41-4d.

Fala biegnąca wzdłuż doskonale przewodzącej linii transmisyjnej będzie się charakteryzować długością  $\lambda$  daną wzorem

$$\lambda = \frac{c}{v}.$$

Dla częstotliwości oscylatora 60 Hz długość fali wynosi  $5 \cdot 10^6$  m, czyli 5000 km. Przy tak niskiej częstotliwości fale nie są dostrzegalne w żadnej linii normalnej długości. W czasie, kiedy napięcie oscylatora zmieni zauważalnie swój znak, energia wprowadzona do linii na jej początku zostanie przekazana do obciążenia.



Rys. 41-4. (a) Zależność czasowa różnicy potencjałów między przewodami kabla koncentrycznego w punkcie odległym o  $l$  od początku kabla. (b) „Zdjęcie migawkowe” impulsu w kablu w pewnym momencie  $t_1$ . (c) Kształt fali otrzymanej przez periodyczne przerzucanie przełącznika  $S$  (z rys. 39-1) między punktami  $a$  i  $b$ . (d) Kształt fali otrzymanej przez zastąpienie przełącznika  $S$  oscylatorem elektromagnetycznym, dającym sinusoidalnie zmienne napięcie

Częstości w zakresie radiowym i mikrofalowym są o wiele większe, a więc długości fal odpowiednio mniejsze. Częstości używane w telewizji leżą w zakresie od 54 do 980 MHz, co odpowiada długościom fali o zakresie od 5,6 do 0,31 m. Dla tych długości fal zmiany potencjału w liniach transmisyjnych używanych do przesyłania sygnałów telewizyjnych przypominają poruszające się fale. Mikrofale używane w radarach i dla celów łączności mają znacznie mniejsze długości fal — leżące w zakresie od około 20 cm do około 0,5 mm.

Te rozważania sugerują inną metodę rozróżnienia między obwodami o elementach skupionych a obwodami o elementach rozłożonych. Układ jest układem o elementach

„rozłożonych”, jeżeli długość fali jest w przybliżeniu równa lub mniejsza od wymiarów układu. Jeżeli długość fali jest znacznie większa od wymiarów układu, mamy do czynienia z układem o elementach skupionych. Linia transmisyjna o długości 50 m będzie układem „skupionym” dla promieniowania elektromagnetycznego o częstotliwości 60 Hz ( $\lambda = 5 \cdot 10^6$  m), lecz układem „rozłożonym” dla częstotliwości 100 MHz ( $\lambda = 3$  m). W układzie „skupionym” przeprowadza się analizę układu poprzez zespół skupionych parametrów, takich jak  $L$ ,  $C$  i  $R$ ; w układzie „rozłożonym” analizę przeprowadza się łącznicą przez powstające pola oraz ładunki i prądy z nimi związane.

**Przykład 1.** Różnicę potencjałów daną równaniem

$$V_0 = V_m \sin \omega t$$

przyłożono do końców długiej, doskonale przewodzącej linii transmisyjnej; częstotliwość  $v$  ( $= \omega/2\pi$ ) wynosi  $3 \cdot 10^9$  Hz ( $= 3$  GHz; patrz tabela 1-2). Napisać wzór na  $V(t)$  dla punktu  $P$  odległego o 1,5 długości fali od oscylatora.

Ogólny wzór na falę biegnącą w kierunku  $x$  (patrz wzór (19-10a)) ma postać

$$V = V_m \sin(\omega t - kx),$$

gdzie  $k$  ( $= 2\pi/\lambda$ ) jest liczbą falową. Wzór ten dla  $x = 0$  daje poprawną zależność czasową wejściowej różnicy potencjałów; dla  $x = 1,5 \lambda$  otrzymujemy

$$V_P = V_m \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 1,5\lambda \right) = V_m \sin(\omega t - 3\pi) = -V_m \sin \omega t.$$

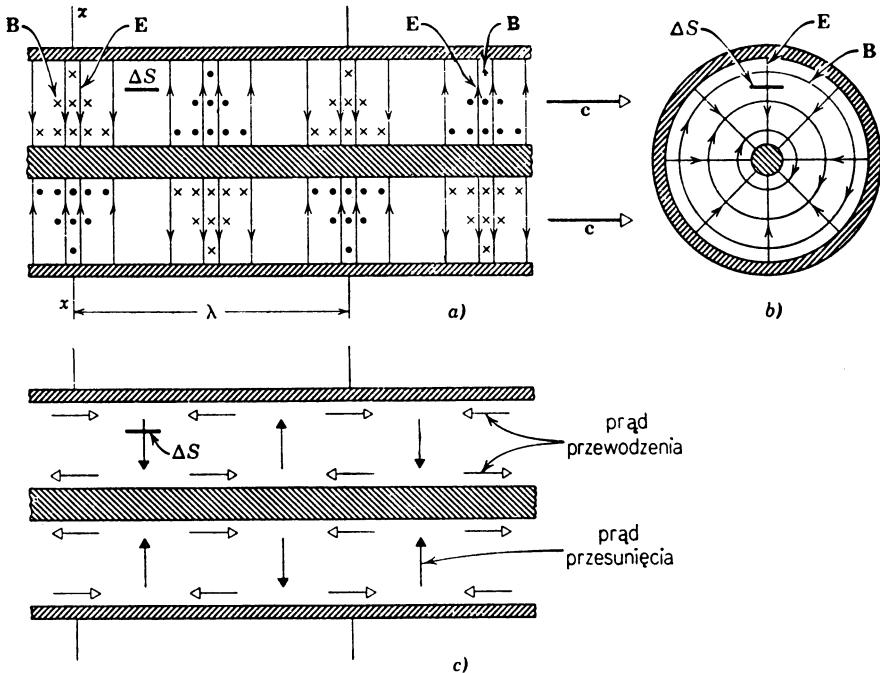
A więc  $V_P$  co do wartości równa się zawsze  $V_0$ , lecz ma przeciwny znak. Jaka jest długość fali w tym przykładzie?

## 41-5. Kabel koncentryczny. Pola i prądy

Na rysunkach 41-5a i 41-5b są przedstawione „zdjęcia migawkowe” rozkładów pola elektrycznego i magnetycznego w kablu koncentrycznym. Pole elektryczne jest radialne, a pole magnetyczne tworzy współosiowe koła wokół wewnętrznego przewodnika. Pola te poruszają się wzdłuż kabla z prędkością  $c$  (przy założeniu, że jest on doskonale przewodzący).

Pola przedstawione na tym rysunku podlegają warunkom brzegowym nakładanym na linie transmisyjne o zerowym oporze, mianowicie  $\mathbf{E}$  we wszystkich punktach dowolnej przewodzącej powierzchni nie ma składowej stycznej (patrz przykład 7, rozdz. 28). Po przyjęciu tego warunku można, korzystając z równań Maxwella, matematycznie określić rozkład tych pól. Pokazana konfiguracja odpowiada najprostszemu z wielu różnych rodzajów fal mogących poruszać się wzdłuż linii. Kabel koncentryczny w odróżnieniu od wnęki elektromagnetycznej z rys. 38-6 nie jest układem rezonansowym. Częstość kołowa  $\omega$  fal biegących wzdłuż linii może zmieniać się w sposób ciągły, podobnie jak w przypadku wszystkich fal bieżących, takich jak np. poprzeczne fale w długiej, naciągniętej strunie.

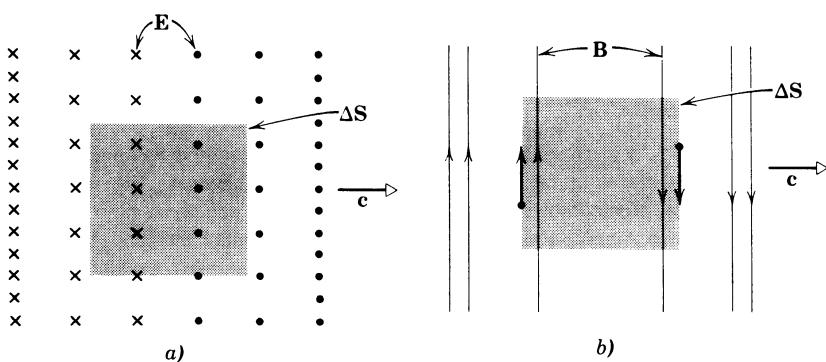
Rysunek 41-5c pokazuje prądy w kablu w chwili odpowiadającej rysunkom 41-5a i 41-5b. Strzałki równoległe do osi kabla przedstawiają prądy przewodzenia w przewodniku wewnętrznym i zewnętrznym. Strzałki pionowe z czarnymi ostrzami przedstawiają prądy przesunięcia występujące w obszarze między przewodnikami. Zauważmy, że strzałki prądów przewodzenia i strzałki prądów przesunięcia tworzą zamknięte pętle, w zgodzie z koncepcją ciągłości prądu.



Rys. 41-5. (a) Pole magnetyczne i pole elektryczne w kablu koncentrycznym tworzą fale poruszające się w prawą stronę z prędkością  $c$ . (b) Przekrój tego kabla w płaszczyźnie przechodzącej przez  $xx$ ; fala jest skierowana przed płaszczyznę rysunku. (c) Prądy przewodzenia w przewodach (białe ostrza strzałek) i prądy przesunięcia w przestrzeni pomiędzy przewodami (czarne ostrza strzałek) związane z falą pokazaną na rysunku a; strzałki w obu przypadkach przedstawiają wektory gęstości prądu

**Przykład 2.** Sprawdzić, że prąd przesunięcia z rys. 41-5 odpowiada rozkładom  $\mathbf{B}$  i  $\mathbf{E}$  pokazanym na rys. 41-5a.

Rozpatrzmy mały element powierzchni  $\Delta S$ , którego krawędź widoczna jest na rys. 41-6, a widziany z góry na rys. 41-6. Założymy, że ten hipotetyczny element powierzchni nie porusza się względem kabla, natomiast konfiguracja pól porusza się z prędkością  $c$ . Rysunek 41-6a przedstawia elektryczne linie sił wewnętrzne i w sąsiedztwie tego elementu. Z symetrii wynika, że w chwili pokazanej na tym rysunku sumaryczny strumień  $\Phi_E$  równy zero. Jednakże, mimo że strumień  $\Phi_E$  jest równy zero, zmienia się on w tej



Rys. 41-6. Element powierzchni  $S$  (z rys. 41-5) widziany z góry, w powiększeniu, wraz z otaczającymi go polami (a) elektrycznym i (b) magnetycznym

*chwili najszybciej*, ponieważ w momencie, gdy fala przechodzi przez element  $\Delta S$  pole E zmienia swój kierunek. Wobec tego prąd przesunięcia, dany równaniem

$$i_p = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

ma również swą wartość maksymalną.

Rysunek 41-6b przedstawia pole magnetyczne w sąsiedztwie elementu powierzchni  $\Delta S$ . Zastosujmy uogólnioną postać prawa Ampère'a:

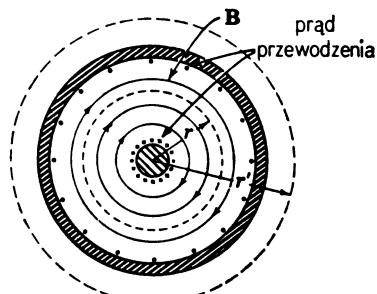
$$\oint \mathbf{B} dl = \mu_0(i + i_p)$$

do tego elementu. Prąd przewodzenia  $i$  równa się zeru, ponieważ żaden ładunek nie jest przenoszony przez  $\Delta S$ . Prąd przesunięcia  $i_p$  jest różny od zera, a nawet ma swą wartość maksymalną. A więc, ponieważ prawa strona równania ( $= \mu_0 i_p$ ) nie znika, nie może również znikać lewa strona. Analiza rys. 41-6 wykaże, że  $\oint \mathbf{B} dl$  wzduż brzegu prostokąta rzeczywiście jest różna od zera. Stąd wynika, że rozkłady pola i prądu przesunięcia z rys. 41-5c są ze sobą zgodne. Nie omówiliśmy tutaj kierunku prądu  $i_p$ ; czy jest on skierowany za płaszczyznę rys. 41-6 (jak pokazuje rys. 41-5c), czy wychodzi przed nią? Odpowiedź na to pytanie pozostawiamy czytelnikowi, który może posłużyć się rozważaniami na temat kierunku prądu przesunięcia na rysunkach 40-1a i 40-1b.

**Przykład 3.** Pokazać, że prądy przewodzenia z rys. 41-5 odpowiadają przedstawionemu rozkładowi pola magnetycznego. Na rysunku 41-7 widać przekrój kabla z rys. 41-5a w płaszczyźnie xx. Zastosujmy prawo Ampère'a

$$\oint \mathbf{B} dl = \mu_0(i + i_p)$$

do koła o promieniu  $r$ . Prąd przesunięcia przez to koło równa się zeru, gdyż jest skierowany prostopadle



Rys. 41-7. Przykład 3. Kabel koncentryczny (z rys. 41-5b) wraz z prądami przewodzenia w przewodzie wewnętrznym i zewnętrznym. Fala jest skierowana przed płaszczyznę rysunku

do wewnętrznego przewodnika. Natomiast prąd przewodzenia  $i$  w wewnętrznym przewodniku, zaznaczony na tym rysunku krzyżkami, przepływa przez to koło, wobec czego otrzymujemy

$$2\pi r B = \mu_0 i,$$

czyli

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}.$$

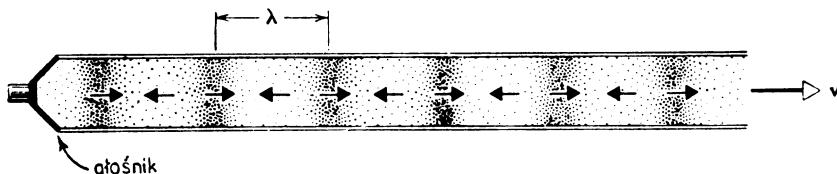
Należy zwrócić uwagę na to, że kierunek  $B$  jest związany z kierunkiem prądu w wewnętrznym przewodniku przez zwykłą regułę śruby prawoskrętnej i że wyrażenie na  $B$  jest takie samo, jak znalezione wcześniej (równ. (34-4)) dla długiego, prostoliniowego przewodnika, przez który przepływa prąd stały.

Jeżeli zastosujemy prawo Ampère'a do dużego koła o promieniu  $r'$ , to musimy przyjąć, że całkowy prąd przewodzenia jest równy zeru, gdyż prąd w zewnętrznym przewodniku, przedstawiony za pomocą kropki, jest równy co do wartości, lecz ma przeciwny kierunek niż prąd w przewodniku wewnętrznym. Oznacza to, że dla punktów leżących na zewnątrz kabla  $B$  musi być równe zeru, co zgadza się z doświadczeniem.

Interesującym zagadnieniem jest porównanie drgań elektromagnetycznych w typowej *fali biegącej*, taki jak na rys. 41-5, z drganiami w rezonatorze wnękowym, takim jak na rys. 38-6, w którym są one *fala*

stojącej. W fali biegnącej E i B są w jednakowej fazie, co oznacza, że w danym punkcie linii transmisyjnej osiągają one swoje maksymalne wartości w tym samym czasie. Natomiast na rys. 38-6 widać, że w danym punkcie rezonatora wnęgowego E i B osiągają swoje maksima w odstępie jednej czwartej okresu, czyli że są przesunięte w fazie o  $90^\circ$ .

Podobnie jest w układach mechanicznych. W rezonatorze akustycznym z rys. 38-5 czasowe zmiany ciśnienia i prędkości w stojącej fali akustycznej są przesunięte w fazie o  $90^\circ$ , co ściśle odpowiada drganiom wnęki elektromagnetycznej z rys. 38-6. Odpowiednikiem akustycznym linii transmisyjnej (rys. 41-8) byłby nieskończoność dłuża rura wypełniona gazem, połączona jednym końcem z generatorem akustycznym, np. głośnikiem. Cała konfiguracja z rys. 41-8 porusza się w prawą stronę z prędkością  $v$ . Zmiany ciśnienia przedstawione za pomocą kropek oraz prędkości chwilowe przedstawione za pomocą strzałek znajdują się w fazie, tak jak E i B w kablu koncentrycznym z rys. 41-5.

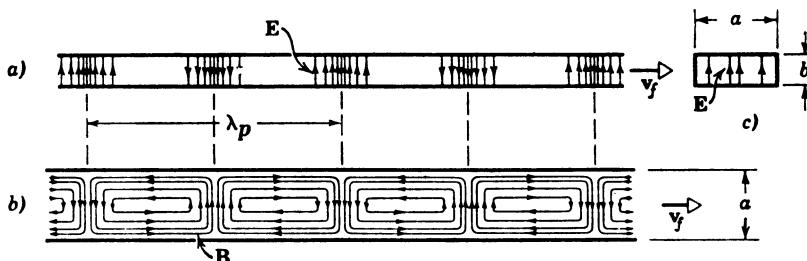


Rys. 41-8. Akustyczna linia transmisyjna z falą dźwiękową poruszającą się w prawą stronę. Małe czarne strzałki przedstawiają prędkości małych elementów objętości gazu. Porównać z rys. 41-5

## 41-6. Falowód

Istnieje możliwość przesyłania fal elektromagnetycznych przez pustą rurę metalową, nie mającą przewodnika wewnętrznego. Przyjmijmy, że ścianyewnętrzne takiej rury, zwanej *falowodem*, mają oporność równą zeru i że jej przekrój poprzeczny jest prostokątem.

Na rysunku 41-9 pokazane są typowe rozkłady pól: elektrycznego i magnetycznego. Wyobraźmy sobie, że do lewego końca falowodu przyłożony jest generator mikrofalowy, który wysyła energię elektromagnetyczną w głąb falowodu. Na rysunku 41-9a przedstawiony jest falowód z boku, a na rys. 41-9b z góry; na rys. 41-9c pokazany jest jego przekrój. I znów, jak dla kabla koncentrycznego, pola E i B są ze sobą w fazie, a rozkłady tych pól są takie, że E nie ma składowej stycznej w żadnym punkcieewnętrznej powierzchni falowodu.



Rys. 41-9. Falowód z (a) liniami E widzianymi z boku, (b) liniami B widzianymi z góry i (c) liniami E widzianymi z przodu. Na rysunku c fala jest skierowana przed płaszczyznę rysunku. Dla uproszczenia pominięto na rysunku a linie B i na rysunku b linie E

Jak dla wszystkich fal biegących, tak i dla fal przenoszonych przez falowód częstość kołowa może się zmieniać w sposób ciągły. Jednakże w falowodzie o określonych rozmiarach dla każdego typu transmisji, czyli dla każdego typu rozkładu E i B, istnieje tak zwana częstotliwość odcięcia  $\omega_0$  (graniczna). Falowód nie będzie przesyłał fal danego typu, jeżeli ich częstotliwość jest niższa od wielkości granicznej dla tego typu. Rozkład pól z rys. 41-9 pokazuje podstawowy typ transmisji w prostokątnym falowodzie; jest to typ o najniższej częstotliwości odcięcia. Jeżeli częstotliwość fal elektromagnetycznych, które chce się przesłać jest ustalona, wybiera się zazwyczaj falowód o takich wymiarach, że  $\omega$  jest większe od częstotliwości odcięcia  $\omega_0$  podstawowego typu

transmisji, lecz jest mniejsza od częstości odcięcia wszystkich innych typów. W tych warunkach podstawowy typ transmisji jest jedynym możliwym.

W kablu koncentrycznym (o zerowej oporności) fale poruszają się z prędkością  $c$ . W linii akustycznej z rys. 41-8, przy założeniu braku tłumienia, fale również poruszają się z prędkością  $v$ , taką samą, jak prędkość rozchodzenia się w swobodnym, nieskończonym ośrodku. Jednakże w falowodach prędkość różni się od  $c$ . Musimy w nich rozróżnić (a) prędkość fazową  $v_f$ , będącą prędkością poruszania się konfiguracji pola z rys. 41-9 i (b) prędkość grupową  $v_{gr}$  będącą prędkością poruszania się energii elektromagnetycznej lub przenoszenia się poprzez falówód „sygnałów” zawierających informacje. Prędkości te, identyczne dla fal elektromagnetycznych w kablu koncentrycznym i dla fal akustycznych w rurze, są różne dla fal w falowodzie.

*Prędkość fazowa nie jest bezpośrednio mierzalna.* Konfiguracje falowe powtarzają się i nie ma sposobu odróżnienia jednego maksimum fali od drugiego. Fale można obserwować otwierając jeden koniec falowodu i kierując je do drugiego, lecz nie ma sposobu identyfikacji pewnego maksimum fali w celu określenia czasu przebiegu fali przez falówód. Możemy na fali umieścić „sygnał” przez krótkotrwale zwiększenie mocy generatora. Czas przebiegu takiego sygnału można zmierzyć, lecz nie ma żadnej gwarancji, że biegnie on z taką samą prędkością jak konfiguracja pola; i faktycznie tak nie jest. Prędkość takiego sygnału jest prędkością, z jaką następuje przesyłanie energii, a więc prędkością grupową.

Z równań Maxwella widać, że prędkość fazowa i prędkość grupowa dla typu transmisji z rys. 41-9 wynoszą

$$v_f = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}, \quad (41-1)$$

$$v_{gr} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}, \quad (41-2)$$

gdzie  $a$  jest szerokością falowodu, a  $\lambda$  — długością fali w próżni. Zauważmy, że dla  $a \rightarrow \infty$ , czyli dla próżni  $v_f = v_{gr} = c$ .

Prędkość fazowa  $v_f$  jest *większa* od prędkości światła, prędkość grupowa  $v_{gr}$  jest odpowiednio *mniejsza*. Wiemy z teorii względności, że nie jest możliwe przesyłanie sygnału ani energii z prędkością większą od prędkości światła. Jednakże sygnały ani energia *nie mogą* być przesyłane wzduż falowodu z prędkością fazową  $v_f$ ; poruszają się one z prędkością  $v_{gr}$  zawsze mniejszą od  $c$ , a więc nie ma tu niezgodności z teorią względności.

Długość fali  $\lambda$  w równaniu (41-1) i (41-2) jest długością fali, która powinna być mierzona w próżni, więc

$$\lambda = \frac{c}{v}, \quad (41-3)$$

gdzie  $c$  jest prędkością w próżni, a  $v$  — częstością. Dla fal o danej częstości długość fali w falowodzie ( $\lambda_g$ ) musi różnić się od długości fali w próżni  $\lambda$ , gdyż prędkość  $v_f$  jest inna. Tak zwana *falowodowa długość fali*  $\lambda_g$  jest dana wzorem

$$\lambda_g = \frac{v_f}{v} = \frac{v_f}{c/\lambda} = \lambda \frac{v_f}{c}.$$

Wykorzystując równanie (41-1) otrzymujemy

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}}. \quad (41-4)$$

A więc, falowodowa długość fali, określona przez konfigurację pola z rys. 41-9, jest większa od długości fali w próżni.

**Przykład 4.** Jaka musi być szerokość  $a$  prostokątnego falowodu, aby energia promieniowania elektromagnetycznego o długości fali wynoszącej w próżni 3,0 cm wędrowała wzduż falowodu z szybkością (a) równą 95% prędkości światła? (b) równą 50% prędkości światła?

Z równania (41-2) otrzymujemy

$$v_{gr} = 0,95c = c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}.$$

Rozwiążując to względem  $a$  otrzymujemy  $a = 4,8 \text{ cm}$ ; powtarzając obliczenia dla  $v_{\text{sr}} = 0,50c$  otrzymujemy  $a = 1,7 \text{ cm}$ .

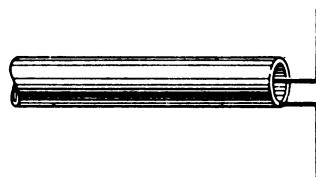
Wrażenie to ilustruje zjawisko odcięcia opisane powyżej. Jeżeli  $\lambda = 2a$ , to  $v_{\text{sr}} = 0$  i energia nie może być przenoszona przez falówkę. Dla promieniowania rozpatrywanego w tym przykładzie  $\lambda = 3,0 \text{ cm}$ , a więc falówka musi mieć szerokość co najmniej  $\frac{1}{2} \cdot 3,0 \text{ cm} = 1,5 \text{ cm}$ , aby mógł przesyłać tę falę. Falówka, której szerokość obliczyliśmy w przypadku (a), może przenosić promieniowanie o długości fali w próżni wynoszącej  $2 \cdot 4,8 \text{ cm} = 9,6 \text{ cm}$  lub mniejszej.

## 41-7. Promieniowanie

Akustyczna linia transmisyjna z rys. 41-8 nie może być nieskończonym dłużym, jej dalszy koniec może być zamknięty przykrywką lub pozostawać otwarty, może mieć na końcu kryzę, trąbkę lub inne podobne urządzenie. Jeżeli koniec nie jest zamknięty, energia może uciekać z niego do otaczającego ośrodka. Nazywamy to *promieniowaniem akustycznym*. Ogólnie biorąc pewna ilość energii odbija się i wraca do linii transmisyjnej. Jeżeli promieniowanie akustyczne jest pożąданie, należy tak skonstruować zakończenie linii (będące jak gdyby „antenną akustyczną”), by jak najmniejszy ułamek energii wyjściowej wracał. Takie zakończenie może mieć kształt rozszerzającej się trąbki. Promieniowanie akustyczne wymaga oczywiście ośrodka, takiego jak np. powietrze, aby mogło się rozprzestrzeniać.

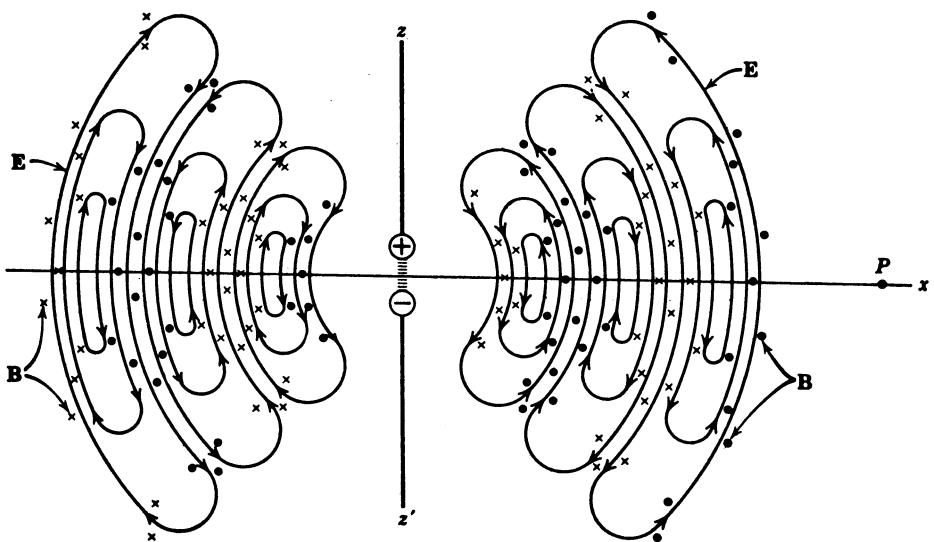
Elektromagnetyczna linia transmisyjna, taka jak kabel koncentryczny czy falówka, może również być zakończona na różne sposoby i energia może wypływać z jej końca do otaczającej przestrzeni. W przeciwieństwie do fal dźwiękowych, do rozprzestrzeniania się tej energii nie potrzeba ośrodka materialnego. A więc energia elektromagnetyczna może być wypromieniowana z końca linii transmisyjnej tworząc falę elektromagnetyczną rozchodząjącą się w próżni.

Rysunek 41-10 pokazuje wygodne zakończenie kabla koncentrycznego, składające się z dwóch drutów przewodzących (ustawionych jak na rysunku) zwane *elektryczną anteną dipolową*. Różnica potencjałów między tymi drutami zmienia się sinusoidalnie wraz z przychodem fali i efekt jest taki, jak w przypadku dipola elektrycznego o momencie dipolowym  $p$  zmieniającym się w czasie zarówno co do wielkości jak i kierunku.



Rys. 41-10. Elektryczna antena dipolowa umieszczona na końcu kabla koncentrycznego

Na rysunku 41-11 pokazano fale elektromagnetyczne wytwarzane przez taki drgający dipol elektryczny. Rysunek jest przekrojem przez figurę obrotową o osi symetrii będącej osią  $zz'$  dipola; fale rozchodzą się od dipola we wszystkich kierunkach z prędkością  $c$ . Pokazane pola leżą w odległościach bardzo dużych od dipola w porównaniu z jego rozmiarami. Nazywamy je *polem promieniowania dipola* i na nich właśnie skoncentrujemy naszą uwagę. W pobliżu dipola (*pole bliskie*) rozkłady pól są bardziej skomplikowane, nie będziemy się jednak nimi interesować, ze względu na ich szybki zanik, ograniczając nasze rozważania tylko do pól istniejących w znacznych odległościach od dipola.



Rys. 41-11. Pola E i B wypromienowane przez drgający dipol elektryczny. Pokazano tylko rozkłady pól dla odległości znacznie większych od rozmiarów dipola. Fala elektromagnetyczna przechodząca przez odległy punkt P jest falą płaską poruszającą się w kierunku osi x

Na rysunku 41-12 pokazano osiem cyklicznych „zdjęć migawkowych” pól E i B mijających obserwatora znajdującego się w punkcie P na rys. 41-11. Zakładamy, że punkt P znajduje się w tak dużej odległości od drgającego dipola, że powierzchnie falowe fal przechodzących przez ten punkt oraz w pobliżu niego są płaszczyznami; patrz § 19-2. Prędkość c fali w próżni dana jest wzorem  $c = \nu\lambda$ , który można zapisać w postaci

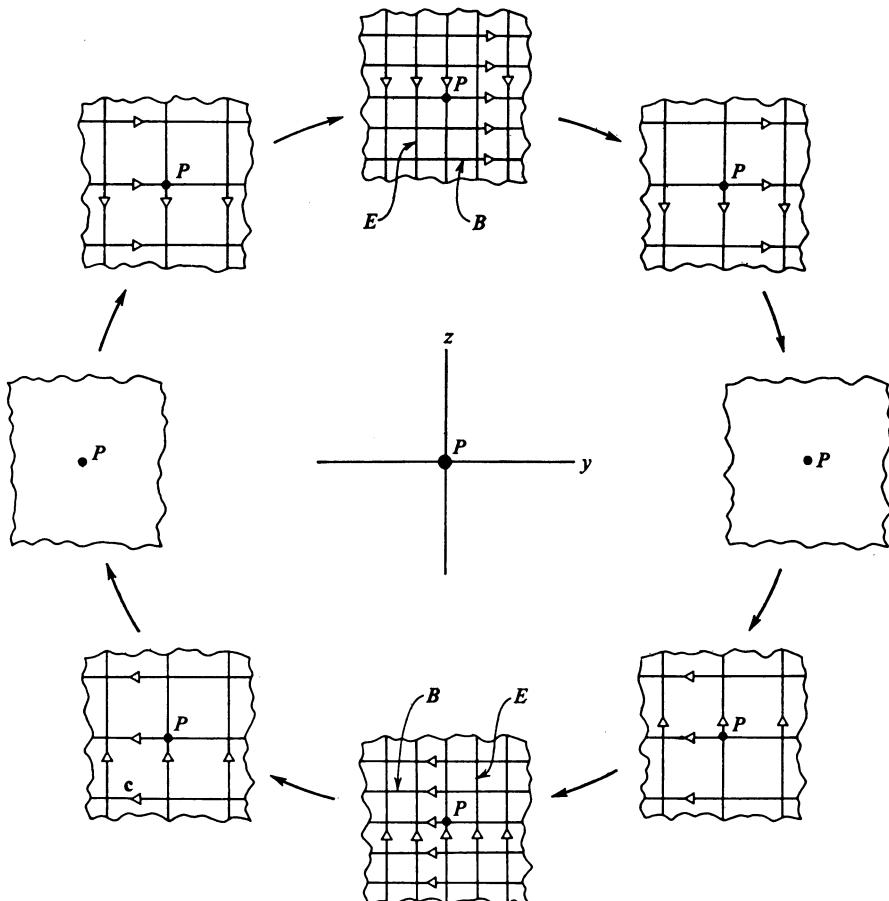
$$c = \frac{\omega}{k}, \quad (41-5)$$

gdzie  $\omega$  jest częstotliwością kołową, a  $k$  — liczbą falową, przy czym wielkości te są odpowiednio związane z częstotliwością  $\nu$  i długością fali  $\lambda$  zależnościami

$$\omega = 2\pi\nu, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

#### 41-8. Fale rozchodzące się w przestrzeni a równania Maxwella

W poprzednich paragrafach założyliśmy istnienie pewnych konfiguracji pól magnetycznych i elektrycznych we wnękach rezonansowych, kablach koncentrycznych i falowodach oraz pokazaliśmy, że konfiguracje te są zgodne z równaniami Maxwella, podobnie jak rozkłady prądów przewodzenia i przesunięcia związane z tymi polami. Czytelnik, który będzie kontynuował naukę o elektromagnetyzmie, dowie się, jak znaleźć matematyczne wyrażenia na E i B przez podporządkowanie równań Maxwella warunkom brzegowym stosownie do rozpatrywanego problemu. W tym paragrafie będziemy kontynuować nasz program pokazując, że założone konfiguracje E i B dla poruszającej się fali elektromagnetycznej są całkowicie zgodne z równaniami Maxwella. Tak postępując będziemy mogli pokazać, że prędkość takich fal w próżni jest równa prędkości światła widzialnego, a stąd że światło widzialne samo jest falą elektromagnetyczną.



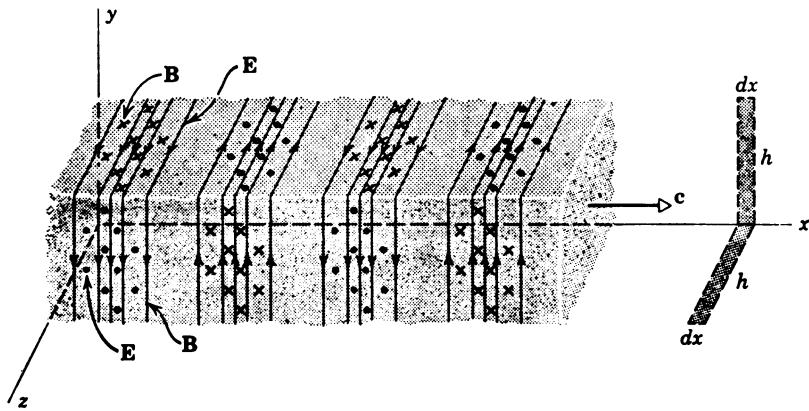
Rys. 41-12. Osiem kolejnych „zdjęć migawkowych” płaskiej fali elektromagnetycznej przechodzącej przez punkt  $P$  z rys. 41-11, wypromienowanej przez drgający dipol elektryczny. Fala (rozchodząca się wzdłuż osi  $x$ ) jest skierowana przed płaszczyznę rysunku

Jeżeli obserwator w punkcie  $P$  (rys. 41-11) znajduje się (jak założyliśmy) w znacznej odległości od źródła, to *powierzchnie falowe* pola elektrycznego i magnetycznego dochodzące do niego (patrz rys. 41-12) będą płaskie i mijająca go fala będzie *falą płaską*. Rysunek 41-13 pokazuje „trójwymiarowe zdjęcie migawkowe” fali płaskiej poruszającej się w kierunku osi  $x$ . Linie  $E$  są równoległe do osi  $z$ , a linie  $B$  są równoległe do osi  $y$ . Wartości  $B$  i  $E$  dla tej fali zależą jedynie od  $x$  i  $t$  (nie od  $y$  czy  $z$ ). Przyjmiemy, że ich wartości wynoszą

$$B = B_m \sin(kx - \omega t), \quad (41-6)$$

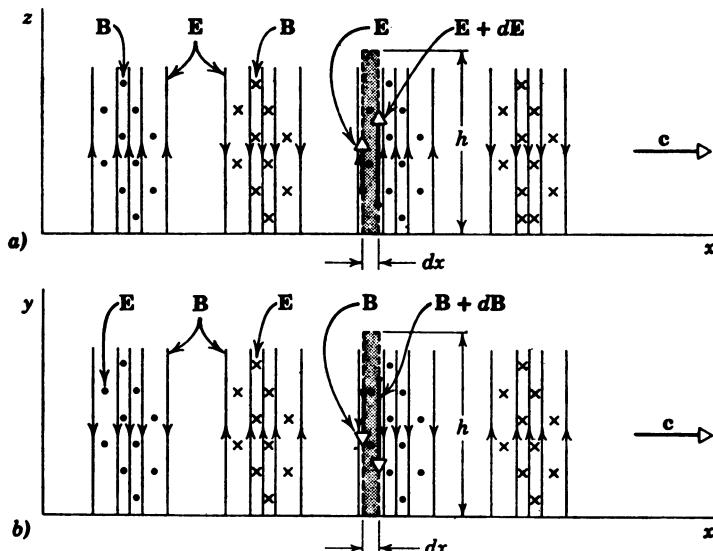
$$E = E_m \sin(kx - \omega t). \quad (41-7)$$

Rysunek 41-14 pokazuje dwa przekroje trójwymiarowego rysunku 41-13. Na rysunku 41-14 płaszczyzna stronicy jest płaszczyzną  $xz$ , a na rysunku 41-14 płaszczyzną  $xy$ . Zwrómy uwagę, że podobnie jak dla fal rozchodzących się w kablu koncentrycznym (rys. 41-5a) i w falowodzie (rys. 41-9), tak i tu  $E$  i  $B$  są w jednakowej fazie, czyli w każdym punkcie, przez który przechodzi fala, osiągają one równocześnie swoje maksymalne wartości.



Rys. 41-13. Płaska fala elektromagnetyczna poruszająca się w prawą stronę z prędkością  $c$ . Linie  $B$  są równoległe do osi  $y$ ; linie  $E$  są równoległe do osi  $z$ . Zaczernione prostokąty odpowiadają prostokątom z rys. 41-14

Zaciemniony prostokąt o wymiarach  $dx$  i  $h$  na rys. 41-14a nie porusza się w przestrzeni. W miarę przesuwania się fali strumień magnetyczny  $\Phi_B$  przechodzący przez ten prostokąt będzie więc się zmieniać, co spowoduje powstanie indukowanych pól elektrycznych na krawędziach prostokąta, zgodnie z prawem indukcji Faradaya. Te indukowane pola elektryczne są to po prostu składowe elektryczne wytworzonej fali biegnącej.



Rys. 41-14. Przekrój fali z rys. 41-13 dokonany (a) wzdłuż płaszczyzny  $xx$  i (b) wzdłuż płaszczyzny  $xy$

Zastosujmy prawo Lenza do tego procesu indukcji. Strumień  $\Phi_B$  przechodzący przez zaciemniony prostokąt z rys. 41-14 maleje w czasie, gdy fala porusza się w prawą stronę i przez prostokąt przechodzi coraz to słabsze pole magnetyczne. Indukowane pole będzie przeciwdziałać tej zmianie, co oznacza, jeśli wyobrażymy sobie, że brzeg prostokąta jest obwodem przewodzącym, że powstanie w nim prąd o kierunku *przeciwny do kierunku*

*ruchu wskazówek zegara.* Prąd ten wytworzy pole  $\mathbf{B}$  skierowane przed płaszczyznę prostokąta i przeciwstawiające się w ten sposób zmniejszaniu się strumienia  $\Phi_B$ . Oczywiście nie ma żadnego przewodzącego obwodu, ale efektywne pole elektryczne  $\mathbf{E}$  na brzegach prostokąta działa rzeczywiście w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, gdyż wartość bezwzględna  $E$  dla prawego boku prostokąta, równa  $E+dE$  jest większa od wartości bezwzględnej  $E$  dla lewego boku, równej  $E$ . A więc konfiguracja pola elektrycznego jest całkowicie zgodna z koncepcją indukowania go przez zmieniające się pole magnetyczne.

W celu bardziej dokładnej analizy zastosujmy prawo indukcji Faradaya

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (41-8)$$

dla obwodu prostokąta z rys. 41-14a, całkując w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Ponieważ górna i dolna część obwodu nie dają żadnego wkładu, gdyż  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  są tam do siebie prostopadłe, więc całka ta równa się

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = (E + dE)h - Eh = h dE.$$

Strumień  $\Phi_B$  przechodzący przez prostokąt wynosi

$$\Phi_B = B h dx,$$

gdzie  $B$  jest wartością bezwzględną  $\mathbf{B}$  w prostokącie, a  $h dx$  jego polem. Różniczkowanie daje

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = h dx \frac{dB}{dt}.$$

A więc, z równania (41-8) otrzymujemy

$$h dE = - h dx \frac{dB}{dt},$$

czyli

$$\frac{dE}{dx} = - \frac{dB}{dt}. \quad (41-9)$$

Zarówno  $B$  jak i  $E$  są funkcjami  $x$  i  $t$ ; patrz równanie (41-6) i (41-7). Przy obliczaniu  $dE/dx$  zakłada się, że  $t$  ma wartość stałą, gdyż rys. 41-14 jest „zdjęciem migawkowym” — w ustalonej chwili czasu. Również przy obliczaniu  $dB/dt$  zakłada się, że  $x$  jest stałe, z powodu nieskończenie małej szerokości prostokąta wykorzystanego do obliczania szybkości zmian  $B$ . Pochodne obliczane w takich warunkach nazywają się *pochodnymi cząstkowymi* i używa się dla nich nieco innego oznaczenia; patrz przykład 2, s. 476, t. 1 i notka na s. 90. Równanie (41-9) przy użyciu tych oznaczeń można zapisać w postaci

$$\frac{\partial E}{\partial x} = - \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (41-10)$$

Znak minus występuje w tym wzorze dlatego, że chociaż  $E$  wzrasta wraz z  $x$  w obszarze zaczerńionego prostokąta z rys. 41-14a,  $B$  maleje z czasem  $t$ . Ponieważ  $E(x, t)$  i  $B(x, t)$  są znane (patrz równ. (41-6) i (41-7)), równanie (41-10) sprowadza się do

$$kE_m \cos(kx - \omega t) = \omega B_m \cos(kx - \omega t),$$

czyli (patrz równ. (41-5))

$$\frac{\omega}{k} = \frac{E_m}{B_m} = c. \quad (41-11a)$$

A więc prędkość fali jest równa stosunkowi amplitudy składowej elektrycznej do amplitudy składowej magnetycznej fali. Z równania (41-6) i (41-7) można zobaczyć, że stosunek amplitud wielkości  $E$  i  $B$  równa się stosunkowi samych tych wielkości w danym momencie czasu, czyli

$$E = cB. \quad (41-11b)$$

Ten ważny rezultat będzie wykorzystywany w dalszych paragrafach.

Zwróćmy teraz uwagę na rys. 41-14, na którym strumień  $\Phi_E$  przechodzący przez za-czerniony prostokąt maleje z czasem, gdy fala przechodzi przezeń. Zgodnie z trzecim równaniem Maxwell'a, w którym przyjmujemy  $i = 0$ , gdyż w biegnącej fali elektromagnetycznej nie ma prądów przewodzenia,

$$\oint \mathbf{B} dl = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}, \quad (41-12)$$

ten zmieniający się strumień będzie indukował pole magnetyczne wokół prostokąta. To indukowane pole magnetyczne jest po prostu składową magnetyczną fali. A więc, jak w rezonatorze wnękowym z paragrafu 38-5, składowa elektryczna i magnetyczna fali są ściśle ze sobą powiązane, przy czym każda z nich zależy od szybkości zmian drugiej.

Porównanie zaczernionych prostokątów z rysunku 41-14 pokazuje, że  $\Phi_B$  podobnie jak i  $\Phi_E$  maleje z czasem. Jednakże, jeżeli będziemy się poruszać wokół każdego z prostokątów w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, to zobaczymy, że  $\oint \mathbf{E} dl$  jest dodatnia, a  $\oint \mathbf{B} dl$  — ujemna. Tak być powinno. Jeżeli porównamy rys. 35-10 i 40-1a, to przypomnimy sobie, że chociaż strumienie  $\Phi_B$  i  $\Phi_E$  na tych rysunkach zmieniają się w czasie w ten sam sposób (obydwa wzrastają), to linie indukowanych pól  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$  mają kierunki przeciwnie.

Całkując równanie (41-12) po obwodzie prostokąta z rysunku 41-14b w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara otrzymujemy

$$\oint \mathbf{B} dl = -(B + dB)h + Bh = -h dB,$$

gdzie  $B$  jest wartością bezwzględną  $\mathbf{B}$  dla lewego boku prostokąta, a  $B + dB$  wartością bezwzględną  $\mathbf{B}$  dla prawego boku.

Strumień  $\Phi_E$  przechodzący przez prostokąt z rysunku 41-14b wynosi

$$\Phi_E = E(h dx).$$

Różniczkując otrzymujemy

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = h dx \frac{dE}{dt}.$$

A więc równanie (41-12) można przepisać w postaci

$$-h dB = \mu_0 \epsilon_0 \left( h dx \frac{dE}{dt} \right)$$

lub, wprowadzając pochodne cząstkowe, w postaci

$$-\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (41-13)$$

I znów znak minus jest konieczny dlatego, że chociaż  $B$  wzrasta z  $x$  w obszarze zaczernionego prostokąta z rys. 41-14b,  $E$  maleje z czasem  $t$ .

Korzystając z równań (41-6) i (41-7) otrzymujemy

$$-kB_m \cos(kx - \omega t) = -\mu_0 \epsilon_0 \omega E_m \cos(kx - \omega t),$$

czyli (patrz wzór (41-5))

$$\frac{E_m}{B_m} = \frac{k}{\mu_0 \epsilon_0 \omega} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0 c}. \quad (41-14)$$

Eliminując  $E_m/B_m$  z równań (41-11a) i (41-14) otrzymujemy

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \quad (41-15)$$

Podstawiając wielkości liczbowe stwierdzamy, że

$$c = \frac{1}{(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m}/\text{A})(8,9 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2))} = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad (41-16)$$

co jest prędkością światła w próżni! To pojawienie się prędkości światła w równaniach, w których korzystaliśmy tylko z czysto elektromagnetycznych założeń jest koronnym osiągnięciem teorii elektromagnetyzmu Maxwella. Maxwell przewidział to, zanim odkryto fale radiowe i zanim uszczodomiono sobie, że światło ma naturę elektromagnetyczną. Doprowadziło to do powstania koncepcji widma elektromagnetycznego i do wykrycia fal radiowych przez Heinricha Hertza w 1890 r. Od tej pory można było traktować optykę jako gałąź elektromagnetyzmu i wyprowadzać jej podstawowe prawa z równań Maxwella.

Wniosek o tak podstawowym znaczeniu jak równanie (41-15) musi być poddany dokładnemu sprawdzeniu doświadczalnemu, co istotnie zrobiono. Z trzech wielkości występujących w tym równaniu jedna,  $\mu_0$ , ma ściśle ustaloną wartość, a mianowicie równa się  $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m}/\text{A}$ . Pozostałe dwie,  $c$  i  $\epsilon_0$ , są wielkościami mierzalnymi. Nasze zaufanie do równań Maxwella, oparte na zgodności z eksperymentem wielu przewidywań, jest obecnie tak duże, że wykorzystujemy zmierzoną wartość prędkości światła ( $2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ; patrz dodatek B) do określenia, za pomocą równ. (41-15), wartości  $\epsilon_0$ . Otrzymujemy w ten sposób wartość znacznie lepszą od wartości, jaką moglibyśmy zmierzyć metodą opisaną w § 30-2.

Ciekawą rzeczą jest, że sam Maxwell nie wyobrażał sobie zjawisk elektromagnetycznych, w szczególności rozchodzenia się fal elektromagnetycznych w sposób pokazany np. na rys. 41-13. Podobnie jak wszyscy fizycy w tych czasach wierzyli on niezachwianie, że przestrzeń jest przeniknięta delikatną substancją nazywaną *eterem* i że zjawiska elektromagnetyczne można wyjaśniać za pomocą wirów powstających w tym eterze.

Wyłącznie geniuszowi Maxwella zadowdzięczamy to, że mimo uznawania takiego mechanicznego modelu był on w stanie sformułować noszące jego imię prawa elektromagnetyzmu. W prawach tych, jak już podkreśśliśmy, nie tylko nie trzeba było dokonywać żadnych zmian, gdy pół wieku później pojawiła się szczególna teoria względności Einsteina, lecz zostały one mocno ugruntowane przez tę teorię. Obecnie nie wierzymy w koncepcję eteru; patrz uzupełnienie V, „Szczególna teoria względności — podsumowanie wniosków” (t. 1).

## 41-9. Wektor Poyntinga

Jedną z ważnych właściwości fali elektromagnetycznej jest zdolność przenoszenia energii od punktu do punktu. Jak zobaczymy poniżej, szybkość przepływu energii przez jednostkową powierzchnię płaskiej fali elektromagnetycznej można opisać wektorem  $\mathbf{S}$  zwanym *wektorem Poyntinga*<sup>\*</sup>, którego właściwości pierwszy podał John Henry Poynting (1852–1914). Wektor  $\mathbf{S}$  definiujemy za pomocą iloczynu wektorowego

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (41-17)$$

W układzie SI jest on wyrażony w  $\text{W/m}^2$ ; kierunek  $\mathbf{S}$  pokazuje kierunek przenoszenia energii. Wektory  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$  są chwilowymi wartościami pola elektromagnetycznego w rozpatrywanym punkcie. Jeżeli równanie (41-17) zastosujemy do rozchodzącej się w przestrzeni fali płaskiej z rys. 41-13, to okaże się, że  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ , a więc i  $\mathbf{S}$ , ma kierunek ruchu fali. Należy zauważać także, że w kablu koncentrycznym z rys. 41-5 wektor we wszystkich punktach ma kierunek równoległy do kabla.

Ważne rezultaty otrzymamy, jeżeli rozszerzymy koncepcję wektora Poyntinga na inne zjawiska elektromagnetyczne, dotyczące zarówno fal stojących, jak i biegących. Zobaczmy to w przykładach 5 i 6. Rozszerzenie tej koncepcji na układy ze stałymi lub prawie stałymi prądami i na układy o elementach skupionych, również prowadzi do pewnych interesujących wniosków. Pokażemy to w zadaniach 28, 31 i 32.

**Przykład 5.** Przeanalizować przepływ energii we wnęce z rys. 38-6 stosując wektor Poyntinga.

Patrząc na rys. 41-15 widzimy, że jeżeli energia występuje wyłącznie w postaci elektrycznej (rys. 41-15a i e), to koncentruje się ona wokół osi, gdyż jest to obszar największych wartości  $\mathbf{E}$ . Jeżeli energia występuje wyłącznie w postaci magnetycznej (rys. 41-15c i g), to koncentruje się ona przy ścianach wnęki. A więc energia przepływa cyklicznie tam i z powrotem z obszaru centralnego do obszaru bliskiego ścian. Na rysunku 41-15 przedstawiono za pomocą strzałek kierunek  $\mathbf{S}$  w różnych punktach wnęki i w różnych momentach cyklu. Zauważmy, że na rys. 41-15a, c, e i g wektor  $\mathbf{S}$  staje się równy zeru, co jest zjawiskiem prawidłowym, gdyż w tych momentach konfiguracje pola są chwilowo statyczne i energia nie przepływa. Mechaniczną analogią tego zjawiska jest cieżarek wahadła w obydwu krańcowych wychyleniach. Czytelnik powinien sprawdzić, korzystając z równania (41-17), że strzałki mają właściwy kierunek.

Rysunkiem 41-16 możemy posłużyć się do znalezienia wektora Poyntinga w specjalnym przypadku płaskiej fali elektromagnetycznej rozchodzącej się w przestrzeni. Na rysunku tym przedstawiony jest podłużny przekrój tej fali oraz wąskie „pudełko” o grubości  $dx$  i powierzchni  $A$ . Pudełko, będące jedynie konstrukcją myślową, jest nieruchome względem układu współrzędnych, a fala poruszając się przechodzi przez nie. W dowolnej chwili czasu energia zawarta w pudełku zgodnie z równaniami (30-9) i (36-19) wynosi

$$dU = dU_E + dU_B = (u_E + u_B) Adx = \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) Adx, \quad (41-18)$$

gdzie  $Adx$  jest objętością pudełka, a  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$  są chwilowymi wartościami wektorów pola w pudełku.

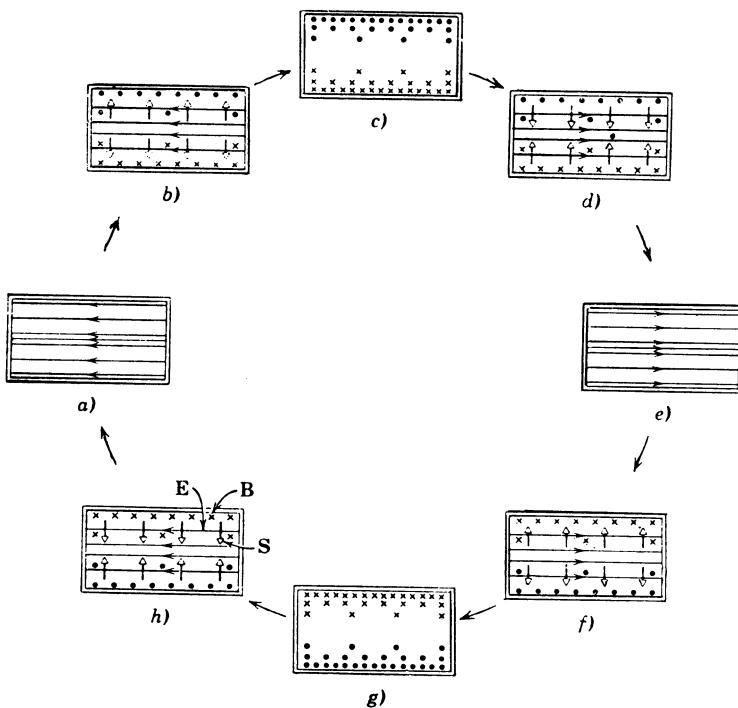
Aby wyeliminować jedno z  $E$  z pierwszego składnika wyrażenia w nawiasie równania (41-18) i jedno z  $B$  z drugiego składnika w tym nawiasie, korzystamy z równania (41-11b) ( $E = cB$ ), otrzymując

$$dU = \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 EcB + \frac{1}{2\mu_0} B \frac{E}{c} \right) Adx = \frac{(\mu_0 \epsilon_0 c^2 + 1)(EBA dx)}{2\mu_0 c}.$$

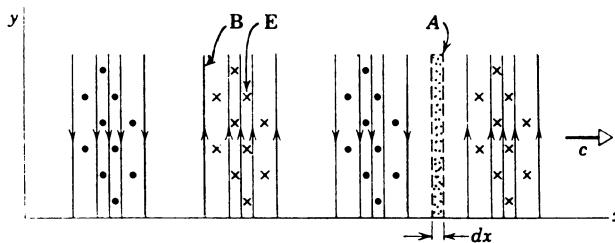
Jednakże, z równania (41-15),  $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$ , a więc

$$dU = \frac{EBAdx}{\mu_0 c}.$$

\* Wektor ten nazywany jest również *wektorem Poyntinga-Umowa* (przyp. tłum.).



Rys. 41-15. Przykład 5. Cykliczny przepływ energii we wnęce z obszaru centralnego do obszaru przy ścianach i z powrotem, przedstawiony za pomocą wektora Poyntinga  $S$  (strzałki pionowe)



Rys. 41-16. Fala płaska poruszająca się w prawą stronę z prędkością  $c$ ; porównać z rys. 41-14. Zaczerniony prostokąt przedstawia trójwymiarowe pudełko o powierzchni  $A$  i grubości  $dx$  umieszczone prostopadle do płaszczyzny rysunku

Taka energia przepływa przez prawy bok pudełka w czasie  $dt$  równym  $dx/c$ . A więc energia przypadająca na jednostkę czasu i na jednostkę powierzchni, równą  $S$ , wynosi

$$S = \frac{dU}{dt A} = \frac{EBA dx}{\mu_0 c(dx/c) A} = \frac{1}{\mu_0} EB,$$

co ściśle zgadza się z wartością przewidywaną na podstawie bardziej ogólnej zależności (41-17), dla biegącej fali płaskiej.

Zależność ta wiąże ze sobą  $S$ ,  $E$  i  $B$  w pewnej chwili czasu. Zazwyczaj bardziej interesujemy się średnią wartością  $\bar{S}$  dla jednego lub więcej cykłów fali. Obserwator mierzący natężenie fali poruszającej się obok niego mierzyliby tę średnią wartość  $\bar{S}$ . Można łatwo pokazać (patrz przykład 6), że  $S$  jest związane z maksymalnymi wartościami  $E$  i  $B$  zależnością  $\bar{S} = E_m B_m / 2\mu_0$ .

**Przykład 6.** Obserwator znajduje się w odległości  $r$  od punktowego źródła światła o mocy promieniowania  $P_0$ . Obliczyć wielkości pola magnetycznego i elektrycznego zakładając, że źródło jest monochromatyczne, że promienia w sposób jednorodny we wszystkich kierunkach, i że w punktach odległych od źródła promieniowanie można uważać za falę płaską zachowującą się jak fala z rys. 41-13.

Moc przepływająca przez powierzchnię kuli o promieniu  $r$  wynosi  $4\pi r^2 \bar{S}$ , gdzie  $\bar{S}$  jest średnią wartością wektora Poytinga na powierzchni kuli. Moc ta musi być równa  $P_0$ , czyli

$$P_0 = 4\pi r^2 \bar{S}.$$

Z definicji wektora  $S$  (równ. (41-17)) otrzymujemy

$$\bar{S} = \overline{\left( \frac{1}{\mu_0} EB \right)}.$$

Zastosowanie związku  $E = cB$  (równ. (41-11b)) w celu wyeliminowania  $B$  prowadzi do

$$\bar{S} = \frac{1}{\mu_0 c} \overline{E^2}.$$

Średnia wielkość  $E^2$  na jeden cykl wynosi  $\frac{1}{2} E_m^2$ , gdyż  $E$  zmienia się sinusoidalnie (patrz równ. (41-7)). Stąd otrzymujemy

$$P_0 = \frac{E_m^2}{2\mu_0 c} 4\pi r^2,$$

czyli

$$E_m = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{P_0 \mu_0 c}{2\pi}}.$$

Dla  $P_0 = 10^3$  W i  $r = 1$  m mamy

$$E_m = \frac{1}{1,0 \text{ m}} \sqrt{\frac{10^3 \text{ W} (4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Wb/(A} \cdot \text{m})) (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})}{2\pi}} = 240 \text{ V/m.}$$

Zależność  $E_m = cB_m$  (równ. (41-11a)) prowadzi do

$$B_m = \frac{E_m}{c} = \frac{240 \text{ V/m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 8 \cdot 10^{-7} \text{ T.}$$

Należy zauważyć, że  $E_m$  ma wielkość spotykaną w normalnych warunkach laboratoryjnych, podczas gdy  $B_m$  ( $= 0,008$  Gs) jest bardzo małe.

## Pytania

1. Co byś odpowiedział, gdyby Cię spytyano, jaka część widma elektromagnetycznego leży w zakresie widzialnym?

2. Istniał ambitny program, nazwany *Seafarer* (Podróżnik Morski), skonstruowania ogromnej anteny zakopanej w ziemi na obszarze o powierzchni 4000 mil kwadratowych. Jego celem miało być nadawanie sygnałów dla łodzi podwodnych, w sytuacjach gdy są one głęboko zanurzone. Jaka byłaby częstotliwość i okres wysyłanego promieniowania, gdyby długość fali wynosiła, powiedzmy,  $10^4$  promienia Ziemi? Zazwyczaj promieniowanie elektromagnetyczne nie przenika zbyt daleko w głąb przewodników takich jak woda morska. Czy przychodzi Ci do głowy jakiś powód, dla którego promieniowanie ELF\* (skrajnie niskiej częstotliwości) mogłoby przenikać skuteczniej? Pomyśl o granicznym przypadku zerowej częstotliwości. (Dlaczego nie nadaje się sygnałów przy zerowej częstotliwości?)

3. Jak scharakteryzowałbyś promieniowanie elektromagnetyczne o częstotliwości  $10 \text{ kHz}$ ?  $10^{20} \text{ Hz}$ ? o długości fali  $500 \text{ nm}$ ?  $10 \text{ km}$ ?  $0,50 \text{ nm}$ ?

4. Fale elektromagnetyczne docierają do nas z najdalszych zakątków Wszechświata. Czy mówią nam one o tym jak wygląda Wszechświat teraz, czy o tym jak wyglądał w określonej chwili w przeszłości czy też coś pośredniego? Przedyskutuj to.

5. *Paradoks ciemnego nieba w nocy\*\*.* Najprostsza być może obserwacja astronomiczna, której możesz

\* ELF — extremely low frequency (przyp. tłum.).

\*\* Zazwyczaj nazywany *paradoksem Olbersa*.

dokonać, jest następująca: gdy Słońce zachodzi, niebo staje się ciemne. Choć jest to prawdą i wydaje się oczywiste można podać argument, że tak być nie powinno. Rozważmy to:

„Przy założeniu, że Wszechświat jest nieskończony, równomiernie zapelniony gwiazdami mniej lub bardziej podobnymi do naszego Słońca, można powiedzieć, że każda linia prosta poprowadzona od obserwatora w dowolnym kierunku trafi w jakąś gwiazdę. Odległości  $R$  od większości tych gwiazd są na tyle wielkie, że gwiazdy oświetlają obserwatora dosyć słabo, zgodnie z prawem, że oświetlenie maleje jak  $1/R^2$ . Z drugiej strony jednak, liczby odległych gwiazd, znajdujących się w kulistej skorupie, której promień wynoszą  $R$  i  $R + \Delta R$ , przy założeniu że  $\Delta R$  jest stałą, rośnie jak  $R^2$ . (Czy potrafisz udowodnić to stwierdzenie?) Te dwa efekty wydają się dokładnie kompensować. Tak więc obserwator oświetlony nieskończonym zbiorem słońc powinien widzieć niebo nieskończanie jasnym”.

Czy dostrzegasz jakąś rysę w tym rozumowaniu? Pomyśl o skończonej prędkości światła, o wielkiej skali Wszechświata, o koncepcji ekspansji Wszechświata, o skończonym czasie życia gwiazd itd. Wspaniały przegląd historyczny i jasne wyjaśnienie tych spraw znajdziesz w artykule E. R. Harrisona, *The Dark Night Sky Paradox, American Journal of Physics*, February 1977.

6. Dlaczego prędkość kątowa rotacji staje się bardzo wielka, gdy zwykła gwiazda kurczy się w procesie tworzenia gwiazdy neutronowej (pulsara)?

7. Jakie są kierunki prądów przewodzenia w kablu koncentrycznym z rys. 41-3: (a) w przewodniku wewnętrznym, (b) w przewodniku zewnętrznym, w chwilę po przerzuceniu przełącznika do pozycji  $a$ ? Rozpatrzyć zarówno te punkty, które osiągnęły czoło fali, jak i te, do których jeszcze nie doszło (rys. 41-4a, b).

8. Jaki jest związek między długością fali w kablu koncentrycznym z rys. 41-5 i w próżni?

9. Jaki jest kierunek prądu przesunięcia na rys. 41-6? Podać jakiś argument dla poparcia odpowiedzi.

10. Porównać kabel koncentryczny i falowód użyte jako linie transmisyjne. Wskazać podobieństwa i różnice.

11. Czy fale biegające o ciągłym zakresie długości fal mogą być przesyłane: (a) przez kabel koncentryczny, (b) przez falowód? Czy we wnęce rezonansowej można wzbudzić fale stojące o dowolnej częstotliwości? Podać analogię mechaniczną lub akustyczną na poparcie odpowiedzi.

12. Jeżeli pewna długość fali jest większa od granicznej długości fali dla podstawowego typu transmisji falowodu, to czy możliwe jest przesyłanie energii za pomocą innych typów transmisji?

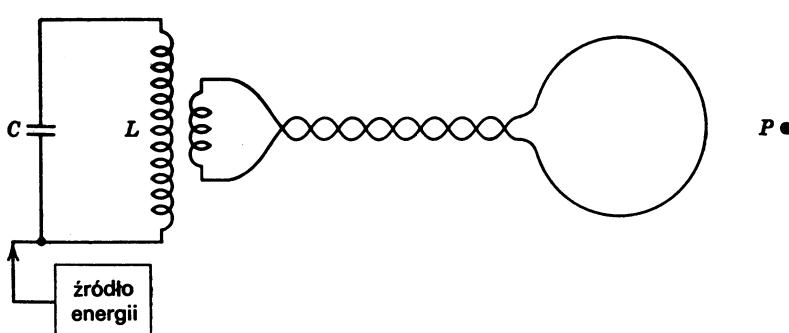
13. Uzasadnić, dlaczego wyraz  $\epsilon_0 d\Phi_E/dt$  w równaniu Ampère'a jest niezbędny do wyjaśnienia zjawiska rozprzestrzeniania się fal elektromagnetycznych.

14. Jak we wzorze  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  (równ. (40-1)), wielkość  $c$  może mieć zawsze taką samą wartość, skoro  $\mu_0$  jest określone *umownie*, a  $\epsilon_0$  jest wielkością mierzoną?

15. Czy jest rzeczą możliwą, abyśmy za pomocą teorii elektromagnetycznej mogli pewnego dnia określić wielkość  $c$  ( $3 \cdot 10^8$  m/s) nie w postaci funkcji  $\mu_0$  i  $\epsilon_0$ , lecz bezpośrednio jako wartość liczbową, bez odwoływanego się do jakiegokolwiek pomiaru?

16. Na rys. 41-17 przedstawiono dipol magnetyczny pobudzany przez drgający obwód  $LC$ . Omów naturę rozprzestrzeniającej się fali w odległym punkcie  $P$ .

17. Czy energia w kablu koncentrycznym przenosi się poprzez przewodniki za pośrednictwem prądów, czy w przestrzeni między nimi za pośrednictwem pól?



Rys. 41-17. Pytanie 16

## Zadania

### Paragraf 41-2

1. Częstość  $\nu$  i długość fali  $\lambda$  na rys. 41-1, przedstawiającym widmo elektromagnetyczne, powiązane są wzorem  $c = \lambda\nu$ . Wykaż, że równym (w sensie odległości na skali) przedziałom częstości odpowiadają równe (w tym samym sensie) przedziały długości fal. Weź pod uwagę, że obie skale są logarytmiczne.

### Paragraf 41-3

2. Średni promień Ziemi jest równy  $6,4 \cdot 10^6$  m, a średnia odległość między Ziemią i Słońcem  $1,5 \cdot 10^8$  km. Jaką część promieniowania elektromagnetycznego wysyłanego przez Słońce przechwytyuje tarcza Ziemi? Przyjmij, że natężenie, mierzone na przykład w  $\text{W/m}^2$ , maleje odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości.

3. Natężenie bezpośredniego promieniowania słonecznego nie zaabsorbowanego przez atmosferę w spokojny letni dzień wynosi  $100 \text{ W/m}^2$ . Jak blisko grzejnika elektrycznego o mocy  $1,0 \text{ kW}$  trzeba stać, by odczuwać takie samo natężenie? Załóż, że grzejnik ma sprawność  $100\%$  i że promieniuje równomiernie we wszystkich kierunkach.

Odp.:  $0,89 \text{ m}$ .

4. Nasz najbliższy gwiazdny sąsiad, gwiazda  $\alpha$ -Centauri, jest oddalona o  $4,3$  lat świetlnych. Uznajmy, że programy telewizyjne z naszej planety (np. wieczorny dziennik) dotarły do tej gwiazdy i mogły być oglądane przez hipotetycznych mieszkańców hipotetycznej planety kraczącej wokół niej. Księżyca jest oddalony od Ziemi o  $3,8 \cdot 10^5$  km i być może jego hipotetyczni mieszkańcy (którzy zawsze kryją się gdy zbliża się do nich statek kosmiczny) też śledzą te programy. Jaki byłby stosunek natężeń takich sygnałów (mierzonych np. w  $\text{W/m}^2$ ) dla Księżyca i  $\alpha$ -Centauri, przy założeniu, że obowiązuje prawo odwrotnej proporcjonalności do kwadratu odległości?

### Paragraf 41-5

5. Mamy kabel koncentryczny, którego centralny przewód o promieniu  $a$  jest otoczony cienką metalową rurą o promieniu  $b$  (obszar pomiędzy tymi przewodnikami jest pusty). (a) Znajdź pojemność przypadającą na jednostkę długości tego kabla (*Wskazówka*: Wyobraź sobie, że na centralnym przewodzie i na rurze znajdują się równe, lecz o przeciwnych znakach ładunki.) (b) Znajdź indukcyjność przypadającą na jednostkę długości tego kabla koncentrycznego. (*Wskazówka*: Wyobraź sobie prąd o natężeniu  $i$  płynący wzdułż centralnego przewodu i z powrotem wzdułż rury.)

Odp.: (a)  $2\pi\epsilon_0/\ln(b/a)$ . (b)  $(\mu_0/2\pi)\ln(b/a)$ .

6. Naszkicować, korzystając z prawa Gaussa, chwilowe ładunki występujące na przewodnikach kabla koncentrycznego z rys. 41-5 i pokazać, że ten rozkład ładunków jest odpowiednio związany z prądem przewodzenia pokazanymi na rys. 41-5c.

7. Skonstruowano wnękę rezonansową zamkającą oba końce kabla koncentrycznego z rys. 41-5 za pomocą metalowego denka. Wnęka mieści w sobie 3 połówki fali. Opisać rozkłady  $E$  i  $B$  w tej wnęce, przyjmując taki sam typ oscylacji jak pokazany na rys. 41-5. (*Uwaga*: Pamiętać, że  $E$  nie może mieć składowej stycznej do powierzchni przewodzącej, a  $B$  i  $E$  muszą różnić się w fazie o  $90^\circ$ .)

### Paragraf 41-6

8. (a) Jaka musi być długość fali w próżni, aby w czasie  $1,0 \mu\text{s}$  ( $= 10^{-6} \text{ s}$ ) energia przebyła  $100 \text{ m}$  falowodu o szerokości  $3 \text{ cm}$ ? (b) Jaka jest wówczas wartość prędkości fazowej?

9. Wykreślić dla prostokątnego falowodu o szerokości  $3 \text{ cm}$  prędkość fazową, prędkość grupową i długość fali w falowodzie jako funkcje długości fali w próżni dla podstawowego typu transmisji.

10. Kiedy długość fali w falowodzie z rys. 41-9 będzie dwa razy większa od długości fali w próżni?

11. (a) Jaką długość fali w falowodzie prostokątnym o szerokości  $6 \text{ cm}$  ma promieniowanie o długości fali  $10 \text{ cm}$  (w próżni)? Założyć podstawowy typ transmisji. (b) Jaka jest graniczna długość fali w tym falowodzie?

Odp.: (a)  $18 \text{ cm}$ . (b)  $12 \text{ cm}$ .

### Paragraf 41-7

12. (a) Z jakim opóźnieniem będziesz odbierał falę wysyłaną przez nadajnik radiowy oddalony o  $80 \text{ mil}$ ? (b) Z jakim, jeśli promieniowanie jest falą radiową wysyłaną przez Słońce? (c) Z jakim, jeśli jest ono wysyłane przez radio — źródło odległe o  $380$  lat świetlnych?

### Paragraf 41-8

13. W ujemnym kierunku osi Oy biegnie fala elektromagnetyczna. W pewnym punkcie i w określonej chwili czasu, pole elektryczne jest skierowane wzdłuż osi Oz, w kierunku dodatnim i ma wartość 100 V/m. Jaki jest kierunek i wielkość pola magnetycznego?

Odp.:  $3,3 \cdot 10^{-7}$  T, w ujemnym kierunku osi Ox.

14. Rozważmy falę elektromagnetyczną w próżni, dla której równania opisujące pole magnetyczne mają postać  $B_x = B \sin(ky + \omega t)$ ,  $B_y = B_z = 0$ . (a) Jaki jest kierunek rozchodzenia się tej fali? (b) Napisz równania opisujące pole elektryczne.

15. Jak zmienia się prąd przesunięcia w czasie i przestrzeni w elektromagnetycznej fali płaskiej?

16. (a) Wychodząc z równań (41-10) i (41-13) wykaż, że  $E(x, t)$  spełnia „równanie falowe”  $\partial^2 E / \partial t^2 = \mu_0 \epsilon_0 (\partial^2 E / \partial x^2)$ . (b) Jakie „równanie falowe” spełnia  $B(x, t)$ ?

17. Wykaż, że wyrażenia przedstawione poniżej w punktach od (a) do (d) spełniają równania (41-10) i (41-13). W każdym z nich A jest stałą. (a)  $E = Ac(x - ct)$ ,  $B = A(x - ct)$ . (b)  $E = Ac(x + ct)^{1/5}$ ,  $B = -A(x + ct)^{1/5}$ . (c)  $E = Ace^{(x-ct)}$ ,  $B = Ae^{(x-ct)}$ . (d)  $E = A \ln(x + ct)$ ,  $B = A \ln(x + ct)$ . (e) Uogólnij te przykłady tak, by wykazać, że dla dowolnej funkcji f zmiennej  $(x - ct)$  wyrażenia  $E = Af(x - ct)$ ,  $B = Af(x - ct)$  stanowią rozwiązanie. Jak jest z funkcjami zmiennej  $(x + ct)$ ?

18. Wykaż, że kierunki pól E i B na rys. 41-11 dają się pogodzić z kierunkiem rozchodzenia się promieniowania.

### Paragraf 41-9

19. Wykaż, że na różnych „klatkach” z rys. 41-12 kierunki pól E i B daje się pogodzić z kierunkiem rozchodzenia się promieniowania.

20. Natężenie światła słonecznego na zewnątrz atmosfery Ziemi wynosi  $2,0 \text{ cal}/(\text{cm}^2 \cdot \text{min})$ . Obliczyć wielkości  $E_m$  i  $B_m$  dla światła słonecznego przy założeniu, że jest ono falą typu przedstawionego na rys. 41-12.

21. Przez drut miedziany (średnica 2,54 mm, opór 1,00  $\Omega$  na 305 m) płynie prąd o natężeniu 25 A. Oblicz: (a) E, (b) B i (c) S dla punktu na powierzchni drutu.

Odp.: (a)  $E = 8,2 \cdot 10^{-2}$  V/m, kierunek równoległy do drutu, (b)  $B = 3,9 \cdot 10^{-3}$  T, stycznie do drutu i prostopadłe do jego osi, (c)  $S = 260 \text{ W/m}^2$ , radialnie, do wewnętrz.

22. Wykazać, że w dowolnym punkcie fali elektromagnetycznej, takiej jak na rys. 41-13, gęstość energii zawartej w polu elektrycznym równa się gęstości energii zawartej w polu magnetycznym.

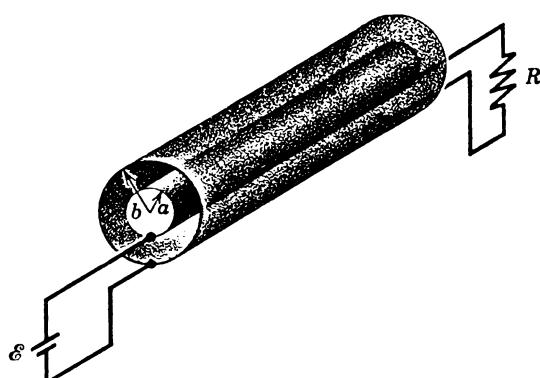
23. Płaska fala radiowa ma  $E_m = 10^{-4}$  V/m. Obliczyć (a)  $B_m$  i (b) natężenie fali mierzone za pomocą wektora S.

Odp.: (a)  $3,3 \cdot 10^{-13}$  T. (b)  $1,3 \cdot 10^{-11}$  W/m<sup>2</sup>.

24. Jeżeli kabel koncentryczny ma opór różny od zera, musi istnieć przepływ energii od pola do powierzchni przewodzących, w których wydziela się ciepło Joule'a. Jak wówczas należy zmodyfikować przebieg elektrycznych linii sił z rys. 41-5a? (Wskazówka: Wektor Poyntinga blisko powierzchni musi mieć składową skierowaną prostopadłe do tej powierzchni.)

25. Przeanalizować przepływ energii w falowodzie z rys. 41-9 posługując się wektorem Poyntinga.

26. Linię przesyłową pomiędzy baterią  $\mathcal{E}$  i opornikiem R stanowi kabel koncentryczny (promień



Rys. 41-18. Zadanie 26

wewnętrzny  $a$ , promień zewnętrzny  $b$ ), co ilustruje rys. 41-18. (a) Oblicz  $E$  i  $B$  dla  $a < r < b$ . (b) Oblicz wektor Poyntinga  $S$  dla  $a < r < b$ . (c) Wykaż, odpowiednio całkując wektor Poyntinga, że całkowita moc przepływająca przez poprzeczny przekrój w kształcie pierścienia o  $a < r < b$  wynosi  $\sigma^2/R$ . Czy to jest sensowne? (d) Wykaż, że  $S$  jest zawsze skierowane od baterii do opornika, niezależnie od sposobułączenia baterii.

27. Samolot leczący w odległości 10 km od nadajnika radiowego odbiera sygnał o natężeniu  $10 \mu\text{W}/\text{m}^2$ . Oblicz: (a) (średnie) pole elektryczne w samolocie, związane z tym sygnałem; (b) odpowiednie (średnie) pole magnetyczne; (c) całkowitą moc wysyłaną przez nadajnik, przy założeniu, że nadajnik promieniuje izotropowo, a powierzchnia Ziemi doskonale pochłania fale.

Odp.: (a)  $6,1 \cdot 10^{-2} \text{ W/m}$ . (b)  $2,1 \cdot 10^{-10} \text{ T}$ . (c)  $13 \text{ kW}$ .

28. Sześcian o boku  $a$  ma boki równolegle do osi układu współrzędnych prostokątnych. Jednorodne pole elektryczne  $E$  jest równolegle do osi  $y$ , a jednorodne pole magnetyczne  $B$  jest równolegle do osi  $x$ . Obliczyć: (a) szybkość, z jaką zgodnie z metodą wektora Poyntinga energia może przepływać przez każdą ze ścian sześcianu i (b) efektywną szybkość zmian energii zawartej w sześcianie.

29. Rozważmy możliwość istnienia fali stojącej

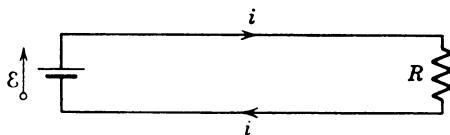
$$E = E_m (\sin \omega t) (\sin kx),$$

$$B = B_m (\cos \omega t) (\cos kx).$$

(a) Wykaż, że wyrażenia te spełniają równania (41-10) i (41-11), jeśli tylko  $E_m$  jest odpowiednio związane z  $B_m$ , a  $\omega$  odpowiednio związane z  $k$ . Jakie są te związki? (b) Znajdź (chwilowy) wektor Poyntinga  $S$ . (c) Wykaż, że wartość średnia strumienia mocy przez dowolne pole powierzchni jest równa零. (d) Opisz przepływ energii dla tego przypadku.

Odp.: (a) Równanie (41-11a) obowiązuje zarówno dla fal stojących jak i dla fal rozchodzących się w przestrzeni. (b)  $S = (E_m^2 / 4\mu_0 c) \sin 2\omega t \sin 2kx$ .

30. Na rysunku 41-19 przedstawiona jest duga linia transmisyjna o zerowym oporze, przenosząca moc od baterii do obciążenia omowego. Przez linię płynie stały prąd  $i$ , jak pokazano na rysunku. (a) Narysować pole elektryczne i magnetyczne wokół linii. (b) Pokazać, że, zgodnie z koncepcją wektora Poyntinga, energia przenosi się od baterii do oporu poprzez przestrzeń otaczającą linię, a nie przez samą linię. (Wskazówka: Każdy przewodnik w linii jest powierzchnią ekwipotencjalną, gdyż linia ma opór zero.)



Rys. 41-19. Zadanie 30

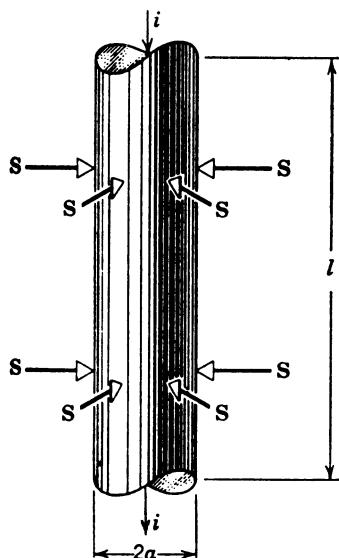
31. Na rysunku 41-20 przedstawiony jest opornik elektryczny o długości  $l$ , promieniu  $a$ , oporze właściwym  $\rho$ , przewodzący prąd o natężeniu  $i$ . (a) Pokazać, że wektor Poyntinga  $S$  na powierzchni opornika jest skierowany prostopadle do powierzchni w każdym z jej punktów, jak widać na rysunku. (b) Pokazać, że szybkość  $P$ , z jaką energia wpływa do opornika przez jego powierzchnię cylindryczną, obliczona przez całkowanie wektora Poyntinga po tej powierzchni, równa się szybkości wytwarzania ciepła Joule'a, czyli  $\int S dA = i^2 R$ , gdzie  $dA$  jest elementem powierzchni cylindrycznej. W ten sposób można pokazać, że zgodnie z koncepcją wektora Poyntinga energia wytwarzana w przewodniku jako ciepło Joule'a nie wpływa do niego przez przewody doprowadzające prąd, lecz przez przestrzeń wokół nich i opornika. (Wskazówka: Pole  $E$  jest równolegle do osi cylindra i ma kierunek prądu; pole  $B$  tworzy koncentryczne koła wokół cylindra o kierunku określonym regułą śrubę prawoskrętnej.)

32. Rysunek 41-21 przedstawia naładowany kondensator płaski. (a) Pokazać, że wektor Poyntinga  $S$  skierowany jest radialnie do objętości cylindra w każdym punkcie. (b) Pokazać, że szybkość, z jaką energia wpływa do tej objętości, obliczona przez całkowanie wektora Poyntinga po cylindrycznej powierzchni bocznej tej objętości, równa się szybkości, z jaką wzrasta gromadzona energia elektrostatyczna, czyli że

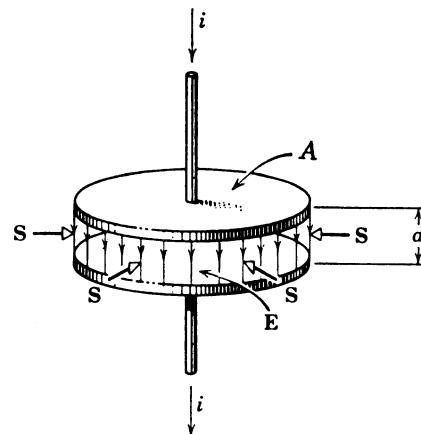
$$\int S dA = Ad \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \right),$$

gdzie  $Ad$  jest objętością kondensatora, a  $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$  — gęstością energii we wszystkich punktach tej objętości.

Analiza ta pokazuje, że zgodnie z koncepcją wektora Poyntinga energia gromadzona w kondensatorze nie wpływa do niego przez przewody doprowadzające prąd, lecz poprzez przestrzeń otaczającą przewody i płytki kondensatora. (Uwaga: W celu znalezienia  $S$  należy najpierw znaleźć pole  $B$ , wytworzone przez prąd przesunięcia w czasie procesu ładowania; patrz rys. 40-1. Zaniedbać ugień linii  $E$  na krawędziach płytek kondensatora.)



Rys. 41-20. Zadanie 31



Rys. 41-21. Zadanie 32

33. Długi nieprzewodzący pusty cylinder (promień  $R$ , długość  $l$ ) jest naładowany równomiernie ładunkiem o gęstości powierzchniowej  $\sigma$ . Przyłożony z zewnątrz moment siły powoduje, że cylinder obraca się wokół swojej osi symetrii ze stałym przyspieszeniem, tak że  $\omega(t) = \alpha t$ . (a) Znajdź  $B$  wewnętrz cylinder (traktując go jak solenoid). (b) Znajdź  $E$  na wewnętrznej powierzchni cylindra. (c) Znajdź  $S$  na wewnętrznej powierzchni cylindra. (d) Wykaż, że strumień  $S$  wnikający do wewnętrznej objętości cylindra jest równy  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\pi R^2 l}{2\mu_0} B^2 \right)$ .

Odp.: (a)  $B = \sigma R \omega \mu_0$ .    (b)  $E = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma R^2 \alpha$ .    (c)  $S = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma^2 R^3 \alpha^2 t$ .

# 42. Natura i rozchodzenie się światła

## 42-1. Światło a widmo elektromagnetyczne

W poniższym rozdziale omawiamy fakty prawdziwe dla całego widma elektromagnetycznego (patrz rys. 41-1) łącznie z obszarem widzialnym, który oczywiście jest częścią widma. W rozdziałach następnych skoncentrujemy się wyłącznie na zakresie widzialnym. Zakres ten jest ważny z tego względu, że dzięki procesowi genetycznemu przystosowania się do Słońca prawie wszyscy posiadamy dwa elektromagnetyczne receptory, nasze oczy, czułe na ten zakres, a ściślej mówiąc definiujące go. Zawsze musimy jednak pamiętać o tym, że cokolwiek mówimy w sensie podstawowym na temat widzialnej części widma, słusne jest również dla pozostałych części widma. Różnice związane są głównie ze sposobami wytwarzania i detekcji charakterystycznymi dla poszczególnych zakresów.

„Światło” jest tu określone jako promieniowanie mogące oddziaływać na ludzkie oko. Rysunek 42-1 przedstawiający wzgólną czułość oka wybranego umownie *standardowego obserwatora* na promieniowanie o różnych długościach fal pokazuje, że środek obszaru widzialnego przypada na około  $5,55 \cdot 10^{-7}$  m, czyli 555 nm. Światło o tej długości wywołuje wrażenie koloru żółtozielonego\*.

W optyce często używanymi jednostkami długości fal są: mikrometr ( $\mu\text{m}$ ), nanometr (nm) i angstrom ( $\text{\AA}$ ). Definiuje się je następująco:

$$1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m},$$

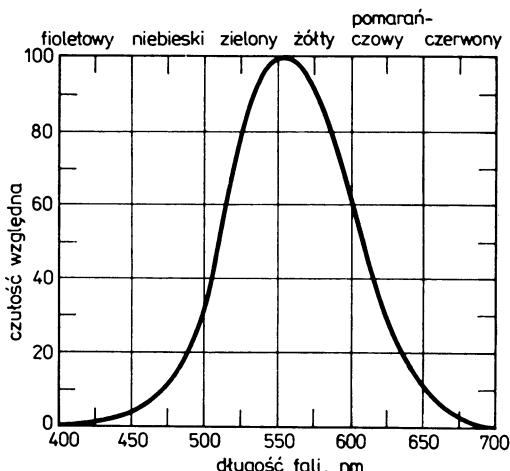
$$1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m},$$

$$1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}.$$

A więc środek obszaru widzialnego można określić jako  $0,555 \mu\text{m}$  lub  $555 \text{ nm}$ , lub  $5550 \text{ \AA}$ .

\* Interesujące omówienie zagadnień dotyczących percepji światła oraz rozróżnienia pomiędzy kolorem jako cechą charakterystyczną światła, a kolorem jako dostrzeganą właściwością przedmiotów, można znaleźć w artykułach: Edwin H. Land, The Retinex Theory of Color Vision, *Scientific American* December 1977 oraz M. H. Wilson, R. W. Brocklebank, Color and Perception: the Work of Edwin Land in the Light of Current Concepts, *Contemporary Physics*, December 1961.

Granice widma światła widzialnego nie są dobrze określone, ponieważ krzywa czułości oka dla dużych i małych długości fal zbliża się do osi w sposób asymptotyczny. Jeżeli przyjąć jako graniczne te długości fal, dla których czułość oka spada do 1% czułości maksymalnej, to wynoszą one około 430 nm i 690 nm, czyli różnią się o czynnik mniejszy niż 2. Oko może zaobserwować promieniowanie poza tymi granicami, jeżeli jest ono dostatecznie intensywne. W wielu fizycznych doświadczeniach zastępuje się ludzkie oko kliszą fotograficzną lub detektorem elektronicznym czułym na światło.



Rys. 42-1. Wzgledna czułość oka *standardowego obserwatora* dla różnych długości fal przy ustalonym poziomie oświetlenia

## 42-2. Energia i pęd

Za pomocą fal elektromagnetycznych energia jest przesyłana od Słońca na Ziemię lub od płonącego ognia do ręki umieszczonej w pobliżu. Transport energii za pomocą takich fal rozchodzących się w próżni został opisany w paragrafie 41-6 przy użyciu wektora Poyntinga **S**:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad (42-1)$$

gdzie **E** i **B** są chwilowymi wartościami wektorów pola elektrycznego i magnetycznego.

Mniej znany jest fakt, że fale elektromagnetyczne mogą przenosić również pęd. Innymi słowy możliwe jest wywieranie przez fale ciśnienia (*ciśnienie promieniowania\**) na obiekt przez nie oświetlany. Siły związane z tym ciśnieniem muszą być małe w porównaniu z codziennie spotykany siłami, gdyż zazwyczaj się ich nie zauważa. Nie odczuwamy, na przykład, pchnięcia do tyłu, gdy odsuwamy założony zaciemnionego pokoju pozwalając, by oświetliło nas Słońce. Efekty związane z ciśnieniem promieniowania są jednak istotne dla długości cyklu życiowego gwiazd z powodu niewiarygodnie wysokich temperatur ( $2 \cdot 10^7$  K dla naszego Słońca), jakie przypisujemy wnętrzom gwiazd.

Pierwszy pomiar ciśnienia promieniowania został wykonany w 1901–1903 r. przez Nicholasa i Hull'a w USA oraz przez Liebiediewa w Rosji, po upływie około 30 lat od chwili teoretycznego wykrycia możliwości występowania takich efektów przez Maxwell'a.

\* Patrz: G. E. Henry, *Radiation Pressure*, *Scientific American*, June 1937; Arthur Ashkin, *The pressure of Laser Light*, *Scientific American*, February 1972.

Niech równoległa wiązka światła pada na obiekt przez czas  $t$ , a padające światło niech będzie całkowicie absorbowane przez ten obiekt. Jeżeli w tym czasie została zaabsorbowana energia  $U$ , to pęd  $p$  przekazany temu obiekowi wyniesie zgodnie z przewidywaniami Maxwella

$$p = \frac{U}{c} \quad (\text{całkowita absorpcja}), \quad (42-2a)$$

gdzie  $c$  jest prędkością światła. Kierunek  $\mathbf{p}$  pokrywa się z kierunkiem padającej wiązki. Jeżeli światło o energii  $U$  odbija się całkowicie, to pęd będzie dwukrotnie większy:

$$p = \frac{2U}{c} \quad (\text{całkowite odbicie}). \quad (42-2b)$$

W ten sam sposób dwukrotnie większy pęd zostaje przekazany obiekowi przy odbiciu doskonale elastycznej piłki tenisowej, w porównaniu z uderzeniem piłki doskonale nie-elastycznej, np. bryłki miękkiego kitu, o tej samej masie i prędkości. Jeżeli światło o energii  $U$  częściowo się odbije, a częściowo zostanie pochłonięte, to pęd będzie zawarty między  $U/c$  a  $2U/c$ .

**Przykład 1.** Równoległa wiązka światła, której strumień energii wynosi  $10 \text{ W/cm}^2$ , pada przez okres 1 h na doskonale odbijającą, płaskie zwierciadło o powierzchni  $1 \text{ cm}^2$ . (a) Jaki pęd zostanie przekazany zwierciadłu w tym czasie i (b) jaką siłę działa na zwierciadło?

(a) Energia światła odbitego od zwierciadła wynosi

$$U = (10 \text{ W/cm}^2) 1 \cdot \text{cm}^2 \cdot 3600 \text{ s} = 3,6 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

Pęd przekazany w ciągu 1 h naświetlania wynosi

$$p = \frac{2U}{c} = \frac{2 \cdot 3,6 \cdot 10^4 \text{ J}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ kg m/s}.$$

(b) Z drugiej zasady Newtona średnia siła działająca na zwierciadło równa się średniej prędkości, z jaką przekazywany jest pęd

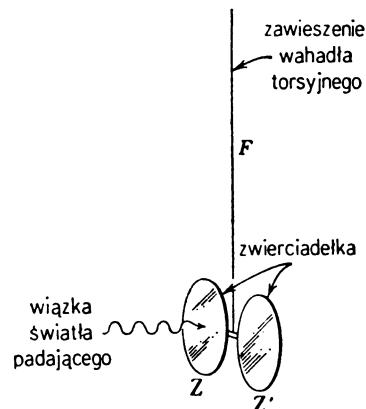
$$F = \frac{p}{t} = \frac{2,4 \cdot 10^{-4} \text{ kg m/s}}{3600 \text{ s}} = 6,7 \cdot 10^{-8} \text{ N}.$$

Siła ta jest jak widać, niewielka.

Nichols i Hull w 1903 r. zmierzyli ciśnienie promieniowania i sprawdzili równanie (42-2) przy użyciu metody wahadła torsyjnego. Kierowali oni światło na zwierciadło  $Z$  (rys. 42-2); ciśnienie promieniowania powodowało skręcenie zwierciadła o mierzony kąt  $\theta$  skrącając nić torsyjną  $F$ . Przy założeniu, że waga skręceń jest odpowiednio wyskalowana, doświadczenie powinno dać liczbową wielkość tego ciśnienia. Nichols i Hull mierzyli intensywność wiązki światła kierując ją na poczernioną tarczę metalową o znanej zdolności absorpcyjnej i mierząc wzrost temperatury tej tarczy. Na przykład, w jednym z pomiarów stwierdzono ciśnienie promieniowania równe  $7,01 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}^2$ , podczas gdy według równania (42-2) ciśnienie promieniowania dla tej wiązki powinno wynosić  $7,05 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}^2$ , co jest w doskonalej zgodności z doświadczeniem. Zakładając, że powierzchnia zwierciadła wynosiła  $1 \text{ cm}^2$  otrzymujemy, że na zwierciadło działa siła równa zaledwie  $7 \cdot 10^{-10} \text{ N}$ , a więc około 100 razy mniejsza od siły obliczonej w przykładzie 1.

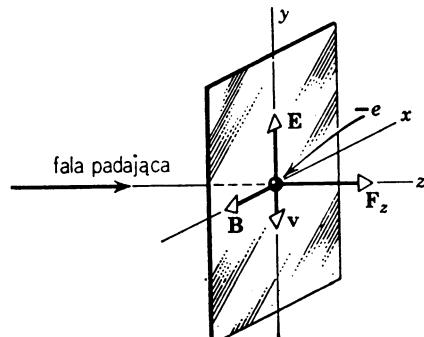
Sukces doświadczenia Nicholsa i Hulla był w znacznej mierze wynikiem uwagi, jaką skierowali oni na wyeliminowanie fałszywego efektu odchylenia się zwierciadła na skutek zmian w rozkładzie cząsteczek gazu otaczającego zwierciadło. Te zmiany występowały

na skutek niewielkiego wzrostu temperatury zwierciadła wywołanego absorpcją energii z padającej wiązki świetlnej. Ten „efekt radiometryczny” wykorzystany został między innymi do budowy specjalnych zabawek. W doskonałej próżni takie fakty nie powinny występować, lecz w najlepszych próżniach dostępnych w 1903 r. występowały i zostały specjalnie uwzględnione przy obliczeniach wyników doświadczenia.



Rys. 42-2. Przedstawiono tu doświadczenie Nicholса i Hullа przeprowadzone dla zmierzenia ciśnienia promieniowania

W celu teoretycznego uzasadnienia konieczności przekazywania pędu na podstawie równań Maxwella w pewnym szczególnym przypadku założymy, że płaska fala elektromagnetyczna poruszająca się w kierunku osi  $z$  pada na dużą cienką płytę wykonaną z materiału o dużym oporze właściwym (rys. 42-3). Mała część padającej energii będzie absorbowana w płycie, lecz większość przejdzie przez nią, jeżeli płyta jest dostatecznie cienka\*.



Rys. 42-3. Płaska fala świetlna padająca na cienką płytę o dużym oporze właściwym. Pokazano chwilowe wartości wektorów  $E$  i  $B$ , prędkość elektronu  $v$  oraz siłę promieniowania  $F$

$E$  i  $B$  w fali padającej, w miejscu gdzie znajduje się płyta, zależą od czasu następująco:

$$E = E_0 \sin \omega t, \quad (42-3)$$

$$B = B_0 \sin \omega t, \quad (42-4)$$

gdzie  $E$  jest równolegle do osi  $\pm y$ , a  $B$  – równolegle do osi  $\pm z$ .

W paragrafie 31-4 widzieliśmy, że działanie stałej siły elektrycznej ( $= -eE$ ) na elektron przewodniczącego powoduje jego poruszanie się ze stałą prędkością  $v_0$ . Elektron zachowuje się tak, jak gdyby był umieszczony w lepkiej cieczy, a siła pola elektrycznego działająca nań była równoważona przez siłę „lepkości”, którą

\* Część energii padającej zostanie również odbita, jednakże fala odbita ma tak małe natężenie, że w następnych wyprowadzeniach możemy ją zaniedbać.

można przyjąć za proporcjonalną do prędkości elektronu. A więc w przypadku stałego pola  $E$  po osiągnięciu stanu równowagi mamy

$$eE = bv_u, \quad (42-5)$$

gdzie  $b$  jest oporowym współczynnikiem tłumienia. Stąd prędkość elektronu w stanie równowagi, po opuszczeniu wskaźnika  $u$ , wynosi

$$v = \frac{eE}{b}. \quad (42-6)$$

Jeżeli przyłożone pole elektryczne zmienia się w czasie i jeżeli te zmiany są dość wolne, to prędkość elektronu może w ciągły sposób dostosowywać się do zmieniającej się wielkości  $E$ , tak że jego prędkość ciągle jest dana przez wielkość w stanie równowagi (równ. (42-6)). To dostosowywanie się następuje tym szybciej, im bardziej lepki jest ośrodek, podobnie jak w przypadku kamienia, który opadając w powietrzu osiąga stałą prędkość równowagi dosyć wolno, a opadając w lepkim oleju osiągnie ją bardzo szybko. Zakładamy, że płyta z rys. 42-3 jest tak „lepka”, czyli że jej opór właściwy jest tak duży, że równanie (42-6) pozostaje słuszne nawet dla szybkich oscylacji  $E$  w padającej wiązce światła.

Jeżeli elektron oscyluje równolegle do osi  $y$ , to pojawia się druga siła wywoływana składową magnetyczną fali. Ta siła  $F_z (= -ev \times B)$  działa w kierunku osi  $z$ , gdyż jest prostopadła do płaszczyzny utworzonej przez  $v$  i  $B$ , czyli płaszczyzny  $xy$ . Chwilowa wartość  $F_z$  wynosi

$$F_z = evB = \frac{e^2EB}{b}. \quad (42-7)$$

$F_z$  jest zawsze skierowana w dodatnim kierunku osi  $z$ , gdyż  $v$  i  $B$  zmieniają równocześnie swoje kierunki; siła ta jest właśnie tym mechanizmem, dzięki któremu na płytę z rys. 42-3 działa ciśnienie promieniowania.

Zgodnie z drugą zasadą Newtona  $F_z$  jest równe szybkości  $dp_e/dt$ , z jaką padająca fala przekazuje pęd każdemu elektronowi płyty, czyli

$$\frac{dp_e}{dt} = \frac{e^2EB}{b}. \quad (42-8)$$

Pęd jest przekazywany z tą szybkością każdemu elektronowi płyty, a więc i samej płycie. Pozostaje tylko powiązać przekazywanie pędu płycie z absorbowaniem przez nią energii.

Elektryczna składowa pola padającej fali wykonuje pracę nad każdym oscylującym elektronem; w jednostce czasu (patrz równ. (42-6)) praca ta wynosi

$$\frac{dU_e}{dt} = F_z v = eE \frac{eE}{b} = \frac{e^2E^2}{b}.$$

Należy zauważyć, że siła magnetyczna  $F_z$  zawsze skierowana prostopadle do prędkości  $v$  nie wpływa na wielkość pracy pola nad oscylującym elektronem. Z równania (41-11b) wynika, że dla fali płaskiej w próżni  $B$  i  $E$  są związane następująco:

$$E = Bc.$$

Podstawienie tego wyrażenia zamiast jednej z wielkości  $E$  prowadzi do

$$\frac{dU_e}{dt} = \frac{e^2EBc}{b}. \quad (42-9)$$

Równanie to opisuje szybkość absorpcji energii z fali padającej przez jeden elektron znajdujący się w płycie. Porównując zależności (42-8) i (42-9) widzimy, że

$$\frac{dp_e}{dt} = \frac{1}{c} \frac{dU_e}{dt},$$

a całkując to, dostajemy

$$\int_0^t \frac{dp_e}{dt} dt = \frac{1}{c} \int_0^t \frac{dU_e}{dt} dt,$$

czyli

$$p_e = \frac{U_e}{c}, \quad (42-10)$$

gdzie  $p_e$  jest pędem przekazanym pojedynczemu elektronowi w określonym czasie  $t$ , a  $U_e$  — energią zabsorbowaną przez ten elektron w tym samym czasie. Mnożąc każdą stronę przez liczbę swobodnych elektronów w płyce otrzymujemy równanie (42-2a).

Mimo że związek ten (równ. (42-10)) wyprowadziliśmy dla szczególnego rodzaju absorbenta, to jednak żadna z wielkości charakteryzujących absorbent — np. oporowy współczynnik tłumienia, nie pozostała w końcowym wyrażeniu. Jest to wynik prawidłowy, gdyż równanie (42-10) wyraża ogólną własność promieniowania absorbowanego przez dowolny materiał.

### 42-3. Prędkość światła\*

Światło porusza się tak szybko, że w naszych codziennych doświadczeniach nie ma nic, co by sugerowało, że jego prędkość jest skończona. Trzeba wyjątkowej intuicji, by zapytać: „Jak szybko porusza się światło?” Galileusz zadał sobie to pytanie i próbował znaleźć na nie odpowiedź za pomocą doświadczenia. Opublikowana przez niego w 1638 r. książka pt. *Two New Sciences* została napisana w formie rozmowy między trzema fikcyjnymi osobami zwymi: Salviati, Sagredo i Simplicio. Oto część tego, co mówią oni o prędkości światła.

*Simplicio*: „Codzienne doświadczenie wykazuje, że rozchodzenie się światła jest natychmiastowe; dlatego gdy widzimy wybuch pocisku artyleryjskiego z dużej odległości, wtedy blysk osiąga nasze oko natychmiast; a dźwięk dochodzi do ucha dopiero po dającym się zauważycie upływie czasu”.

*Sagredo*: „Tak Simplicio, lecz jedną rzeczą, którą potrafię wywnioskować z podobnych zjawisk doświadczalnych jest to, że dźwięk dochodzący do naszego ucha porusza się wolniej od światła; nie informują one nas czy rozchodzenie się światła jest natychmiastowe, czy aczkolwiek niezwykle szybkie, to jednak trwa pewien czas...”.

Sagredo, który oczywiście jest samym Galileuszem, opisuje następnie możliwą do urzeczywistnienia (aktualnie zrealizowaną) metodę pomiaru prędkości światła. On i jego asystent stanęli w nocy naprzeciw siebie w pewnej odległości. Każdy miał ze sobą latarnię, którą można było na przemian zasłaniać i odsłaniać. Galileusz rozpoczął doświadczenie przez odsłonięcie swej latarni. W chwili dojścia światła do asystenta ten odsłonił swą latarnię, i światło jej zobaczył z kolei Galileusz. Próbował on zmierzyć czas między chwilą odsłonięcia swej latarni a chwilą zobaczenia światła latarni asystenta. Wiemy obecnie, że dla odległości 1 mili (1,6 km) czas przejścia światła tam i z powrotem wynosi tylko 11  $\mu$ s, jest więc mniejszy od czasu reakcji człowieka. Dlatego metoda zawiodła.

Aby zmierzyć bezpośrednio dużą prędkość, musimy albo mierzyć małe przedziały czasu, albo wykorzystywać duże odległości. To sugeruje, że sposób na określenie doświadczalne prędkości światła daje astronomia, mająca do czynienia z wielkimi odległościami. Okazało się to prawdą. Najprościej byłoby mierzyć czas przebiegu światła ze Słońca na Ziemię. Nie ma jednak sposobu określenia, kiedy światło dochodzące do nas opuściło Słońce, musimy więc użyć bardziej subtelnych metod astronomicznych.

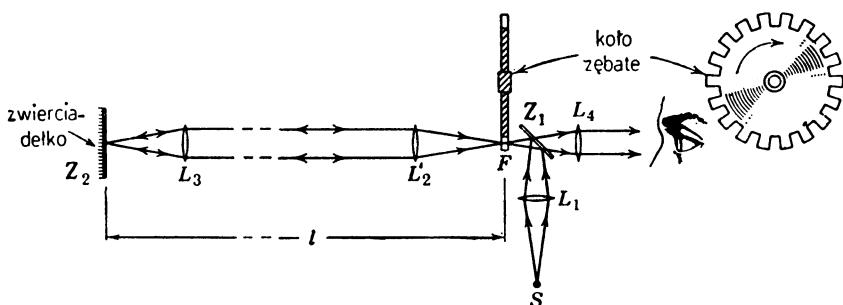
Zauważmy natomiast, że impulsy mikrofalowe bez istotnych zakłóceń odbijają się od Księżyca; daje to dla pomiarów czasu odległość równą  $7,68 \cdot 10^8$  m (tam i z powrotem). Prędkość światła (i mikrofali) jest obecnie tak dobrze znana, że korzystamy z niej przy dokładnym wyznaczaniu odległości do Księżyca. Sygnały mikrofalowe zostały również odbite od Wenus.

W 1675 r. duński astronom, Ole Roemer, pracujący w Paryżu, dokonał pewnych obserwacji księżyćów Jowisza (patrz zadanie 20), z których można było wywnioskować, że prędkość światła wynosi około

\* Patrz: J. H. Rush, *The Speed of Light, Scientific American*, August 1955.

$2 \cdot 10^8$  m/s. Około 50 lat później angielski astronom James Bradley dokonał innych obserwacji astronomicznych, na podstawie których obliczył, że prędkość światła równa jest  $3,0 \cdot 10^8$  m/s.

W 1849 r. francuski fizyk Hippolyte Louis Fizeau (1819–1896) jako pierwszy zmierzył prędkość światła metodami nieastronomicznymi, otrzymując wielkość  $3,13 \cdot 10^8$  m/s. Na rysunku 42-4 pokazana jest aparatura używana przez Fizeau. Nie zwracajmy na razie uwagi na koło zębate. Światło ze źródła  $S$  skupione przez soczewkę  $L_1$  odbija się od zwierciadła  $Z_1$  i tworzy w punkcie  $F$  obraz źródła. Zwierciadło  $Z_1$  jest zwierciadłem półprzezroczystym; jego warstwa odbijająca jest tak cienka, że jedynie połowa światła padającego odbija się, a pozostała część przechodzi przez zwierciadło.



Rys. 42-4. Aparatura Fizeau do pomiarów prędkości światła

Światło z obrazu w punkcie  $F$  pada na soczewkę  $L_2$  i wychodzi jako wiązka równoległa; po przejściu przez soczewkę  $L_3$  odbija się z powrotem od zwierciadła  $Z_2$ . W doświadczeniu Fizeau odległość  $l$  między  $Z_2$  i  $F$  wynosiła 8630 m. Światło padające ponownie na zwierciadło  $Z_1$  częściowo przejdzie przez nie i wpadnie do oka obserwatora poprzez soczewkę  $L_4$ .

Obserwator zobaczy obraz źródła utworzony przez światło, które przebiegło odległość  $2l$  między kołem a zwierciadłem  $Z_2$  i wróciło. Aby określić czas przelotu wiązki świetlnej, trzeba zaznaczyć na niej jakieś punkty. Osiąga się to przez „pocięcie” (przerywanie) wiązki szybko obracającym się kołem zębatym. Założymy, że w czasie przelotu wiązki światła tam i z powrotem, równym  $2l/c$ , koło obróciło się tak, by światło z danego „impulsu” wiązki wróciło do koła w momencie, gdy punkt  $F$  został zasłonięty przez ząb koła. Światło padnie wówczas na powierzchnię koła i nie trafi do oka obserwatora.

Jeżeli prędkość obrotu koła jest odpowiednio dobrana, to obserwator nie zobaczy żadnego „impulsu” z wiązki, gdyż każdy zostanie zasłonięty przez któryś ząb. Obserwator może zmierzyć prędkość  $c$  przez zwiększenie prędkości kątowej  $\omega$  koła od zera, do wartości, przy której zniknie obraz źródła  $S$ . Niech  $\theta$  będzie odległością kątową między środkiem przerwy a środkiem zęba. Czas potrzebny na to, by koło obróciło się o kąt  $\theta$ , ma być równy czasowi przelotu  $2l/c$ . W ten sposób otrzymujemy

$$\frac{\theta}{\omega} = \frac{2l}{c}, \quad \text{czyli} \quad c = \frac{2\omega l}{\theta}. \quad (42-11)$$

Technika „przerywania wiązki”, odpowiednio zmodyfikowana, jest obecnie używana do pomiarów prędkości neutronów i innych cząstek.

**Przykład 2.** Koło użyte przez Fizeau miało 720 zębów. Jaka jest najmniejsza prędkość kątowa, przy której zniknie obraz źródła?

Kąt  $\theta$  wynosi  $1/1440$  obr, a więc z równania (42-11) otrzymujemy

$$\omega = \frac{c\theta}{2l} = \frac{(3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s})(1/1440 \text{ obr})}{2 \cdot 8630 \text{ m}} = 12,1 \text{ obr/s.}$$

Francuski fizyk Foucault (1819–1868) znacznie poprawił metodę Fizeau zastępując koło zebate obracającym się zwierciadłem. Amerykański fizyk\* Albert A. Michelson (1852–1931) przeprowadził całą serię pomiarów  $c$  używając tej metody przedłużając jej stosowanie o ponad 50 lat.

Z szerszego punktu widzenia, na prędkość światła musimy patrzeć jako na prędkość promieniowania elektromagnetycznego w ogóle. To, że w próżni prędkość fal odpowiadająca każdej części widma elektromagnetycznego ma tę samą wielkość  $c$ , jest istotnym potwierdzeniem teorii elektromagnetyzmu Maxwella. W tablicy 42-1 pokazano szereg pomiarów prędkości promieniowania elektromagnetycznego wykonanych od czasów Galileusza. Jest ona pomnikiem ludzkiej wytrwałości i pomysłowości. Zauważmy, że błędy pomiarów umieszczone w ostatniej kolumnie maleją z czasem. Należy również podkreślić międzynarodowy charakter tych wysiłków i różnorodność metod.

Zadanie otrzymania dla jakiejś wielkości fizycznej, takiej jak  $c$ , jednej „najlepszej” wartości, na podstawie wielu niezależnych pomiarów, jest zwykle rzeczą trudną, ponieważ wymaga to starannej oceny każdego pomiaru i złożonego procesu uśredniania, przy czym bierze się pod uwagę inne wielkości fizyczne, z którymi rozważana wielkość może być związana. W przypadku  $c$ , jednakże, sprawa jest prosta. W ostatnich (z roku 1973) tablicach „najlepszych” wartości stałych fizycznych stwierdza się: „Wszystkie dotychczasowe pomiary  $c$  są przestarzałe w stosunku do pomiaru wykonanego przez Eversona i współpracowników”; pomiar ten jest ostatnią pozycją w tablicy 42-1.

Członkowie tego zespołu wykonali (w Narodowym Biurze Wzorców, w Boulder, Colorado) pomiar częstotliwości  $v$  promieniowania emitowanego przez laser helowo-neonowy, porównując ją bezpośrednio z częstotliwością drgań zegara cezowego używanego do zdefiniowania sekundy (patrz dodatek A). Następnie, korzystając z bardzo dokładnych pomiarów długości fali tego promieniowania, wykonanych przez kilka innych zespołów, obliczyli oni  $c$  z zależności  $c = \lambda v$  otrzymując wartość przedstawioną w Dodatku B, a mianowicie

$$c = (299\,792,4574 \pm 0,0012) \text{ km/s.}$$

Największym źródłem błędu w tym pomiarze jest niepewność (potrzebnej do znalezienia długości fali) definicji metra opartej na promieniowaniu atomu kryptonu 86 (patrz dodatek A).

Obecnie jest jasne, że najlepsze pomiary  $c$  otrzymuje się metodami *innymi* niż pomiar czasu potrzebnego na przebycie przez światło określonej odległości, jak to uczynił Fizeau w roku 1849 oraz Michelson i współpracownicy w roku 1932 (patrz tablica 42-1). Najdokładniejsze wyniki daje pomiar częstotliwości oraz długości fali światła i wyliczenie  $c$  ze wzoru  $c = \lambda v$ . Jest to prawda nie tylko dla fal rozchodzących się w przestrzeni, jak w przypadku opisanych powyżej pomiarów Eversona i współpracowników, ale również dla fal stojących, czego przykład podamy poniżej. Eksperymenty z falami stojącymi przypomną nam, że w próżni  $c$  ma taką samą wartość dla całego widma elektromagnetycznego, a nie tylko dla promieniowania wiązalnego.

Poniżej opisujemy „metodę wnęki mikrofalowej” użytą przez Essena w Anglii oraz Bola i Hansena w USA. Wykorzystuje ona stojące fale elektromagnetyczne zamknięte we wnęce, a nie fale biegające w próżni.

Odcinek falowodu, takiego jak na rys. 41-9, można przeobrazić we wnękę rezonansową zamkającą

\* Polskiego pochodzenia (przyp. red.).

Tablica 42-1. Prędkość promieniowania elektromagnetycznego w próżni (wybrane pomiary)\*

Data	Eksperymentator	Kraj	Metoda	Prędkość, km/s	Błąd, km/s
1600(?)	Galileusz	Włochy	latarnie i zasłony	„Jeśli nie nieskończona, to niezwykle duża”	
1675	Roemer	Francja	księżyce Jowisza	200 000	
1729	Bradley	Anglia	odchylenia siatki gwiazd	304 000	
1849	Fizeau	Francja	koło zębate	313 300	
1862	Foucault	Francja	obracające się zwierciadło	298 000	500
1876	Cornu	Francja	koło zębate	299 990	200
1880	Michelson	USA	obracające się zwierciadło	299 910	50
1883	Newcomb	Anglia	obracające się zwierciadło	299 860	30
1906	Rosa i Dorsey	USA	teoria elektromagnetyczna	299 781	10
1923	Mercier	Francja	fale stojące w przewodnikach	299 782	15
1926	Michelson	USA	obracające się zwierciadło	299 796	4
1928	Karolus i Mittelstaedt	Niemcy	komórka Kerra	299 778	10
1932	Michelson, Pease i Pearson	USA	obracające się zwierciadło	299 774	11
1941	Anderson	USA	komórka Kerra	299 776	14
1950	Bergstrand	Szwecja	geodymetr	299 792,7	0,25
1950	Essen	Anglia	wnęka mikrofalowa	299 792,5	3
1950	Bol i Hansen	USA	wnęka mikrofalowa	299 789,3	0,4
1951	Aslakson	USA	radar Shorana	299 794,2	1,9
1952	Rank, Ruth i Van der Sluis	USA	widma cząsteczkowe	299 776	7
1952	Froome	Anglia	interferometr mikrofalowy	299 792,6	0,7
1954	Florman	USA	interferometr mikrofalowy	299 795,1	1,9
1957	Bergstrand	Szwecja	geodymetr	299 792,85	0,16
1958	Froome	Anglia	interferometr mikrofalowy	299 792,50	0,10
1965	Kolibayew	ZSRR	geodymetr	299 792,6	0,06
1967	Grosse	RFN	geodymetr	299 792,5	0,05
1973	Evenson, Wells, Peterson, Danielson i Day	USA	technika laserowa	299 792,4574	0,0012

\* Patrz: Joseph F. Mulligan, Some Recent Determinations of the Velocity of Light, III, *American Journal of Physics*, October 1976. Opisane są tam pomiary wykonane w roku 1974 przez Blayneya i innych (National Physical Laboratory) w Anglii. Pomiary te bardzo dobrze zgadzają się z wynikami Evensoną (1973).

go za pomocą dwóch płyt metalowych (rys. 42-5). Rozkład drgań we wnęce jest ściśle związany z rozkładem w falowodzie i charakteryzuje się tą samą falowodową długością fali  $\lambda_g$ , związaną z długością wnęki  $l$  za pomocą zależności

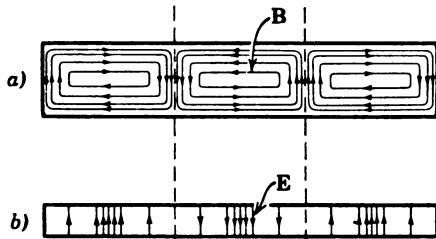
$$\lambda_g = \frac{2l}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (42-12)$$

identycznej ze wzorem obowiązującym dla fal akustycznych w zamkniętych rurach;  $n$  (= 3 na rys. 42-5) daje liczbę połówek fali zawartych we wnęce.

Metoda polega na zmierzeniu  $\lambda_g$  w takiej wnęce, po uzyskaniu rezonansu i następnie obliczeniu długości fali  $\lambda$  w próżni przy użyciu równania (41-4)

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}}. \quad (42-13)$$

Obliczona na podstawie zmierzonych częstotliwości rezonansowej prędkość  $c$  wynosi  $c = \lambda\nu$ .



Rys. 42-5. Wnęka rezonansowa zrobiona z odcinka falowodu; porównać z rys. 41-9. Dla uproszczenia pominięto linie E na rysunku a i linie B na rysunku b

**Przykład 3.** W roku 1950 Essen, z Narodowego Laboratorium Fizyki w Anglii, dokonał pomiaru prędkości fali elektromagnetycznej metodą wnęki rezonansowej; patrz tablica 42-1. Jego wnęka miała kształt cylindryczny, a nie prostokątny; można pokazać, że dla rozkładu drgań uzyskanego przez niego czynnik geometryczny  $2a$  w równaniu (42-13) należy zastąpić przez  $1,64062 R$ , gdzie  $R$  jest promieniem falowodu. Promień wnęki wynosił  $3,25876$  cm, długość wnęki wynosiła  $15,64574$  cm, a rezonans uzyskano przy częstotliwości  $9,498 300 \cdot 10^9$  Hz. Określono, że w warunkach rezonansu we wnęce znajdowało się 8 połówek fali. Ile wynosiła prędkość  $c$ ?

Z równania (42-12) otrzymujemy w przybliżeniu

$$\lambda_g = \frac{2l}{n} = \frac{2 \cdot 15,6 \text{ cm}}{8} = 3,90 \text{ cm}.$$

Podstawiając to do równania (42-13) zmodyfikowanego dla przypadku falowodu kołowego otrzymujemy

$$3,90 \text{ cm} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - [\lambda/(1,64 \cdot 3,26 \text{ cm})]^2}}.$$

Rozwiązujejąc to równanie otrzymujemy  $\lambda = 3,15$  cm. I ostatecznie znajdujemy prędkość

$$c = \lambda\nu = 3,15 \cdot 9,50 \cdot 10^9 \text{ Hz} = 2,99 \cdot 10^8 \text{ m/s.}$$

W praktyce Essen przeanalizował swoje wyniki w sposób bardziej okreźny. Jego końcowy wynik oparty na wielu pomiarach z różnymi wnękami i przeprowadzony z większą dokładnością niż w powyższym przykładzie, dał wielkość  $c$  równą  $2\ 997\ 925$  km/s z błędem równym  $3,0$  km/s.

#### 42-4. Poruszające się źródła i obserwatorzy\*

Gdy mówimy, że prędkość dźwięku w suchym powietrzu przy  $0^\circ\text{C}$  wynosi  $331,7$  m/s, określamy przy tym pewien układ odniesienia związany z masą powietrza. Gdy mówimy, że prędkość światła w próżni wynosi  $2,997\ 92458 \cdot 10^8$  m/s, to jaki układ odniesienia jest z tym związany? Nie może to być ośrodek, w którym rozchodzi się fala świetlna, gdyż w przeciwnieństwie do dźwięku, nie wymaga ona żadnego ośrodka.

Koncepcja fali mogącej rozchodzić się bez ośrodka była nie do przyjęcia dla fizyków dziewiętnastego wieku, zasugerowanych fałszywą analogią między falami świetlnymi a falami dźwiękowymi lub innymi czysto mechanicznymi zaburzeniami. Fizycy ci postulowali

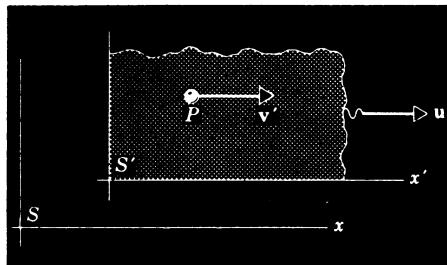
\* Dalsze informacje dotyczące materiału tego oraz następnego paragrafu zawarte są w uzupełnieniu V.

istnienie *eteru*, który określali jako substancję wypełniającą całą przestrzeń i służącą jako ośrodek rozchodzenia się światła. Aby wy tłumaczyć fakt, że nie można go było zaobserwować za pomocą żadnego ze znanych sposobów, przyjmowali oni, że ma on zaniedbywalnie małą gęstość.

Koncepcja eteru, aczkolwiek użyteczna przez wiele lat, nie wytrzymała prób weryfikacji doświadczalnej. W szczególności najstarsze próby pomiaru prędkości Ziemi względem eteru zawsze dawały wynik zerowy\*, a fizycy nie chcieli wierzyć, że Ziemia stale spoczywa względem eteru, podczas gdy wszystkie inne ciała we Wszechświecie poruszają się względem niego. Inne hipotezy o naturze rozchodzenia się światła również okazały się niezadowalające z tych czy innych powodów.

W 1905 roku Einstein rozwiązał trudności związane z wyjaśnieniem problemu rozchodzenia się światła wysuwając śmiałą postulat: jeżeli paru obserwatorów porusza się (ze stałą prędkością) względem siebie i względem źródła światła i jeżeli każdy obserwator mierzy prędkość światła wychodzącego z tego źródła, to *powinni oni otrzymać ten sam wynik*. Jest to podstawowe założenie szczególnej teorii względności Einsteina. Usuwa ono potrzebę istnienia eteru przez stwierdzenie, że prędkość światła jest taka sama we wszystkich układach odniesienia; żaden nie jest wyróżniony jako podstawowy. Teoria względności opracowana na podstawie tego postulatu była poddana wielu próbom doświadczalnym, w których zgodność z przewidywaniami teorii zawsze się potwierdzała. Ta zgodność znana od pół wieku stanowi silne poparcie dla podstawowego postulatu Einsteina związanego z rozchodzeniem się światła.

Rysunek 42-6 ilustruje ten podstawowy problem związany z rozchodzeniem się światła. Źródło światła, nieruchome w układzie odniesienia  $S'$ , emitem impuls świetlny  $P$ , którego prędkość  $v'$  zostaje zmierzona przez obserwatora nieruchomego względem tego układu.



Rys. 42-6. Obserwatorzy  $S$  i  $S'$  poruszający się względem siebie obserwują impuls świetlny  $P$ . Impuls jest emitowany ze źródła, które nie zostało pokazane, będącego w spoczynku względem układu odniesienia  $S'$

Z punktu widzenia obserwatora w układzie odniesienia  $S$ , układ  $S'$  i związany z nim obserwator poruszają się w dodatnim kierunku osi  $x$  z prędkością  $u$ . Pytanie: Jaką prędkość  $v$  impulsu świetlnego  $P$  powinien zmierzyć obserwator  $S$ ? Hipoteza Einsteina głosi, że *każdy* obserwator będzie mierzyć taką samą prędkość  $c$ , czyli że

$$v = v' + u.$$

Hipoteza ta przeciwstawia się klasycznemu prawu dodawania prędkości (patrz paragraf 4-6), które głosi, że

$$v = v' + u. \quad (42-14)$$

\* Patrz paragraf 45-7, w którym opisano przełomowy eksperyment Michelsona i Morleya.

Prawo to, które jest tak dobrze znane, że wydaje się (niesłusznie) intuicyjnie oczywiste, jest w rzeczywistości oparte na obserwacjach dużych poruszających się obiektów w świecie bezpośrednio nas otaczającym. Nawet najszybsze z nich — na przykład satelity Ziemi — poruszają się z prędkością bardzo małą w porównaniu z prędkością światła. Słuszność równania (42-14) została doświadczalnie potwierdzona tylko dla niewielkiego obszaru prędkości, w którym  $v' \ll c$  i  $u \ll c$ . Jeżeli zakładamy, że równanie (42-14) obowiązuje dla wszystkich ciał niezależnie od ich prędkości, jest to daleka ekstrapolacja. Według teorii względności Einsteina założenie to nie jest prawdziwe, a równanie (42-14) jest granicznym przypadkiem bardziej ogólnej zależności obowiązującej zarówno dla impulsów świetlnych, jak i dla ciał materialnych przy każdej prędkości, mianowicie

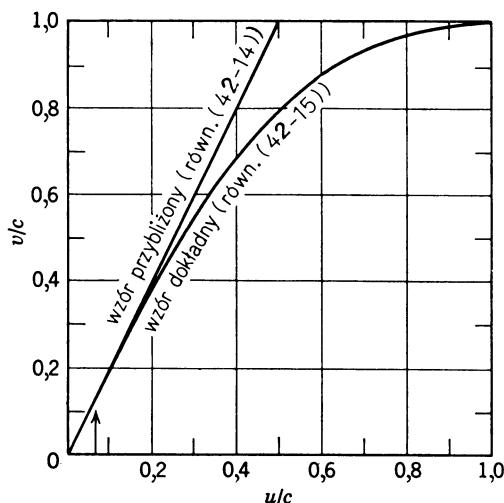
$$v = \frac{v' + u}{1 + v'u/c^2}. \quad (42-15)$$

Równanie (42-15) przechodzi w równanie (42-14) dla małych prędkości, tzn. gdy  $v' \ll c$  i  $u \ll c$ ; patrz przykład 4.

Jeżeli równanie (42-15) zastosujemy do przypadku, w którym ruchomym obiektem jest impuls świetlny, czyli gdy  $v' = c$ , wówczas otrzymamy

$$v = \frac{c + u}{1 + cu/c^2} = c.$$

Jest to wynik zgodny, jak być powinno, z podstawowym założeniem, na podstawie którego zostało wyprowadzone równanie (14-15); stwierdza on, że *obydwaj* obserwatorzy zmierzą tę samą prędkość światła  $c$ . Z równania (42-14) wynika (niesłusznie), że prędkość mierzona przez obserwatora  $S$  powinna być równa  $c + u$ . Z rysunku 42-7 wynika, że (prawidłowe) równanie (42-15) i (przybliżone) równanie (42-14) pokrywają się dla prędkości małych w porównaniu z prędkością światła.



Rys. 42-7. Prędkość cząstki  $P$  widziana przez obserwatora  $S$  z rys. 42-7 dla szczególnego przypadku  $v' = u$ . Wszystkie prędkości są wyrażone jako ułamki prędkości światła  $c$ . Strzałka pionowa pokazuje prędkość  $0,25 \cdot 10^8$  m/s

**Przykład 4.** Założmy, że  $v' = u = 1,0 \cdot 10^5$  m/s ( $= 0,00033c = 360\,000$  km/h). Jaki błąd popełnimy, jeżeli do obliczenia wykorzystamy równanie (42-14) zamiast (42-15)?

Z równania (42-14) mamy

$$v = v' + u = 1,0 \cdot 10^5 \text{ m/s} + 1,0 \cdot 10^5 \text{ m/s} = 2,0 \cdot 10^5 \text{ m/s}.$$

Z równania (42-15) mamy

$$v = \frac{v' + u}{1 + v'u/c^2} = \frac{1,0 \cdot 10^5 \text{ m/s} + 1,0 \cdot 10^5 \text{ m/s}}{1 + \left( \frac{1,0 \cdot 10^5 \text{ m/s}}{3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \right)^2} = \frac{2,0 \cdot 10^5 \text{ m/s}}{1,00000011}.$$

A więc nawet dla prędkości 360 000 km/h błąd popełniony przy stosowaniu równ. (42-14) jest niewielki.

**Przykład 5.** Dwa elektrony po wyjściu z jąder promieniotwórczych w próbce radioaktywnego materiału poruszają się w przeciwnych kierunkach. Niech każdy elektron ma w układzie laboratoryjnym prędkość równą  $0,6c$  (co odpowiada energii kinetycznej 130 keV). Jaka jest prędkość jednego elektronu względem drugiego?

Z równania (42-14) mamy

$$v = v' + u = 0,6c + 0,6c = 1,2c,$$

a z równania (42-15)

$$v = \frac{v' + u}{1 + v'u/c^2} = \frac{0,6c + 0,6c}{1 + (0,6c)^2/c^2} = 0,88c.$$

Z przykładu tego wynika, że dla prędkości porównywanych z prędkością  $c$  wyrażenia (42-14) i (42-15) dają zupełnie różne wyniki. Wiele pośrednich wyników doświadczalnych wskazuje na ten drugi, jako prawidłowy.

## 42-5. Efekt Dopplera

Przekonaliśmy się, że niezależnie od tego taka jest wzajemna prędkość źródła i obserwatora, otrzymuje się taką samą prędkość światła. Mierzona częstotliwość i długość fali będą się zmieniać, lecz w taki sposób, by ich iloczyn będący prędkością światła pozostał stały. Ta zmiana częstotliwości nazywa się *przesunięciem dopplerowskim*, gdyż jako pierwszy przewidział ją Johann Doppler (1803–1853).

W paragrafie 20-7 przekonaliśmy się, że jeśli źródło dźwięku oddala się od obserwatora z prędkością  $u$ , częstotliwość słyszana przez obserwatora (patrz równ. (20-10), gdzie  $v_s$  zastąpiono przez  $u$ ) wynosi

$$v' = v \frac{1}{1+u/v} \cdot \begin{cases} 1. \text{ Fala dźwiękowa.} \\ 2. \text{ Obserwator nieruchomy względem ośrodka.} \\ 3. \text{ Źródło oddala się od obserwatora.} \end{cases} \quad (42-16)$$

W równaniu tym  $v'$  jest częstotliwością odbieraną przez obserwatora, gdy źródło jest nieruchome, a  $v$  jest prędkością dźwięku.

Jeżeli źródło jest nieruchome względem ośrodka, a obserwator oddala się od źródła z prędkością  $u$ , to obserwowana częstotliwość wynosi (patrz równ. (20-9), gdzie  $v_0$  zastąpiono przez  $u$ )

$$v' = v \left( 1 - \frac{u}{v} \right) \cdot \begin{cases} 1. \text{ Fala dźwiękowa.} \\ 2. \text{ Źródło nieruchome względem ośrodka.} \\ 3. \text{ Obserwator oddala się od źródła.} \end{cases} \quad (42-17)$$

Nawet wtedy, gdy wzajemne prędkości  $u$  oddalania się źródła i obserwatora są takie same, częstotliwości otrzymane ze wzorów (42-16) i (42-17) są różne. Nie ma w tym nic dziwnego, gdyż sytuacja taka, że źródło porusza się względem ośrodka, względem którego obserwator spoczywa, jest różna od takiej, że obserwator porusza się względem ośrodka, względem którego źródło spoczywa, co widać, gdy się porówna rysunki 20-10 i 20-11.

Moglibyśmy próbować zastosować równania (42-16) i (42-17) do światła zastępując prędkość dźwięku  $v$  prędkością światła  $c$ . Jednakże, w odróżnieniu od dźwięku, dla światła zidentyfikowanie ośrodka, względem którego poruszałoby się źródło lub obserwator, okazało się niemożliwe. Oznacza to, że sytuacje — „źródło oddala się od obserwatora” i „obserwator oddala się od źródła” — są fizycznie równoważne i muszą dawać dokładnie taką samączęstość Dopplera. W odniesieniu do światła albo równanie (42-16), albo równanie (42-17), albo jedno i drugie muszą być nieprawdziwe. Według teorii względności częstość Dopplera wynosi

$$\nu' = \nu \frac{1-u/c}{\sqrt{1-(u/c)^2}}. \quad \begin{cases} 1. \text{ Fala świetlna.} \\ 2. \text{ Źródło i obserwator oddalają się od siebie.} \end{cases} \quad (42-18)$$

We wszystkich trzech powyższych równaniach możemy zastąpić  $u$  przez  $-u$  i wtedy otrzymamy odpowiednie wyrażenia dla przypadku *zblizania* się źródła i obserwatora.

Równania (42-16) i (42-18) nie różnią się bardzo, jeżeli stosunek  $u/c$  jest dość mały. Wynika to, dla dwóch pierwszych wyrażeń, z przykładu 3 rozdziału 20, gdzie podano rozwinięcie tych wyrażeń na szereg. Wówczas zastępując  $v$  przez  $c$  otrzymujemy

$$\nu' = \nu \left[ 1 - \frac{u}{c} + \left( \frac{u}{c} \right)^2 + \dots \right], \quad (42-16a)$$

$$\nu' = \nu \left( 1 - \frac{u}{c} \right), \quad (42-17a)$$

$$\nu' = \nu \left[ 1 - \frac{u}{c} + \frac{1}{2} \left( \frac{u}{c} \right)^2 + \dots \right]. \quad (42-18a)$$

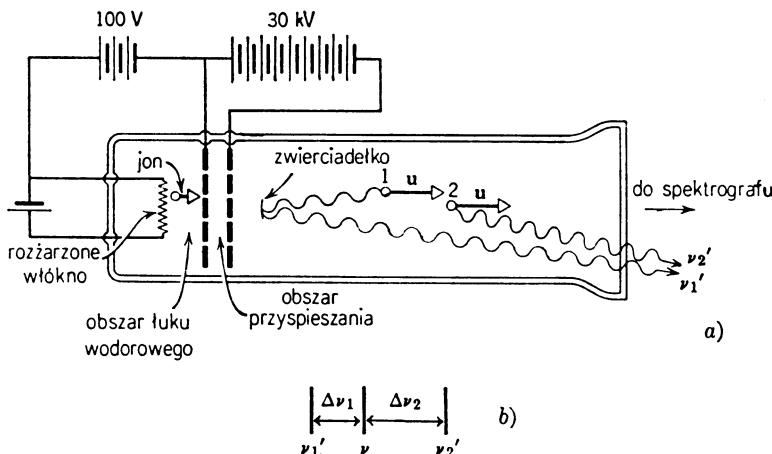
Stosunek  $u/c$  dla wszystkich dostępnych monochromatycznych źródeł światła, również o wymiarach atomowych, jest mały. To oznacza, że kolejne składniki tych wyrażeń szybko maleją i zależnie od wymaganej dokładności jedynie ograniczona liczba tych składników jest potrzebna.

W prawie wszystkich okolicznościach różnice między tymi trzema wyrażeniami są niewielkie. Niemniej jednak jest ogromnie interesujące przeprowadzić przynajmniej jedno doświadczenie dość precyzyjnie, by służyło za sprawdzian równania (42-18a), a stąd częściowo jako sprawdzian słuszności teorii względności.

H. E. Ives i G. R. Stilwell przeprowadzili takie precyzyjne doświadczenie w 1938 r. Przypieszona wiązkę atomów wodoru otrzymaną w czasie wyładowania elektrycznego w gazie do prędkości  $u$  (rys. 42-8a). Można było obserwować światło emitowane przez te atomy w kierunku przeciwnym do  $u$  (np. atom 1) używając zwierciadła, a również w kierunku równoległym do  $u$  (np. atom 2). Używając precyzyjnego spektrografu można było fotografować poszczególne linie charakterystyczne widma w tym promieniowaniu, otrzymując na skali częstotliwości linie oznaczone na rys. 42-8b przez  $\nu'_1$  i  $\nu'_2$ . Na tej samej klipsy fotograficznej można było również fotografować linię odpowiadającą światłu emitowanemu z atomów pozostających w *spoczynku*; taka linia na rys. 42-8b oznaczona jest przez  $\nu$ . Podstawową wielkością mierzoną w tym doświadczeniu było  $\Delta\nu/\nu$  zdefiniowane równaniem

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\nu_2 - \Delta\nu_1}{\nu} \quad (42-19)$$

(rys. 42-8b). Wielkość ta jest miarą odchylenia częstotliwości światła pochodzącego z nieruchomych atomów od częstotliwości leżącej w połowie odległości między częstotliwościami  $\nu'_1$  i  $\nu'_2$ . Tablica 42-2 pokazuje, że otrzymane wyniki zgadzają się ze wzorem otrzymanym na podstawie teorii względności (równ. (42-18a)), a nie z klasyczną formułą otrzymaną na podstawie rozchodzenia się dźwięku w ośrodku materialnym (równ. (42-16a)).



Rys. 42-8. Doświadczenie Ivesa i Stilwella

Tablica 42-2. Doświadczenie Ivesa-Stilwella\*

$\frac{\Delta\nu}{\nu} \cdot 10^{-5}$	Prędkość atomów (= u) w $10^6$ m/s			
	0,865	1,01	1,15	1,33
wielkość teoretyczna zgodna z teorią klasyczną (równ. (42-16a))	1,67	2,26	2,90	3,94
wielkość teoretyczna zgodna z teorią względności (równ. (42-18a))	0,835	1,13	1,45	1,97
wielkość doświadczalna	0,762	1,1	1,42	1,9

\* Tablica podaje jedynie część wyników otrzymanych przez Ivesa i Stilwella.

Ives i Stilwell nie przedstawili swych wyników doświadczalnych jako dowodu na poparcie teorii względności Einsteina, lecz dali im inne możliwe wyjaśnienia teoretyczne. Obecnie, gdy patrzy się nie tylko na ten piękny eksperyment, ale i na cały zbiór dowodów doświadczalnych, podaje się interpretację doświadczenia Ivesa-Stilwella taką jak powyżej.

Ekfekt Dopplera znajduje wiele zastosowań w astronomii, gdzie jest wykorzystany do określania prędkości, z jaką świecące ciała niebieskie zbliżają się do nas lub oddalają. Takie przesunięcie dopplerowskie mierzy jedynie radialną, czyli leżącą wzduł linii widzenia składową względnej prędkości. Okazuje się, że wszystkie galaktyki (patrz równ. (42-19)), dla których przeprowadzono takie pomiary\* (rys. 42-9) oddalają się od nas i prędkość oddalania się jest tym większa, im bardziej galaktyka jest odległa; te obserwacje są podstawą koncepcji rozszerzającego się Wszechświata.

Przykład 6. Zaobserwowano, że pewne charakterystyczne długości fal w świetle z galaktyki widocznej w gwiazdozbiorze Panny są większe w porównaniu ze światłem ze źródeł ziemskich o około 0,4%. Jaka jest prędkość radialna tej galaktyki względem Ziemi? Czy przybliża się ona, czy oddala?

Jeżeli  $\lambda'$  jest długością fali dla źródła ziemskiego, to

$$\lambda' = 1,004\lambda.$$

\* Patrz: Allen R. Sandage, The Red Shift, *Scientific American*, September 1956.

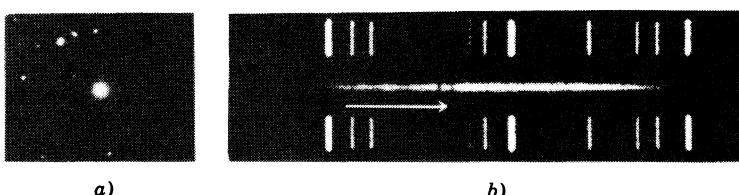
a ponieważ musi być  $\lambda\nu' = \lambda\nu = c$ , możemy to zapisać jako

$$\nu' = 0,996\nu.$$

To przesunięcie częstotliwości jest tak małe, że aby obliczyć prędkość, można używać dowolnego z równań (42-16), (42-17) i (42-18). Stosując równanie (42-17) możemy napisać

$$\nu' = 0,996\nu = \nu \left(1 - \frac{u}{c}\right).$$

Stąd otrzymujemy  $u/c = 0,004$ , czyli  $u = 0,004 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 1,2 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ , czyli  $4,32 \cdot 10^6 \text{ km/h}$ . Galaktyka oddala się; gdyby  $u$  było ujemne, galaktyka zbliżałyby się do nas.



Rys. 42-9. (a) Punkt centralny jest mgławicą w gwiazdozbiorze Korona Północy, odległą od Ziemi o 130 000 000 lat świetlnych. (b) Środkowa smuga jest widmem promieniowania mgławicy. Dwa pionowe czarne pasma wskazują na obecność wapnia. Pozioma strzałka pokazuje, że linie wapnia mają większą długość fali niż przy ich emisji ze źródeł ziemskich zawierających wapń; długość strzałki reprezentuje wielkość przesunięcia długości fal. Pomiar tego przesunięcia pozwala obliczyć, że galaktyka oddala się od nas z prędkością 21 600 km/h. Linie powyżej i poniżej środkowej smugi należą do widma źródła ziemskiego, użytego do ustalenia skali długości fal. (Dzięki uprzejmości Mount Wilson i Mount Palomar Observatories)

### Pytania

1. W jaki sposób można wyznaczyć krzywą czułości oka, taką jak na rys. 42-2?
2. Dlaczego sygnały niebezpieczeństwa są czerwone, skoro oko jest najbardziej czułe na barwę żółto-zieloną?
3. Omówić następującą definicję granic widma światła widzialnego podaną przez fizjologa. „Granice widma widzialnego znajdują się tam, gdzie oko przestaje być lepiej od jakiegokolwiek innego narządu przystosowane do służenia jako detektor”.
4. Ciało ludzkie jest zdolne do „detekcji” promieniowania elektromagnetycznego z części widma odległych od zakresu widzialnego. Podaj przykłady dla obszarów podczerwieni, ultrafioletu, promieni X oraz promieniowania gamma. Niektóre z „procesów detekcji” są niezbyt przyjemne.
5. Nawiązując do rys. 42-1: (a) czy uważasz za możliwe, że długość fali odpowiadająca największej czułości mogłaby się przesuwać przy zmianach natężenia światła? (b) Jak mogłaby wyglądać krzywa z rys. 42-1 dla daltonistów nie umiejących odróżnić np. koloru czerwonego od zielonego? (Patrz: S. J. Edwards, *The Science of Color, Physics Education*, June 1975.)
6. Założymy, że oczy ludzkie są nieczułe na światło widzialne, natomiast bardzo czułe na podczerwień. Jaki zmiany w otoczeniu byłyby potrzebne przy: (a) przechodzeniu długim korytarzem? (b) prowadzeniu samochodu? Czy miałyby miejsce efekt koloru? Jak trzeba by zmodyfikować świetlne sygnały drogowe?
7. W jaki sposób obiekt może absorbować energię światła bez absorpcji pędu?
8. Wymienić dwa historyczne doświadczenia obok pomiarów ciśnienia promieniowania Nicholasa i Hull'a, w których użyto wahadła torsyjnego. Oba zostały opisane w tej książce: jedno w tomie 1, drugie w tomie 2.
9. Reflektor wysyła równoległą wiązkę światła. Czy doznaje on przy tym działania pewnej siły związanej z emisją światła?
10. W paragrafie 42-2 stwierdziliśmy, że siła działająca na zwierciadło w doświadczeniu Nicholasa i Hull'a dotyczącym ciśnienia promieniowania (patrz rys. 42-2) wyniosła około  $7 \cdot 10^{-10} \text{ N}$ . Znajdź przed-

miot, którego ciężar na powierzchni Ziemi ma w przybliżeniu taką wartość. (Pomocna w tym może być tablica 1-4.)

11. Przedyskutuj sformułowane w 1972 r. przez dyrektora Narodowego Urzędu Miar Lewisa M. Brans-comba stwierdzenie: „Naukowcy poszukują możliwości używania jednego wzorca — jednej, by tak rzec, „linijki” — nie tylko dla trzech wymiarów przestrzennych, ale także dla czwartego wymiaru, tj. czasu. Żeby zamienić zegary na linijki naukowcy muszą znać prędkość rozchodzenia się światła... Przy tak niezwykłej dokładności pomiarów przestrzennych (długość fali) i czasowych (częstotliwość) pojedynczego źródła światła, cel ten jest obecnie osiągalny”. Co miał on na myśli? (Patrz: *Science News*, February 1972.)

12. Gdy w pełnym słońcu wypoczywasz na plażowym leżaku, jesteś w pełni świadomy energii cieplnej, która do ciebie dociera. Dlaczego zupełnie nie odczuwasz pędu dostarczanego Ci z tego samego źródła?

13. Niektórzy głoszą pogląd, że prędkość światła, znana obecnie z tak wielką dokładnością, powinna być uznana za stałą o wartości określonej definicyjnie, a nie mierzonej. Jakie są tego implikacje odnośnie obecnych definicji metra i sekundy (dodatek A)?

14. Gdy równoległa wiązka światła pada na przedmiot, przekaz pędu jest opisany równaniami (42-2). Czy równania te jeszcze obowiązują, gdy źródło światła porusza się szybko w kierunku do lub od przedmiotu z prędkością powiedzmy  $0,1c$ ?

15. Jak mógłby Galileusz sprawdzić doświadczalnie, że zasadniczym źródłem błędu w jego próbie pomiaru szybkości światła opisanej na str. 403 były zbyt długie czasy reakcji?

16. Wysunięto przypuszczenie, że prędkość światła może zmieniać swą wielkość z upływem czasu. Czy można znaleźć pewne potwierdzenie tego w tablicy 42-1?

17. Czy przychodzi Ci na myśl jakaś „codzienna” (tzn. dokonana bez użycia aparatury pomiarowej) obserwacja, która wskazuje, że prędkość światła nie jest nieskończona? Pomyśl o błyskawicach, możliwych rozbieżnościach pomiędzy przewidywanym czasem wschodu Słońca i czasem obserwowanym, o łączności radiowej pomiędzy Ziemią i astronautami w orbitującym pojeździe kosmicznym itd. Przedyskutuj problem.

18. Co można by odpowiedzieć komuś, kto twierdzi, że postulat Einsteina (głoszący, że prędkość światła nie zależy od jednostajnego ruchu źródła ani obserwatora) należy odrzucić, gdyż nie zgadza się z „zdrowym rozsądkiem”?

19. Dlaczego metoda pomiaru prędkości światła „z wirującym zwierciadłem” jest lepsza niż metoda Fizeau „z kołem zebatym”? (patrz rys. 42-4).

20. Czy prędkość światła w przótni zależy od: (a) długości fali, (b) częstotliwości, (c) natężenia, (d) prędkości źródła i (e) prędkości obserwatora?

21. Czy galaktyka może być tak odległa, żeby jej prędkość oddalania się była równa  $c$ ? Jeżeli tak, to czy moglibyśmy widzieć tę galaktykę, tzn. czy jej światło kiedykolwiek dobiegłooby do nas?

22. Czym różnią się zjawiska Dopplera dla światła i dźwięku? Pod jakimi względami są takie same?

23. Promienie gamma są promieniowaniem wysyłanym przez jądra radioaktywne. Czy w przestrzeni swobodnej biegą one z taką samą prędkością jak światło widzialne? Czy ich prędkość zależy od prędkości emitujących je jader?

## Zadania

### Paragraf 42-1

1. (a) Dla jakiej długości fali czułość oka wynosi połowę czułości maksymalnej? (b) Jaka jest częstotliwość i okres światła, na które oko jest najbardziej czułe? Patrz rys. 42-1.

Odp.: (a)  $510$  i  $610$  nm. (b)  $5,5 \cdot 10^{14}$  Hz i  $1,8 \cdot 10^{-15}$  s.

### Paragraf 42-2

2. Promieniowanie słoneczne w pobliżu Ziemi ma natężenie  $1400 \text{ W/m}^2$ . Zakładając, że Ziemia zachowuje się jak płaska tarcza umieszczona prostopadle do promieni słonecznych i że cała padająca energia jest absorbowana, obliczyć siłę działającą na Ziemię na skutek ciśnienia promieniowania. Porównać ją z siłą grawitacyjnego przyciągania przez Słońce.

3. Jakie jest ciśnienie promieniowania w odległości  $1,0 \text{ m}$  od małej żarówki  $500 \text{ W}$ ? Założyć, że powierzchnia, na którą działa ciśnienie, jest umieszczona prostopadle do promieniowania i całkowicie je pochłania, a żarówka promieniuje w sposób jednakowy we wszystkich kierunkach.

Odp.:  $1,3 \cdot 10^{-7} \text{ Pa}$ .

4. Udowodnić, że fala płaska padająca prostopadle na płaską powierzchnię wywiera na tę powierzchnię ciśnienie promieniowania równe gęstości energii nad powierzchnią. Wzór ten jest słuszny niezależnie od tego, jaka część energii padającej zostaje odbita.

5. Udowodnić, że strumień pocisków padających pod kątem prostym na płaską powierzchnię wywiera ciśnienie równe *podwojonej* gęstości energii kinetycznej w strumieniu nad powierzchnią. Założyć, że pociski są całkowicie „absorbowane” przez powierzchnię. Porównać to z zachowaniem się światła (patrz poprzednie zadanie).

6. Pokaż, że przy całkowitym pochłanianiu równoleglej wiązki światła ciśnienie promieniowania wywierane na przedmiot pochłaniający jest opisane wzorem  $p = S/c$ , w którym  $S$  jest wartością wektora Poyntinga, a  $c$  prędkością światła w próżni.

7. Wysunięto propozycję, aby statek kosmiczny w Układzie Słonecznym poruszał się pod wpływem ciśnienia promieniowania na żagiel z folii aluminiowej. Jak duży musiałby być żagiel, żeby siła promieniowania była równa grawitacyjnemu przyciąganiu Słońca? Założyć, że masa *statku i żagla* jest równa 1500 kg, że żagiel doskonale odbija promieniowanie i że jest ustawiony prostopadle do promieni Słońca. Masa Słońca wynosi  $1,97 \cdot 10^{30}$  kg. (Nawiasem mówiąc, NASA zamierzała zbudować taki „kosmiczny kliper” w celu przechwycenia komety Halleya w czasie jej następnego wejścia w obszar wewnętrznego Układu Słonecznego w 1986 r. W podstawowym projekcie przyjmowało się, że żagiel będzie wykonany jako polimerowa blona pokryta warstwą aluminium o grubości kilku średnic atomowych. Powierzchnia żagla miała wynosić około 100 akrów czyli około 40 ha. Miał to być statek kosmiczny dobrze wyposażony w instrumenty ale bezzałogowy.)

Odp.:  $9,2 \cdot 10^5$  m<sup>2</sup>.

8. Cząstka znajdująca się w Układzie Słonecznym podlega jednoczesnemu działaniu słonecznego przyciągania grawitacyjnego oraz sił związanych z promieniowaniem wysyłanym przez Słońce. Założmy, że cząstka ta jest kulą o gęstości  $1,0$  g/cm<sup>2</sup> i że pochłania ona całkowicie światło padające na nią. (a) Pokazać, że wszystkie cząstki o promieniu mniejszym niż pewien promień krytyczny  $R_0$ , będą wypychane z Układu Słonecznego. (b) Obliczyć wielkość  $R_0$ . (c) Czy  $R_0$  zależy od odległości między Ziemią i Słońcem? Potrzebne stałe można znaleźć w dodatkach.

9. Pokazać, że wielkość  $\epsilon_0 E \times B$  ma wymiar pęd/objętość. (Wektor  $\epsilon_0 E \times B$  można wykorzystać do obliczenia pędu zmagazynowanego w polu w taki sam sposób, w jaki wielkość skalarną  $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$

wykorzystuje się do obliczania energii zmagazynowanej w polu.)

10. Mały statek kosmiczny o masie (razem z załogą) równej 1500 kg porusza się w przestrzeni kosmicznej, gdzie brak jest pól grawitacyjnych. Jeżeli zapali on reflektor, który promieniuje w przestrzeń z mocą  $10^4$  W, to jaką prędkość osiągnie po upływie jednego dnia dzięki sile reakcji związanej z pędem przekazywanym przez wiązkę światła?

11. W płaskiej fali elektromagnetycznej rozchodzącej się w próżni pole elektryczne i magnetyczne są opisane następująco:  $E_x = E_0 \sin(kz - \omega t)$ ,  $B_y = \frac{E_0}{c} \sin(kz - \omega t)$ ,  $E_y = E_z = B_x = B_z = 0$ . (a) Jaki jest kierunek rozchodzenia się tej fali? (b) Oblicz średnią moc przepływającą przez jednostkę powierzchni. (c) Z jaką szybkością jest dostarczany przez tę falę pęd do całkowicie pochłaniającej powierzchni o polu  $A$ , prostopadłej do kierunku rozchodzenia się fali?

Odp.: (a) Dodatni kierunek osi Oz. (b)  $E_0^2 / 2\mu_0 c$ . (c)  $\epsilon_0 E_0^2 A / 2$ .

12. Płaska fala elektromagnetyczna o długości fali 3,0 m rozchodzi się w próżni w kierunku  $+x$ , przy czym jej wektor elektryczny  $E$ , o amplitudzie 300 V/m, jest skierowany wzdłuż osi  $y$ . (a) Jaka jest częstotliwość  $\nu$  fali? (b) Jaki jest kierunek i amplituda pola  $B$  dla tej fali? (c) Jeśli  $E = E_m \sin(kx - \omega t)$ , to jakie są wartości  $k$  i  $\omega$  dla tej fali? (d) Jaka jest, uśredniona w czasie, szybkość przepływu energii przez jednostkę powierzchni, związana z tą falą? (e) Jeśli fala pada na doskonale pochłaniającą płytę o powierzchni  $A$ , to jaki pęd jest przekazywany tej płycie w ciągu sekundy oraz jakie jest ciśnienie promieniowania wywiane na tę płytę?

### Paragraf 42-3

13. Niepewność wyniku pomiaru prędkości światła  $c$  opisanego na str. 407 wynosi  $\pm 0,0012$  km/s. W dodatku B podano, że wynosi ona  $\pm 0,004$  milionowych części całości. Pokaż, że te niepewności są ze sobą zgodne.

14. *Metoda Bradleya określenia prędkości światła.* Rozważmy gwiazdę leżącą na linii przechodzącej przez Słońce, prostopadłej do płaszczyzny ziemskiej orbityokołosłonecznej. Odległość od gwiazdy jest znacznie większa niż promień orbity ziemskiej. Wykaż, że na skutek skończości prędkości światła, teleskop przez który gwiazda jest obserwowana musi być nachylony pod kątem  $20,5''$  do prostopadłej, w kierunku ruchu Ziemi. Efekt ten, nazwany aberracją, jest mierzalny i po raz pierwszy został wyjaśniony przez Jamesa Bradleya w 1729 r. (Wskazówka: Przeprowadź analogię z człowiekiem schowanym pod parasolem, biegącym w czasie deszczu.)

15. Założmy, że jesteśmy w stanie utrzymać łączność radiową z hipotetycznymi mieszkańcami hipotetycznej planety krążącej wokół najbliższej nam gwiazdy,  $\alpha$ -Centauri, odległej od nas  $4,2$  lat świetlnych. Ile czasu trzeba czekać na otrzymanie odpowiedzi po wysłaniu wiadomości? Powtórz obliczenie dla Wielkiej Mgławicy Andromedy, jednego z naszych najbliższych sąsiadów pozagalaktycznych, odległej jednak aż o  $2 \cdot 10^6$  lat świetlnych. Do jakich wniosków prowadzą powyższe rozważania odnośnie sposobu naszej ewentualnej łączności z mieszkańcami innych galaktyk?

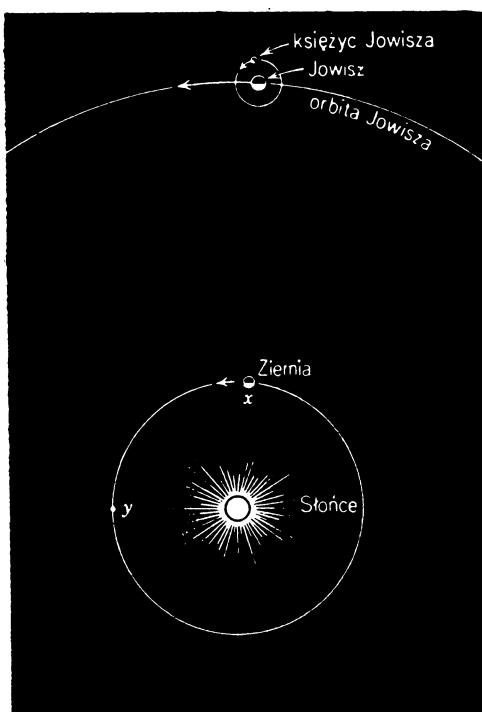
Odp.:  $8,4$  lat;  $4 \cdot 10^6$  lat.

16. Który z czterech zamieszczonych w tablicy 42-1 wyników pomiarów  $c$  opublikowanych przez Michelsona i współpracowników najlepiej zgadza się z obecnie przyjmowaną wartością  $c$ , podaną w dodatku B? Weź pod uwagę błędy pomiaru. Wykonaj wykres przedstawiający w odpowiedniej skali trzy wartości i ich niepewności zaznaczone w postaci kresek błędów.

17. Błąd popełniany przy wyznaczaniu odległości od Księżyca za pomocą odbicia fal radiowych wynosi około  $0,8$  km. Zakładając, że błąd ten związany jest jedynie z pomiarem czasu przelotu, obliczyć jaki błąd czasu temu odpowiada.

Odp.:  $5,3$   $\mu$ s.

18. Metoda Roemera pomiaru prędkości światła oparta jest na obserwacji pozornego czasu obiegu jednego z księżyców Jowisza. Prawdziwy czas obiegu wynosi  $42,5$  h. (a) Jak powinien zmieniać się obserwowany czas obiegu, uwzględniając skończoną prędkość światła, gdy Ziemia przesuwa się na swej orbicie od punktu  $x$  do punktu  $y$  (rys. 42-10)? (b) Jakie obserwacje byłyby potrzebne do obliczenia prędkości światła? Zaniedbać ruch Jowisza po własnej orbicie. Rysunek 42-10 nie jest wykonany we właściwej skali.



Rys. 42-10. Zadanie 18

#### Paragraf 42-4

19. Założmy, że w równaniach (42-14) i (42-15)  $v' = u$ . Przy jakiej wartości  $u$  wyrażenia te będą się różniły o 1,0%?

Odp.: 0,1c.

#### Paragraf 42-5

20. Wykaż, że dopplerowskie przesunięcie częstotliwości wyrażone w kHz można przeliczyć na prędkość radialną w km/s mnożąc je przez czynnik 0,211.

21. Pojazd kosmiczny oddala się od Ziemi z prędkością  $0,2c$ . Światło w pojeździe kosmicznym ma dla pasażerów kolor niebieski. Jaki kolor powinien widzieć obserwator na Ziemi? (Patrz rys. 42-1.)

Odp.: Żółto-pomarańczowy.

22. Różnica w długości fali między padającą wiązką mikrofal i wiązką odbitą od oddalającego się lub zbliżającego samochodu została użyta do kontroli prędkości samochodu na autostradzie. (a) Pokazać, że jeżeli  $v$  jest prędkością samochodu, a  $\nu$  — częstotliwością padającej wiązki, to zmiana częstotliwości wynosi około  $2\nu/c$ , gdzie  $c$  jest prędkością promieniowania elektromagnetycznego. (b) Jaka jest zmiana częstotliwości na 1 km/h dla częstotliwości 2450 MHz?

23. Okres obrotu Słońca na równiku wynosi 24,7 dnia, jego promień równy jest  $7,0 \cdot 10^8$  m. Jakie przesunięcie dopplerowskie wystąpi dla charakterystycznych długości fali w obszarze bliskim 550 nm emitowanych z krańców tarczy słonecznej?

Odp.:  $3,8 \cdot 10^{-3}$  nm.

24. Satelita Ziemi wysyłający fale o częstotliwości 40 MHz (ściśle określonej) przelatuje dokładnie ponad radiową stacją odbiorczą na wysokości 400 km, z prędkością 29 000 km/h. Wykreślić zmianę częstotliwości spowodowaną efektem Dopplera jako funkcję czasu przyjmując, że w chwili  $t = 0$  satelita znajdował się nad stacją. (Uwaga. Prędkość we wzorze Dopplera nie jest całkowitą prędkością satelity, lecz jej składową w kierunku stacji. Skorzystać z formuły nierelatywistycznej (równ. (42-16a)) i zaniedbać krzywiznę Ziemi oraz orbity satelity.)

25. Przesunięcie ku czerwieni promieniowania z odległej mgławicy polega na tym, że światło (prążek H<sub>β</sub>), o którym wiemy, że w laboratorium ma długość fali 4340 Å, dobiegając z mgławicy ma długość fali 6562 Å. (a) Jaka jest składowa prędkości mgławicy względem Ziemi w kierunku w jakim ją widzimy z Ziemi? (b) Czy zbliża się ona, czy oddala?

Odp.: (a)  $1,2 \cdot 10^8$  m/s. (b) Oddala się.

26. Pokazać, że dla małych prędkości przesunięcie dopplerowskie można określić w sposób przybliżony za pomocą wzoru

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{u}{c},$$

gdzie  $\Delta\lambda$  jest zmianą długości fali.

27. W doświadczeniu Ivesa i Stilwella prędkość  $u$  atomów wodoru w pewnej chwili wynosiła  $8,61 \cdot 10^5$  m/s. Obliczyć:  $\Delta\nu/\nu$  przy założeniu, że (a) równanie (42-18a) jest prawidłowe i (b) równanie (42-16a) jest prawidłowe; wyniki porównać z wynikami podanymi w tablicy 42-2 dla tej prędkości. Uwzględnić jedynie trzy pierwsze wyrazy w równaniach (42-18a) i (42-16a).

Odp.: (a)  $\Delta\nu/\nu = 0,825 \cdot 10^{-5}$ . (b)  $\Delta\nu/\nu = 1,65 \cdot 10^{-5}$ .

# 43. Odbicie i załamanie. Płaskie fale i płaskie powierzchnie

## 43-1. Odbicie i załamanie

Dotychczas rozważaliśmy widmo elektromagnetyczne, w tym zakres widzialny tego widma, wyłącznie w pustej, nie stawiającej oporu przestrzeni. Tu będziemy badać odbicie fal świetlnych od płaskich powierzchni, takich jak powierzchnia szkła lub wody, a zwłaszcza ich zachowanie się przy przejściu przez ośrodkie przezroczyste, takie jak szkło lub woda. Jak zobaczymy w następnym paragrafie, bez tych rozwań nie potrafilibyśmy wytłumaczyć zasad działania takich urządzeń jak aparaty fotograficzne, teleskopy, okulary, mikroskopy itp. Podobnie jak zawsze dotąd, to co powiemy w tym rozdziale na temat fal widzialnych ma swój odpowiednik w innych zakresach widma elektromagnetycznego.

Na rysunku 43-1a wiązka światła padająca na powierzchnię wody ulega zarówno odbiciu od tej powierzchni, jak i załamaniu (*refrakcji*) przy przejściu do wody\*. Wiązka padająca jest przedstawiona na rys. 43-1b przez pojedynczą linię, tj. *padający promień*, równoległy do kierunku rozchodzenia się wiązki. Zakładamy, że wiązka padająca (przedstawiona na rys. 43-1b) jest *falą płaską*, a czoło fali jest prostopadłe do promienia padającego. Wiązki odbita i załamana przedstawione są również przez pojedyncze promienie. *Kąty padania* ( $\theta_1$ ), *odbicia* ( $\theta_1$ ) i *załamania* ( $\theta_2$ ) mierzone są pomiędzy prostopadłą do powierzchni i odpowiednim promieniem, jak pokazano na rysunku.

Eksperymentalnie znajdujemy następujące prawa rządzące odbiciem i załamaniem:

(1) Promień odbity i załamany leżą w jednej płaszczyźnie utworzonej przez promień padający i prostopadłą do powierzchni odbijającej w punkcie padania, tzn. w płaszczyźnie rys. 43-1b.

\* Powszechnie znanym i obserwowanym przykładem odbić i załamań jest zjawisko tęczy. Patrz: Moysés Nussenzveig, The Theory of the Rainbow, *Scientific American*, April 1977.

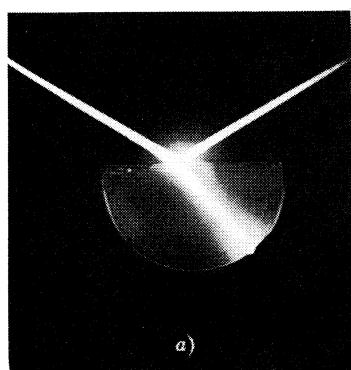
(2) Dla odbicia

$$\theta'_1 = \theta_1. \quad (43-1)$$

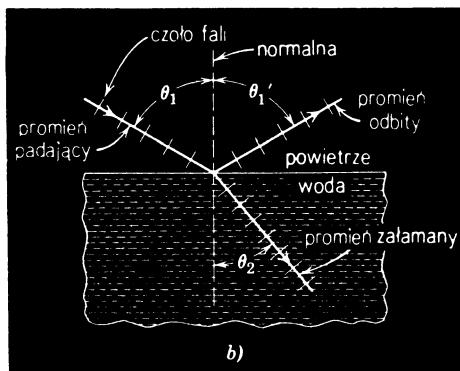
(3) Dla załamania

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = n_{21}, \quad (43-2)$$

gdzie  $n_{21}$  jest stałą, zwaną *współczynnikiem załamania* ośrodka 2 względem ośrodka 1. Tablica 43-1 zawiera współczynniki załamania względem próżni dla kilku często spotykanych substancji, dla długości fali 589 nm (linia sodu).



a)



b)

Rys. 43-1. (a) Fotografia przedstawiająca załamanie i odbicie na granicy wody i powietrza. (b) Ilustracja powyższego za pomocą promieni

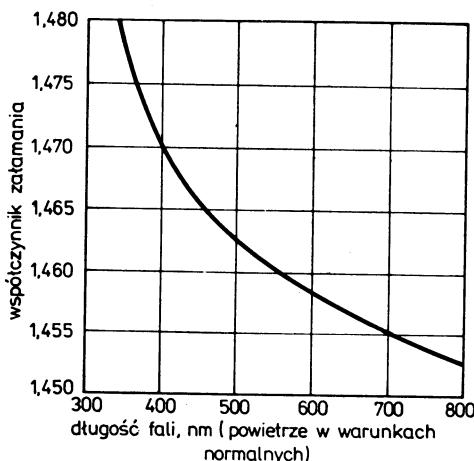
Tablica 43-1. Niektóre współczynniki załamania\* (dla  $\lambda = 589$  nm)

Ośrodek	Współczynnik załamania
woda	1,33
alkohol etylowy	1,36
dwusiarczek węgla	1,63
powietrze (1 atm, 20°C)	1,0003
jodek metylu	1,74
topiony kwarc	1,46
szkło I (kron)	1,52
szkło II (flint)	1,66
chlorek sodu	1,53

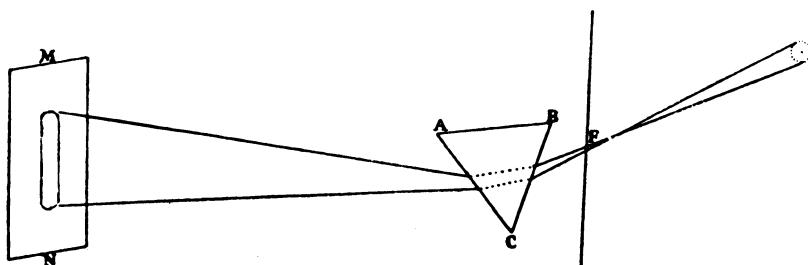
\* Mierzone względem próżni. Współczynniki załamania względem powietrza (z wyjątkiem współczynnika załamania samego powietrza) w większości przypadków są nieco inne.

Ogólnie biorąc współczynnik załamania jednego ośrodka względem innego zależy od długości fali, co widać na rys. 43-2. Z tego względu załamanie, w odróżnieniu od odbicia, może być wykorzystane do rozłożenia wiązki światła na składowe o różnych długościach fal. Na rysunku 43-3 wziętym z książki Newtona *Opticks*, pokazano, w jaki sposób Newton, używając szklanego pryzmatu ABC, otrzymał widmo światła słonecznego przechodzącego przez mały otwór F.

Prawo odbicia było znane już Euklidesowi, natomiast prawo załamania zostało odkryte doświadczalnie przez Willebroda Snella (1591–1626) i wy tłumaczone na podstawie najwcześniejszej korpuskularnej teorii światła przez René Descartes'a (1596–1650). Prawo załamania jest znane jako prawo Snella albo (we Francji) prawo Descartes'a.



Rys. 43-2. Współczynnik załamania topionego kwarcu względem próżni



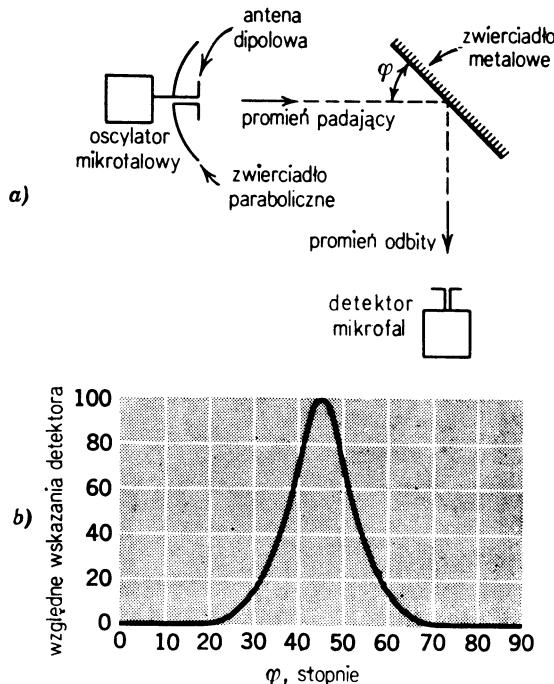
Rys. 43-3. Promień słoneczny przechodzący przez szczelinę F w przeslonie tworzy po załamaniu w przymacie ABC widmo na ekranie MN, wzięte z książki: Newton, *Opticks* (1704)

Prawa odbicia i załamania możemy wyprowadzić z równań Maxwell'a, co znaczy, że prawa te obowiązują dla wszystkich obszarów widma elektromagnetycznego. Rysunek 43-4a przedstawia zestaw doświadczalny do badania odbicia mikrofal od dużej powierzchni metalowej. Rysunek 43-4b przedstawia wskazania detektora w funkcji kąta ustawienia zwierciadła. Występowanie wiązki odbitej przy właściwym kącie potwierdza prawo odbicia dla mikrofal. Z licznych danych doświadczalnych wynika, że równania (43-1) i (43-2) prawidłowo opisują zachowanie się odbitych i załamanych wiązek w całym obszarze widma elektromagnetycznego.

Ogólnie wiadomo, że wypolerowana powierzchnia stalowa daje wiązkę odbitą o określonym kierunku, natomiast karta papieru odbija światło mniej więcej we wszystkich kierunkach (rozpraszanie odbiciowe). Właśnie dzięki rozpraszaniu odbiciowemu widzimy wokół siebie przedmioty nie świecące. Różnica pomiędzy rozproszeniem a odbiciem zwierciadlanym (takim jak od zwierciadła) tkwi w gładkości powierzchni. Wiązka odbita zwierciadlanie powstaje tylko wtedy, gdy średnia głębokość nieregularności powierzchni odbijającej jest wyraźnie mniejsza od długości fali światła padającego. To kryterium gładkości powierzchni

ma różne znaczenie w różnych obszarach widma elektromagnetycznego. Dla mikrofal o długości fali 0,5 cm dobrym zwierciadłem jest na przykład dno żelaznej patelni, lecz nie dla światła widzialnego (nie można — powiedzmy — golić się przy nim ani robić makijażu).

Drugim warunkiem powstania wiązki odbitej jest to, aby wymiary poprzeczne zwierciadła były znacznie większe od długości fali wiązki padającej. Gdy wiązka światła białego pada na wypolerowany krążek metalu wielkości dziesięciogroszówki, powstanie wiązki odbitej, gdy natomiast krążek ten umieś-



Rys. 43-4. (a) Aparatura do badania praw odbicia mikrofali. (b) Wiązka odbita (dla  $\lambda \approx 10$  cm) pojawia się przy ustawieniu zwierciadła zgodnym z przewidywanym

cimy w wiązce krótkich fal radiowych, np. o  $\lambda = 1,0$  m, wówczas promieniowanie to zostanie rozproszone we wszystkich kierunkach i nie otrzymamy wyraźnej wiązki odbitej. To zjawisko, zwane ugięciem (dyfrakcją), będzie omówione w rozdziale 46. Warunki „gładkości” i „dużych wymiarów” powierzchni zachowują swoją ważność także przy powstawaniu wiązek załamanych. Jeżeli te warunki nie są spełnione, to opis odbicia i załamania zawarty w równaniach (43-1) i (43-2) nie jest prawdziwy.

**Przykład 1.** Rysunek 43-5 przedstawia promień  $p$  padający na powierzchnię zwierciadła  $ZZ'$  pod kątem padania  $\theta$ . Prześledźmy drogę tego promienia.

Wiązka odbita tworzy kąt  $\theta$  z normalną do powierzchni zwierciadła w punkcie  $b$  i po odbiciu pada na zwierciadło  $ZZ'$ . Jej kąt padania  $\theta'$  jest równy  $\frac{1}{2}\pi - \theta$ . Powtórnie odbity promień  $o'$  tworzy kąt  $\theta'$  z prostą padającą wystawioną w punkcie  $b$ . Promienie  $p$  i  $o'$  są antyrównoległe dla każdej wartości kąta  $\theta$ . Żeby to wykazać, zauważmy że

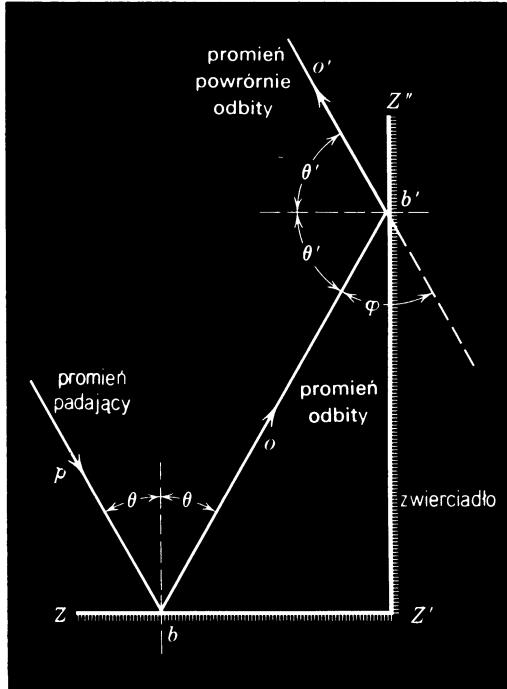
$$\varphi = \pi - 2\theta' = -2(\frac{1}{2}\pi - \theta) = 2\theta.$$

Jeżeli kąty naprzemianległe ( $\varphi$  i  $2\theta$ ) są równe, to proste są równoległe. Rozwiązać to zagadnienie, gdy kąt pomiędzy zwierciadłami równa się  $120^\circ$ , a nie  $90^\circ$ .

**Przykład 2.** Wiązka promieni biegąca w powietrzu i padająca na płaską powierzchnię kryształu kwarcowego tworzy z normalną kąt  $30^\circ$ . W wiązce tej występują dwie długości fali 400 i 500 nm. Współczynniki załamania kwarcu względem powietrza  $n_{kp}$  wynoszą dla tych długości fal odpowiednio 1,4702 i 1,4624. Jaki jest kąt pomiędzy dwoma załamanimi promieniami?

Dla fali o długości 400 nm na podstawie równania (43-2) mamy

$$\sin \theta_1 = n_{kp} \sin \theta_2,$$



Rys. 43-5. Przykład 1

czyli

$$\sin 30^\circ = 1,4702 \sin \theta_2,$$

co daje  $\theta_2 = 19,88^\circ$ .

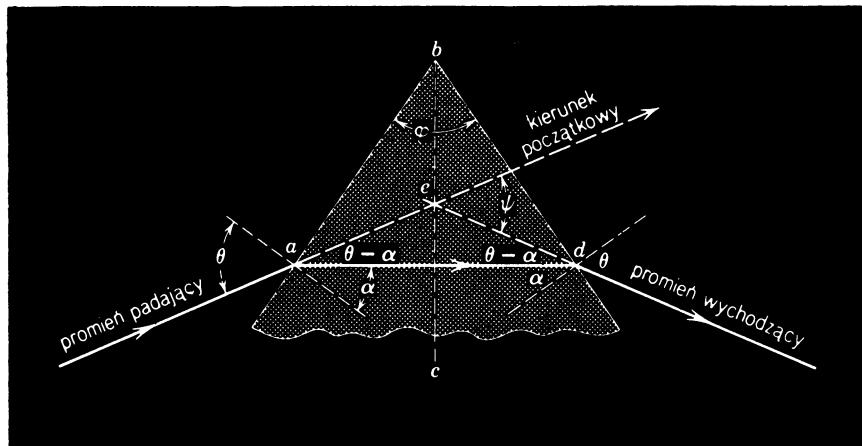
Dla fali o długości 500 nm mamy

$$\sin 30^\circ = 1,4624 \sin \theta'_2,$$

skąd  $\theta'_2 = 19,99^\circ$ .

Kąt  $\Delta\theta$  między tymi promieniami wynosi  $0,11^\circ$ , przy czym krótszej fali będzie odpowiadał większy kąt odchylenia, ponieważ kąt załamania jest dla niej mniejszy.

**Przykład 3.** Promień pada na ściankę szklanego pryzmatu znajdującego się w powietrzu (rys. 43-6).



Rys. 43-6. Przykład 3

Kąt padania  $\theta$  jest tak dobrany, że promień wychodzący z pryzmatu tworzy kąt  $\theta$  z normalną do drugiej ścianki. Znaleźć wyrażenie na współczynnik załamania szkła pryzmatu względem powietrza.

Zauważmy, że  $\alpha \neq abc = \alpha$ , ponieważ są to kąty o ramionach parami prostopadłych. Tak więc

$$\alpha = \frac{1}{2}\varphi, \quad (43-3)$$

$\varphi$  jest tu kątem lamiącym pryzmatu.

Kąt odchylenia  $\psi$  jest równy sumie dwóch kątów nieprzyległych w trójkącie  $aed$ , czyli

$$\psi = 2(\theta - \alpha).$$

Podstawiając  $\frac{1}{2}\varphi$  za  $\alpha$  i rozwiązuając względem  $\theta$  otrzymamy

$$\theta = \frac{1}{2}(\psi + \varphi). \quad (43-4)$$

W punkcie  $a$  kątem padania jest  $\theta$ , a kątem załamania  $\alpha$ . Prawo załamania (równ. (43-2)) głosi, że

$$\sin \theta = n_{sp} \sin \alpha,$$

gdzie  $n_{sp}$  jest współczynnikiem załamania szkła względem powietrza.

Z równań (43-3) i (43-4) otrzymujemy

$$\sin \frac{1}{2}(\psi + \varphi) = n_{sp} \sin \left( \frac{1}{2}\varphi \right),$$

skąd

$$n_{sp} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\psi + \varphi)}{\sin \left( \frac{1}{2}\varphi \right)}; \quad (43-5)$$

jest to poszukiwanie wyrażenie. Wyrażenie to jest prawdziwe tylko dla  $\theta$  tak dobranego, że bieg promienia w pryzmacie jest symetryczny. Kąt odchylenia  $\psi$  jest wtedy najmniejszy. Dla kątów mniejszych bądź większych od  $\theta$  otrzymujemy większe odchylenia. Kąt  $\theta$  jest nazywany *kątem najmniejszego odchylenia*.

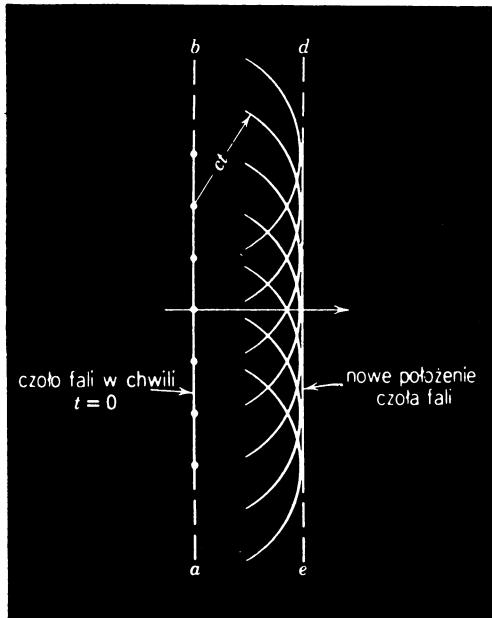
## 43-2. Zasada Huygensa

Żadna teoria światła nie zostanie uznana, jeżeli nie potrafi wytlumaczyć potwierdzonych doświadczalnie praw odbicia i załamania światła. Prawa te można wyprowadzić z równań Maxwella, jest to jednak tutaj matematycznie zbyt trudne. Na szczęście te i kilka innych praw optyki można wyprowadzić w oparciu o prostszą, choć może mniej wszechstronną teorię światła, podaną przez holenderskiego fizyka Christiana Huygensa w 1678 r. W teorii tej zakłada się, że światło jest falą, a nie strumieniem cząstek. Nie mówi ona nic o charakterze tej fali, w szczególności nie wspomina o elektromagnetycznym charakterze światła (teoria elektromagnetyzmu Maxwella powstała dopiero po upływie wieku). Huygens nie wiedział czy światło jest falą podłużną, czy poprzeczną, nie znał długości fali światła widzialnego ani jego prędkości. Niemniej jednak jego teoria oddała ogromne usługi, będąc przez wiele lat motorem doświadczeń i pozostała użyteczna w pedagogice i w niektórych innych zastosowaniach praktycznych. Nie można jednak oczekiwać, że da ona takie samo bogactwo informacji, jakie daje pełniejsza, elektromagnetyczna teoria Maxwella.

Teoria Huygensa oparta jest na konstrukcji geometrycznej, zwanej *zasadą Huygensa*. Pozwala ona przewidzieć, gdzie znajdzie się czoło fali w dowolnej chwili w przyszłości, jeżeli znamy obecne jego położenie. Zasada ta głosi, że *wszystkie punkty czoła fali można uważać za źródła nowych fal kulistych. Położenie czoła fali po czasie t będzie dane przez powierzchnię styczną do tych fal kulistych*.

Zilustrujmy to elementarnym przykładem. Dane jest czoło fali płaskiej ( $ab$  na rys. 43-7) w próżni. Gdzie będzie się znajdowało czoło tej fali po czasie  $t$ ? Zgodnie z zasadą Huygensa kilka dowolnie wybranych punktów na tej powierzchni (rys. 43-7) będziemy

traktować jako źródła nowych fal kulistych. Po czasie  $t$  promienie tych kul będą równe  $ct$ , gdzie  $c$  jest prędkością światła w próżni. Powierzchnia styczna do tych kul po czasie  $t$  jest przedstawiona linią  $de$ . Jak należało się spodziewać, jest ona równoległa do powierzchni zaznaczonej linią  $ab$  i odległa od niej w kierunku prostopadłym o  $ct$ . Wobec tego powierzchnie falowe fali płaskiej będące płaszczyznami rozchodzą się w przestrzeni z prędkością  $c$ . Zauważmy, że metoda Huygensa oparta jest na konstrukcji trójwymiarowej i że rys. 43-7 przedstawia przekrój takiej konstrukcji w płaszczyźnie kartki.



Rys. 43-7. Rozchodzenie się fali płaskiej w próżni, przedstawione za pomocą elementarnych fal Huygensa. Zauważmy, że promień (strzałka pozioma) reprezentujący falę jest prostopadły do czło fali

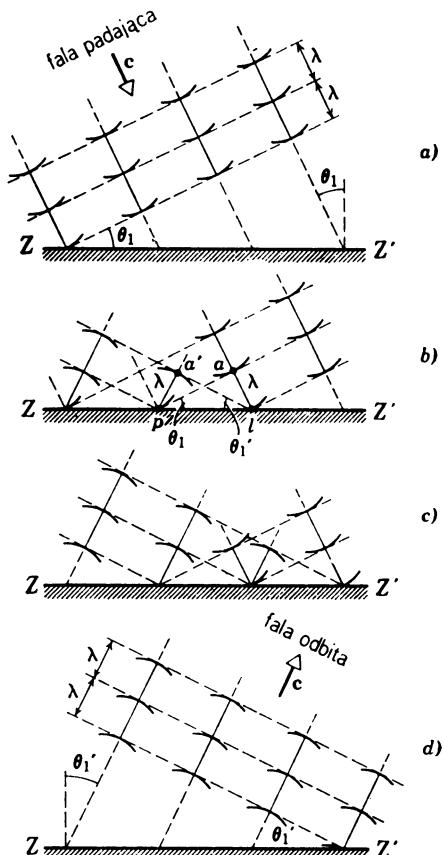
Można by oczekiwać, że — wbrew obserwacjom — fala może być przez punkty na rys. 43-7 emitowana zarówno do tyłu, jak do przodu. Ażeby obejść tę trudność, zakłada się, że natężenie fal kulistych nie jest jednakowe we wszystkich kierunkach, lecz zmienia się w sposób ciągły od maksimum dla kierunku w przód do zera dla kierunku w tył. Zostało to zaznaczone na rys. 43-7 przez wycienianie łuków. Metoda Huygensa daje się zastosować jakościowo do wszelkich zjawisk falowych (patrz zadanie 14). Podstawy matematyczne tej metody zostały opracowane przez Augustina Fresnela (1788–1827).

### 43-3. Zasada Huygensa a prawo odbicia

Rysunek 43-8a przedstawia trzy powierzchnie falowe fali płaskiej, padającej na zwierciadło  $ZZ'$ . Dla wygody przyjęto, że odległość między nimi równa jest długości fali. Zauważmy, że  $\theta_1$ , kąt pomiędzy czolem fali i zwierciadłem, jest równy kątowi pomiędzy promieniem padającym i prostopadłą do zwierciadła. Innymi słowy,  $\theta_1$  jest kątem padania. Te trzy powierzchnie falowe są związane ze sobą przez konstrukcję Huygensa jak na rys. 43-7.

Fale Huygensa na rys. 43-8b rozprzestrzeniają się w ciągu czasu  $\lambda/c$  z punktu  $a$  do  $l$ . Z punktu  $p$  tego samego czola fali światło nie może biec poza zwierciadło, lecz musi rozchodzić się jako kulista fala Huygensa do tyłu. Zataczamy z punktu  $p$  promieniem  $\lambda$  łuk, do którego czolem fali będzie styczne. Ponieważ na nowym czole fali musi leżeć punkt  $l$ ,

styczna ta musi przechodzić, przez  $l$ . Zauważmy, że kąt  $\theta'_1$  pomiędzy czołem fali i zwierciadłem jest równy kątowi pomiędzy promieniem odbitym i prostopadłą do zwierciadła. Innymi słowy  $\theta'_1$  jest *kątem odbicia*.



Rys. 43-8. Odbicie fali płaskiej od zwierciadła płaskiego przedstawione za pomocą elementarnych fal Huygensa

Rozpatrzmy trójkąty prostokątne  $alp$  i  $a'lp$ . Mają one jeden bok  $lp$  wspólny oraz bok  $al$  równy bokowi  $a'p$  ( $= \lambda$ ). Takie dwa trójkąty prostokątne są przystające i możemy napisać

$$\theta_1 = \theta'_1$$

zgodnie z prawem odbicia. Jeśli przypomnimy sobie, że konstrukcja Huygensa jest trójwymiarowa i że narysowane luki są właściwie wycinkami powierzchni, będziemy mogli przekonać się, że promień odbity leży w płaszczyźnie wyznaczonej przez wiązkę padającą i normalną do powierzchni zwierciadła, tzn. w płaszczyźnie rysunku 43-8. Tego również wymaga prawo odbicia (patrz. str. 419).

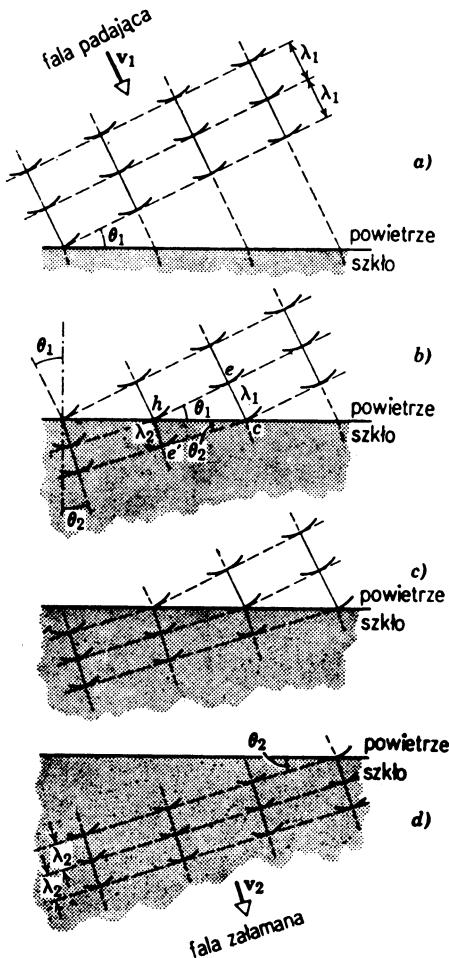
#### 43-4. Zasada Huygensa a prawo zalamania

Rysunek 43-9 przedstawia cztery kolejne stadia przy przechodzeniu trzech powierzchni falowych fali płaskiej przez powierzchnię odgraniczającą powietrze (ośrodek 1) od szkła (ośrodek 2). Dla wygody przyjmujemy, że odstęp między kolejnymi powierzchniami

falowymi wiązki padającej jest równy długości fali w ośrodku 1. Niech prędkość światła w powietrzu będzie  $v_1$ , a w szkle  $v_2$ . Zakładamy, że

$$v_2 < v_1. \quad (43-6)$$

Założenie o prędkościach jest istotne dla dalszych rozważań. Ze względu na trudności techniczne nie można było w tych czasach sprawdzić go doświadczalnie. Dopiero Foucault w 1850 r. wykazał, że założenie to jest prawdziwe. Powierzchnie falowe na rys. 43-9a



Rys. 43-9. Załamanie fali płaskiej na granicy dwóch ośrodków przedstawione za pomocą elementarnych fal Huygensa. Dla uproszczenia nie uwzględniono fali odbitej. Zauważmy, że przy załamaniu długość fali uległa zmianie

zostały otrzymane przez zastosowanie konstrukcji Huygensa z rys. 43-7.  $\theta_1$  jak na rys. 43-8 jest kątem padania. Rozważmy na rysunku 43-9b czas ( $= \lambda_1/v_1$ ), w jakim fala Huygensa przebiega z punktu  $e$  do  $c$ . Z punktu  $h$  światło w tym samym czasie przebiegnie mniejszą odległość, ponieważ jego prędkość w szkle jest mniejsza (założenie z równ. 43-6).

$$\lambda_2 = \lambda_1 \frac{v_2}{v_1}. \quad (43-7)$$

Czoło fali załamanej musi być styczne do łuku o takim promieniu ze środkiem w  $h$ .

Ponieważ  $c$  leży na nowym czołole fali, styczna musi przechodzić przez ten punkt, tak jak na rysunku. Zauważmy, że  $\theta_2$ , kąt pomiędzy czołem fali załamanej i powierzchnią szkła, jest równy kątowi pomiędzy promieniem załamany i prostopadłą do tej powierzchni. Innymi słowy  $\theta_2$  jest *kątem załamania*. Zauważmy ponadto, że długość fali w szkle  $\lambda_2$  jest mniejsza niż w powietrzu  $\lambda_1$ .

Dla trójkątów prostokątnych *hce* i *hce'* mamy

$$\sin \theta_1 = \frac{\lambda_1}{hc} \quad (\text{dla } hce),$$

$$\sin \theta_2 = \frac{\lambda_2}{hc} \quad (\text{dla } hce').$$

Dzieląc stronami i korzystając z równania (41-7) otrzymamy

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2} = \text{const.} \quad (43-8)$$

Przepis (równ. 43-2) głosi, że

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = n_{21}, \quad (43-2)$$

wobec tego stwierdzamy, że  $n_{21}$  jest stosunkiem prędkości światła w dwóch ośrodkach, czyli

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (43-9)$$

Równanie (43-8) możemy przepisać w postaci

$$\frac{c}{v_1} \sin \theta_1 = \frac{c}{v_2} \sin \theta_2, \quad (43-10)$$

gdzie  $c$  jest prędkością światła w próżni. Wielkości  $(c/v_1)$  i  $(c/v_2)$  (patrz równ. (43-9)) są współczynnikami załamania ośrodków 1 i 2 względem próżni. Wprowadzając oznaczenia  $n_1$  i  $n_2$  dla tych współczynników możemy napisać prawo załamania w postaci

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2. \quad (43-11)$$

Jeżeli założymy, że ośrodkiem ponad szkłem na rys. 43-9 jest próżnia, a nie powietrze, prędkość  $v_1$  będzie równa  $c$ , a długość fali oznaczona na rys. 43-9 przez  $\lambda_1$  będzie długością  $\lambda$  charakterystyczną dla próżni. Równanie (43-7) można wtedy zapisać następująco

$$\lambda_2 = \lambda \frac{v_2}{c} = \frac{\lambda}{n_2} \quad (43-12a)$$

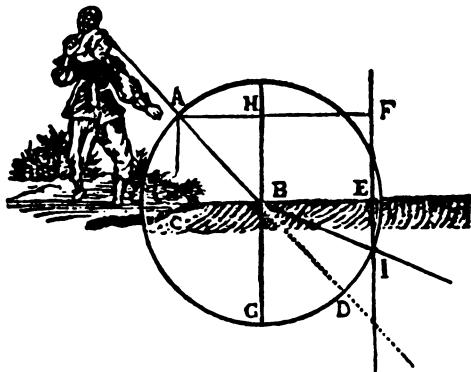
lub

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n}. \quad (43-12b)$$

Widzimy stąd, że długość fali świetlnej w ośrodku materialnym jest mniejsza niż w próżni. Na rysunku 43-9 widać wyraźnie różnice długości fali w dwóch różnych ośrodkach.

Z zastosowania zasady Huygensa do załamania światła wynika, że jeżeli promień świetlny przy przejściu z powietrza do ośrodką gęstego optycznie jest ugięty ku prostopadlej, to prędkość światła w tym op-

tycznie gestym ośrodka (powiedzmy szkle) musi być *mniejsza* niż w powietrzu (patrz rys. 43-5). Wymaganie to musi być spełnione przez wszystkie teorie światła. Wcześniejszta, korpuskularna teoria światła, sformułowana przez Newtona, mogła wyjaśniać załamanie światła tylko przy założeniu, że prędkość światła w ośrodku, w którym światło ugina się ku prostopadłej (ośrodek optycznie gęstszy), jest *większa* niż w powietrzu. Ośrodek gęsty musiałby działać siłą przyciągającą na „korpuskuły” światła, podczas zbliżania się ich do powierzchni, przyspieszając je i zmieniając ich kierunek tak, żeby biegły pod mniejszym kątem do prostopadłej. Rysunek 43-10 wzięto z pracy René Descartes'a z 1637 r., w której przeprowadza on analogię między załamaniem światła i ruchem piłeczek przy przejściu do ośrodka, w którym porusza się ona wolniej.

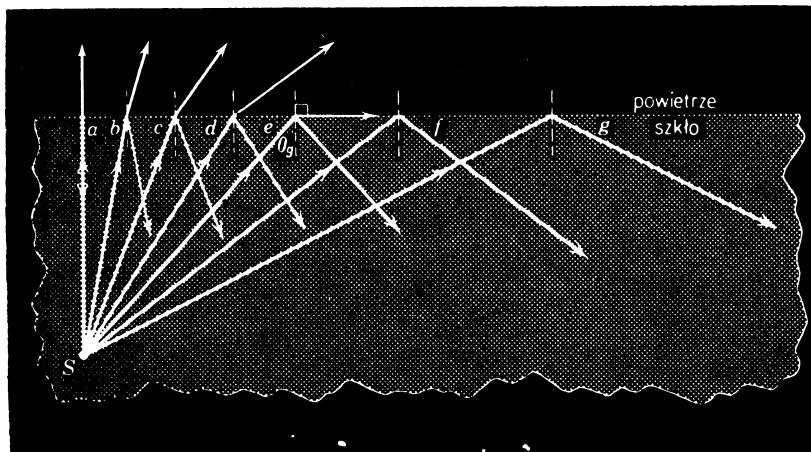


Rys. 43-10. *ABI* przedstawia drogę promienia przechodzącego do ośrodka, w którym jego prędkość jest mniejsza, tak jak to opisuje wcześnie (niesłuszna) korpuskularna teoria światła. Poprawna teoria światła wymaga, żeby prędkość przedstawionego promienia w ośrodku dolnym (poniżej *BE*) była większa; wzięto z książki: Descartes, *La Dioptrique* (1637)

Doświadczenie porównujące prędkość światła w wodzie i w powietrzu rozstrzyga o słuszności falowej, bądź korpuskularnej teorii światła. Pierwszy takie doświadczenie przeprowadził Foucault w 1850 r. Wykazał on niezbicie, że światło rozchodzi się wolniej w wodzie niż w powietrzu, co obalało ostatecznie korpuskularną teorię Newtona.

### 43-5. Całkowite wewnętrzne odbicie

Niech promień świetlny biegący w ośrodku optycznie gęstym (powiedzmy szkle) pada na powierzchnię odgraniczającą ten ośrodek od drugiego ośrodka o mniejszej gęstości optycznej (powiedzmy powietrza), jak to przedstawiono na rys. 43-11. Jeżeli kąt padania  $\theta_i$



Rys. 43-11. Całkowite wewnętrzne odbicie światła wychodzącego ze źródła *S*; kąt graniczny  $\theta_g$

wzrasta, dochodzimy do sytuacji, w której promień załamany biegnie równolegle do powierzchni łamiącej (promień  $e$ ), czyli kąt załamania równa się  $90^\circ$ . Dla kątów padania większych od tego *kąta granicznego*  $\theta_g$  nie otrzymamy promienia załamanego, natomiast zajdzie zjawisko zwane *całkowitym wewnętrznym odbiciem*.

Aby wyznaczyć kąt graniczny w prawie załamania podstawiamy  $\theta_2 = 90^\circ$  (patrz równ. (43-11))

$$n_1 \sin \theta_g = n_2 \sin 90^\circ,$$

skąd

$$\sin \theta_g = \frac{n_2}{n_1}. \quad (43-13)$$

Dla szkła i powietrza  $\sin \theta_g = 1,00/1,50 = 0,667$ , wobec czego  $\theta_g = 41,8^\circ$ . Całkowite odbicie nie może mieć miejsca, gdy światło przechodzi z ośrodka o mniejszym współczynniku załamania do ośrodka o współczynniku większym.

Światło można przesyłać z jednego punktu do drugiego z małymi stratami, przy pomocy cienkich przewodów z przezroczystego płyty. Światło wchodzące do tego przewodu na jednym końcu doznaje na bocznych ścianach całkowitego odbicia, dzięki czemu nie może opuścić przewodu, dopóki nie osiągnie drugiego końca. Obrazy mogą być przesyłane z jednego miejsca w inne, jeżeli użyjemy pęczka włókien z czystego szkła, z których każde przenosi małą część obrazu\*.

Technika włókien optycznych umożliwia zbudowanie wielu pożytecznych urządzeń optycznych dla przesyłania i przetwarzania obrazów świetlnych. Rysunek 43-12 przedstawia wiązkę krótkich włókien skonstruowaną w ten sposób, że włókna zwężają się stopniowo. Szeroki koniec umieszczono nad literą S w słowie „OPTICS”. W zwierciadle umieszczonej nad wiązką widzimy, że litera S została zmniejszona i przekazana poprzez wiązkę w wyniku całkowitych odbić do węższego końca.

Rysunek 43-13 przedstawia powiększoną przekrój takiej wiązki włókien, w której średnice poszczególnych włókien są tak małe, że są one porównywalne z długością fali światła. Jest to sprzeczne z założeniem ze str. 420 stwierdzającym, że poprzeczne wymiary powierzchni odbijających i załamujących muszą być duże w stosunku do długości fali i zachodzących tu zjawisk nie można traktować jako odbicia i załamania promieni świetlnych, takich jak na rys. 43-1b i 43-11. Obrazy widoczne na rys. 43-13 można natomiast łatwo wyjaśnić na gruncie elektromagnetycznej teorii światła, dostarczając poglądowego argumentu na rzecz tej teorii. Włókna zachowują się tu jak falowody (patrz paragraf 41-6), a obrazy zaciemnień i rozjaśnień przedstawiają rozkład wektorów E i B dla różnych rodzajów drgań elektromagnetycznych rozchodzących się wzdłuż falowodów.

W roku 1977 zapoczątkowano serię kilku eksperymentalnych prób (testów) praktycznej łączności telefonicznej\*\* przy użyciu włókien optycznych. W teście prowadzonym w Chicago z 24 włókien wielkości włosa utworzono kabel o średnicy 1,27 cm (wraz z otoczką ochronną) i długości 2,4 km. Wejściowy sygnał glosowy jest przekształcany w kodowane impulsy światła, przesyłane wzdłuż włókien z częstotliwością 4,47 impulsów na sekundę; impulsy są odtwarzane na końcu kabla, dając dokładne kopie sygnału wejściowego. Projektowana pojemność kabla wynosi 8064 równoczesnych dwukierunkowych rozmów. Wymagania co do chemicznej czystości materiałów włókien oraz projektów urządzeń wejściowych i wyjściowych przetwarzających sygnały elektryczne w optyczne i optyczne w elektryczne na końcach kabla zbliżają technologie ciała stałego i badania materiałowe do granic dzisiejszych możliwości tych dziedzin.

**Przykład 4.** Rysunek 43-14a przedstawia trójkątny pryzmat szklany, w którym promień prostopadły do jednej ze ścianek ulega całkowitemu odbiciu. Co można powiedzieć o współczynniku załamania szkła  $n$ , jeżeli  $\theta_1$  wynosi  $45^\circ$ ?

\* Patrz: N. S. Kapany, Fiber Optics, *Scientific American*, November 1960.

\*\* Patrz: J. S. Cook, Communication by Optical Fiber, *Scientific American*, November 1973; John H. Douglas, Telephoning by Light, I: The Breakthroughs, *Science News*, July 1975; W. S. Boyle, Light-Wave Communications, *Scientific American*, August 1977.



Rys. 43-12. Wiązka zwężających się włókien (na dole) jest umieszczona nad literą S. Powyżej mamy, widziany za pomocą zwierciadła zmniejszony obraz, przeniesiony przez poszczególne włókna w wyniku całkowitych odbić wewnętrznych. (Optics Technology, Inc., reprodukowane za zgodą dr N. S. Kapany'ego)

Kąt  $\theta_1$  musi być równy albo większy od kąta granicznego  $\theta_s$ , gdzie  $\theta_s$  jest dany równaniem (43-13)

$$\sin \theta_s = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{n}.$$

Ze względów praktycznych przyjęto, że współczynnik załamania powietrza,  $n_2$  jest równy jedności. Przy-  
puśćmy, że współczynnik załamania szkła jest taki, że kąt padania jest równy kątowi granicznemu, tzn. że  
 $\theta_s = 45^\circ$ . Mamy wówczas

$$n = \frac{1}{\sin 45^\circ} = 1,41.$$

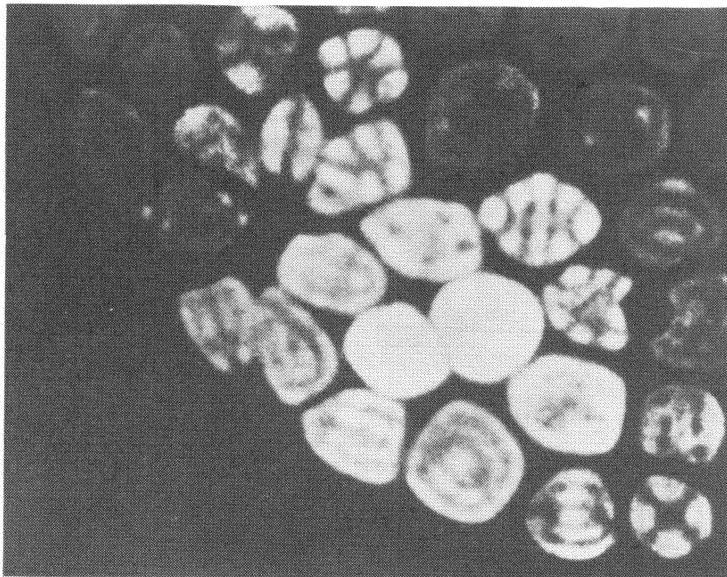
Współczynnik załamania szkła musi być równy albo większy niż 1,41. Jeżeli był mniejsy, nie nastą-  
piły całkowite wewnętrzne odbicie.

**Przykład 5.** Co się stanie, gdy pryzmat z przykładu 4 (przy założeniu, że  $n = 1,50$ ) zanurzymy w wo-  
dzie ( $n = 1,33$ ). Patrz rys. 43-14b.

Nowy kąt graniczny dany równaniem (43-12) wynosi

$$\sin \theta_s = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1,33}{1,50} = 0,887,$$

co daje  $\theta_s = 62,5^\circ$ . Ponieważ rzeczywisty kąt padania jest mniejszy, całkowite wewnętrzne odbicie nie  
wystąpi.



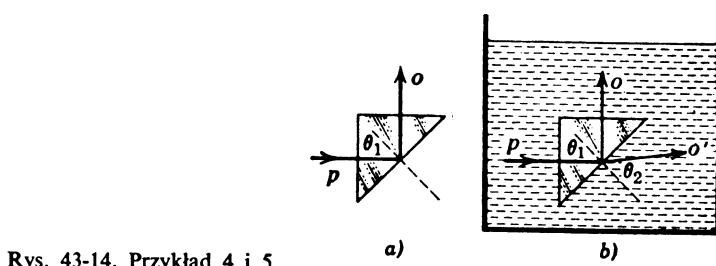
Rys. 43-13. Mikrozdjęcie światła wychodzącego z końca wiązki włókien. Średnica włókien jest rzędu dłuższości fali światła, tak że każde włókno działa jak „optyczny falowód”. Jest to naoczny dowód, że światło jest falą elektromagnetyczną. (Optics Technology, Inc., reprodukowane za zgodą dr N. S. Kapany'ego)

Jak widać na rys. 43-14b, oprócz promienia odbitego pod kątem  $45^\circ$  otrzymamy także promień załamany. Kąt załamania otrzymujemy z równania

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2,$$

$$1,50 \sin 45^\circ = 1,33 \sin \theta_2,$$

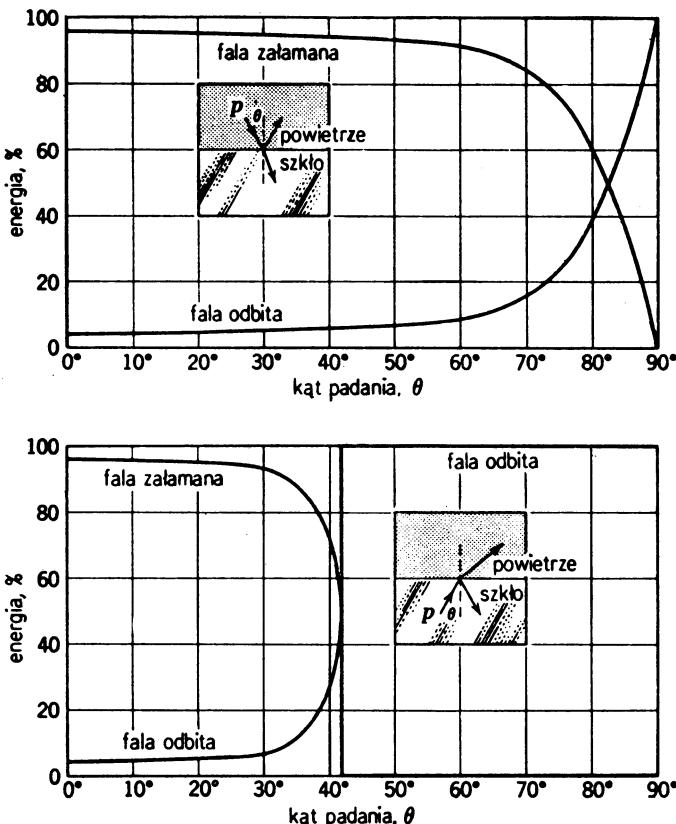
skąd mamy  $\theta_2 = 52,9^\circ$ . Pokazać, że gdy  $n_2 \rightarrow n_1$ , wówczas  $\theta_s \rightarrow 90^\circ$ .



Rys. 43-14. Przykład 4 i 5

Równania Maxwella pozwalają obliczyć, w jaki sposób energia wiązki padającej dzieli się pomiędzy wiązkę odbitą i załamana. Rysunek 43-15 pokazuje przewidywania teoretyczne dla: (a) wiązki światła w powietrzu, padającej na powierzchnię szkła, (b) wiązki padającej na tę samą powierzchnię od strony szkła. Z rysunku 43-15a widać, że dla kątów padania do  $50^\circ$ , mniej niż 10% energii światła zostaje odbite. Za to dla wiązki ślizgającej się (tzn. dla kąta padania bliskiego  $90^\circ$ ) powierzchnia ta staje się dobrym zwierciadłem. Wszyscy dobrze znamy własności mokrej drogi, która doskonale odbija światło reflektorów samochodowych.

Z rysunku 43-15b jasno wynika, że dla pewnego kąta granicznego (w tym przypadku  $41,8^\circ$  — patrz równanie (43-13)) całe światło zostaje odbite. Dla kątów padania znacznie mniejszych od tej wartości odbite jest około 4% energii.



Rys. 43-15. (a) Procent energii odbitej i załamanej, gdy fala przechodzi z powietrza do szkła ( $n = 1,50$ ).  
 (b) To samo dla fali przechodzącej ze szkła do powietrza ulegającej całkowitemu wewnętrznemu odbiciu

### 43-6. Zasada Fermata

W roku 1650 Pierre Fermat odkrył ważną zasadę, którą wyrażamy dość często w następujący sposób: *Promień świetlny biegący z jednego punktu do drugiego przebywa drogę, na której przebycie trzeba zużyć w porównaniu z innymi, sąsiednimi drogami, minimum albo maksimum czasu, albo tę samą ilość czasu (w przypadku stacjonarnym).*

Z tej zasady łatwo możemy wyprowadzić prawa odbicia i załamania. Na rysunku 43-16 przedstawione są dwa punkty  $A$  i  $B$  oraz łączący je promień  $APB^*$ . Całkowita długość drogi tego promienia wynosi

$$l = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d-x)^2},$$

gdzie  $x$  jest zmienną zależną od położenia punktu  $P$ , w którym promień odbija się od zwierciadła.

Zgodnie z zasadą Fermata punkt  $P$  umieścimy tak, żeby czas przebycia tej drogi przez światło był minimalny (lub maksymalny lub też pozostał niezmieniony). Metoda obliczenia polega na przyrównaniu  $dl/dx$  do zera. Obliczając tę pochodną otrzymujemy

$$\frac{dl}{dx} = \frac{1}{2} (a^2 + x^2)^{-1/2} 2x + \frac{1}{2} [b^2 + (d-x)^2]^{-1/2} 2(d-x)(-1) = 0;$$

możemy to napisać inaczej

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}.$$

\* Zakładamy, że promień  $APB$  leży w płaszczyźnie rysunku. Patrz zadanie 26.

Porównując to równanie z danymi przedstawionymi na rys. 43-16 widzimy, że możemy je przedstawić w postaci

$$\sin \theta_1 = \sin \theta'_1,$$

czyli

$$\theta_1 = \theta'_1.$$

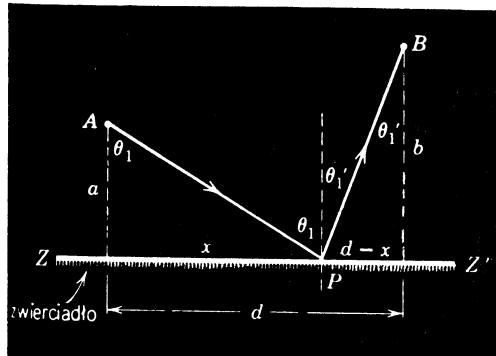
co jest prawem odbicia.

W celu wyprowadzenia prawa załamania z zasady Fermata rozważmy rys. 43-17, który przedstawia dwa punkty  $A$  i  $B$  w dwóch różnych ośrodkach i łączący je promień  $APB$ . Czas  $t$  jest dany wzorem

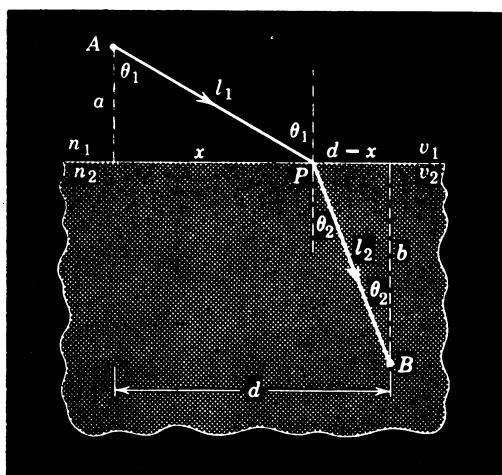
$$t = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2}.$$

Uwzględniając zależność  $n = c/v$  możemy powyższe zapisać w postaci

$$t = \frac{n_1 l_1 + n_2 l_2}{c} = \frac{l}{c}.$$



Rys. 43-16. Promień wychodzący z punktu  $A$  przechodzi przez punkt  $B$  po odbiciu w punkcie  $P$



Rys. 43-17. Promień wychodzący z punktu  $A$  przechodzi przez punkt  $B$  po załamaniu w punkcie  $P$

Wielkość  $l (= n_1 l_1 + n_2 l_2)$  nazywamy *drogą optyczną promienia*. Z równania (43-12b) widać, że droga optyczna jest równa drodze o takiej długości, że zmieściłaby się na niej ta sama liczba fal, gdyby ośrodkiem była próżnia. Drogi optycznej nie należy mylić z drogą geometryczną, która jest równa  $l_1 + l_2$ .

Na podstawie zasady Fermata wiemy, że  $l$  musi być minimalne (albo maksymalne lub pozostawać niezmienione), czyli  $x$  musi być tak dobrane, aby  $dl/dx = 0$ . Droga optyczna wynosi

$$l = n_1 l_1 + n_2 l_2 = n_1 \sqrt{a^2 + x^2} + n_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2}.$$

Różniczkując otrzymamy

$$\frac{dl}{dx} = \frac{1}{2} n_1 (a^2 + x^2)^{-1/2} 2x + \frac{1}{2} n_2 [b^2 + (d-x)^2]^{-1/2} 2(d-x)(-1) = 0,$$

co można przepisać w postaci

$$n_1 \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = n_2 \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}.$$

Porównując to z rys. 43-17 mamy z kolei

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2,$$

co jest prawem załamania.

We wszystkich przykładach podanych w tym rozdziale czas albo — co jest równoznaczne — droga optyczna, był *minimalny*.

## Pytania

1. Opisz, jak wyglądałoby Twoje najbliższe otoczenie, gdyby wszystkie przedmioty całkowicie pochłaniały światło. Czy mógłbyś cokolwiek widzieć siedząc na krześle w pokoju? Czy widziałbyś osobę wchodząą do pokoju?
2. Czy można oczekiwać, że fale akustyczne podlegają prawom odbicia i załamania, takim jak fale świetlne? Przedyskutować rozchodzenie się fal kulistych i cylindrycznych stosując zasadę Huygensa. Czy można stosować zasadę Huygensa do fal akustycznych w powietrzu? Skoro zasada Huygensa pozwala przewidywać prawa odbicia i załamania dla światła, to dlaczego jest konieczne lub przynajmniej pożądane rozpatrywanie światła jako fali elektromagnetycznej, z całą towarzyszącą jej złożonością?
3. Światła uliczne odbite w pofałowanej powierzchni wody wydają się bardzo wydłużone. Wyjaśnić dlaczego?
4. Wiązka światła na rys. 43-1a jest poszerzona przy wejściu do wody. Wyjaśnić dlaczego.
5. O ile procent różni się prędkość światła niebieskiego i czerwonego w topionym kwarcu?
6. Czy zjawiska (a) odbicia i (b) załamania mogą być wykorzystane do wyznaczenia długości fali świetlnej?
7. Jak wyznaczyć współczynniki załamania innych ośrodków względem wody korzystając z danych z tablicy 43-1?
8. Mamy sześciian wykonany ze szkła. Jak można znaleźć prędkość światła (ze źródła sodowego) w tym sześcianie?
9. Opisać i wyjaśnić, co widzi ryba, gdy patrzy w różne strony ponad swoim „horyzontem”.
10. W jaki sposób przeprowadzone przez Foucaulta pomiary prędkości światła w wodzie mogły rozstrzygnąć o prawdziwości falowej, bądź korpuskularnej teorii światła?
11. Dlaczego brylant „błyszczący” silniej niż imitacje szklane o tym samym kształcie?
12. Czy naprawdę długość fali świetlnej powinna zmieniać się przy przejściu z powietrza do szkła, a częstość nie? Wyjaśnić to.
13. Światło charakteryzuje się (a) długością fali, (b) częstością i (c) prędkością rozchodzenia się. Czy któraś z tych wielkości pozostaje nie zmieniona, gdy światło przechodzi z próżni do płytki szklanej? Która?
14. Dlaczego w zjawisku odbicia i załamania promienie odbity i załamany leżą w płaszczyźnie wyznaczonej przez promień padający i prostopadłą do powierzchni? Czy potrafisz wymyślić jakieś wyjątki?
15. Co jest przyczyną miraży? Czy ma to coś wspólnego z tym, że współczynnik załamania dla powietrza nie jest stały, lecz zmienia się wraz z jego gęstością? Patrz: Alistair B. Fraser, William B. Mach, *Mirage*, *Scientific American*, January, 1976.
16. Wymyślić peryskop wykorzystujący zalety całkowitego wewnętrznego odbicia. Pod jakimi względami będzie on lepszy od peryskopu ze srebrzonymi lustrami?
17. Jakie cechy musi mieć materiał, aby można było wykonać z niego przewód świetlny o dużej wydajności?
18. Szczoteczka do zębów ma czerwoną plastikową rączkę, w której osadzono rzędy nylonowych włosków. Szcztyły włosków (ale nie ich podstawy) wydają się czerwone. Wyjaśnić dlaczego?
19. Omów zjawisko powstawania tęczy. Patrz: H. Moysés Nussenzveig, *Theory of Rainbow (Teoria tęczy)*, *Scientific American*, April 1977.
20. Dlaczego włókna optyczne są potencjalnie bardziej wydajnymi przekaźnikami informacji niż np. mikrofale lub kable telefoniczne? Pomyśl o częstościach z jakimi się tu stykamy.
21. Co oznacza termin „droga optyczna”? Czy długość drogi optycznej może kiedykolwiek być mniejsza niż długość drogi geometrycznej? a większa od niej?
22. Roztwór siarczanu miedziowego jest niebieski, gdy oglądamy go w świetle przechodzącym. Czy to oznacza, że roztwór siarczanu miedziowego selektywnie pochłania światło niebieskie? Przedyskutuj to.
23. Jeśli jesteś znawcą literatury angielskiej i interesuje Cię James Joyce, co mogłyby dla Ciebie znaczyć litery *alp* i *hce* na rysunkach 43-8 i 43-9?

## Zadania

### Paragraf 43-1

1. Długość fali żółtej linii sodu w powietrzu wynosi 589 nm (5890 Å). (a) Jaka jest jej częstotliwość? (b) Jaką jest długość fali w szkle o współczynniku załamania 1,52? Posługując się wynikami (a) i (b) znaleźć prędkość fali w tym szkle.

Odp.: (a)  $5,1 \cdot 10^{14}$  Hz. (b) 388 nm. (c)  $1,98 \cdot 10^8$  m/s.

2. Dowieść, że jeżeli zwierciadło obróci się o kąt  $\alpha$ , to promień odbity zmieni kierunek o kąt  $2\alpha$ . Czy wynik jest słuszny dla  $\alpha = 45^\circ$ ?

3. Ptolemeusz, który żył w Aleksandrii w końcu pierwszego wieku naszej ery, zmierzył kąty padania  $\theta_1$  i załamania  $\theta_2$  światła przechodzącego z powietrza do wody i otrzymał następujące wartości:

$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_1$	$\theta_2$
10°	7°45'	50°	35°0'
20°	15°30'	60°	40°30'
30°	22°30'	70°	45°30'
40°	29°0'	80°	50°0'

Czy dane te są zgodne z prawem Snella? Jeżeli tak, to jaki współczynnik załamania otrzymamy na ich podstawie? Dane te są interesujące jako najdawniejsze zarejestrowane pomiary fizyczne.

Odp.: Tak;  $n = 1,34$  wobec dzisiejszej wartości 1,33.

4. Jaka jest prędkość światła o długości fali 550 nm (5500 Å) w topionym kwarcu; patrz rys. 43-2.  
 5. Prędkość światła w pewnej cieczy wynosi dla żółtej linii sodu  $1,92 \cdot 10^8$  m/s. Jaki jest współczynnik załamania tej cieczy względem powietrza dla światła sodowego?

Odp.: 1,56.

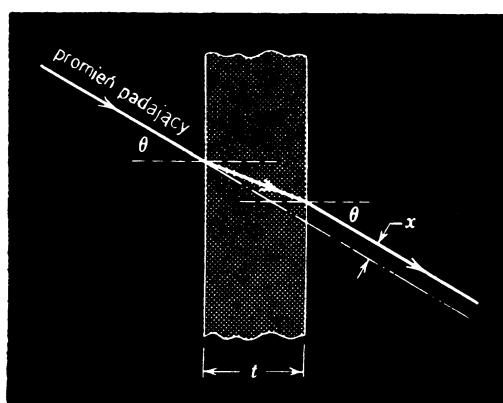
6. Założmy, że prędkość światła w powietrzu została zmierzona z dokładnością do 1 km/s. Obliczając prędkość światła w próżni nie wiemy czy  $n$  dla powietrza wynosi 1,00029, czy 1,00030. (a) Jaki dodatkowy błąd wprowadza to do obliczanej wartości  $c$ ? (b) Ocenić, z jaką dokładnością powinniśmy w tym wypadku znać  $n$ .

7. Na dnie basenu kąpielowego jest osadzony pionowy słup o długości 2,0 m licząc od dna, który wystaje 0,5 m ponad powierzchnię wody. Kąt padania promieni słonecznych wynosi  $45^\circ$ . Jaka jest długość cienia słupa na dnie basenu?

Odp.: 1,4 m.

8. Pryzmat o kącie łamiącym  $60^\circ$  jest wykonany z topionego kwarcu. Promień świetlny pada na ściankę pod kątem  $45^\circ$  do normalnej. Określić graficznie bieg promienia w pryzmacie, wyznaczając drogę przebytą przez promień światła (a) niebieskiego, (b) zielonego i (c) czerwonego. Patrz rys. 43-2 i 43-6.

9. Udosownić, że promień świetlny padający na płasko-równoległą płytce szklanej o grubości  $t$  będzie po przejściu przez płytke przesunięty w stosunku do przedłużenia promienia padającego, jak na rys. 43-18,



Rys. 43-18. Zadanie 9

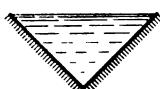
lecz zachowią ten sam kierunek. Wykazać, że dla małych kątów padania  $\theta$  przesunięcie to jest dane wzorem

$$x = t\theta \frac{n-1}{n},$$

gdzie  $n$  jest współczynnikiem załamania, a  $\theta$  — mierzymy w radianach.

10. Założmy, że współczynnik załamania atmosfery ziemskiej zmienia się wyłącznie z wysokością, od pewnej wartości na „krawędzi” atmosfery do innej, większej wartości przy powierzchni Ziemi. (a) Zniedbuując krzywiznę Ziemi, pokazać, że obserwowany kąt między kierunkiem zenitalnym i kierunkiem do jakiejś gwiazdy jest niezależny od sposobu, w jaki współczynnik załamania atmosfery zmienia się wraz z wysokością, a zależy jedynie od wartości  $n$  przy powierzchni Ziemi. (*Wskazówka:* Porównać atmosferę jednorodną z atmosferą składającą się z warstw o wzrastającym współczynniku załamania.) (b) W jaki sposób krzywizna Ziemi wpływa na tę analizę?

11. Dwa prostopadle zwierciadła tworzą boki naczynia napełnionego wodą (rys. 43-19). Promień świetlny pada z góry, prostopadle na powierzchnię wody. (a) Pokazać, że promień wychodzący jest równoległy do promienia padającego. Założyć, że zachodzą dwa odbicia od powierzchni zwierciadeł. (b) Powtórzyć analizę dla przypadku, gdy promień leżący w płaszczyźnie rysunku pada skośnie. (c) Rozważyć podobne zagadnienie z użyciem trzech zwierciadeł.



Rys. 43-19. Zadanie 11

12. Pokazać, że dla cienkiego pryzmatu (małe  $\varphi$ ) i kierunku padania światła zbliżonego do kierunku prostopadłego (małe  $\theta_1$ ) kąt odchylenia jest niezależny od kąta padania i wynosi  $(n-1)\varphi$  (patrz rys. 43-6).

13. Pokazać, używając kątomierza łukowego i śledząc graficznie bieg promienia na rys. 43-6, że jeżeli kąt  $\theta$  dla promienia padającego *rośnie* lub *maleje*, kąt odchylenia  $\psi$  *rośnie*. Przypadek symetrycznego biegu promienia pokazany na rysunku nazywa się *położeniem najmniejszego odchylenia* dla pryzmatu.

#### Paragraf 43-2

14. Koniec kija porusza się w wodzie z prędkością  $v$  większą od prędkości  $u$  fal w wodzie. Stosując zasadę Huygensa do fal w wodzie wykazać, że powstaje stożkowe czoło fali o kącie między tworzącą a wysokością równym  $\alpha$ , określonym wzorem

$$\sin \alpha = \frac{u}{v}.$$

Fałę tę nazywamy *falą uderzeniową*, podobnie jak w przypadku fali wytworzonej przez obiekt poruszający się w powietrzu z prędkością większą od prędkości dźwięku, jak na rys. 20-12.

15. Elektron biegący przez ośrodek z prędkością przewyższającą prędkość rozchodzenia się światła w tym ośrodku, promienia energię elektromagnetyczną (efekt Czerenkowa, patrz paragraf 20-7). Jaką minimalną prędkość musi mieć elektron biegący w cieczy o współczynniku załamania 1,54, aby mógł promieniować?

*Odp.:*  $1,9 \cdot 10^8$  m/s.

#### Paragraf 43-5

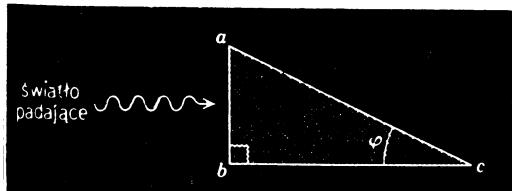
16. Promień świetlny pada prostopadle na ściankę *ab* szklanego pryzmatu ( $n = 1,52$ ), jak pokazano na rys. 43-20. (a) Zakładając, że pryzmat znajduje się w powietrzu, znaleźć największą wartość kąta  $\varphi$ , dla której jeszcze zachodzi całkowite odbicie na ściance *ac*. (b) Znaleźć  $\varphi$ , jeżeli pryzmat jest zanurzony w wodzie.

17. Promień świetlny pada na kwadratową płytę szklaną, jak na rys. 43-21. Jaki musi być współczynnik załamania, aby na prostopadłej ściance mogło zajść całkowite, wewnętrzne odbicie?

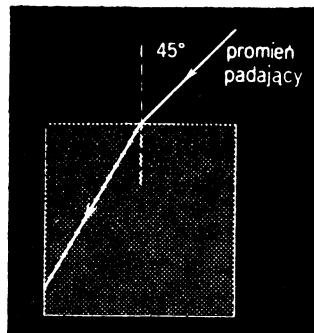
*Odp.:*  $n > 1,22$ .

18. Promień światła monochromatycznego biegący początkowo w powietrzu pada na pryzmat o kącie rozwarcia  $90^\circ$  w punkcie *P*, załamuje się w tym punkcie, a następnie w punkcie *Q* na drugiej ścianie pryzmatu, w ten sposób, że po wyjściu z pryzmatu ślizga się po tej ścianie (rys. 43-22). (a) Obliczyć współ-

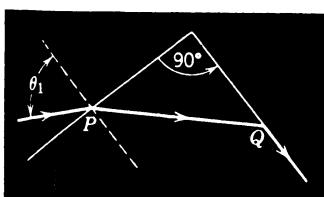
czynnik załamania pryzmatu względem powietrza dla rozważanej długości fali, wyrażając go przez kąt  $\theta_1$ , odpowiadający omawianej sytuacji. (b) Podać liczbową wartość górnej granicy współczynnika załamania dla tego pryzmatu. (c) Pokazać, rysując odpowiednie promienie, co będzie się działo, jeśli kąt padania w punkcie  $P$  będzie nieco większy niż  $\theta_1$  oraz nieco mniejszy niż  $\theta_1$ .



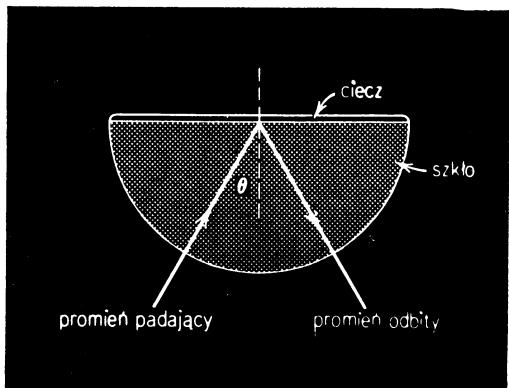
Rys. 43-20. Zadanie 16



Rys. 43-21. Zadanie 17



Rys. 43-22. Zadanie 18



Rys. 43-23. Zadanie 21

19. Szklany pryzmat o kącie przy wierzchołku równym  $60^\circ$  ma  $n = 1,60$ . (a) Jaki jest najmniejszy kąt padania, dla którego promień padający na jedną ściankę pryzmatu wyjdzie przez drugą? (b) Pod jakim kątem musi padać promień, aby przejść przez pryzmat symetrycznie, jak na rys. 43-6?

Odp.: (a)  $36^\circ$ . (b)  $53^\circ$ .

20. Źródło punktowe znajduje się 80 cm pod powierzchnią wody. Znaleźć średnicę największego koła na powierzchni wody, przez które światło może wychodzić z wody.

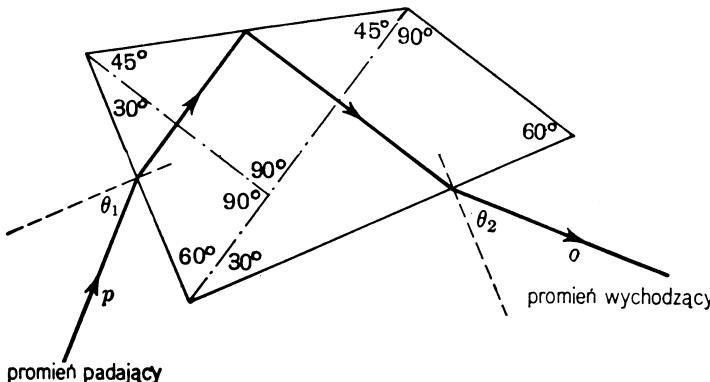
21. Kropelę cieczy możemy umieścić na półokrągłej płytce szklanej, jak na rys. 43-23. (a) Pokazać, jak można wyznaczyć współczynnik załamania cieczy, obserwując całkowite, wewnętrzne odbicie. Współczynnik załamania szkła jest nieznany i trzeba go również wyznaczyć. Czy zakres mierzonych na tej drodze współczynników załamania jest w jakiś sposób ograniczony? (b) Na ile praktyczna, w rzeczywistości, jest ta metoda?

22. Punktowe źródło światła jest umieszczone w odległości  $h$  pod powierzchnią dużego, głębokiego jeziora. (a) Wykazać, że ułamek energii światlnej  $f$ , która wyjdzie przez powierzchnię wody, nie zależy od  $h$  i jest dany wzorem

$$f = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - 1/n^2}),$$

gdzie  $n$  jest współczynnikiem załamania wody. (Uwaga: Zaniedbujemy absorpcję wewnętrz wody i odbicie od powierzchni — z wyjątkiem całkowitego.) (b) Obliczyć ten ułamek dla  $n = 1,33$ .

23. Rysunek 43-24 przedstawia *pryzmat o stałym odchyleniu*. Chociaż jest on wykonany z jednego kawałka szkła, jest on równoważny dwóm pryzmatom o kątach  $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$  i jednemu o kątach  $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ . Padające światło białe ma kierunek  $p$ . Obracając pryzmat, zmieniamy  $\theta_1$  tak, żeby światło o żądanej długości fali biegło po narysowanej drodze i wychodziło wzduż  $o$ . Wykazać, że gdy  $\sin \theta_1 = \frac{1}{2}n$ , wówczas  $\theta_2 = \theta_1$  i promienie  $p$  i  $o$  są do siebie prostopadłe.



Rys. 43-24. Zadanie 23

24. Płaska fala światła białego, przechodząca przez topiony kwarc, trafia na płaską ściankę tego kwarca pod kątem padania  $\theta$ . Czy jest możliwe, aby w wyniku wewnętrznego odbicia wiązka stała się (a) niebieska, (b) czerwona? Jaka musi być w przybliżeniu wartość  $\theta$ ? (Wskazówka: Światło białe stanie się niebieskie, jeżeli usuniemy z wiązki długości fal odpowiadające barwie czerwonej.)

25. Szklany sześcian ma w środku małą plamkę. (a) Jakie części ścianek sześcianu należy zasłonić, aby plamka była niewidoczna niezależnie od tego, z której strony patrzmy? (b) Jaka część całkowitej powierzchni sześcianu jest wówczas zasłonięta? Założymy, że krawędź sześcianu równa się 1,0 cm, a współczynnik załamania 1,50. (Zaniedbujemy zachowanie się promieni odbitych wewnętrznie.)

*Odp.:* (a) Trzeba przykryć środek każdej ścianki nieprzezroczystym dyskiem o promieniu 0,45 cm.  
(b) Około 0,63.

#### Paragraf 43-6

26. Korzystając z zasady Fermata pokazać, że promień odbity, promień padający i normalna leżą w jednej płaszczyźnie.

27. Udowodnić, że drogi optyczne dla promienia odbijającego się i załamującego z rysunków 43-16 i 43-17 są najmniejsze wśród różnych bliskich siebie dróg łączących te same dwa punkty.

28. Światło o długości fali w próżni 600 nm ( $= 6000 \text{ \AA}$ ) przebiega odległość  $1,6 \cdot 10^{-4}$  cm w ośrodku o współczynniku załamania 1,5. Oblicz (a) długość drogi optycznej, (b) długość fali w tym ośrodku oraz (c) różnicę faz po przebyciu tej odległości w ośrodku w porównaniu ze światłem przebiegającym tę samą odległość w próżni.

# 44. Odbicie i załamanie. Fale kuliste i powierzchnie kuliste

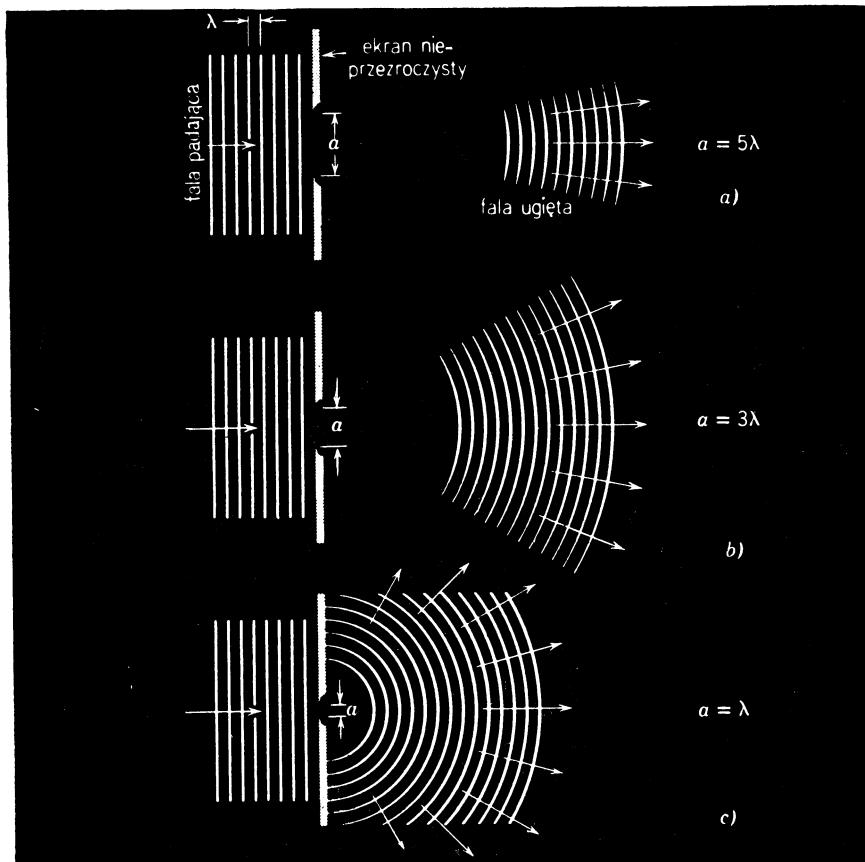
## 44-1. Optyka geometryczna i falowa

W rozdziale 43 omówiliśmy odbicie i załamanie fal płaskich na płaskich powierzchniach. W tym rozdziale rozpatrzymy bardziej ogólny przypadek fal kulistych padających na odbijające i załamujące powierzchnie kuliste. Wszystkie wyniki uzyskane w rozdziale 43 okażą się specjalnym przypadkiem wyników uzyskanych w tym rozdziale, ponieważ płaszczyznę można traktować jako powierzchnię kuli o nieskończonym promieniu.

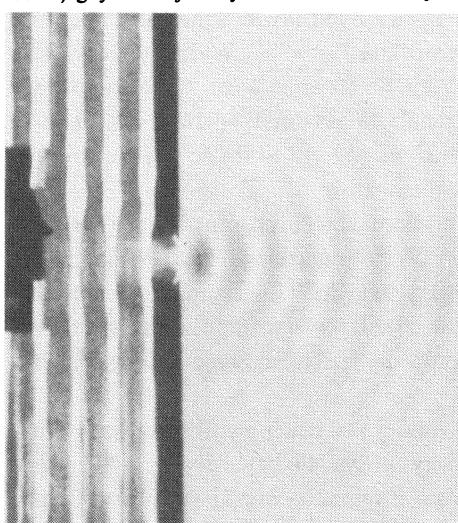
Zarówno w rozdziale 43, jak i w tym rozdziale posługujemy się często pojęciem *promienia*. Chociaż promień jest wygodną konstrukcją myślową, okazuje się fizycznie niemożliwe wyodrębnienie go z wiązki. Rysunek 44-1a przedstawia schematycznie falę płaską o długości fali  $\lambda$  padającą na szczelinę o szerokości  $a = 5\lambda$ . Widzimy, że światło „poszerza” geometryczny obraz szczeliny. Mamy tu do czynienia ze zjawiskiem zwanym *ugięciem światła*, które będziemy badać w rozdziale 46. Rysunek 44-1b ( $a = 3\lambda$ ) i 44-1c ( $a = \lambda$ ) pokazuje, że ugięcie staje się bardziej wyraźne, gdy  $a/\lambda \rightarrow 0$  i że wydzielenie jedynczego promienia z padającej fali płaskiej jest niemożliwe.

Rysunek 44-2 przedstawia fale na wodzie w płytym zbiorniku, powstające wskutek periodycznego uderzania o powierzchnię wody krawędzią płaskiego kija. Widzimy, że wytwarzane w ten sposób fale płaskie także ulegają ugięciu, jeśli napotykają szczelinę w barierze umieszczonej na ich drodze. Ugięcie jest charakterystyczne dla wszystkich rodzajów fal. Tak więc dzięki ugięciu fal głosowych możemy je słyszeć znajdująąc się na przykład za rogiem muru.

Ugięcie fal na szczelinie (albo na przeszkodzie, takiej jak drut) wynika z zasady Huygensa. Rozpatrzmy czoło fali dochodzące do szczeliny na rys. 44-1. Każdy jej punkt może być traktowany jako źródło kulistych fal Huygensa. Zaginanie wiązki światła w obszar



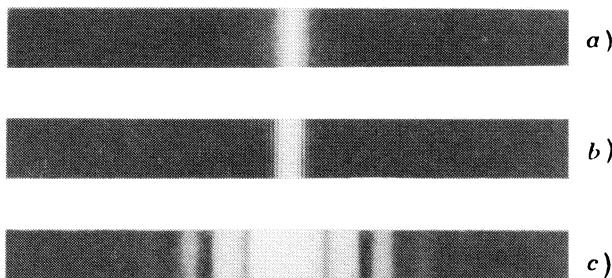
Rys. 44-1. Wydzielenie pojedynczego promienia świetlnego przez zmniejszanie szerokości szczeliny  $a$  jest niemożliwe ze względu na ugięcie, które staje się tym silniejsze, im bardziej  $a/\lambda$  zbliża się do zera. Pewne szczegóły dotyczące fal ugiętych zostały, dla prostoty, pominięte (omówimy je dokładnie w rozdziale 46; patrz również rys. 44-3). Istota sprawy jest jednak jasna: dla ustalonej długości fali  $\lambda$  rozbieżność wiązki rośnie, gdy zmniejszamy szerokość szczeliny



Rys. 44-2. Ugięcie fal wodnych na szczelinie w zbiorniku. Zauważmy, że szerokość szczeliny jest tego rzędu co długość fali. Porównać z rys. 44-1c. (Reprodukowane za zgodą E. S. I.)

cienia geometrycznego jest związane z wyeliminowaniem fal Huygensa z tej części czoła fali padającej, która leży poza brzegami szczeliny.

Rysunek 44-3 przedstawia obraz powstający na błonie fotograficznej, umieszczonej w odległości 50 cm za szczerbiną, na którą pada skolimowana wiązka światła. Rysunek 44-3a odpowiada szerokości szczerbiny około  $6 \mu\text{m}$ . Centralny jasny prążek jest szerszy od tej szerokości, z czego widać, że światło oświetlało obszar geometrycznego cienia ekranu szczerbiny. Ponadto pojawiają się liczne wtórne maksima, pominięte dla prostoty na



Rys. 44-3. (a) Natężenie światła ugiętego na szczerbinie o szerokości  $a \approx 6 \mu\text{m}$  i padającego na ekran znajdujący się 50 cm poza nią. (b) Szerokość szczerbiny została zmniejszona dwukrotnie. (c) Szerokość szczerbiny została zmniejszona siedmiokrotnie. Zauważmy, że po obydwu stronach głównego maksimum występują maksima wtórne, wzmacnione przez dłuższą ekspozycję. Te wtórne maksima zostały dla uproszczenia pominięte na rys. 44-1

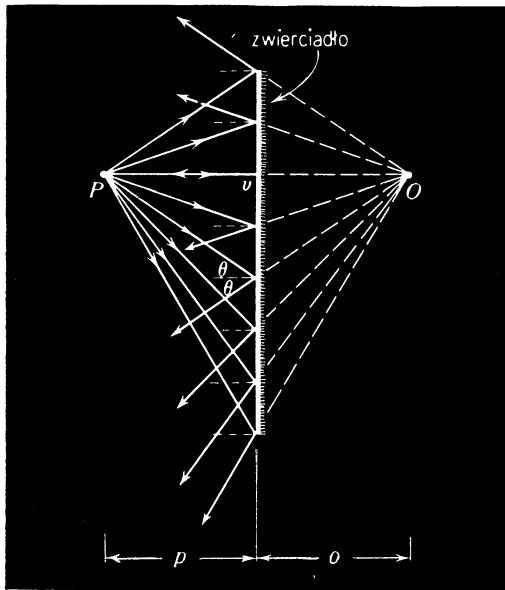
rys. 44-1. Rysunek 44-3b przedstawia sytuację dla szczerbiny o dwukrotnie mniejszej szerokości. Środkowe maksimum staje się szersze, co jest w zgodzie z rys. 44-1. Rysunek 44-3c przedstawia skutki dalszego, siedmiokrotnego zmniejszenia szczerbiny, tzn. do  $0,4 \mu\text{m}$ . Środkowe maksimum jest teraz o wiele szersze, a maksima wtórne, których intensywność w stosunku do maksimum środkowego została specjalnie wzmacniona przez dłuższe natświetlanie, są wyraźnie widoczne.

Ugięcie można zaniedbać, jeżeli stosunek  $a/\lambda$ , gdzie  $a$  jest wielkością najmniejszego wymiaru liniowego najkrótszej krawędzi szczerbiny lub przeszkody, jest dostatecznie duży. Jeżeli  $a \gg \lambda$ , wydaje się, że światło rozchodzi się po liniach prostych, co można przedstawić w postaci promieni podlegających prawom odbicia (równ. 44-1)) i załamania (równ. (44-2)). W rozdziale 43 warunek ten był spełniony, wymiary liniowe wszystkich zwierciadeł, pryzmatów itd. były o wiele większe od długości fali, a więc mieliśmy do czynienia z *optyką geometryczną*. W tym rozdziale również zakładamy, że są spełnione warunki stosowności optyki geometrycznej.

Jeżeli warunki stosowności optyki geometrycznej nie są spełnione, nie można przy opisie zachowania się światła posługiwać się promieniami, lecz trzeba wziąć pod uwagę falowy charakter światła. Mamy wtedy do czynienia z *optyką falową*. Optyka geometryczna jest ważnym granicznym przypadkiem optyki falowej, w podobnym sensie jak gaz doskonały jest granicznym przypadkiem gazu rzeczywistego; oba pojęcia, choć abstrakcyjne, są bardzo szeroko wykorzystywane. Optykę falową będziemy się zajmować w następnych rozdziałach.

## 44-2. Fale kuliste. Zwierciadło płaskie

Rysunek 44-4 przedstawia punktowe źródło światła  $P$ , czyli *przedmiot*, umieszczone w odległości  $p$  przed zwierciadłem płaskim. Światło pada na zwierciadło w postaci fali kulistej, przedstawionej na rysunku za pomocą promieni emitowanych z punktu  $P^*$ . Z punktów, w których promienie padają na zwierciadło, prowadzimy promienie odbite. Jeżeli promienie te zostaną przedłużone poza zwierciadło, przetną się w punkcie  $O$ , który znajduje się poza zwierciadłem, w tej samej odległości od niego co przedmiot  $P$ ;  $O$  nazywamy *obrazem*  $P$ .



Rys. 44-4. Punkt świecący  $P$  daje w zwierciadle płaskim obraz pozorny  $O$ . Wydaje się, że promienie wychodzą z punktu  $O$ , chociaż w rzeczywistości światło nie przechodzi przez ten punkt

Obrazy mogą być *rzeczywiste* albo *urojone (pozorne)*. W przypadku obrazu rzeczywistego światło naprawdę przechodzi przez punkt, w którym powstaje obraz. W przypadku obrazu urojonego światło zachowuje się tak, jak gdyby wychodziło z punktu, w którym powstaje obraz urojony, chociaż w rzeczywistości wcale nie przechodzi przez ten punkt (patrz rys. 44-4). W płaskim zwierciadle obrazy są zawsze urojone. Z codziennego doświadczenia wiemy, jak prawdziwy wydaje się taki urojony obraz i jak dokładnie określone jest jego umiejscowienie poza zwierciadłem, chociaż przestrzeń ta może być naprawdę zajęta przez ścianę z cegieł.

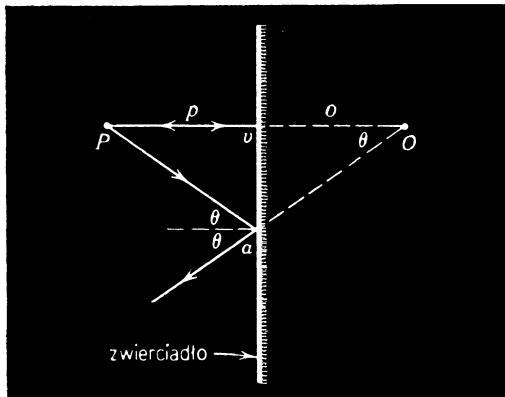
Rysunek 44-5 przedstawia dwa promienie z rys. 44-4. Jeden pada na zwierciadło w punkcie  $v$ , biegąc wzdłuż prostopadłej do zwierciadła. Drugi pada w dowolnym punkcie  $a$  i tworzy z normalną do zwierciadła w tym punkcie kąt  $\theta$ . Z elementarnej geometrii wynika, że kąty  $aPv$  i  $aOv$  są także równe  $\theta$ . Tak więc trójkąty prostokątne  $aPv_a$  i  $aOv_a$  są przystające i

$$p = -o, \quad (44-1)$$

gdzie znak minus został wprowadzony umownie dla zaznaczenia, że  $O$  i  $P$  znajdują się

\* W rozdziale 43 (patrz rys. 43-8) omawialiśmy odbicie fali płaskiej od zwierciadeł; w takim przypadku padające promienie są do siebie równoległe. Tu mamy źródło punktowe i promienie padające na zwierciadło wychodzą z tego źródła.

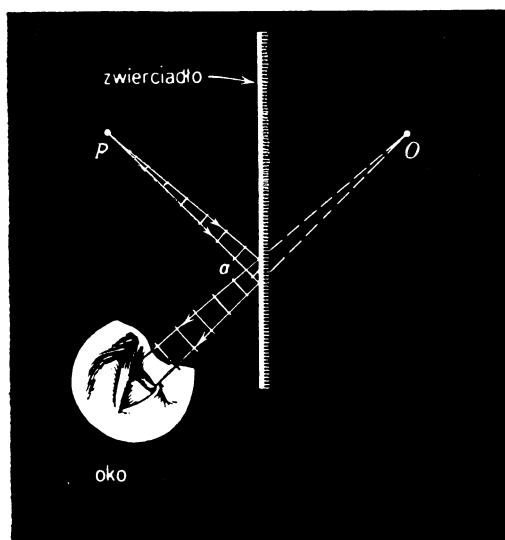
po przeciwnych stronach zwierciadła. Równanie (44-1) nie zawiera  $\theta$ , co znaczy, że przedłużenia wszystkich promieni odbijających się od zwierciadła przechodzą przez  $O$ . Poza założeniem, że zwierciadło jest płaskie i obowiązują prawa optyki geometrycznej, przy wyprowadzaniu równania (44-1) nie robiliśmy żadnych uproszczeń. Każdy przedmiot wytwarza w zwierciadle płaskim obraz, przy czym  $p = -o$  niezależnie od tego, jak duży jest kąt  $\theta$  na rys. 44-5.



Rys. 44-5. Dwa promienie z rys. 44-4. Promień  $Pa$  tworzy z prostopadłą dowolny kąt  $\theta$

Ze względu na skończoną średnicę źrenicy oka tylko blisko siebie leżące promienie mogą trafić do oka po odbiciu od zwierciadła. Dla oka w położeniu takim, jak na rys. 44-6 tylko mały skrawek zwierciadła w pobliżu punktu  $a$  bierze udział w tworzeniu obrazu. Reszta zwierciadła mogłaby być zasłonięta lub usunięta. Gdy oko przesunie się w inne położenie, czynny będzie inny kawałek zwierciadła. Położenie urojonego obrazu  $O$  pozostaje jednak nie zmienione tak długo, dopóki położenie przedmiotu jest ustalone.

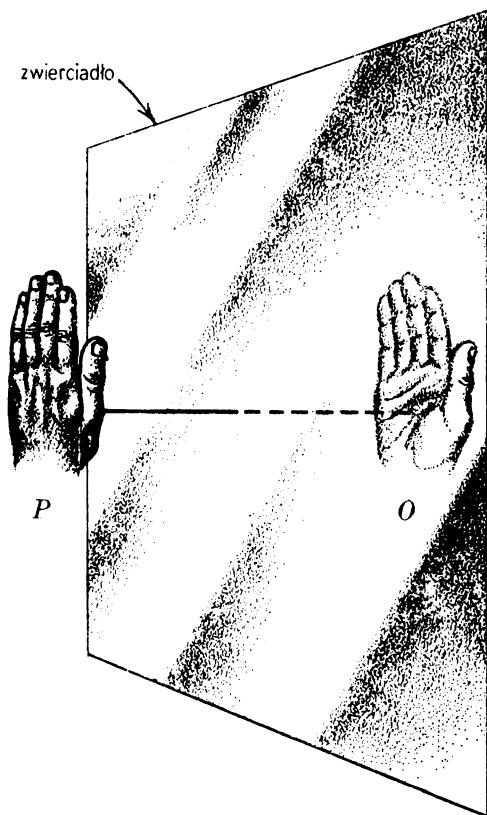
Jeżeli przedmiot jest źródłem rozciągłym, jak na przykład ludzka głowa, również powstanie obraz urojony. Na podstawie równania (44-1) każdy punkt źródła ma swój



Rys. 44-6. Wiązka promieni wychodząca z punktu  $P$  trafia do oka po odbiciu od płaszczyzny zwierciadła. Bierze w tym udział tylko mały kawałek zwierciadła w pobliżu  $a$ . Małe łuki przedstawiają wycinki kulistego czoła fali

punktowy obraz leżący poza zwierciadłem w odległości równej odległości tego punktu od zwierciadła. W ten sposób punkt po punkcie możemy zrekonstruować cały obraz. Większość z nas sprawdza to każdego dnia spoglądając w lustro.

Obrazy w zwierciadłach płaskich różnią się od przedmiotów tym, że strona prawa i lewa zostają zamienione. Obraz zapisanej kartki będzie się różnił od niej samej. Podobnie, gdy bąk obraca się w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, obraz oglądany w pionowym zwierciadle będzie się obracał w kierunku przeciwnym. Rysunek 44-7 przedstawia obraz lewej ręki odtworzony punkt po punkcie zgodnie z równaniem (44-1). Obraz ten wygląda jak prawą rękę\*.



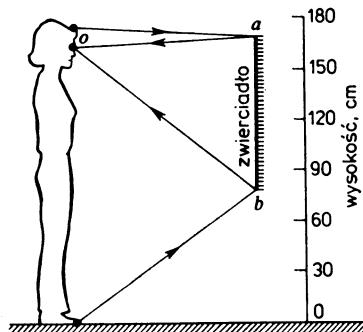
Rys. 44-7. Zwierciadło płaskie zamienia prawą stronę na lewą. Przedmiot  $P$  jest ręką lewą, obraz  $O$  jest ręką prawą. Sprawdź to w lustrze

**Przykład 1.** Jaką wysokość musi mieć pionowe zwierciadło, ażeby osoba o wzroście 1 m 80 cm mogła się w nim zobaczyć cała. Założyć, że oczy znajdują się 10 cm poniżej czubka głowy.

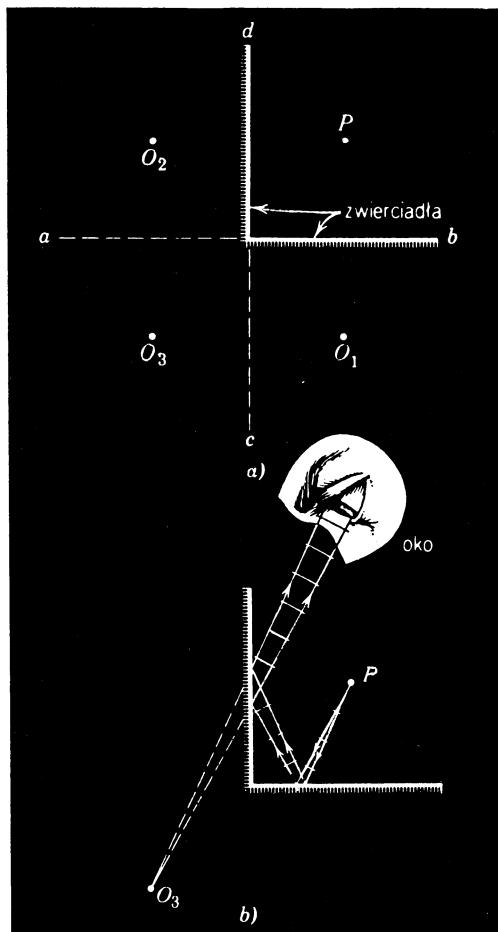
Rysunek 44-8 przedstawia drogę promieni świetlnych, wychodzących z czubka głowy i końców palców nóg tej osoby. Promienie te, wybrane w ten sposób, ażeby po odbiciu trafiały do jej oczu, padają na zwierciadło w punktach  $a$  i  $b$ . Zwierciadło musi zajmować jedynie obszar zawarty pomiędzy tymi dwoma punktami. Łatwo obliczyć, że punkt  $b$  znajduje się 85 cm nad podłogą, a punkt  $a$  — 175 cm. Wysokość zwierciadła wynosi więc 90 cm, czyli połowę wzrostu patrzącej osoby. Zauważmy, że wysokość ta nie zależy od jej odległości od zwierciadła. Ta część zwierciadła, która znajduje się poniżej punktu  $b$ , odbija jedynie podłogę między zwierciadłem i osobą stojącą przed nim.

\* Omówienie różnic pomiędzy naturą „prawego” i „lewego” można znaleźć w artykule: Philip Morrison, *The Overthrow of Parity*, *Scientific American*, April 1957.

**Przykład 2.** Dwa płaskie zwierciadła tworzą kąt prosty, a punktowy przedmiot  $P$  umieszczono na dwusiecznej tego kąta, jak pokazano na rys. 44-9a. Narysować obrazy. Obrazy  $O_1$  i  $O_2$  są dawane odpowiednio przez zwierciadła  $ab$  i  $cd$ . Istnieje jeszcze trzeci obraz. Można go traktować jako obraz przedmiotu  $O_1$  w zwierciadle  $cd$  lub obraz przedmiotu  $O_2$  w zwierciadle  $ab$ . Te trzy obrazy i przedmiot  $P$  leżą na okręgu koła o środku leżącym na linii zetknięcia się zwierciadeł, którego płaszczyzna jest prostopadła do tej linii.



Rys. 44-8. Przykład 1. Osoba patrząca może przejrzeć się cała w zwierciadle, którego długość wynosi tylko połowę jej wzrostu

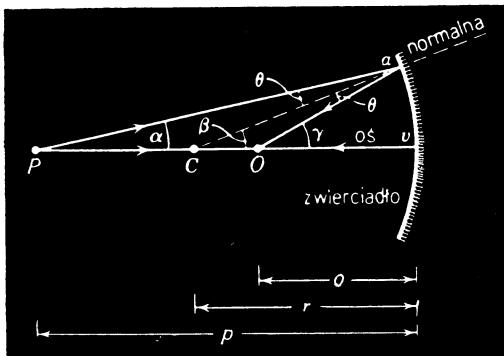


Rys. 44-9. Przykład 2. (a) Rzeczywisty przedmiot  $P$  ma trzy obrazy pozorne. (b) Typowa wiązka promieni pozwalająca widzieć obraz  $O_3$ . Światło wychodzi z punktu  $P$

Ażeby powstał obraz  $O_3$ , światło musi zostać *dwukrotnie* odbite na drodze od przedmiotu do oka obserwatora. Rysunek 44-9b przedstawia typowy bieg promieni. Dla powstania obrazów  $O_1$  i  $O_2$  wystarcza tylko jedno odbicie, jak na rys. 44-6.

### 44-3. Fale kuliste. Zwierciadło kuliste

Na rysunku 44-10 kulista fala świetlna z punktowego źródła  $P$  pada na wklęsłe zwierciadło kuliste, którego promień krzywizny wynosi  $r^*$ . Prosta przechodząca przez  $P$  i środek krzywizny  $C$  stanowi wygodną osь odniesienia.



Rys. 44-10. Dwa promienie wychodzące z punktu  $P$  przecinają się po odbiciu od zwierciadła wklęsgiego i tworzą obraz rzeczywisty w punkcie  $O$

Promień wychodzący z  $P$ , tworzący dowolny kąt  $\alpha$  z tą osią, przecina ją w  $O$  po odbiciu od zwierciadła w punkcie  $a$ . Promień, który biegnie z  $P$  wzdłuż osi, po odbiciu w punkcie  $v$  wraca wzdłuż osi i również przechodzi przez  $O$ . Tak więc  $O$  jest obrazem  $P$  co najmniej dla tych dwóch promieni. Obraz ten jest *rzeczywisty*, ponieważ światło rzeczywiście przechodzi przez  $O$ . Znajdźmy położenie  $O$ .

Będzie nam tu pomocne twierdzenie, że kąt zewnętrzny trójkąta jest równy sumie kątów wewnętrznych do niego nieprzyległych. Stosując je do trójkąta  $PaC$  i  $PaO$  na rys. 44-10 otrzymujemy

$$\beta = \alpha + \theta, \quad \gamma = \alpha + 2\theta.$$

Eliminując z tych równań  $\theta$  mamy

$$\alpha + \gamma = 2\beta. \quad (44-2)$$

Kąty  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  możemy wyrazić w mierze łukowej wzorami

$$\alpha \cong \frac{av}{vP} = \frac{av}{vC}, \quad \beta = \frac{av}{vC} = \frac{av}{r}, \quad \gamma \cong \frac{av}{vO} = \frac{av}{o}. \quad (44-3)$$

Zauważmy, że tylko wyrażenie na  $\beta$  jest ścisłe, ponieważ środek krzywizny łuku  $av$  znajduje się w  $C$ , a nie w  $P$  czy w  $O$ . Natomiast pozostałe równania, dla  $\alpha$  i  $\gamma$ , są słusze w przybliżeniu, jeżeli kąty te są dostatecznie małe. *We wszystkich dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że promienie wychodzące z przedmiotu tworzą mały kąt  $\alpha$  z osią zwierciadła. Promienie takie leżą w pobliżu osi zwierciadła i nazywamy je promieniami przyosiowymi.*

\* Kulista powłoka, na którą patrzymy od wewnętrz, jest wszędzie wklęsła; gdy patrzymy z zewnątrz jest ona wszędzie wypukła. W tym rozdziale, mówiąc o wklęsłości lub wypukłości, będziemy to rozstrzygać z punktu widzenia obserwatora patrzącego wzdłuż kierunku padającego światła.

wymi. Założenie takie nie było potrzebne w przypadku zwierciadeł płaskich. Po podstawieniu tych wyrażeń do równania (44-2) i skróceniu przez  $av$  otrzymujemy

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{o} = \frac{2}{r}, \quad (44-4)$$

gdzie  $p$  jest odlegością przedmiotu, a  $o$  — odlegością obrazu. Obydwie te odlegości są mierzone od powierzchni zwierciadła, tzn. od punktu  $v$ , w którym osią przecina zwierciadło.

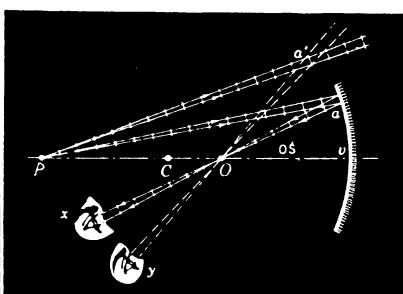
Równanie (44-4) nie zawiera  $\alpha$  (ani  $\beta$ ,  $\gamma$  czy  $\theta$ ), a więc jest słusne dla tych wszystkich promieni padających na zwierciadło, które są promieniami przyosiowymi. Jeżeli chcemy wyodrębnić promień przyosiowy, wystarczy ustawić przed zwierciadłem przeslonę z kątowym otworem o środku leżącym na osi. Ta przesłona wyznaczy maksymalną wartość  $\alpha$ .

Gdy  $\alpha$  na rys. 44-10 staje się duże, wówczas przestaje być prawdą, że punktowy przedmiot daje punktowy obraz. Obraz staje się rozciągnięty i rozmyty. Nie można podać ścisłego kryterium, które mogłoby rozstrzygać, czy dany promień jest przyosiowy, czy nie. Im bardziej obniżymy wartość maksymalnego  $\alpha$ , tym promień staje się bardziej przyosiowy i tym ostrzejszy będzie obraz. Obraz będzie jednak stawał się również słabszy, ponieważ mniejsza część światła będzie odbita przez zwierciadło. Często trzeba szukać kompromisu pomiędzy jasnością i jakością obrazu.

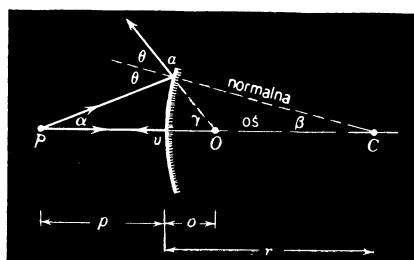
Podobnie jak dla zwierciadła płaskiego, tak i dla kulistego, powstający w nim obraz (rzeczywisty lub urojony) możemy obserwować tylko wtedy, gdy oko umieścimy w takim miejscu, że promienie świetlne będą trafiały do niego po odbiciu od zwierciadła. Na rysunku 44-11 pokazana jest wiązka promieni świetlnych trafiających do oka w położeniu  $x$ . Tylko mały skrawek zwierciadła w pobliżu  $a$  jest czynny dla oka w tym położeniu. Jeżeli obserwator przesunie oko w położenie  $y$ , obraz zniknie, ponieważ w sąsiedztwie punktu  $a$  nie ma zwierciadła.

Chociaż równanie (44-4) zostało wyprowadzone dla przypadku, gdy przedmiot znajduje się dalej niż środek krzywizny, jednak jest ono słusne dla dowolnego położenia przedmiotu. Jest ono słusne również dla zwierciadeł wypukłych, jak na rys. 44-12.

Korzystając z równania (44-4) należy być ostrożnym przy stosowaniu konwencji dotyczącej znaków przy  $p$ ,  $o$  oraz  $r$ . Podstawą konwencji stosowanej w tej książce jest następujące ustalenie:



Rys. 44-11. Oko musi być właściwie umieszczone, aby zobaczyć rzeczywisty obraz  $O$ . Obserwator w  $x$  może zobaczyć obraz. Obserwator w  $y$  nie może



Rys. 44-12. Dwa promienie wychodzące z punktu  $P$  przecinają się po odbiciu od zwierciadła wypukłego tworząc obraz pozorny w punkcie  $O$ . Wydaje się, że promienie wychodzą z tego punktu. Porównać z rys. 44-10

Na rysunku 44-10, na którym światło *rozbieżne* wychodzi z rzeczywistego przedmiotu, pada na zwierciadło wkleśle i skupia się po odbiciu tworząc obraz rzeczywisty; występujące w równaniu (44-4) wielkości  $p$ ,  $o$  i  $r$  oraz wielkość  $f$  z rys. 44-4 mają dodatnie wartości liczbowe.

Rysunek 44-10 został wykorzystany do wyrowadzenia równania (44-4) i trzeba o nim pamiętać stosując to równanie. Będzie to pomocne przy ustalaniu właściwych znaków.

Rozważmy teraz tę stronę zwierciadła, z której przychodzi padająca wiązka światła. Ponieważ zwierciadła są nieprzeczcyste, światło musi po odbiciu pozostać po tej samej stronie i jeżeli obraz też powstanie po tej stronie, musi on być rzeczywisty. Nazwijmy zatem tę stronę zwierciadła, z której pada światło, stroną  $R$  (ponieważ obraz jest rzeczywisty). Stronę przeciwną nazwiemy stroną  $U$  (obraz pozorny, *urojony*), gdyż obrazy powstające po tej stronie zwierciadła muszą być pozorne, skoro nie przedostaje się tam energia świetlna.

W powyżej podanym ustaleniu skojarzyliśmy obrazy rzeczywiste z dodatnimi odległościami od obrazów. Wynika stąd następująca pierwsza konwencja dotycząca znaków:

(1) Odległość  $o$  obrazu jest dodatnia, jeśli obraz (rzeczywisty) leży po stronie  $R$  zwierciadła, jak na rys. 44-10; odległość  $o$  jest ujemna, jeśli obraz (pozorny) leży po stronie  $U$ , jak na rys. 44-12.

Jeżeli zwierciadło wkleśle (gdy patrzymy na nie z kierunku, z którego pada światło) przedstawione na rys. 44-10 zmienimy na zwierciadło wypukłe, promienie po odbiciu będą *rozbieżne* i będą tworzyć obraz *pozorny*, jak widać na rys. 44-12. Zatem z podanego powyżej ustalenia wynika druga konwencja dotycząca znaków:

(2) Promień krzywizny  $r$  jest dodatni, jeśli środek krzywizny zwierciadła leży po stronie  $R$ , jak na rys. 44-10;  $r$  jest ujemne, jeśli środek krzywizny leży po stronie  $U$ , jak na rys. 44-12.

Czytelnik nie powinien uczyć się tych konwencji znakowych na pamięć, lecz wyrowadzać je w każdym przypadku na podstawie ustalenia podanego na tej stronie, posługując się rys. 44-10 jako pomocą mnemotechniczną.

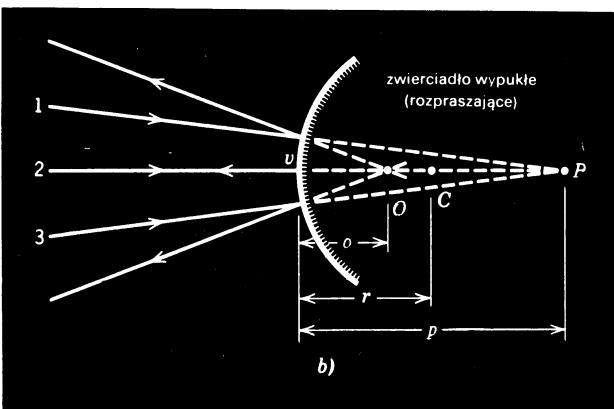
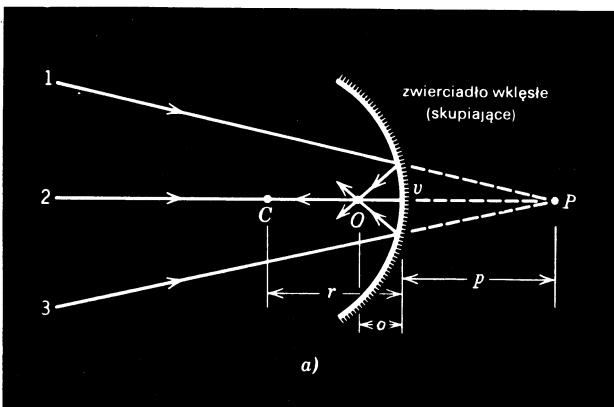
We wszystkich przypadkach, które dotyczą rozważaliśmy, włącznie ze zwierciadłami płaskimi, zakładaliśmy, że wiązka światła wychodząca ze źródła punktowego (*przedmiotu*) i padająca na zwierciadło była *rozbieżna*. W takich przypadkach, jak widzieliśmy, odległość przedmiotu  $p$  w równaniu (44-4) była uważana za *dodatnią*.

Za pomocą odpowiedniego układu zwierciadeł i (lub) soczewek możemy doprowadzić do sytuacji, w której na rozważane zwierciadło pada wiązka *zbieżna*. W takich przypadkach *przedmiot* uważamy za *pozorny* i odległość  $p$  w równaniu (44-4) przypisujemy znak *ujemny*. Przykład tego podany jest na rys. 44-13. Niezależnie od natury źródła światła, przedmiot  $P$  leży po stronie  $U$  i jest pozorny, a odległość  $p$  tego przedmiotu od zwierciadła uważamy za *ujemną*.

**Przykład 3.** Zwierciadło wypukłe ma promień krzywizny 20 cm. Gdzie znajduje się obraz, jeśli źródło umieszczone jest w odległości 14 cm od zwierciadła, jak na rys. 44-12?

Przybliżona konstrukcja graficzna wykonana przy zastosowaniu prawa odbicia w punkcie  $a$  na rysunku wykazuje, że obraz znajdzie się po stronie  $U$  zwierciadła, a zatem będzie pozorny. Możemy to sprawdzić ilościowo i analitycznie za pomocą równania (44-4) (zauważmy, że  $r$  jest ujemne, gdyż środek krzywizny zwierciadła jest po stronie  $U$ ). Mamy zatem

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{o} = \frac{2}{r} \quad \text{lub} \quad \frac{1}{+14 \text{ cm}} + \frac{1}{o} = \frac{2}{-20 \text{ cm}},$$



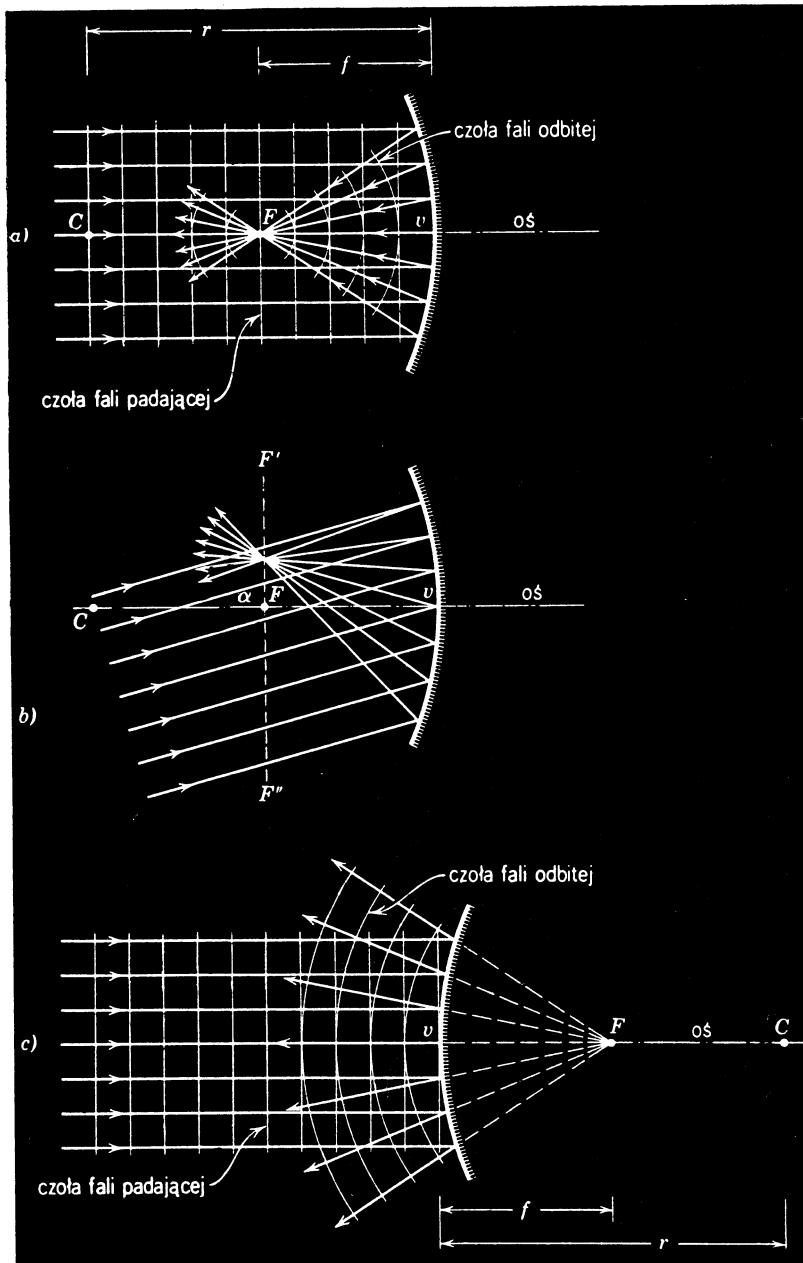
Rys. 44-13. (a) *Zbieżna* wiązka promieni (patrz 1, 2 i 3) pada na zwierciadło *wklesłe*. Pozorny przedmiot  $P$  daje *rzeczywisty* obraz  $O$ . Zauważcie, że światło nie przechodzi przez  $P$ , a przechodzi przez  $O$  oraz że  $p$  jest ujemne, natomiast  $o$  i  $r$  (a więc również  $f$ ) są dodatnie. (b) *Zbieżna* (jak poprzednio) wiązka promieni (patrz 1, 2 i 3) pada na zwierciadło *wypukłe*. Pozorny przedmiot  $P$  daje *pozorny* obraz  $O$ . Widzimy, że światło (znowu) nie przechodzi przez  $P$  ani przez  $O$ . Tutaj wszystkie odległości,  $p$ ,  $o$  i  $r$  (a więc także  $f$ ) są ujemne. Porównajcie te rysunki z rys. 44-10, na którym *rzeczywisty* przedmiot (*rozbieżna* wiązka promieni) po odbiciu od zwierciadła *wklesłego* daje *rzeczywisty* obraz. W tym przypadku wszystkie odległości,  $p$ ,  $o$  i  $r$  (a więc także  $f$ ) są dodatnie. Zobaczcie również rys. 44-12, na którym *rzeczywisty* przedmiot (*rozbieżna* wiązka promieni) daje pozorny obraz w zwierciadle *wypukłym*. Na tym rysunku  $p$  jest dodatnie, lecz  $o$  i  $r$  (a więc także  $f$ ) są ujemne. Te cztery rysunki przedstawiają wszystkie możliwe kombinacje *rzeczywistych* i *pozornych* przedmiotów z *rzeczywistymi* i *pozornymi* obrazami. Porównajcie je bardzo uważnie. Na rysunku 44-23 przedstawiono podobne porównanie dla cienkich soczewek

co daje  $o = -5,8 \text{ cm}$ , zgodnie z przewidywaniami graficznymi. Ujemny znak dla  $o$  przypomina nam, że obraz jest po stronie  $U$  zwierciadła, a zatem jest pozorny.

Kiedy na zwierciadło pada *wiązka równoległa* (rys. 44-14), punkt, w którym powstaje obraz nazywamy *ogniskiem*  $F$  zwierciadła. Odległość ogniskowa\*  $f$  jest to odległość pomiędzy  $F$  a wierzchołkiem  $v$ . Jeśli w równaniu (44-4) przyjmiemy, że  $p \rightarrow \infty$ , co oznacza, że wiązka jest równoległa, to otrzymamy

$$o = \frac{1}{2}r = f.$$

\* Lub krótko ogniskowa (przyp. tłum.).



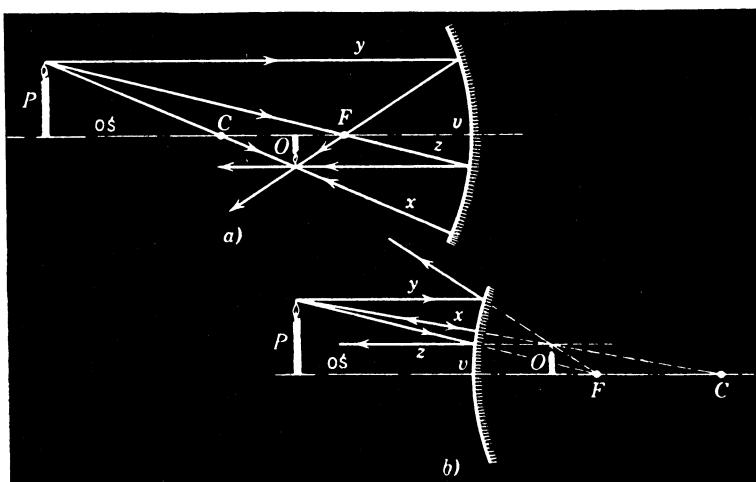
Rys. 44-14. (a) Ognisko dla wklęsłego zwierciadła kulistego z uwidocznieniem zarówno promieni jak i powierzchni falowych. Punkty  $F$  i  $C$  leżą po stronie  $R$ , punkt  $F$  jest rzeczywisty, a odległość ogniskowa  $f$  zwierciadła dodatnia (tak jak  $r$ ). (b) To samo z tą różnicą, że światło padające tworzy kąt  $\alpha$  z osią zwierciadła; promienie są zogniskowane w jednym punkcie, w *plaszczyźnie ogniskowej*  $F'F''$ . (c) To samo co w (a), z tą różnicą, że zwierciadło jest wypukłe, punkty  $F$  i  $C$  leżą po stronie  $U$  zwierciadła. Ognisko jest pozorne a odległość ogniskowa  $f$  ujemna (tak jak  $r$ )

Równanie (44-4) możemy więc przepisać w postaci

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{o} = \frac{1}{f}, \quad (44-5)$$

gdzie  $f$ , podobnie jak  $r$ , jest dodatnie dla zwierciadeł, których środki krzywizny leżą po stronie  $R$  (tj. dla zwierciadeł *wklęszych*, czyli *skupiających*, patrz rys. 44-14a) oraz ujemne dla tych zwierciadeł, których środki krzywizny leżą po stronie  $U$  (tj. dla zwierciadeł *wypukłych*, czyli *rozpraszających*; patrz rys. 44-14c). Rysunek 44-14b pokazuje falę płaską padającą pod małym kątem  $\alpha$  do osi zwierciadła. Promienie skupią się w punkcie położonym w *płaszczyźnie ogniskowej zwierciadła*. Jest to płaszczyzna ustawiona pod kątem prostym do osi zwierciadła w jego ognisku.

Rozważmy teraz przedmioty, które nie są punktowe. Rysunek 44-15 pokazuje świeczkę przed (a) zwierciadłem wklęsnym i (b) zwierciadłem wypukłym. Oś zwierciadła wybraliśmy tak, że przebiega ona przez podstawkę świeczki i oczywiście przez środek krzywizny. Obraz



Rys. 44-15. Obraz przedmiotu rozciągłego (a) dla zwierciadła wklęsnego, (b) dla zwierciadła wypukłego, skonstruowany graficznie. Do skonstruowania obrazu wystarczą dowolne dwa spośród trzech pokazanych promieni

dowolnego punktu spoza osi, takiego jak wierzchołek świeczki, można znaleźć graficznie, opierając się na następujących faktach:

(1) Promień, który pada na zwierciadło po przejściu (czy to bezpośrednio, czy też po przedłużeniu) przez środek krzywizny  $C$ , powraca swoim śladem (promień  $x$  na rys. 44-15). Takie promienie padają na zwierciadło pod kątem prostym.

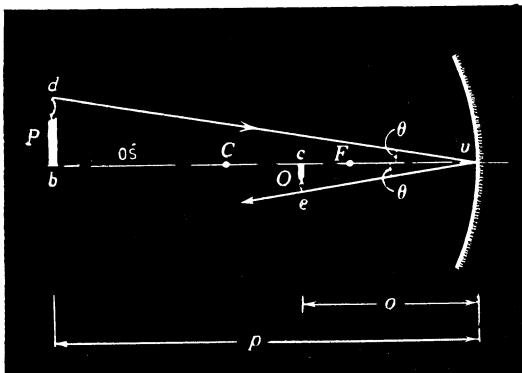
(2) Promień, który pada na zwierciadło równolegle do jego osi, przechodzi (lub przejdzie po przedłużeniu) przez ognisko (promień  $y$ ).

(3) Promień, który pada na zwierciadło po przejściu (bezpośrednio albo po przedłużeniu) przez ognisko, odbije się w kierunku równoległym do osi (promień  $z$ ).

Na rysunku 44-16 pokazany jest promień (*dve*), który wychodzi z wierzchołka świecy z rys. 44-15a, odbija się od zwierciadła w punkcie  $v$  i przechodzi przez wierzchołek obrazu świecy. Z prawa odbicia wynika, że promień ten musi tworzyć jednakowe kąty  $\theta$  z *osią*

zwierciadła, jak pokazano na rysunku. Dla dwu podobnych trójkątów prostokątnych na rysunku możemy napisać

$$\frac{ce}{bd} = \frac{vc}{vb}.$$



Rys. 44-16. Jeden z promieni z rys. 42-15, użyty tu celem pokazania, że powiększenie poprzeczne  $m$  jest dane przez  $-o/p$

Wielkość po lewej stronie (z dokładnością do znaku) jest (liniowym) powiększeniem poprzecznym  $m$  zwierciadła. Ponieważ chcemy żeby dla obrazu odwróconego powiększenie było ujemne, zatem zdefiniujemy umownie  $m$  w tym przypadku jako  $-(ce/bd)$ . Ponieważ  $vc = o$  oraz  $vb = p$ , mamy

$$m = -\frac{o}{p}. \quad (44-6)$$

Równanie to daje powiększenie dla zwierciadeł kulistych i płaskich we wszystkich przypadkach. Dla zwierciadła płaskiego  $p = -o$ , czyli przewidywane powiększenie wynosi +1, skąd zgodnie z doświadczeniem wynika, że otrzymamy obraz prosty o tej samej wielkości co przedmiot.

Obrazy w zwierciadłach kulistych wykazują liczne zniekształcenia, wynikające stąd, że założenie iż promienie są przyosiowe nigdy nie jest w pełni usprawiedliwione. W ogólności, źródło punktowe nie będzie miało punktowego obrazu; patrz zadanie 14. Prócz tego powstają zniekształcenia spowodowane tym, że powiększenie zmienia się nieco wraz z odlegością od osi zwierciadła, gdyż równanie (44-6) jest ściśle słuszne tylko dla promieni przyosiowych. Na te zniekształcenia nakładają się występujące zawsze efekty dyfrakcyjne, ponieważ podstawowe założenie optyki geometrycznej, że światło porusza się po liniach prostych, należy traktować jedynie jako przybliżenie.

#### 44-4. Kuliste powierzchnie załamujące

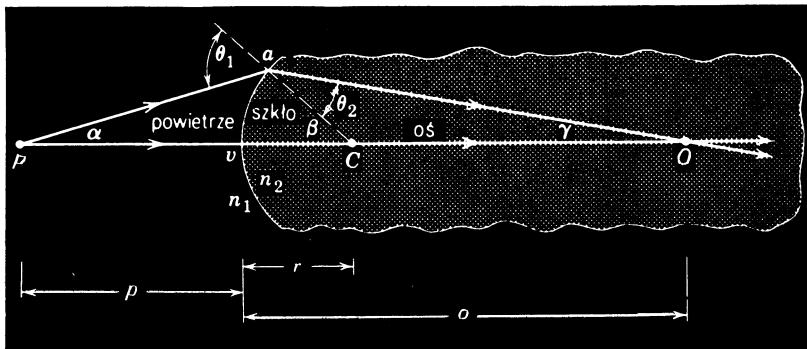
Rysunek 44-17 przedstawia źródło punktowe  $P$  umieszczone w pobliżu wypukłej powierzchni załamującej o promieniu krzywizny  $r$ . Powierzchnia ta oddziela dwa ośrodki, których współczynniki załamania różnią się od siebie, przy czym współczynnik załamania dla ośrodka, z którego pada światło, wynosi  $n_1$ , współczynnik zaś dla drugiego ośrodka wynosi  $n_2$ .

Z punktu  $P$  rysujemy linię prostą przez środek krzywizny  $C$  powierzchni załamującej, ustalając w ten sposób dogodną oś, która przecina powierzchnię w wierzchołku  $v$ . Następnie z punktu  $P$  rysujemy promień, który tworzy mały, lecz poza tym dowolny kąt  $\alpha$  z tą

osią i pada na powierzchnię załamującą w punkcie  $a$ , przy czym załamuje się zgodnie z prawem

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2.$$

Załamany promień przecina oś w punkcie  $O$ . Promień, który wychodzi z punktu  $P$  i biegnie wzdłuż osi, nie zostanie odchylony przy przejściu przez powierzchnię graniczną i także przejdzie przez punkt  $O$ . Zatem co najmniej dla tych dwóch promieni  $O$  jest obrazem  $P$ .



Rys. 44-17. Dwa promienie wychodzące z punktu  $P$  przecinają się, po załamaniu na powierzchni kulistej, tworząc obraz rzeczywisty w punkcie  $O$ . Tutaj  $p$  (promień rozbieżny),  $o$  i  $r$  są wielkościami dodatnimi; patrz przykład 4

Podobnie jak przy wyprowadzaniu równania dla zwierciadeł, skorzystamy i tu z twierdzenia, które mówi, że kąt zewnętrzny w trójkącie równa się sumie dwóch kątów wewnętrznych do niego nieprzyległych. Stosując to do trójkątów  $CPaC$  oraz  $OCaO$  otrzymujemy

$$\theta_1 = \alpha + \beta, \quad (44-7)$$

$$\beta = \theta_2 + \gamma. \quad (44-8)$$

Ponieważ  $\alpha$  jest małe, kąty  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\theta_1$  oraz  $\theta_2$  na rys. 44-17 są także małe. Założymy, że  $\alpha$ , a zatem i wszystkie pozostałe kąty są *dostatecznie małe*; to samo założenie (promienie przyosiowe) robiliśmy też dla zwierciadeł kulistych. Zastępując sinusy kątów samymi kątami — gdyż kąty z założenia są małe — możemy napisać prawo załamania w postaci

$$n_1 \theta_1 \approx n_2 \theta_2. \quad (44-9)$$

Łącząc równania (44-8) i (44-9) otrzymujemy

$$\beta = \frac{n_1}{n_2} \theta_1 + \gamma.$$

Eliminując  $\theta_1$  z tego równania oraz równania (44-7) otrzymujemy po przegrupowaniu wyrazów

$$n_1 \alpha + n_2 \gamma = (n_2 - n_1) \beta. \quad (44-10)$$

W mierze łukowej kąty  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  na rys. (44-17) wynoszą

$$\alpha \approx \frac{av}{p}, \quad \beta = \frac{av}{r}, \quad \gamma \approx \frac{av}{o}. \quad (44-11)$$

Tylko drugie z tych równań jest ścisłe. Dwa pozostałe są równaniami przybliżonymi, ponieważ  $O$  i  $P$  nie są środkami kół, dla których  $\alpha v$  jest łukiem. Jednakże dla promieni przyosiowych (dostatecznie małe  $\alpha$ ) niedokładności w równaniu (44-11) mogą być dowolnie małe.

Podstawiając równanie (44-11) do równania (44-10) otrzymujemy

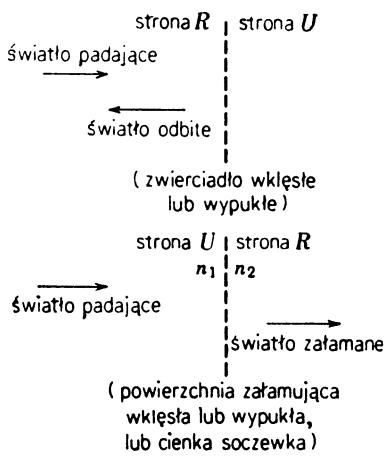
$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{o} = \frac{n_2 - n_1}{r}. \quad (44-12)$$

Równanie to jest spełnione zawsze, gdy światło ze źródeł punktowych załamuje się na powierzchniach kulistych, przy założeniu jedynie że promienie są przyosiowe. Podobnie jak dla zwierciadeł, korzystając z równania (44-12) musimy zwracać baczną uwagę na znaki wielkości  $p$ ,  $o$  oraz  $r$ . Naszą koncepcję dotyczącą znaków znowu ustalamy w oparciu o pewien szczególny przypadek, przedstawiony na rys. 44-17:

Na rysunku 44-17, na którym światło *wychodzi z przedmiotu rzeczywistego*, pada na *wypukłą powierzchnię załamującą i skupia się po załamaniu tak, że tworzy obraz rzeczywisty*, wielkości  $p$ ,  $o$  oraz  $r$  w równaniu (44-12) mają dodatnie wartości liczbowe.

Przy wyprowadzaniu równania (44-12) korzystaliśmy z rys. 44-17. Czytelnik powinien o tym pamiętać stosując to równanie. Będzie to pomocne przy ustalaniu właściwych znaków. To podstawowe ustalenie jest podobne do ustalenia, które w związku ze zwierciadłami zrobiliśmy na str. 448.

Skupmy uwagę na tej stronie powierzchni załamującej, z której pada światło. W przeciwnieństwie do zwierciadeł, światło *przechodzi przez* powierzchnię załamującą na jej drugą stronę, i jeśli tworzy się obraz rzeczywisty, to musi on powstawać po tamtej właśnie stronie, którą nazwiemy wobec tego *stroną R*. Stronę, z której nadbiega promień, nazwiemy *stroną U*, gdyż tu muszą powstawać obrazy pozorne. Ta ważna różnica między odbiciem a załamaniem przedstawiona jest na rys. 44-18.



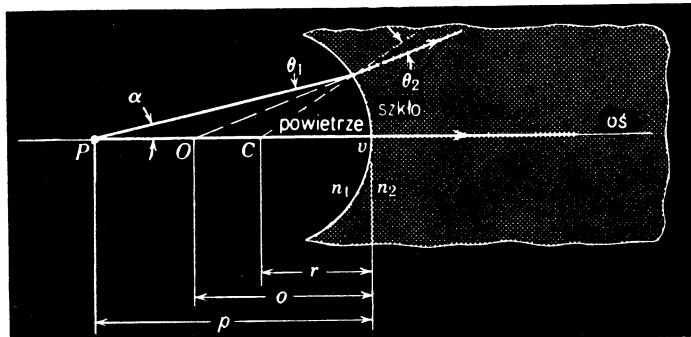
Rys. 44-18. Obrazy rzeczywiste dla zwierciadeł powstają po tej samej stronie, z której pada światło, a dla powierzchni załamujących i cienkich soczewek — po stronie przeciwnej. Tak dzieje się dlatego, że zwierciadła odbijają do tyłu padające światło, a powierzchnie lamiące przepuszczają je. Zauważcie, że  $p$  jest dodatnie, gdy z rzeczywistego przedmiotu  $P$  wychodzą promienie *rozbieżne*

W ustaleniu podanym powyżej połączymy obrazy rzeczywiste z dodatnimi odległościami od obrazu. Prowadzi to do następującej konwencji dotyczącej znaków:

(1) Odległość  $o$  obrazu jest dodatnia, jeśli obraz (rzeczywisty) pojawia się po stronie  $R$  powierzchni załamującej, jak na rys. 44-17;  $o$  jest ujemne, jeśli obraz (pozorny) leży po stronie  $U$ , jak na rys. 44-19.

Powierzchnia załamująca na rys. 44-17 jest wypukła. Jeśli jest ona wklęsła (przy założeniu, że  $n_2 > n_1$ ), promienie *rozbiegają* się po załamaniu i tworzą *obraz pozorny*, jak widać na rys. 44-19. Prowadzi to do drugiej konwencji dotyczącej znaków:

(2) Promień krzywizny  $r$  jest dodatni, jeśli środek krzywizny powierzchni załamującej leży po stronie  $R$ , jak na rys. 44-17: natomiast jest ujemny, jeśli środek krzywizny znajduje się po stronie  $U$ , jak na rys. 44-19.



Rys. 44-19. Dwa promienie wychodzące z punktu  $P$  rozbiegają się po załamaniu na powierzchni kulistej, tworząc obraz pozorny  $O$ . Tutaj  $p$  jest dodatnie (promienie wychodzące z  $P$  są rozbieżne), ale  $o$  oraz  $r$  są ujemne

Konwencje dotyczące znaków dla powierzchni załamujących są takie same jak dla zwierciadeł (str. 448), przy czym podstawowa różnica między tymi dwiema sytuacjami zawarta jest w definicji stron  $R$  i  $U$  na rys. 44-18. Różnicę tę łatwo zapamiętać, jeśli pamięta się o fizycznej różnicy między obu zjawiskami.

**Przykład 4.** Znaleźć położenie obrazu dla przypadku pokazanego na rys. 44-17 zakładając, że promień krzywizny wynosi 10 cm,  $n_2$  równa się 2,0, a  $n_1$  wynosi 1,0. Niech przedmiot będzie oddalony o 20 cm w lewą stronę od punktu  $v$ .

Z równania (44-12),

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{o} = \frac{n_2 - n_1}{r},$$

mamy

$$\frac{1,0}{+20 \text{ cm}} + \frac{2,0}{o} = \frac{2,0 - 1,0}{+10 \text{ cm}}.$$

Zauważmy, że  $r$  jest dodatnie, gdyż środek krzywizny powierzchni leży po stronie  $R$ . Z zależności tej otrzymujemy  $o = +40 \text{ cm}$ , co jest zgodne z konstrukcją graficzną. Energia świetlna rzeczywiście przechodzi przez  $O$ , wobec czego obraz jest rzeczywisty, na co wskazuje dodatni znak przy  $o$ .

**Przykład 5.** Przedmiot umieszczony jest w ośrodku o  $n_1 = 2,0$ , przy czym leży on w odległości 15 cm od powierzchni kulistej, której promień krzywizny wynosi  $-10 \text{ cm}$ , jak na rys. 44-20;  $r$  jest ujemne, gdyż  $C$  leży po stronie  $U$ . Znaleźć położenie obrazu.

Na rysunku 44-20 pokazano promień przechodzący przez powierzchnię, załamujący się zgodnie z prawem załamania, w punkcie  $a$ . Drugi promień, biegący z punktu  $P$  wzdłuż osi, przechodzi przez tę powierzchnię bez odchylenia w punkcie  $v$ . Obraz  $O$  znajdujemy przedłużając te dwa promienie do tyłu; jest on pozorny.

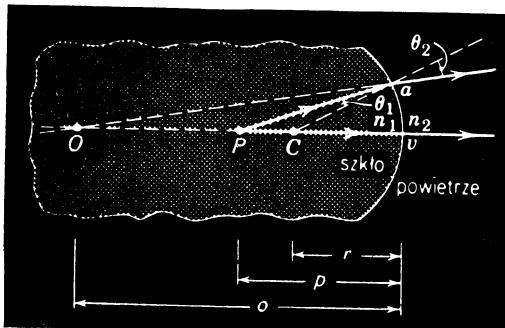
Z równania (44-12),

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{o} = \frac{n_2 - n_1}{r},$$

mamy

$$\frac{2,0}{+15 \text{ cm}} + \frac{1,0}{o} = \frac{1,0 - 2,0}{-10 \text{ cm}},$$

skąd  $o = -30 \text{ cm}$ , co jest zgodne z rys. 44-20 oraz z naszą umową co do znaku. Zauważmy, że  $n_1$  zawsze odnosi się do ośrodka, z którego pada światło.



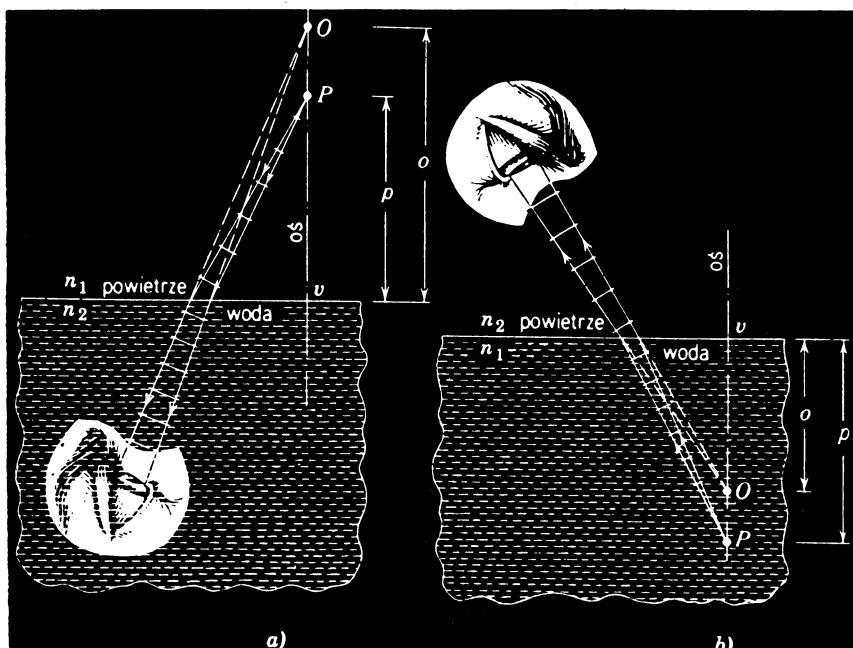
Rys. 44-20. Dwa promienie mające początek w punkcie  $P$  po załamaniu na powierzchni kulistej wydają się wychodzić z punktu  $O$  (obraz pozorny)

**Przykład 6.** Jaka jest zależność pomiędzy  $o$  oraz  $p$ , jeśli powierzchnia załamująca jest płaska?

Powierzchnia płaska ma nieskończony promień krzywizny. Przyjmując w równaniu (44-12), że  $r \rightarrow \infty$  otrzymujemy

$$o = -p \frac{n_2}{n_1}.$$

Na rysunku 44-21 przedstawiono tę sytuację graficznie (a) dla przedmiotu znajdującego się w powietrzu, widzianego z wody oraz (b) dla przedmiotu w wodzie, oglądanego z powietrza. Widać, że nurek spogląda-



Rys. 44-21. Załamanie na powierzchni płaskiej przy padaniu światła w kierunku prawie normalnym. Pokazano wiązki promieni oraz odpowiadające im powierzchnie falowe fal wchodzących do żrenicy. (a) Źródło w powietrzu, (b) źródło w wodzie

dający w góre na, powiedzmy, zwiastującą gałąź drzewa będzie sądził, że znajduje się ona wyżej o czynnik 1,33/1,00. Podobnie, obserwator znajdujący się nad powierzchnią będzie myślał, że przedmioty na dnie wodnego zbiornika leżą bliżej powierzchni niż w rzeczywistości, w stosunku 1,00/1,33. Rozważania te, oparte na równaniu (44-12) są słuszne tylko dla promieni przyjściowych, co znaczy, że promienie padające mogą tworzyć tylko mały kąt z normalną; kąt ten, dla przejrzystości, na rysunku został przedstawiony jako przesadnie duży. Zauważmy znowu, że  $n_1$  jest zawsze współczynnikiem załamania ośrodka leżącego po tej stronie powierzchni, po której znajduje się źródło światła padającego.

#### 44-5. Soczewki cienkie

W większości przypadków, kiedy mamy do czynienia z załamaniem, występuje więcej niż jedna tylko powierzchnia załamująca. Jest to słuszne nawet dla soczewek w okularach, gdzie światło przechodzi z powietrza do szkła i ze szkła do powietrza. W mikroskopach, teleskopach, aparatach fotograficznych\* itd. mamy często więcej niż dwie powierzchnie załamujące.

Rysunek 44-22a pokazuje grubą szklaną „soczewkę” o grubości  $l$  i powierzchniach, których promienie krzywizny wynoszą  $r'$  i  $r''$ . Przedmiot punktowy  $P'$  umieszczony jest w pobliżu lewej powierzchni, jak pokazano na rysunku. Promień wychodzący z punktu  $P'$  i biegący wzdłuż osi nie jest odchylany przy wchodzeniu ani przy wychodzeniu z soczewki, gdyż na każdą powierzchnię pada on prostopadle.

Drugi promień, wychodzący z punktu  $P'$  pod dowolnym kątem  $\alpha$  w stosunku do osi, pada na powierzchnię w punkcie  $a'$ , zostaje załamany i przecina drugą powierzchnię w punkcie  $a''$ . Promień ten zostaje ponownie załamany i przecina osią w punkcie  $O''$ , który jako przecięcie dwóch promieni wychodzących z punktu  $P''$ , jest obrazem punktu  $P'$  utworzonego po załamaniu się promieni na obu powierzchniach.

Rysunek 44-22b pokazuje pierwszą powierzchnię, która tworzy obraz pozorny punktu  $P'$  w  $O'$ . Aby znaleźć położenie  $O'$ , korzystamy z równania (44-12),

$$\frac{n_1}{p'} + \frac{n_2}{o} = \frac{n_2 - n_1}{r}.$$

Podstawiając  $n_1 = 1,0$ ,  $n_2 = n$  oraz pamiętając, że odległość obrazu jest ujemna (tj.  $o = -o'$  na rys. 44-22b) otrzymujemy

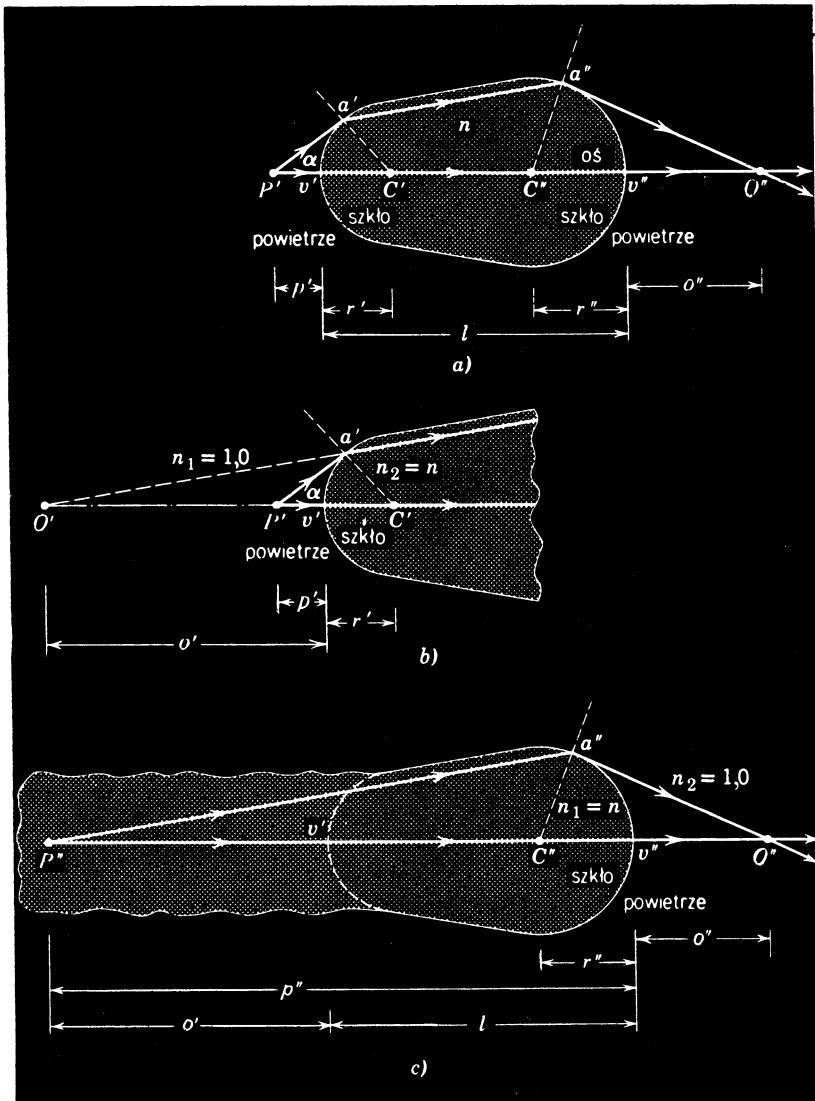
$$\frac{1}{p'} - \frac{n}{o'} = \frac{n-1}{r}. \quad (44-13)$$

W równaniu tym  $o'$  będzie liczbą dodatnią, ponieważ wprowadziliśmy tu umownie znak minus odpowiadający obrazowi pozornemu.

Rysunek 44-22c pokazuje drugą powierzchnię. Gdyby obserwator w punkcie  $a''$  nie wiedział o istnieniu pierwszej powierzchni, mógłby myśleć, że światło padające na ten punkt pochodzi z punktu  $O'$  na rys. 44-22b i że obszar na lewo od powierzchni wypełniony jest szkłem. Zatem (pozorny) obraz  $O'$  utworzony przez pierwszą powierzchnię służy jako rzeczywisty przedmiot  $P''$  dla drugiej powierzchni. Odległość tego przedmiotu od drugiej powierzchni wynosi

$$p'' = o' + l. \quad (44-14)$$

\* Omówienie trudności związanych z projektowaniem soczewek wysokiej jakości można znaleźć w artykule: William H. Price, The Photographic Lens, *Scientific American*, August 1976.

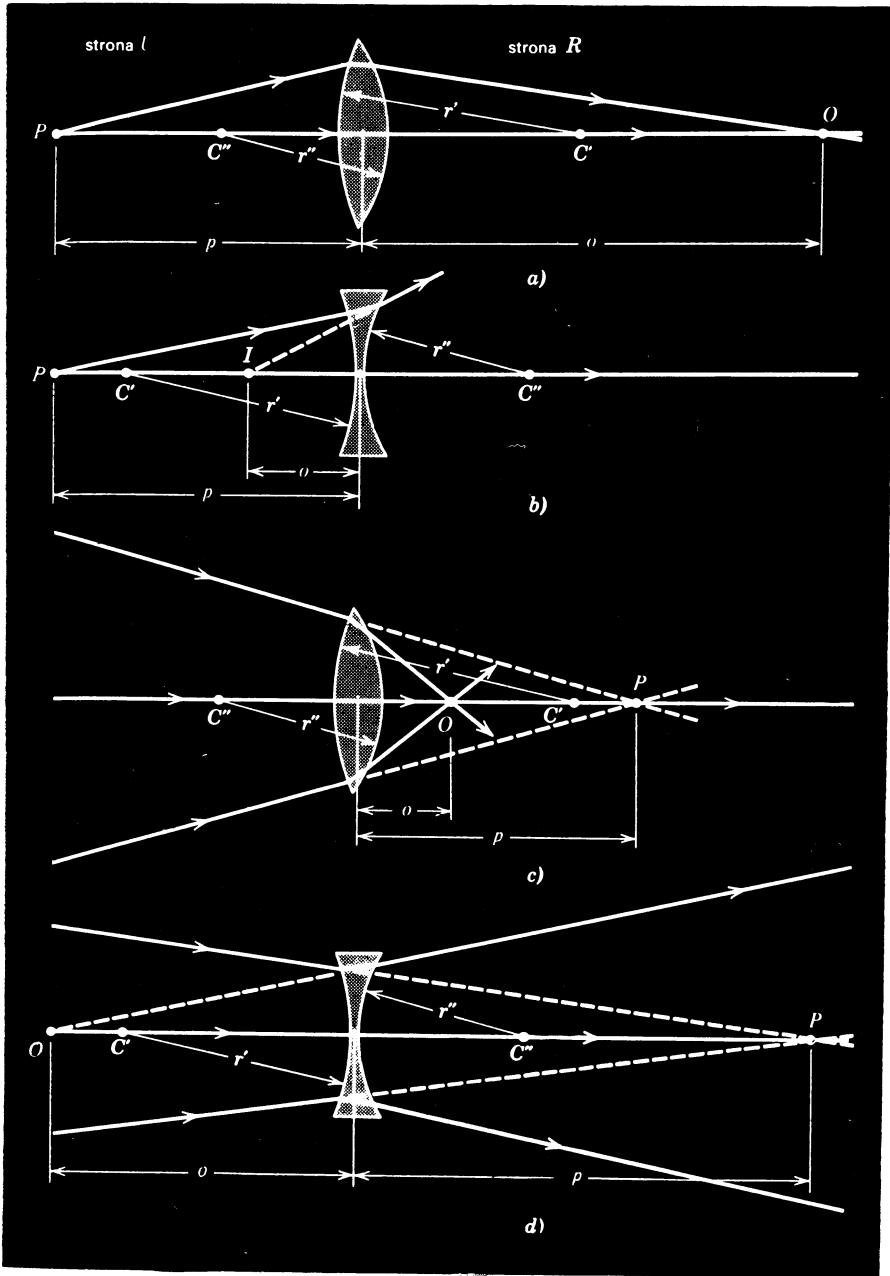


Rys. 44-22. (a) Dwa promienie wychodzące z punktu  $P'$  przecinają się w punkcie  $O''$  (obraz rzeczywisty) po załamaniu na dwu kulistych powierzchniach. (b) Pierwsza powierzchnia i (c) druga powierzchnia pokazane z osobna. Wielkości  $\alpha$  i  $n$  zostały przesadzone dla lepszej przejrzystości rysunku

Stosując równanie (44-12) do drugiej powierzchni przyjmujemy  $n_1 = n$  oraz  $n_2 = 1,0$ , gdyż przedmiot zachowuje się tak, jakby był umieszczony w szkle. Jeśli skorzystamy z równania (44-14), równanie (44-12) przybierze postać

$$\frac{n}{o'+l} + \frac{1}{o''} = \frac{1-n}{r''}. \quad (44-15)$$

Załóżmy teraz, że grubość  $l$  „soczewki” na rys. 44-22 jest tak mała, że może być pominięta w porównaniu z innymi wielkościami liniowymi na tym rysunku (takimi jak



Rys. 44-23. (a) Rzeczywisty obraz i rzeczywisty przedmiot. Zarówno  $p$  jak i  $o$  są dodatnie. (b) Pozorny obraz i rzeczywisty przedmiot. Zauważcie, że  $p$  jest dodatnie, natomiast  $o$  jest ujemne. (c) Rzeczywisty obraz i pozorny przedmiot. Zauważcie, że  $p$  jest ujemne, ale  $o$  jest dodatnie. (d) Pozorny obraz i pozorny przedmiot. Zarówno  $p$  jak i  $o$  są ujemne. Zauważcie, że znak  $p$  zależy od tego czy padające na cienką soczewkę promienie są rozbieżne (dwa pierwsze przypadki), czy zbieżne (dwa ostatnie przypadki). W przypadku rozbieżnej wiązki promieni padających przedmiot jest rzeczywisty; w przypadku wiązki zbieżnej przedmiot jest pozorny. Znak  $o$  zależy od tego czy  $O$  znajduje się po stronie  $R$  soczewki (wówczas obraz  $O$  jest rzeczywisty, a  $o$  dodatnie, jak na rysunku pierwszym i trzecim), czy też po stronie  $U$  soczewki (wówczas obraz  $O$  jest pozorny, a  $o$  ujemne, jak na rysunku drugim i czwartym)

$p'$ ,  $o'$ ,  $p''$ ,  $o''$ ,  $r'$  oraz  $r''$ ). We wszystkich dalszych rozważaniach będziemy korzystać z tego *przybliżenia cienkich soczewek*. Podstawiając  $l = 0$  w równaniu (44-15) otrzymujemy

$$\frac{n}{o'} + \frac{1}{o''} = -\frac{n-1}{r''}. \quad (44-16)$$

Dodając równania (44-13) i (44-16) otrzymujemy

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{o''} = (n-1) \left( \frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} \right).$$

Wreszcie, oznaczając odległość przedmiotu po prostu przez  $p$ , odległość zaś obrazu przez  $o$  otrzymujemy

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{o} = (n-1) \left( \frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} \right). \quad (44-17)$$

Równanie to słuszne jest tylko dla promieni przyosiowych i tylko wtedy gdy soczewki są tak cienkie, że w zasadzie nie stanowią różnicę, od której powierzchni mierzone są wielkości  $p$  oraz  $o$ . W równaniu (44-17)  $r'$  odnosi się do pierwszej powierzchni, na którą pada światło, a  $r''$  do drugiej.

Konwencja znaków dla równania (44-17) jest taka sama jak konwencja dla zwierciadeł czy też pojedynczych powierzchni załamujących. Ponieważ soczewka jest z założenia cienka, mówimy o stronach  $R$  i  $U$  samej soczewki (rys. 44-18), a nie o stronach dla obu jej powierzchni. Konwencje dotyczące znaków są więc następujące:

(1) Odległość  $o$  obrazu jest dodatnia, jeśli obraz (rzeczywisty) leży po stronie  $R$  soczewki, jak na rys. 44-23a i 44-23c;  $o$  jest ujemne, jeśli obraz (pozorny) leży po stronie  $U$  soczewki, jak na rys. 44-23b i 44-23d.

(2) Odległość  $p$  przedmiotu jest dodatnia, jeżeli na soczewkę padają *promienie zbieżne*, jak na rys. 44-23a i 44-23b; przedmiot jest wówczas rzeczywisty. Odległość  $p$  przedmiotu jest ujemna, jeżeli na soczewkę padają *promienie rozbiegające*, jak na rys. 44-23c oraz 44-23d; przedmiot jest wówczas pozorny.

(3) Promienie krzywizny  $r'$  oraz  $r''$  są to promienie odpowiednio pierwszej i drugiej powierzchni, po stronie, z której pada światło. Każda z tych wielkości jest dodatnia, jeśli odpowiedni środek krzywizny  $c'$  i  $c''$  leży po stronie  $R$  soczewki; w przeciwnym wypadku są one ujemne.

Na rysunku 44-24a i 44-24c pokazano równoległą wiązkę światła pochodzącego z odległego źródła, padającą na cienką soczewkę. Położenie obrazu zwane jest *ogniskiem obrazowym*  $F_2$  soczewki. Odległość  $F_2$  od soczewki zwana jest *ogniskową obrazową*  $f$ . *Ogniskiem przedmiotowym* dla cienkiej soczewki (na rysunku punkt  $F_1$ ) jest punkt, w którym położony jest przedmiot, którego obraz znajduje się w nieskończoności. Dla cienkich soczewek ogniska przedmiotowe i obrazowe leżą po przeciwnych stronach soczewki w równej od niej odległości.

Odległość ogniskową można obliczyć z równania (44-17) wstawiając tam  $p \rightarrow \infty$  oraz  $o = f$ . Daje to

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} \right). \quad (44-18)$$

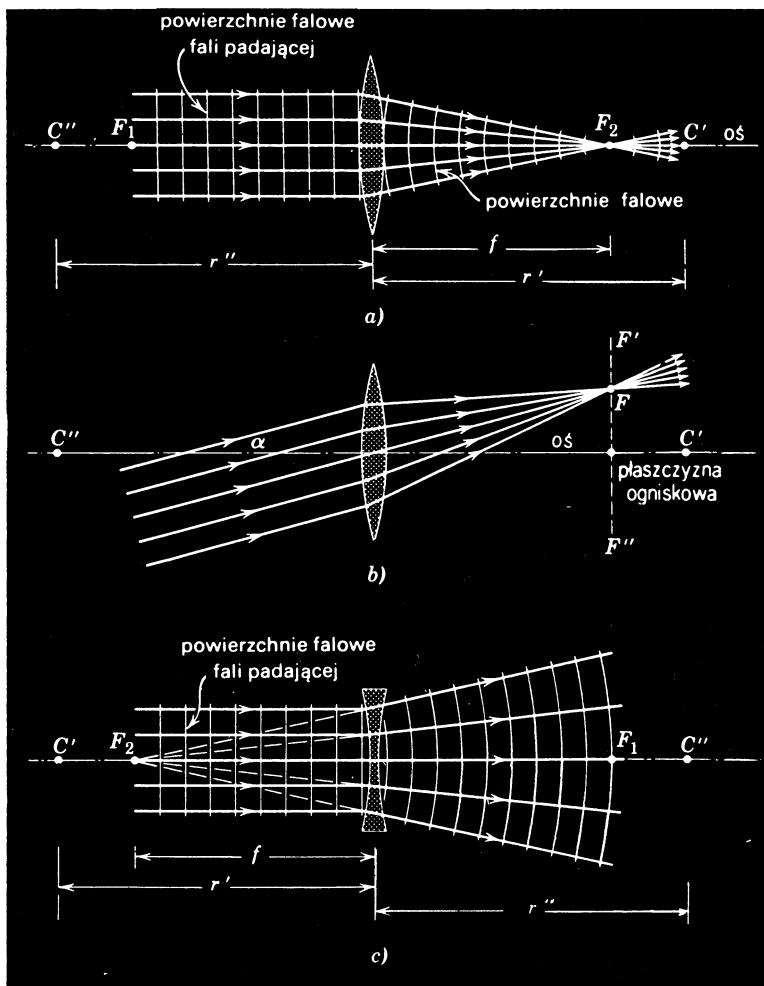
Związek ten nazywamy *równaniem soczewki*, gdyż pozwala on na obliczenie ogniskowej

soczewki, jeśli znane są promienie krzywizny jej powierzchni oraz współczynnik załamania materiału, z którego zrobiona jest soczewka. Łącząc równania (44-17) i (44-18) dostajemy równanie dla cienkiej soczewki w postaci:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{o} = \frac{1}{f}. \quad (44-19)$$

Na rysunku 44-24b pokazano równoległą wiązkę promieni padających, które tworzą mały kąt  $\alpha$  z osią soczewki; skupiają się one w ognisku leżącym w *płaszczyźnie ogniskowej*  $F'F''$ , jak pokazano na rysunku. Jest to płaszczyzna prostopadła do osi soczewki i przechodząca przez ognisko.

Zauważmy, że na rys. 44-24a wszystkie promienie zawierają tę samą ilość długości



Rys. 44-24. (a) Równoległa wiązka światła przechodzi przez drugie ognisko  $F_2$  soczewki skupiającej. (b) Światło padające tworzy kąt  $\alpha$  z osią soczewki, przy czym promienie skupiają się w płaszczyźnie ogniskowej  $F'F''$ . (c) Światło równoległe, przechodzące przez cienką soczewkę, wydaje się wychodzić z drugiego ogniska  $F_2$ .  $C'$  i  $C''$  są środkami krzywizny soczewki,  $F_1$  jest jej pierwszym ogniskiem

fali; innymi słowy przebyły one te same *długości dróg optycznych*; patrz paragraf 43-6. Długości dróg optycznych są takie same, ponieważ powierzchnia falowa jest to powierzchnia, na której zaburzenie falowe ma tę samą stałą wartość i ponieważ wszystkie pokazane na rysunku promienie przechodzą przez tę samą ilość powierzchni falowych.

**Przykład 7.** Soczewki na rys. 44-24 mają promień krzywizny równe 40 cm i są zrobione ze szkła o  $n = 1,65$ . Obliczyć ich ogniskowe.

Ponieważ  $C'$  leży po stronie  $R$  soczewki na rys. 44-24a, więc  $r'$  jest dodatnie ( $= +40 \text{ cm}$ ). Skoro zaś  $C''$  leży po stronie  $U$ ,  $r''$  jest ujemne ( $= -40 \text{ cm}$ ). Z równania (44-18) otrzymujemy

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} \right) = (1,65-1) \left( \frac{1}{+40 \text{ cm}} - \frac{1}{-40 \text{ cm}} \right),$$

czyli

$$f = +31 \text{ cm}.$$

Ponieważ ogniskowa jest dodatnia, więc zgodnie z rys. 44-24a ognisko  $F_2$  leży po stronie  $R$  soczewki i promień równolegle skupią się po załamaniu tworząc obraz rzeczywisty.

Na rysunku 44-24c punkt  $C'$  leży po stronie  $U$  soczewki, tak że  $r'$  jest ujemne ( $= -40 \text{ cm}$ ). Ponieważ  $r''$  jest dodatnie ( $= +40 \text{ cm}$ ) z równania (44-17) otrzymamy

$$f = -31 \text{ cm}.$$

Ujemna ogniskowa wskazuje, że zgodnie z rys. 44-24c ognisko  $F_2$  leży po stronie  $U$  soczewki i że światło padające po załamaniu jest rozbieżne, wskutek czego powstaje obraz pozorny.

Położenie obrazu przedmiotu rozciągłego, takiego jak świeczka (rys. 44-25), można znaleźć graficznie korzystając z następujących trzech faktów:

(1) Promień równoległy do osi i padający na soczewkę przechodzi wprost lub po przedłużeniu, przez drugie ognisko (promień  $x$  na rys. 44-25).

(2) Promień padający na soczewkę po przejściu wprost, lub po przedłużeniu, przez pierwsze ognisko, wyjdzie z soczewki w kierunku równoległym do osi (promień  $y$ ).

(3) Promień padający na środek soczewki przejdzie przez nią bez odchylenia. Odchylenia nie zaobserwujemy, ponieważ soczewka w pobliżu środka zachowuje się jak cienka płytka szklana o równoległych ścianach. Kierunek promienia świetlnego pozostaje nie zmieniony, a przesunięcie promienia w bok można pominąć, ponieważ przyjęto, że grubość soczewki jest zaniedbywalnie mała (promień  $z$ ).

Na rysunku 44-26, który przedstawia część rys. 44-25a, pokazano promień przechodzący przez wierzchołek przedmiotu, środek krzywizny oraz wierzchołek obrazu. Dla podobnych trójkątów  $abc$  i  $dec$  możemy napisać

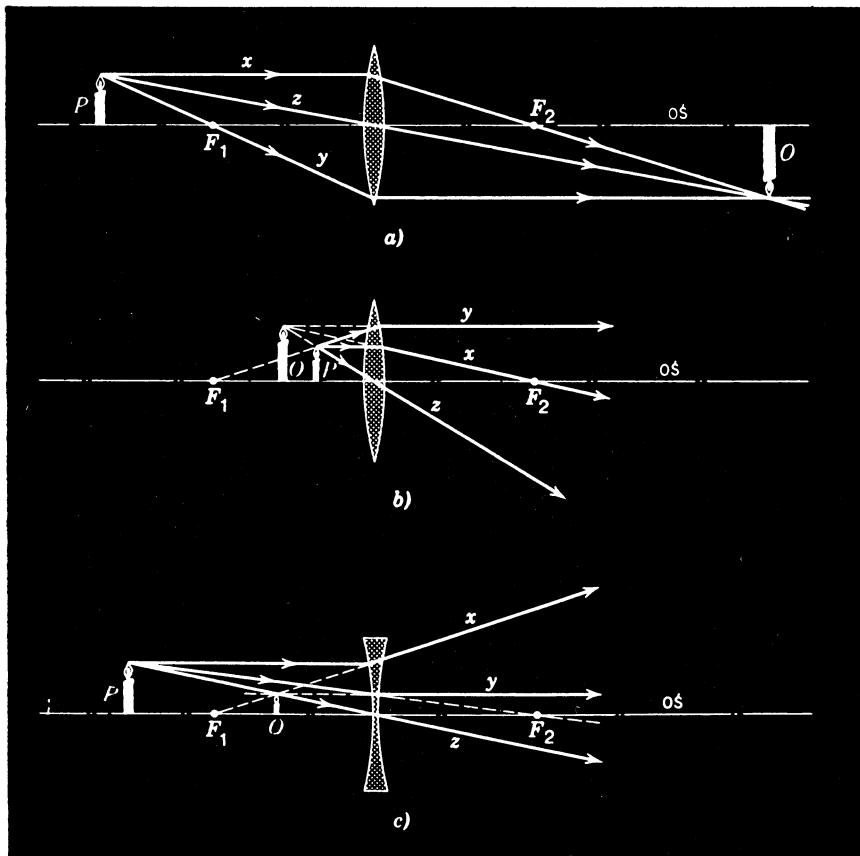
$$\frac{de}{ab} = \frac{dc}{ac}.$$

Po prawej stronie tego równania mamy  $o/p$ , a lewa jest równa  $-m$ , gdzie  $m$  jest *powiększeniem poprzecznym*. Znak minus pochodzi stąd, że żądamy, aby  $m$  było ujemne dla obrazów odwróconych. Ostatecznie więc

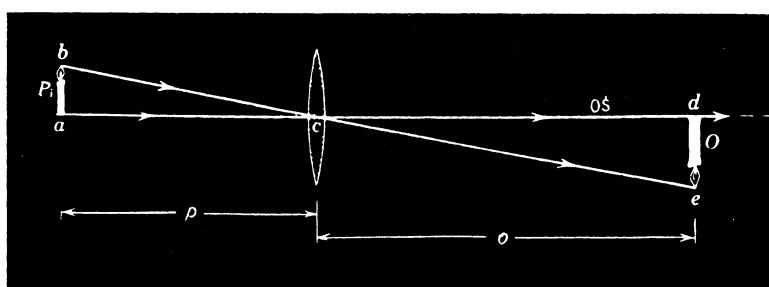
$$m = -\frac{o}{p}. \quad (44-20)$$

Ostatnia równość jest spełniona dla wszystkich typów cienkich soczewek i dla wszystkich odległości przedmiotów od soczewki.

**Przykład 8.** Ogniskowa cienkiej soczewki skupiającej jest równa  $+24 \text{ cm}$ . Przedmiot położony jest w odległości  $9,0 \text{ cm}$  od soczewki, jak na rys. 44-25b; opisać obraz.



Rys. 44-25. Graficzne przedstawienie obrazów dla trzech cienkich soczewek. Rozważamy tu wyłącznie przedmioty rzeczywiste, co oznacza, że na soczewki padają promienie rozbieżne



Rys. 44-26. Dwa promienie dla przypadku z rys. 44-25a

Z równania (44-19),

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{o} = \frac{1}{f},$$

mamy

$$\frac{1}{+9,0 \text{ cm}} + \frac{1}{o} = \frac{1}{+24 \text{ cm}},$$

co daje  $o = -14,4$  cm, zgodnie z rysunkiem. Znak minus oznacza, że obraz leży po stronie U soczewki, a zatem jest pozorny.

Powiększenie poprzeczne dane jest wzorem

$$m = -\frac{o}{p} = -\frac{-14,4 \text{ cm}}{+9,0 \text{ cm}} = +1,6,$$

znów zgodnie z rysunkiem. Znak plus oznacza, że powstający obraz jest prosty.

Obrazy wytwarzane przez soczewki są zniekształcone przez wady podobne do tych, które omawialiśmy już dla zwierciadeł na str. 452. Występują tu efekty związane z faktem, że obraz przedmiotu punktowego nie jest punktowy i że powiększenie zależy od odległości od osi soczewki, a także efekty dyfrakcyjne. Dla soczewek, ale nie dla zwierciadeł, mamy także do czynienia z *aberracjami chromatycznymi*, które wiążą się z faktem, że właściwości załamujące ośrodka zależą od długości fali, ponieważ od tej długości zależy współczynnik załamania. Jeśli przedmiot punktowy leżący na osi soczewki emitemuje światło białe, to obraz, pomijając inne zniekształcenia dawane przez soczewki, będzie ciągiem kolorowych punktów rozmieszczonych wzdłuż osi. Wszyscy widzieliśmy kolorowe obrazy wytwarzane przez tanie soczewki. Wiele trudu w przemyśle optycznym poświęca się na zaprojektowanie soczewek (najczęściej układów soczewek), w których różne wady soczewek byłyby zmniejszone. Powierzchnie soczewek zwykle nie są kuliste i soczewki nie są cienkie.

Zauważmy, że równanie zwierciadła (równ. (44-5)) oraz (identyczne) równanie soczewki (równ. (44-19)) możemy zapisać w postaci:

$$\frac{1}{p/|f|} + \frac{1}{o/|f|} = \pm 1, \quad (44-21)$$

w której  $|f|$ , wartość bezwzględna ogniskowej, jest zawsze dodatnia. Po prawej stronie równania mamy +1 dla soczewek skupiających oraz zwierciadeł wklęszych lub -1 dla soczewek rozpraszających i zwierciadeł wypukłych. Patrz zadanie 41.

Na rysunku 44-27 podano graficzne przedstawienie równania (44-21) zarówno dla zwierciadeł, jak i soczewek, przy czym rys. 44-27a odnosi się do zwierciadeł wklęszych i soczewek skupiających, a rysunek 44-27b dla zwierciadeł wypukłych i soczewek rozpraszających.

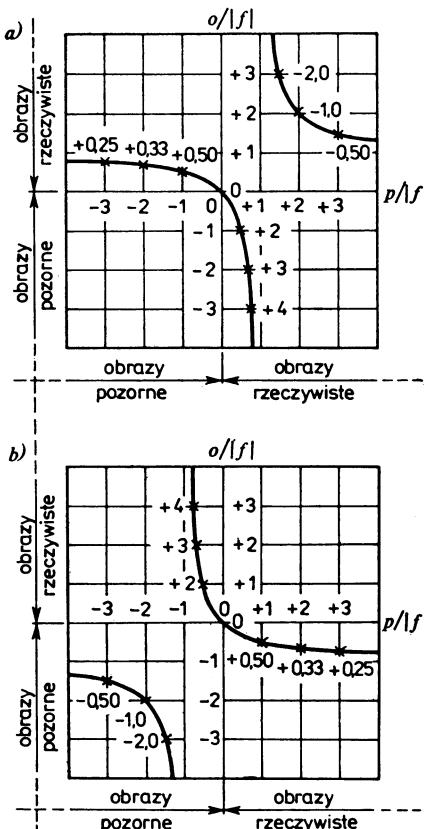
## 44-6. Przyrządy optyczne

Oko ludzkie jest wyjątkowo sprawnym narzędziem\*, niemniej jego możliwości można różnymi sposobami rozszerzyć przy pomocy szeregu przyrządów optycznych, takich jak okulary, lupy (szkła powiększające), projektorzy filmowe, różne kamery (włączając kamerę telewizyjną), mikroskopy, teleskopy itp. W wielu przypadkach przyrządy te rozszerzają obszar naszego widzenia poza zakres widzialny; przykładami mogą tu być: kamera telewizyjna działająca w obszarze podczerwieni, skonstruowana na użytek satelitarny, oraz mikroskop rentgenowski.

W niemal wszystkich wyrafinowanych współczesnych przyrządach optycznych równanie zwierciadła i równanie cienkiej soczewki (równ. (44-5) i (44-19)) są spełnione jedynie w przybliżeniu. Promienie nie muszą być przyosiowe, co wie każdy kto używa aparatu

\* Oczy owadów są jeszcze bardziej operatywne niż oczy ludzkie. (Czy próbowałeś kiedyś złapać muchę?) Patrz: G. Adrian Horridge, The Compound Eye of Insects, *Scientific American*, July 1977.

fotograficznego; w teleskopie astronomicznym jednak, promienie istotnie są przyosiowe. Soczewki obiektywu w typowym mikroskopie laboratoryjnym nie można uważać za soczewkę „cienką” w sensie definicji tego pojęcia podanej w paragrafie 44-5. W większości przyrządów optycznych soczewki są złożone, tzn. wykonane z kilku sklejonych razem części, których powierzchnie graniczne rzadko są idealnie sferyczne. Robi się tak w celu poprawienia jakości obrazu i zwiększenia jasności, a także po to, by znacznie złagodzić wymagania przyosiowości promieni.

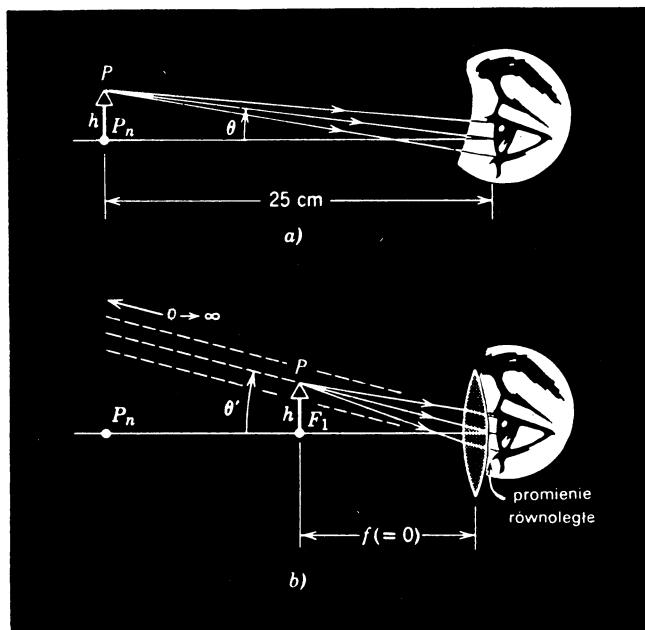


Rys. 44-27. (a) Przedstawienie graficzne  $o/|f|$  oraz  $p/|f|$  dla zwierciadła wklęsgiego i soczewki skupiającej. Zauważcie, że (część dolna, lewa) dla przedmiotu pozornego nie ma obrazu pozornego (patrz równanie (44-20)). Znak dodatni odnosi się do obrazu prostego, ujemny do obrazu odwróconego. Porównaj poprzednie rysunki. (b) Przedstawienie graficzne  $o/|f|$  oraz  $p/|f|$  dla zwierciadła wypukłego oraz soczewki rozpraszającej. Zauważcie, że (część górna, prawa) dla przedmiotu rzeczywistego nie ma obrazu rzeczywistego. Czy możecie to sprawdzić? Liczby w pobliżu  $\times$ , podobnie jak poprzednio, podają powiększenia poprzeczne [równanie (44-20)]. Patrz: Albert A. Bartlett, Image Formation in Lenses and Mirrors, a Complete Representation, *The Physics Teacher*, May 1976

**a. Lupa (szkło powiększające).** Normalne oko ludzkie jest w stanie tworzyć na siatkówce ostry obraz przedmiotu  $P$ , jeśli przedmiot ten jest umieszczony gdziekolwiek pomiędzy nieskończonością (na przykład gwiazdy) a pewnym punktem nazywanym punktem bliskim (lub najbliższym),  $P_n$ , który jak przyjmujemy, znajduje się około 25 cm od oka. Jeśli przedmiot przysunie się bliżej niż  $P_n$ , obraz uzyskany na siatkówce staje się

zamazany\*. Położenie punktu bliskiego zmienia się z wiekiem. Wszyscy słyszeliśmy anegdoty o ludziach, którzy twierdzą że nie muszą nosić szkł, a którzy czytają gazety trzymając je w odległości wyciągniętej ręki; dla nich odległość punktu bliskiego jest zwiększa! Znajdź swój własny punkt bliski przysuwając stronice książki coraz bliżej oka, dla każdego oka oddzielnie, aż trafisz na położenie, przy którym obraz zacznie się stawać niewyraźny.

Rysunek 44-28a przedstawia przedmiot  $P$  umieszczony w punkcie bliskim  $P_n$ . Miarą wielkości obrazu rejestrowanego na siatkówce jest kąt  $\theta$ . Na rys. 44-28b, tuż koło oka, umieszczono soczewkę skupiającą o ogniskowej  $f$ , a przedmiot  $P$  przesunięto do pierwszego



Rys. 44-28. (a) Przedmiot  $P$  o wysokości  $h$  jest umieszczony w punkcie bliskim  $P_n$  ludzkiego oka. Jeśli przysunie się go bliżej, przestanie być obrazowany wyraźnie na siatkówce. (b) Blisko oka została umieszczona soczewka skupiająca (tj. szkło powiększające), a przedmiot przesunięto z  $P_n$  do  $F_1$ . (Na rysunku nie zachowano skali)

ogniska  $F_1$  tej soczewki. Teraz oko rejestruje promień biegający z nieskończoności, przy czym kąt promieni tworzących obraz wynosi teraz  $\theta'$  ( $\theta' > \theta$ ). Powiększenie kątowe  $m_\theta$ , którego nie należy mylić z (liniowym) powiększeniem poprzecznym  $m$  opisanym równaniem (44-20), można obliczyć ze wzoru

$$m_\theta = \theta'/\theta,$$

w którym  $\theta \cong h/25$  cm oraz  $\theta' \cong h/f$ , czyli

$$m_\theta \cong 25 \text{ cm}/f. \quad (44-22)$$

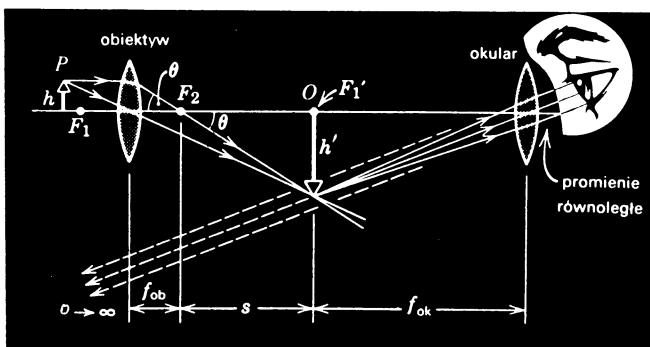
\* W podręczniku S. Pieńkowskiego, *Fizyka doświadczalna, Optyka*, odległość 25 cm nazywa się odlegością wyraźnego widzenia, natomiast terminu „punkt najbliższy” używa się jako nazwy najbliższego od oka punktu, na który oko daje się jeszcze akomodować, choć przy takiej akomodacji odczuwa się wysiłek i oko szybko się męczy. Odległość punktu najbliższego dla normalnego oka wynosi około 10 cm (przyp. tłum.).

Zauważmy, że zgodnie z oczekiwaniami, gdy  $f = 25$  cm, wówczas  $m_\theta = 1$ , czyli  $\theta' = \theta$ . Aberracje soczewki ograniczają powiększenie kątowe dla pojedynczej soczewki skupiającej do kilku razy. Wystarcza to jednak kolekcjonerom znaczków pocztowych i aktorom grającym Sherlocka Holmesa. Bardziej wyrafinowane rozwiązania lupy mają znacznie większe powiększenia kątowe.

**b. Mikroskop.** Rysunek 44-29 przedstawia cienkosoczewkową wersję mikroskopu, używanego do oglądania małych przedmiotów, umieszczanych bardzo blisko tego przyrządu. Przedmiot  $P$  o wysokości  $h$  umieszcza się tuż za ogniskiem przedmiotowym soczewki obiektywowej, o ogniskowej  $f_{ob}$ . Obiektyw daje rzeczywisty, odwrócony obraz  $O$  o wysokości  $h'$ , przy czym powiększenie poprzeczne jest dane równaniem (44-20), a więc

$$m = \frac{h'}{h} = -\frac{s \operatorname{tg} \theta}{f_{ob} \operatorname{tg} \theta} = -\frac{s}{f_{ob}}. \quad (44-23)$$

Znak minus, jak zwykle, wskazuje na to, że obraz jest odwrócony.



Rys. 44-29. Uproszczona wersja mikroskopu złożonego, w której posłużono się soczewkami „cienkimi”

Odległość  $s$  (nazywana czasem długością tubusa) jest tak dobrana, by obraz  $O$  wypadał w ognisku przedmiotowym  $F_1$  okularu, który wobec tego działa jak lupa opisana w poprzednim punkcie. Do oka docierają więc promienie równoległe i ostateczny obraz  $O'$  powstaje w nieskończoności. Całkowite powiększenie  $M$  jest równe iloczynowi powiększenia liniowego  $m$  obiektywu, danego równaniem (44-23) i powiększenia kątowego  $m_\theta$  okularu, danego równaniem (44-22); dostajemy więc

$$M = mm_\theta = -\frac{s}{f_{ob}} \frac{25 \text{ cm}}{f_{ok}}. \quad (44-24)$$

**c. Luneta astronomiczna (teleskop).** Teleskopy, podobnie jak mikroskopy, przybierają wielką rozmaitość form. Formą tu opisaną jest zwykły teleskop soczewkowy (refraktor)\*, który składa się z obiektywu i okularu, na rys. 44-30 reprezentowanych przez cienkie

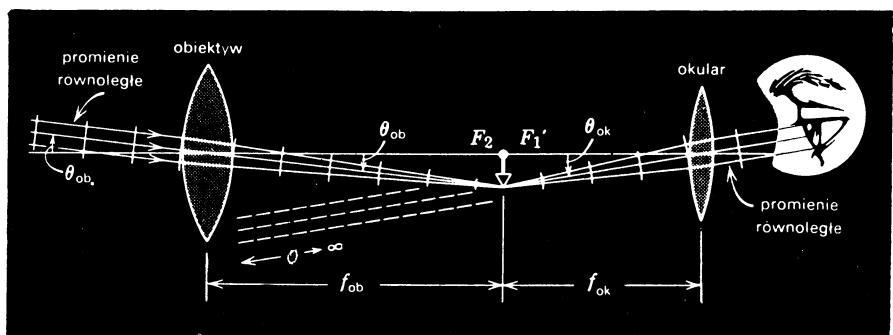
\* Przykład zupełnie odmiennej lunety astronomicznej można znaleźć w publikacji: Nathaniel P. Carleton, Thomas E. Hoffman, The MMT Observatory on Mount Hopkins, *Sky and Telescope*, July 1976. Skrót „MMT” oznacza *Multiple Mirror Telescope* (teleskop zwierciadlany, wielokrotny).

Patrz również *Physics Today*, s. 18, April 1977. Znajduje się tam opis teleskopu pozaziemskiego o aperturze 2,4 m, który ma być umieszczony na orbicie okołoziemskiej. Przyrząd ten ma długość 14 m i będzie ważył prawie 8 ton. Zostanie on wyniesiony na orbitę przez kosmiczny wahadłowiec, który dwa lub trzy razy w roku będzie powracał w celu dokonania napraw i wymiany lub uzupełnienia instrumentów pomiarowych.

soczewki, chociaż w praktyce (podobnie jak dla mikroskopu) każdy z nich będzie złożonym układem soczewek.

Na pierwszy rzut oka może się wydawać, że konfiguracje soczewek dla teleskopu (rys. 44-30) i dla mikroskopu (rys. 44-29) są podobne. Jednakże teleskopy są przeznaczone do oglądania wielkich przedmiotów, takich jak galaktyki, gwiazdy i planety, znajdujących się daleko, podczas gdy mikroskopy są przeznaczone do celów wręcz przeciwnych. Zauważmy również, że na rys. 44-30 ognisko obrazowe  $F_2$  obiektywu pokrywa się z ogniskiem przedmiotowym  $F_1$  okularu, natomiast na rys. 44-29 punkty te są oddalone od siebie na odległość  $s$  (nazywaną czasem *długością tubusa*).

Na rys. 44-30 równoległe promienie pochodzące od odległego przedmiotu padają na soczewkę obiektywową pod kątem  $\theta_{\text{ob}}$  względem osi teleskopu, dając rzeczywisty, odwrócony obraz we wspólnym ognisku  $F_2$ ,  $F'_1$ . Obraz ten stanowi przedmiot dla okularu, więc w efekcie zostanie utworzony kolejny obraz (nadal odwrócony), pozorny w nieskończoności. Promienie tworzące ten obraz biegną pod kątem  $\theta_{\text{ok}}$  do osi teleskopu.



Rys. 44-30. Uproszczona wersja lunety astronomicznej, w której posłużono się soczewkami „cienkimi”

Powiększenie kątowe  $m_\theta$  teleskopu dane jest wyrażeniem  $\theta_{\text{ok}}/\theta_{\text{ob}}$ . Dla promieni przyosiowych możemy napisać, że  $\theta_{\text{ob}} = h'/f_{\text{ob}}$  oraz  $\theta_{\text{ok}} = -h'/f_{\text{ok}}$ , co prowadzi do wzoru

$$m_\theta = -\frac{f_{\text{ob}}}{f_{\text{ok}}} \quad (44-25)$$

Powiększenie jest tylko jednym z parametrów lunety astronomicznej, łatwym w gruncie rzeczy do osiągnięcia (w jaki sposób?). Następnym parametrem jest *zdolność zbierania światła*, decydująca o tym jak jasny jest obraz. Jest ona ważna, gdy oglądamy przedmioty słabo świecące, takie jak np. odległe galaktyki, a zwiększa się ją robiąc obiektywy o możliwie największej średnicy. Jeszcze innym parametrem jest *pole widzenia*. Przyrząd projektowany z myślą o obserwacji galaktyk (wąskie pole widzenia) musi być całkiem inny niż przyrząd przeznaczony do obserwacji meteorów (szerskie pole widzenia). Występują również aberracje soczewek i zwierciadeł, mianowicie *aberracja sferyczna* (soczewki i zwierciadła o powierzchniach idealnie sferycznych nie dają ostrych obrazów) i *aberracja chromatyczna* (dla pojedynczej soczewki ogniskowa zmienia się z długością fali, tak że powstają rozmyte, zabarwione obrazy). Ważna jest także *zdolność rozdzielcza*, charakteryzująca zdolność dowolnego przyrządu optycznego do rozróżniania dwóch przedmiotów (np. gwiazd), których odległość kątowa jest mała. Omówimy to dokładnie w paragrafie 46-5. Powyższa lista bynajmniej nie wyczerpuje parametrów konstrukcyjnych lunet astronomicznych.

Podobne zestawienie moglibyśmy również zrobić dla mikroskopów, a także dla dowolnego przyrządu optycznego wysokiej jakości.

**Przykład 9.** Rysunek 44-31 przedstawia lunetę astronomiczną podobną do lunety z rys. 44-30, z wyjątkiem tego, że (a) padająca wiązka równoległych promieni jest równoległa do osi lunety oraz (b) promienie wejściowe padają na całą soczewkę obiektywu, którego średnica wynosi  $d_{\text{ob}}$  (co zazwyczaj ma miejsce). Obliczyć średnią  $d$  tak zwanej żrenicy wyjściowej, obejmującej wszystkie niosące informacje promienie wyjściowe biegące do oka.

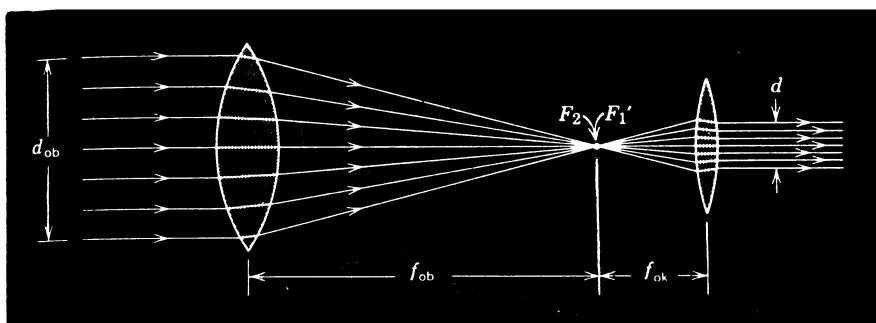
Na rys. (44-31) mamy (z podobieństwa trójkątów)

$$\frac{d_{\text{ob}}/2}{f_{\text{ob}}} = \frac{d/2}{f_{\text{ok}}},$$

skąd (patrz równ. (44-25))

$$d = d_{\text{ob}} \frac{f_{\text{ok}}}{f_{\text{ob}}} = -\frac{d_{\text{ob}}}{m_{\theta}}. \quad (44-26)$$

Zauważmy, że  $m_{\theta}$  jest ujemne, a więc  $d$  jest dodatnie, jak być powinno.



Rys. 44-31. Wzór na  $d$  (równ. (44-26)) pozostaje poprawny, jeśli nawet dobiegające promienie nie są równoległe do osi teleskopu, jak np. na rys. 44-30. Muszą one jednak być bliskie osi, w przeciwnym razie większość ilościowych rozważań tego paragrafu nie będzie prawdziwa

Musimy porównać  $d$  ze średnicą żrenicy oka  $d_{\theta}$ . Średnica żrenicy nie jest stała, bowiem zmienia się z oświetleniem od około 2 mm (pełne słońce) do 9 mm (zupełna ciemność). Idealnym warunkiem jest  $d = d_{\theta}$ . Jeśli np.  $d > d_{\theta}$ , część światła nie trafia do oka, marnuje się więc.

Powysze rozważania w praktyce ulegają modyfikacji. Dla zdecydowanej większości przyrządów optycznych korzystamy z rejestracji fotograficznej. Poza tym teleskopy (i kamery filmowe) w orbitujących satelitach i sondach kosmicznych zazwyczaj przesyłają elektronicznie dane za Ziemię, gdzie są one przekształcane przy użyciu technik komputerowych na obraz fotograficzny. Pojęcie żrenicy wyjściowej pozostaje jednak ważne nie tylko dla obserwacji wizualnej, ale także dla wielu rozważań związanych z konstrukcją układów soczewek.

## Pytania

1. Czy możesz wymyślić prosty test lub doświadczenie dla sprawdzenia, że w warunkach, w których słuszna jest optyka geometryczna prawo odbicia jest niezależne od długości fali?

2. Wszyscy wiemy, że gdy patrzymy w lustro, strona prawa i lewa są zamienione. Prawa ręka wydaje się być lewą ręką; jeśli robimy przedziałek we włosach z lewej strony, wydaje się że są one przedzielone z prawej itd. Czy potrafisz wymyślić układ zwierciadeł, który pozwoliłby widzieć siebie tak, jak widzą nas inni? Jeśli tak, naszkicuj go i sprawdź czy masz rację metodą narysowania kilku typowych promieni.

3. Przekonaliśmy się, że pojedyncze odbicie w zwierciadle płaskim zamienia „prawe” z „lewym”. Jeśli na przykład jedziemy samochodem autostradą, litery na znakach drogowych są odwrócone, gdy oglą-

damy je w lusterku wstecznym. Mimo to, gdy patrzymy w to lusterko, nadal wydaje nam się, że prowadzimy samochód prawą stroną drogi. Dlaczego lusterko odwraca znaki, a nie odwraca stron ruchu? A może czyni to? Przedyskutuj to.

4. Młoda kobieta przegląda się uważnie w płaskim lustrze wysokiej jakości. Widzi ona obraz swej twarzy doskonale odtworzony (ostry). (Pomijamy zamianę stron lewa — prawa.) Dlaczego obraz jest doskonaly (ostry)? Przecież jej nos znajduje się bliżej lustra niż uszy.

5. Zauważmy (rys. 44-8), że część lustra znajdująca się poniżej *b* lub powyżej *a* jest zupełnie zbędna, gdy chce się widzieć w lustrze tylko całego siebie. Jeśli masz dostęp do odpowiedniego lustra przekonaj się, że jest to prawdą naklejając poza punktami *a* i *b* stronice gazety w ten sposób, by odkryty pozostał tylko obszar pomiędzy *a* i *b*. Następnie (poruszając się do tyłu i do przodu) przekonaj się, że powyższe twierdzenie jest prawdziwe niezależnie od tego jak daleko od lustra się znajdujesz. Na koniec naklej arkusz papieru pomiędzy *a* i *b* i zaobserwuj co teraz widzisz w lustrze.

6. Skoro zwierciadło odwraca stronę lewą i prawą, czemu nie odwraca też góry i dołu?

7. Wymyśl układ zwierciadeł płaskich, który pozwoli ci widzieć tył twojej głowy. Wykreśl bieg promieni w celu sprawdzenia czy masz rację.

8. Czy w przypadku gdy na lustro pada zbieżna wiązka promieni, powstający obraz jest pozorny?

9. W wielu autobusach miejskich, w celu zapewnienia kierowcy pełnego pola widzenia, nad drzwiami zawiesza się zwierciadło wypukłe. Czemu nie zwierciadło płaskie lub wklęsłe?

10. Do oglądania zębów dentysti używają małego lusterka zamocowanego na długiej rączce. Jakie jest to lusterko, wypukłe, wklęsłe czy płaskie i dlaczego właśnie takie?

11. Jakich przybliżeń dokonuje się przy wyprowadzaniu równania zwierciadła kulistego (równ. (44-4)):

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{p} = \frac{2}{r} ?$$

12. W jakich warunkach zwierciadło kuliste, które może być wklęsłe lub wypukłe, daje: (a) obraz rzeczywisty, (b) obraz odwrócony, (c) obraz mniejszy niż przedmiot?

13. Czy można widzieć powierzchnię doskonale odbijającą? Inaczej mówiąc, jeśli w ciemnym pokoju umieścimy doskonale odbijające wklęsłe zwierciadło sferyczne oświetlone przez, powiedzmy, jasny przedmiot punktowy leżący na jego osi optycznej, to czy będziemy widzieć powierzchnię zwierciadła? Przedyskutuj to.

14. Czy obraz pozorny można rzutować na ekran? Fotografować? Jeśli w miejscu gdzie znajduje się przedmiot pozorny umieścimy kawałek papieru, to czy po odpowiednio długiej ekspozycji zapali się on (przy założeniu, że wiązka światła ma bardzo duże natężenie)? Rozważ te dwa pytania również dla obrazów rzeczywistych i przedmiotów rzeczywistych zwracając uwagę na różnice między tymi problemami, jeśli jakieś różnice występują. Przeprowadź dyskusję.

15. Oko ludzkie często przyrównuje się do aparatu fotograficznego i istotnie porównanie to ma sens. Jest jednak pewna różnica; oko nie posiada migawki (powieka nie spełnia tej funkcji). Jeśli pozostawimy migawkę otwartą i będziemy panoramicznie omiatać aparatem horyzont, po wywoaniu filmu okaże się, że obraz jest zamazaną plamą. Z drugiej strony jeśli horyzont omiatamy okiem, wszystkie przedmioty widzimy jako oddzielne. Czy potrafisz wyjaśnić różnicę między tymi dwiema sytuacjami? Patrz: Gunnar Johansson, Visual Motion Perception, *Scientific American*, June 1975.

16. W związku z pytaniem 15 rozważ następującą inną różnicę między okiem i aparatem fotograficznym. Jeśli fotografujesz drzewo, na przykład wiąz, obraz na kliszy można łatwo prześwietlić. Z drugiej strony, jeśli po prostu patrzysz na wiąz postrzegany obraz godzinami pozostaje nie zmieniony. Skąd ta różnica?

17. Uważamy, że głównym elementem ogniskującym w oku ludzkim jest rogówka, tj. zakrzywiona zewnętrzna powierzchnia oka i że „soczewka” oka służy do subtelnieszych korekt w obszarze ogniskowania. Czy jest to prawda czy fałsz? Jaką funkcję pełni tęczówka? Czy potrafisz wymienić jakieś przewagi kamery filmowej nad okiem ludzkim? Pewne przewagi są.

18. Czy obserwowana głębokość położenia przedmiotu pod wodą zależy od kąta obserwacji w powietrzu? Wyjaśnić to i zilustrować za pomocą rysunku przedstawiającego bieg promieni świetlnych.

19. Niesymetryczna cienka soczewka tworzy na swej osi obraz przedmiotu punktowego. Czy położenie obrazu zmieni się po odwróceniu soczewki?

20. Dlaczego soczewka ma dwa ogniska, a zwierciadło tylko jedno?

21. W jakich warunkach cienka soczewka (skupiąca albo rozpraszać) tworzy: (a) obraz rzeczywisty, (b) obraz odwrócony i (c) obraz mniejszy niż przedmiot?

22. Nurek pracujący bez wyposażenia chce użyć torby wypełnionej powietrzem jako soczewki skupiającej do użytku podwodnego. Narysować przekrój, jaki powinna mieć torba.

23. Jakich przybliżeń dokonuje się przy wyprowadzeniu równania dla cienkich soczewek (równ. (44-19)):

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{o} = \frac{1}{f} ?$$

24. W jakich warunkach cienka soczewka będzie miała powiększenie poprzeczne równe (a)  $-1$  i (b)  $+1$ ?

25. Jaka jest ogniskowa cienkiej szklanej soczewki dla światła niebieskiego w porównaniu z ogniskową tej samej soczewki dla światła czerwonego, przy założeniu, że soczewka jest (a) rozpraszającą, (b) skupiającą?

26. Czy ogniskowa soczewki zależy od ośrodka, w którym soczewka jest zanurzona? Czy dana soczewka może być soczewką skupiającą w jednym ośrodku, a soczewką rozpraszającą w innym?

27. Czy dla szklanej soczewki umieszczonej w powietrzu słuszne są następujące twierdzenia: (a) Soczewka, która jest grubsza w środku niż przy brzegach, jest soczewką skupiającą dla padającego światła równoległego. (b) Soczewka, która jest grubsza przy brzegach niż w środku, jest soczewką rozpraszającą dla światła równoległego. Wyjaśnić to i przedstawić na rysunku, posługując się powierzchniami falowymi.

28. W jakich warunkach powiększenie poprzeczne dla soczewek i zwierciadeł ( $m = -o/p$ ) stanie się nieskończone? Czy ma to jakieś praktyczne znaczenie?

29. Bieg promieni światłowych jest odwracalny. Przedyskutować przy pomocy pojęcia przedmiotu i obrazu sytuację jaka powstanie, jeśli wszystkie promienie na rysunkach: 44-10, 44-14, 44-17, 44-19, 44-23 i 44-25 będą miały odwrócony kierunek.

30. Omawiając rysunek 44-24a wykazaliśmy, że wszystkie promienie pochodzące z tego samego czoła fali padającej mają te same długości dróg optycznych do miejsca, w którym powstaje obraz. Przedyskutować to twierdzenie w związku z zasadą Fermata (paragraf 43-6).

31. Czy ogniskowa zwierciadła kulistego zależy od ośrodka, w którym jest ono zanurzone?... a cienkiej soczewki?... Na czym polega różnica?

32. Jakie znaczenie ma początek układu współrzędnych w przedstawieniu graficznym wzoru dla cienkich soczewek na rysunkach 44-27a i 44-27b?

33. Jakie są znaki wielkości  $p$ ,  $o$ ,  $r'$  i  $r''$  w czterech przypadkach przedstawionych na rys. 44-23?

34. Jak interpretujesz równości  $p/|f| = +1$  oraz  $o/|f| = +1$  związane z rys. 44-27a? Narysuj bieg promieni ilustrujący te dwie sytuacje dla przypadku soczewek skupiających. Odpowiedz na to samo pytanie dla  $p/|f| = -1$  oraz  $o/|f| = -1$  (w związku z rys. 44-27b) dla cienkiej soczewki rozpraszającej.

35. Dlaczego powiększenie lupy wyrażane jest przez kąty a nie przez rozmiary obrazu i przedmiotu (patrz wyprowadzenie równania (44-22))?

36. Zwyczajne okulary nie powiększają, natomiast lupa powiększa. Jaka więc jest funkcja okularów?

37. Jasność soczewki aparatu fotograficznego (patrz zadanie 46) jest równa jej ogniskowej podzielenie przez aperturę, tj. jej efektywną średnicę. Dlaczego wielkość tą warto znać przy fotografowaniu? Jak można zmieniać jasność soczewki? Jak jest związany czas ekspozycji z jasnością?

38. Czy ma jakieś znaczenie to czy: (a) teleskop astronomiczny, (b) mikroskop, (c) lupa, (d) aparat fotograficzny (a również kamera telewizyjna) oraz (e) projektor (w tym projektor przezroczysty a także projektor filmowy) dają obrazy proste, czy odwrócone? A co z obrazami rzeczywistymi i pozornymi? Przedyskutuj każdy przypadek.

39. Dlaczego dla zwykłych soczewek pojawia się aberracja chromatyczna, a dla zwierciadeł nie?

40. Nieuzbrojone oko ludzkie tworzy na siatkówce obraz rzeczywisty, ale odwrócony. (a) Dlaczego więc przedmiotów, takich jak ludzie czy drzewa, nie widzimy „do góry nogami”? (b) Oczywiście nie widzimy w ten sposób, ale założmy, że nosimy specjalne szkła, które umożliwiają takie widzenie. Gdybyś w tej sytuacji odwrócił tę książkę do góry nogami, czy czytałbyś to pytanie z taką samą łatwością, jak robisz to teraz? Przedyskutuj to.

41. Gdy reżyser filmu chce, aby scena była przedstawiona tak jak by była widziana przez lornetkę, na ekranie zwykle pojawia się maskujący lornetkę kontur w kształcie poziomej ósemki. Co w tym jest niewłaściwego?

42. Dlaczego wszystkie wielkie teleskopy astronomiczne ostatnich czasów należą do rodziny przyrządów zwierciadłanych (reflektorów), a nie soczewkowych (refraktorów)? Pomyśl o problemach związanych z mechanicznym montażem soczewek i zwierciadeł, o trudnościach kształtowania (czyli modelowania) różnych potrzebnych powierzchni optycznych, o trudnościach związanych z małymi skazami w szklanych bryłach przeznaczonych do wykonania soczewek i zwierciadeł itd.

### Zadania

#### Paragraf 44-2

1. Mały przedmiot znajduje się w odległości 10 cm przed zwierciadłem płaskim. Na jaką odległość musimy zogniskować oczy, jeśli stojmy za przedmiotem w odległości 30 cm od zwierciadła i patrzymy na jego obraz?

Odp.: 40 cm.

2. Przypuśćmy, że chcesz sfotografować przedmiot widziany w płaskim zwierciadle. Na jaką odległość musisz nastawić obiektyw swojego aparatu fotograficznego, jeśli przedmiot znajduje się 5,0 m na prawo od Ciebie, o 1,0 m bliżej płaszczyzny zwierciadła niż Ty?

3. Punktowy przedmiot znajduje się w odległości 10 cm od zwierciadła, a oko obserwatora (średnica źrenicy 5,0 mm) w odległości 20 cm. Zakładając, że zarówno oko jak i punkt leżą na tej samej linii prostopadłej do powierzchni zwierciadła, oblicz pole powierzchni aktywnej przy obserwacji odbicia punktu.

Odp.: 2,2 mm<sup>2</sup>.

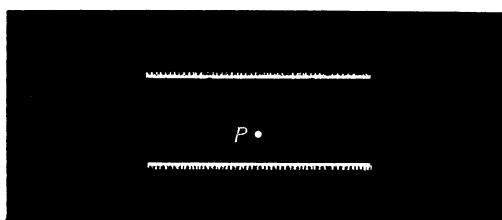
4. Dwa zwierciadła płaskie tworzą między sobą kąt prosty. Jaka jest największa ilość obrazów przedmiotu umieszczonego pomiędzy nimi, którą można widzieć, jeśli właściwie umieścimy oko? Przedmiot *nie* musi leżeć na dwusiecznej zwierciadeł.

5. Rozwiązać przykład 2, jeśli kąt między zwierciadłami wynosi: (a) 45°, (b) 60°, (c) 120°, a przedmiot jest zawsze umieszczony na dwusiecznej zwierciadeł.

Odp.: (a) 7; (b) 5; (c) 2.

6. Jaką liczbę swoich obrazów może widzieć obserwator w pokoju, którego sufit i dwie przylegające do siebie ściany są lustrami? Uzasadnij odpowiedź.

7. Mały przedmiot *P* jest umieszczony w jednej trzeciej odległości pomiędzy dwoma równoległymi zwierciadłami płaskimi, jak na rys. 44-32. Wykreślić odpowiednie wiązki promieni dla obserwatora oglądającego cztery obrazy leżące najbliżej przedmiotu.



Rys. 44-32. Zadanie 7

8. Obróć zwierciadło z rys. 44-6 o 30° zgodnie z ruchem wskazówek zegara, pozostawiając punktowy przedmiot *P* na miejscu. Czy (pozorny) obraz punktu przemieści się? Jeśli tak, to gdzie teraz będzie? Czy oko może nadal, nie zmieniając polożenia, widzieć obraz. Wykonaj rysunek przedstawiający nową sytuację, pozostawiając oko i *P* w dotychczasowych położeniach.

9. Zaglądasz przez dziurkę do wnętrza oświetlonego pudelka. Na jego wewnętrznej ścianie, naprzeciw Ciebie, znajduje się płaskie zwierciadło. Wewnątrz, wokół pionowej osi powoli obraca się zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara (patrząc z góry) kwadratowa ramka z drutu. Odległość od dziurki do zwierciadła wynosi 15 cm. (a) Jak daleko od zwierciadła powinna być umieszczona pionowa oś obrotu kwadratu żeby jego obraz w zwierciadle wydawał się dwa razy mniejszy? (b) Porównaj kierunek obrotu przedmiotu i obrazu. (c) Opisz własnymi słowami co widziałbyś, gdybyś nie był poinformowany, że pudelko zawiera zwierciadło.

10. Uogólnij rys. 44-9 na trzy wymiary dodając zwierciadło prostopadłe do wspólnej osi dwóch po-

kazanych zwierciadeł. Taki układ tworzy odbijający narożnik, często wykorzystywany w optycznych, mikrofalowych i innych zastosowaniach. Ma on tę właściwość, że padający promień po trzech odbiciach zostaje wysłany z powrotem, wzdułż tego samego kierunku. Czy potrafisz to udowodnić?

#### Paragraf 44-3

11. Na rysunkach takich jak rys. 44-10 promienie nie są, ze względu na czytelność, wykreślane na tyle blisko osi, by równ. (44-4) było spełnione z wielką dokładnością. Zmierz linijką  $r$  oraz  $p$  na tym rysunku i oblicz z równ. (44-4) przewidywaną wartość  $o$ . Porównaj wyniki obliczenia ze zmierzoną wartością  $o$ .

12. Wypełnić poniższą tabelę, której każda kolumna odnosi się do zwierciadła kulistego i przedmiotu rzeczywistego. Sprawdzić otrzymane wyniki przy pomocy analizy graficznej. Odległości podane są w centymetrach; jeśli liczba jest podana bez znaku, znaleźć właściwy znak.

Odp.: Dla co drugiej pionowej kolumny: (a) +, +40, -20, +2, nie, tak. (c) Wklęsłe, +40, +60, -2, tak, nie. e) Wypukłe, -20, +20, +0,5, nie, tak. (g) -20, -, -, +5, nie, tak.

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$
typ	wklęsłe						wypukłe	
$f$	20		+ 20			20		
$r$					- 40		40	
$o$					- 10		4	
$p$	+ 10	+ 10	+ 30	+ 60				+ 24
$m$		+ 1		- 0,5		+ 0,10		0,50
obraz rzeczywisty?		nie						
obraz prosty?								nie

13. Krótki przedmiot liniowy o długości  $l$  leży na osi zwierciadła kulistego w odległości  $p$  od zwierciadła. (a) Pokazać, że jego obraz ma długość  $l'$  równą

$$l' = l \left( \frac{f}{p-f} \right)^2.$$

(b) Pokazać, że powiększenie podłużne  $m'$  ( $= l'/l$ ) równe jest  $m^2$ , gdzie  $m$  jest powiększeniem poprzecznym omawianym w paragrafie 44-3. (c) Czy istnieją takie warunki, w których, pomijając wady zwierciadeł, obraz sześcianu byłby także sześcianem?

Odp.: (c) Tak; przedmiot w środku krzywizny.

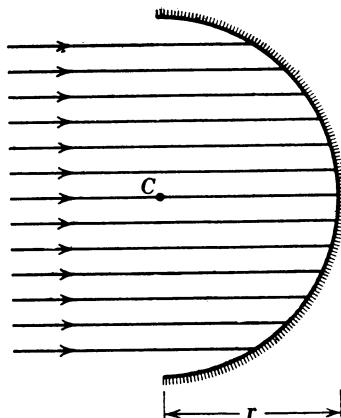
14. Przrysować rys. 44-33 na dużej kartce papieru i zaznaczyć dokładnie promienie odbite, posługując się prawem odbicia. Czy tworzy się ognisko punktowe? Przedyskutować wynik.

15. Cienka płaska płytka z częściowo odbijającego szkła znajduje się w odległości  $b$  od wypukłego zwierciadła. W odległości  $a$  przed płytą umieszczono punktowo źródło światła  $Z$  (patrz rys. 44-34), tak że obraz źródła w częściowo odbijającej płytce pokrywa się z jego obrazem w zwierciadle. Oblicz  $a$  i narysuj bieg promieni, jeśli  $b = 7,5$  cm, a ogniskowa zwierciadła  $f = -30$  cm.

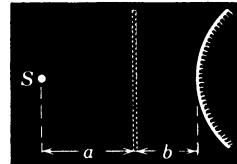
Odp.: 23 cm.

16. Sprawdź, że równ. (44-4) jest zgodne z sytuacją na rysunkach 44-5, 10, 12 (patrz przykład 3), 13, 14 i 15. W niektórych przypadkach możliwa jest tylko odpowiedź jakościowa.

17. Zmodyfikuj rys. 44-12 w taki sposób (przez dodanie, jeśli to możliwe, drugiego zwierciadła z lewej strony tego, które już jest) by przedmiot na rys. 44-12 był pozorny. Narysuj bieg promieni.



Rys. 44-33. Zadanie 14



Rys. 44-34. Zadanie 15

#### Paragraf 44-4

18. Na dnie basenu o głębokości 3 m leży moneta. Na jakiej głębokości ją widać, gdy patrzy się nad wody? Współczynnik załamania wody wynosi 1,33.

19. Wypełnić podaną niżej tabelkę, w której każda kolumna odnosi się do powierzchni kulistej oddzielającej dwa ośrodko o różnych współczynnikach załamania. Odległości mierzone są w centymetrach. We wszystkich przypadkach przedmiot jest rzeczywisty.

Sporządzić rysunek dla każdego przypadku, konstrując graficznie odpowiednie promienie. Założyć, że przedmiot jest punktowy.

*Odp.:* Dla co drugiej kolumny: (a) -18, nie. (c) +71, tak. (e) +30, nie. (g) -26, nie.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>
<i>n</i> <sub>1</sub>	1,0	1,0	1,0	1,0	1,5	1,5	1,5	1,5
<i>n</i> <sub>2</sub>	1,5	1,5	1,5		1,0	1,0	1,0	
<i>p</i>	+10	+10		+20	+10		+70	+100
<i>o</i>		-13	+600	-20	-6	-7,5		+600
<i>r</i>	+30		+30	-20		-30	+30	-30
obraz rzeczywisty?								

20. Warstwa wody ( $n = 1,33$ ) o grubości 2 cm rozpościera się na powierzchni czterochlorku węgla ( $n = 1,46$ ) o grubości 4,0 cm. Jak głęboko pod powierzchnią wody, oglądanej w kierunku do niej prostąpadłym, wydaje się znajdować dolna powierzchnia czterochlorku węgla?

21. Jako przykład ważności założenia o przyosiowości promieni rozważmy następujący problem. Na dnie basenu napełnionego do głębokości 2,4 m wodą ( $n = 1,33$ ) umieszczamy monetę. Jaka jest pozorna głębokość, na której leży moneta, licząc od powierzchni wody, gdy (a) patrzymy prawie prostąpadle (promienie przyosiowe!) oraz (b) widzimy monetę dzięki promieniom biegnącym od niej pod kątem 30° względem normalnej (a to już zdecydowanie nie są promienie przyosiowe)?

*Odp.:* (a) 1,8 m. (b). 1,68 m.

22. Zdefiniować i znaleźć położenie pierwszego i drugiego ogniska (patrz str. 459) dla pojedynczej kulistej powierzchni, takiej jak na rys. 44-17.

23. Równoległa wiązka światła pada prostopadle na powierzchnię szklanej kuli. Znaleźć położenie obrazu i określić je za pomocą współczynnika załamania  $n$  i promienia kuli  $r$ .

Odp.: Przy założeniu, że  $n < 2$  jak to jest dla szkła i że światło pada na kulę z lewej strony dostajemy  $o = \frac{2-n}{2(n-1)}r$ , na prawo od prawej powierzchni kuli.

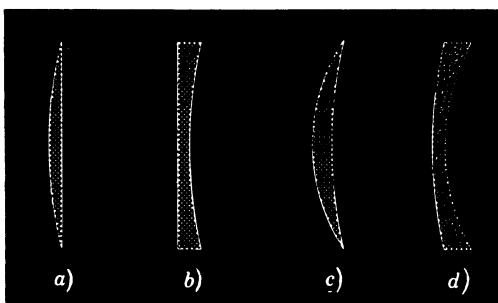
#### Paragraf 44-5

24. Ze szkła o współczynniku załamania 1,50 mamy wykonać soczewkę dwuwypukłą. Jedna z jej powierzchni ma mieć promień krzywizny dwa razy większy niż druga, a ogniskowa ma być równa 6,0 cm. Jakie są te promienie?

25. Soczewka jest wykonana ze szkła o współczynniku załamania 1,5. Jedna strona soczewki jest płaska, a druga wypukła o promieniu krzywizny 20 cm. (a) Znajdź ogniskową soczewki. (b) Gdzie powstanie obraz jeśli przedmiot umieści się z lewej strony soczewki, w odległości 40 cm od niej? (c) Czy kotaś z tych odpowiedzi zmieni się, jeśli soczewkę obróćmy o  $180^\circ$ ?

Odp.: (a) +40 cm. (b) Obraz z prawej strony w  $+\infty$ . (c) Nie.

26. Korzystając ze wzoru soczewkowego (równanie 44-18) powiedzieć, która z cienkich soczewek na rys. 44-35 jest skupiąjąca, a która rozpraszająca dla równoległej wiązki światła padającego.



Rys. 44-35. Zadanie 26

27. Przedmiot umieszczony jest w środku krzywizny soczewki dwuwypukłej, której oba promienie krzywizny są takie same. (a) Jakie są znaki obu promieni krzywizny? (b) Znaleźć położenie obrazu wyrażając je za pomocą promienia krzywizny  $r$  oraz współczynnika załamania  $n$  szkła. (c) Określić charakter obrazu. (d) Sprawdzić wynik za pomocą rysunku z zaznaczonymi promieniami.

Odp.: (a)  $r'$  jest ujemne, a  $r''$  dodatnie; patrz rys. 44-23b i c. (b)  $o = -\frac{r}{2n-1}$ . (c) Pozorny, prosty.

28. Wykaż, że ogniskowa  $f'$  cienkiej soczewki, której współczynnik załamania wynosi  $n$ , zanurzonej w ośrodku (np. w wodzie) o współczynniku załamania  $n'$  jest dana wzorem

$$\frac{1}{f'} = \frac{n-n'}{n'} \left( \frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} \right).$$

29. Odtwórz rys. 44-27a korzystając z podstawowych zasad, tj. z równ. (44-19). Skąd wiadomo: (a) Czy soczewka jest rozpraszająca czy skupiąjąca? (b) Czy obraz jest rzeczywisty, czy pozorny? (c) Czy przedmiot jest rzeczywisty czy pozorny? (d) Czy powiększenie poprzeczne jest  $> 1$  czy też  $< 1$ ?

30. Wypełnić, na ile to jest możliwe, tabelkę na str. 476, w której każda kolumna odnosi się do cienkiej soczewki. Sprawdzić poprawność podanych wyników metodą graficzną. Odległości podane są w centymetram; jeśli liczba nie ma znaku (z wyjątkiem  $n$ ) znaleźć właściwy znak. Sporządzić rysunek dla każdej sytuacji i przedstawić graficznie odpowiednie promienie. Przedmiot we wszystkich wypadkach jest rzeczywisty.

Odp.: Dla co drugiej kolumny (symbol X oznacza, że tej wielkości nie można wyznaczyć na podstawie zamieszczonych danych): (a) +, X, X, +20, X, -1, tak, nie. (c) Skupiąjąca, +, X, X, -10, X, nie, tak. (e) skupiąjąca, +30, -15, +1,5, nie, tak. (g) rozpraszająca, -120, -9,2, +0,92, nie, tak. (i) skupiąjąca, +33, X, X, +5, X, -, nie.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>
typ	skupiająca								
<i>f</i>	10	+ 10	10	10					
<i>r'</i>					+ 30	- 30	- 30		
<i>r''</i>					- 30	+ 30	- 60		
<i>o</i>									
<i>p</i>	+ 20	+ 5	+ 5	+ 5	+ 10	+ 10	+ 10	+ 10	+ 10
<i>n</i>					1,5	1,5	1,5		
<i>m</i>			> 1	< 1				0,5	0,5
obraz rzeczywisty?								tak	
obraz prosty?							tak		

31. Świecący przedmiot i ekran znajdują się w ustalonej odległości  $D$  od siebie. (a) Pokazać, że soczewka skupiająca o ogniskowej  $f$  utworzy obraz rzeczywisty na ekranie dla dwu położień odległych od siebie o

$$d = \sqrt{D(D-4f)}.$$

(b) Pokazać, że stosunek dwu wielkości obrazu dla tych dwóch położień wynosi

$$\left( \frac{D-d}{D+d} \right)^2.$$

32. Soczewka skupiająca o ogniskowej +20 cm została umieszczona 10 cm na lewo od soczewki rozpraszającej o ogniskowej -15 cm. Zakładając, że 40 cm na lewo od pierwszej soczewki umieszczono rzeczywisty przedmiot, zlokalizować i opisać wyczerpująco utworzony obraz.

33. Dwie cienkie soczewki o ogniskowych  $f_1$  i  $f_2$  stykają się ze sobą. Pokazać, że są one równoważne jednej, cienkiej soczewce o ogniskowej danej wzorem

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}.$$

34. Wykazać, że odległość między rzeczywistym przedmiotem i jego rzeczywistym obrazem utworzoną przez cienką soczewkę skupiającą jest zawsze większa lub równa czterokrotnej ogniskowej soczewki.

35. Równanie

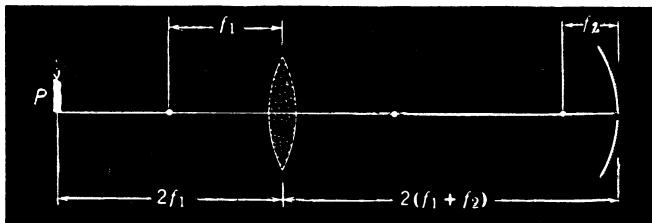
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{o} = \frac{1}{f}$$

zwane jest *równaniem Gaussa* dla cienkich soczewek. Pokazać, że prawdziwe jest także równanie

$$xx' = f^2,$$

gdzie  $x$  jest odlegością przedmiotu od pierwszego ogniska, a  $x'$  — odlegością drugiego ogniska od obrazu. Tę drugą postać równania nazywamy postacią *newtonowską*.

36. Prosty przedmiot jest umieszczony w pewnej odległości od soczewki skupiającej, przy czym odległość ta jest równa podwojonej ogniskowej  $f_1$  tej soczewki. Z drugiej strony soczewki znajduje się zwierciadło skupiające o ogniskowej  $f_2$ , odległe od soczewki o  $2(f_1 + f_2)$ . (a) Znaleźć położenie, charakter i względna wielkość końcowego obrazu. (b) Sporządzić odpowiedni rysunek biegu promieni. (Patrz rys. 44-36).



Rys. 44-36. Zadanie 36

37. Dwie cienkie soczewki, jedna o ogniskowej  $f = +12,0 \text{ cm}$ , a druga o ogniskowej  $f = -10,0 \text{ cm}$ , znajdują się w odległości  $70 \text{ cm}$  od siebie. W odległości  $43,5 \text{ cm}$  od środka układu soczewek na głównej osi optycznej, umieszczono mały przedmiot, najpierw z jednej, a następnie z drugiej strony. Wyznacz położenie obrazu końcowego w obydwu przypadkach.

*Odp.:* Gdy przedmiot jest bliżej soczewki skupiającej jego obraz powstaje  $8,5 \text{ cm}$  od środka układu soczewek, po przeciwej stronie niż przedmiot. Gdy przedmiot jest bliżej soczewki rozpraszającej jego obraz powstaje  $63,5 \text{ cm}$  od środka układu soczewek, po przeciwej stronie niż przedmiot.

38. (a) Wykaż, że układ składający się z cienkiej soczewki skupiającej o ogniskowej  $f$  i cienkiej soczewki rozpraszającej o ogniskowej  $-f$  ogniskuje równoległą wiązkę światła w ognisku leżącym poza drugą soczewką, jeśli tylko odległość  $L$  między soczewkami spełnia warunek  $0 < L < f$ . (b) Czy własność ta zachowuje się jeśli soczewki zostaną zamienione miejscami? (c) Co dzieje się gdy  $L = 0$ ?

39. W odległości  $2,0 \text{ m}$  od płaskiego zwierciadła znajduje się soczewka skupiająca o ogniskowej  $0,5 \text{ m}$ , przed którą, w odległości  $1,0 \text{ m}$  od niej, umieszczono przedmiot. (a) W jakiej odległości od soczewki pozostaje końcowy obraz, który może widzieć obserwator patrzący przez soczewkę w kierunku zwierciadła? (b) Czy obraz ten jest rzeczywisty czy pozorny? (c) Czy jest on prosty, czy odwrócony? (d) Jakie jest powiększenie poprzeczne układu?

*Odp.:* (a)  $0,60 \text{ m}$ , po przeciwej stronie soczewki niż zwierciadło. (b) Rzeczywisty. (c) Prosty. (d)  $+0,20$ .

40. Przedmiot znajduje się w odległości  $20 \text{ cm}$  na lewo od soczewki o ogniskowej  $+10 \text{ cm}$ . Druga soczewka o ogniskowej  $+12,5 \text{ cm}$  umieszczona jest w odległości  $30 \text{ cm}$  na prawo od pierwszej soczewki. (a) Posługując się obrazem wytwarzanym przez pierwszą soczewkę jako przedmiotem dla drugiej soczewki znaleźć położenie i względną wielkość obrazu końcowego. (b) Sprawdzić wnioski przez narysowanie układu soczewek i wykreślenie linii odpowiadających biegowi promieni. (c) Opisać obraz końcowy.

41. Wykaż poprawność równania (44-21).

#### Paragraf 44-6

42. W związku z rys. 44-28b (a) wykaż, że gdy przedmiot  $P$  przesuwamy z pierwszego ogniska  $F_1$  w kierunku oka, jego obraz zbliża się z nieskończoności, a kąt  $\theta'$  (a więc także powiększenie kątowe  $m_\theta$ ) rośnie. (b) W jakim położeniu obrazu  $m_\theta$  osiąga największą z praktycznie dostępnych wartości, gdy kontynuuje się ten proces? (c) Wykaż, że ta maksymalna wartość  $m_\theta$  wynosi  $1 + (25 \text{ cm})/f$ . (d) Wykaż, że w tej sytuacji powiększenie kątowe jest równe powiększeniu liniowemu.

43. Mikroskop tego typu jak na rys. 44-29 ma obiektyw o ogniskowej  $4,0 \text{ cm}$  i okular o ogniskowej  $8,0 \text{ cm}$ . Odległość między tymi soczewkami wynosi  $25 \text{ cm}$ . (a) Jaka jest odległość  $s$  z rys. 44-29? (b) Jak daleko poza  $F_1$  należy umieścić przedmiot żeby odtworzyć warunki z rys. 44-29? (c) Jaki jest powiększenie poprzeczne (liniowe)  $m$  obiektywu? (d) Jakie jest powiększenie kątowe  $m_\theta$  okularu? (e) Jakie jest całkowite powiększenie  $M$  mikroskopu?

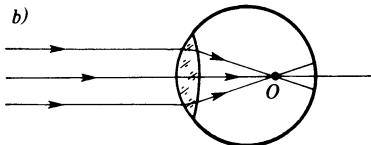
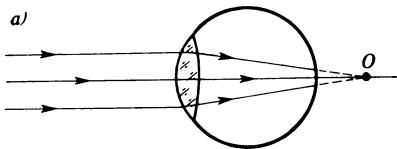
*Odp.:* (a)  $13 \text{ cm}$ . (b)  $1,2 \text{ cm}$ . (c)  $-3,3 \text{ cm}$ . (d)  $3,1$ . (e)  $-10$ .

44. Oko — podstawowy przyrząd optyczny: Rysunek 44-37a przedstawia normalne oko ludzkie. Równoległe promienie wchodzące do oka nie naprężonego, nastawnego na nieskończoność, tworzą na siatkówce obraz rzeczywisty i odwrócony. Oko działa więc jak soczewka skupiająca. Zasadnicze załamanie następuje na zewnętrznej powierzchni oka, nazywanej rogówką. Zakładamy, że ogniskowa  $f$  oka wynosi  $2,50 \text{ cm}$ .

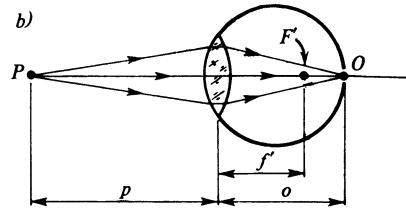
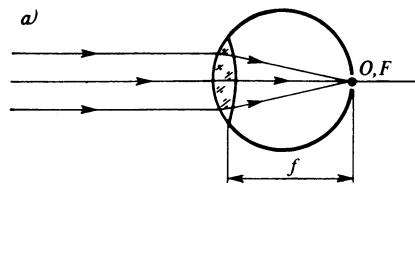
Na rysunku 44-37b przedmiot został przysunięty na odległość  $P (= 40,0 \text{ cm})$  od oka. Jeśli obraz ma powstać na siatkówce, ogniskowa oka musi się zmniejszyć do  $f'$ . Odbywa się to dzięki działaniu mięśni

rzęskowych, które zmieniają kształt soczewki ocznej, a co za tym idzie efektywną ogniskową oka. (a) Z powyższych danych oblicz  $f'$ . (b) Czy przy przejściu od  $a$  do  $b$  na rys. 44-37 efektywny promień krzywizny soczewki staje się większy czy mniejszy? (Budowę oka na rysunku przedstawiono tylko z grubsza, ponadto rys. 44-37b nie jest narysowany „w skali”).

45. Oko *dalekowidza* ogniskuje promienie równolegle w ten sposób, że obraz powstaje za siatkówką, tak jak na rys. 44-38a. W oku *krótkowidza* obraz powstaje przed siatkówką, tak jak na rys. 44-38b. (a) Jaki soczewki korekcyjne zaprojektowałbyś dla każdej z tych wad wzroku? Narysuj bieg promieni dla obydwojnych przypadków. (b) Jeśli używasz okularów tylko do czytania, czy jesteś krótkowidzem czy dalekowidzem? (c) Jaka jest funkcja okularów dwuogniskowych, w których części górne i dolne mają różne ogniskowe? (d) Niektórzy muzycy w orkiestrach symfonicznych (zresztą nie tylko oni) noszą okulary trójogniskowe. Jakie problemy zawodowe są tego przyczyną?

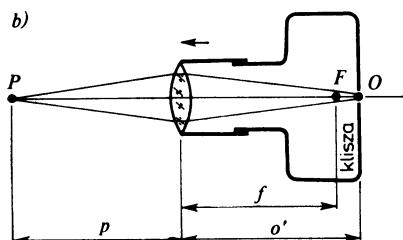
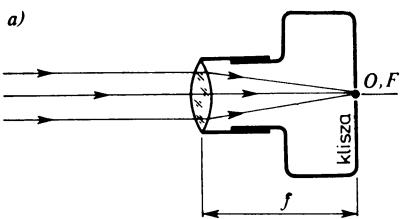


Rys. 44-37. Zadanie 44



Rys. 44-38. Zadanie 45

46. *Aparat fotograficzny*: Na rysunku 44-39 przedstawiono wyidealizowany aparat fotograficzny nastawiony (zogniskowany) na przedmiot w nieskończoności. Na kliży powstaje rzeczywisty, odwrócony obraz  $O$ , którego odległość obrazowa  $o$  jest równa (stałej) długości ogniskowej  $f$  (= 5,0 cm, np.) układu

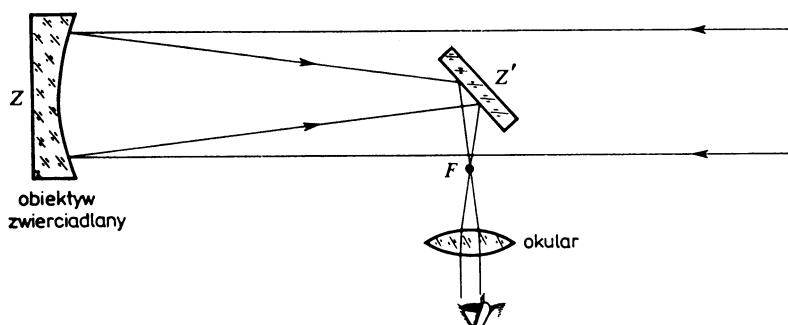


Rys. 44-39. Zadanie 47

soczewek. Na rys. 44-39b przedmiot  $P$  znajduje się bliżej aparatu, w odległości przedmiotowej  $p = 100 \text{ cm}$ . Ażeby zapewnić ogniskowanie obrazu  $O$  na kłiszy musimy wysunąć obiektyw z aparatu (dlaczego?). (a) Oblicz  $o$  dla rys. 44-39b. (b) O ile trzeba przesunąć obiektyw? Zauważ, że aparat fotograficzny różni się pod tym względem od oka (patrz zadanie 44). W aparacie fotograficznym  $f$  pozostaje stała, a odległość obrazową  $o$  trzeba dopasowywać ruchem obiektywu. Dla oka natomiast odległość obrazowa  $o$  nie zmienia się, a dłużość ogniskowej  $f$  jest dopasowywana przez zmianę krzywizny soczewki. Porównaj starannie rysunki 44-37 i 44-39.

47. *Teleskop zwierciadlany (reflektor):* Izaak Newton uznawszy (jak się okazało niesłusznie), że aberracja chromatyczna jest nieodłączną właściwością teleskopów soczewkowych, wymyślił teleskop zwierciadlany, przedstawiony schematycznie na rys. 44-40. Drugi model tego teleskopu, o zdolności powiększającej 38, przedstawił Newton w Towarzystwie Królewskim, gdzie model ten znajduje się do dziś.

Na rys. 44-40 dobiegające światło, prawie równolegle do osi teleskopu, pada na zwierciadło obiektywowe  $Z$ . Po odbiciu od małego zwierciadła  $Z'$  (rysunek nie zachowuje skali) promienie tworzą rzeczywisty, odwrócony obraz w płaszczyźnie ogniskowej przechodzącej przez  $F$ . Obraz ten jest następnie oglądany



Rys. 44-40. Zadanie 48

przez okular. (a) Wykaż, że powiększenie kątowe  $m_\theta$  jest znów dane równaniem (44-25), czyli równaniem  $m_\theta = -f_{ob}/f_{ok}$ , w którym  $f_{ob}$  jest ogniskową zwierciadła obiektywowego, a  $f_{ok}$  ogniskową okularu. (b) 5-metrowe zwierciadło teleskopu na Mt. Palomar w Kalifornii ma ogniskową 16,8 m. Oszacuj rozmiary obrazu tworzonego w płaszczyźnie ogniskowej tego zwierciadła, gdy przedmiotem jest metrowy preł odległy o 2,0 km. Załóż, że promienie padające są równoległe. (c) Zwierciadło astronomicznego teleskopu zwierciadlanego ma efektywny promień krzywizny 10 m („efektywny” ponieważ w celu wyeliminowania aberracji sferycznej takim zwierciadłom nadaje się kształt paraboliczny, a nie kulisty). Jaka musi być ogniskowa okularu, żeby uzyskać powiększenie kątowe całości równe 200?

Odp.: (b) 16,9 m. (c) 2,5 cm.

# 45. Interferencja

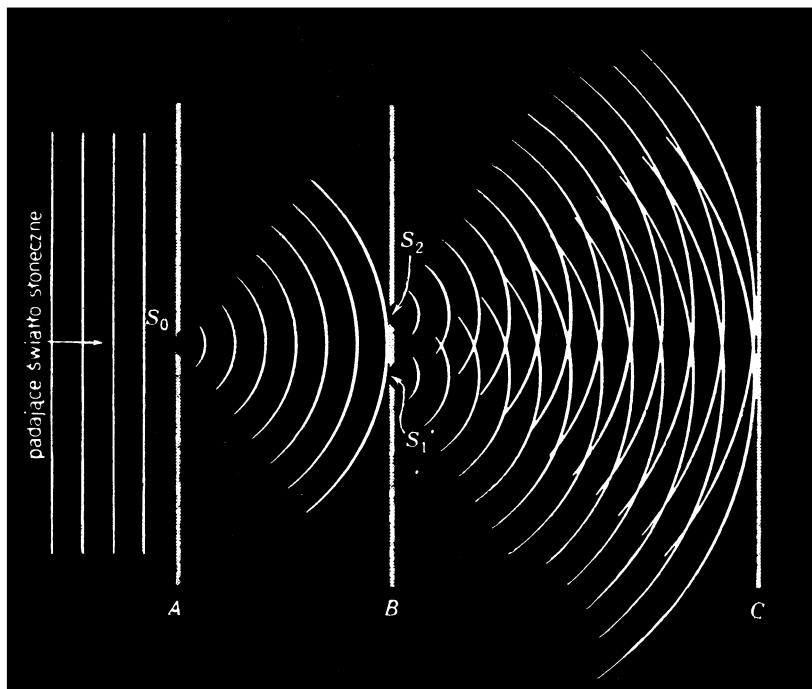
## 45-1. Doświadczenie Younga

W paragrafie 19-7 widzieliśmy, że jeśli dwie fale mechaniczne o tej samej częstotliwości poruszają się w przybliżeniu w tym samym kierunku i mają różnicę faz stałą w czasie, to mogą się one tak na siebie nakładać, że ich energia nie jest rozłożona w przestrzeni równomiernie, lecz jest maksymalna w pewnych punktach i minimalna (a nawet równa zeru) w innych. Wykazanie istnienia takiej *interferencji* dla światła przez Thomasa Younga w 1801 r. po raz pierwszy dostarczyło podstawy doświadczalnej dla falowej teorii światła. Young mógł nawet na podstawie swego doświadczenia obliczyć długość fali światła, co było pierwszym pomiarem tej ważnej wielkości.

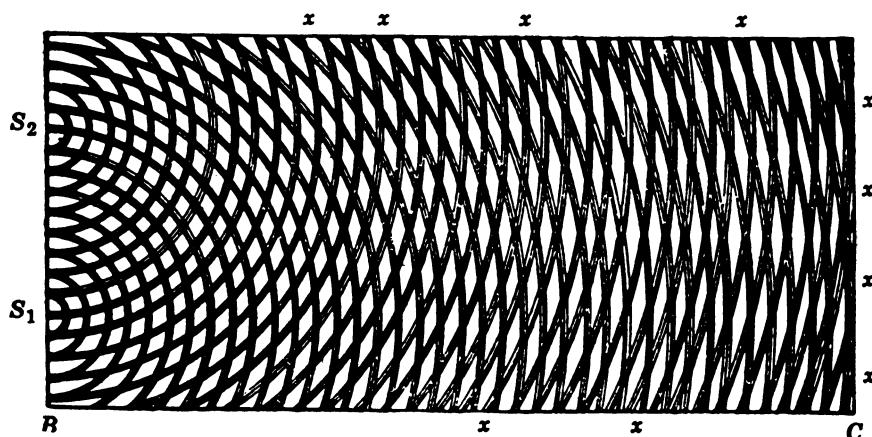
Young oświetlił światłem słonecznym ekran *A* (rys. 45-1), w którym zrobiony był mały otwór  $S_0$ . Przechodzące przez ten otwór światło rozchodzi się zgodnie z prawami dyfrakcji (patrz paragraf 44-1) i pada na otwory  $S_1$  i  $S_2$  zrobione w ekranie *B*. Znów następuje dyfrakcja i dwie nakładające się fale kuliste rozchodzą się w przestrzeni na prawo od ekranu *B*.

Warunek określający stosowalność optyki geometrycznej, a mianowicie  $a \gg \lambda$ , gdzie  $a$  jest średnicą otworu, nie jest w tym doświadczeniu spełniony. Na ekranach nie powstają obszary cienia geometrycznego, lecz otwory działają jak źródła rozchodzących się fal kulistych Huygensa. Mamy więc tu (i w trzech następnych rozdziałach) do czynienia z *optyką falową*, a nie geometryczną.

Rysunek 45-2 wzięty z pracy Younga pochodzącej z 1803 r. przedstawia obszar pomiędzy ekranami *B* i *C*. Zaczernienia reprezentują wypadkowe minima, biała przestrzeń między nimi przedstawia maksima. Jeśli się trzyma kartkę w ten sposób, by patrzeć na nią pod małym kątem od lewej strony, widać, że wzduł linii zaznaczonych  $x$ -ami następuje osłabienie fali; pomiędzy nimi następuje wzmacnianie. Jeśli umieścimy ekran w jakimkolwiek miejscu, tak by przecinał on nakładające się na siebie fale, możemy oczekiwac pojawienia się na nim ciemnych i jasnych plam kolejno po sobie następujących. Rysunek 45-3 przedstawia fotografię takich *prążków interferencyjnych*; uzyskano je zgodnie



Rys. 45-1. Schemat doświadczenia przedstawiający sposób, w jaki Thomas Young wytworzył obraz interferencyjny, przepuszczając światło przez dwa otwory  $S_1$  i  $S_2$  tak, aby fale ugięte nałożyły się na ekranie  $C$



Rys. 45-2. Oryginalny rysunek Thomasa Younga przedstawiający interferencję nakładających się fal. Należy umieścić oko blisko lewego brzegu rysunku i patrzeć pod małym kątem do płaszczyzny rysunku. (Z pracy: Thomas Young, *Phil. Transaction*, 1803). Patrz również: Morris H. Shamos, *Great Experiments in Physics*, Holt and Company, N. Y., 1959, s. 93. Można tam znaleźć ciekawie skomentowany opis tego doświadczenia

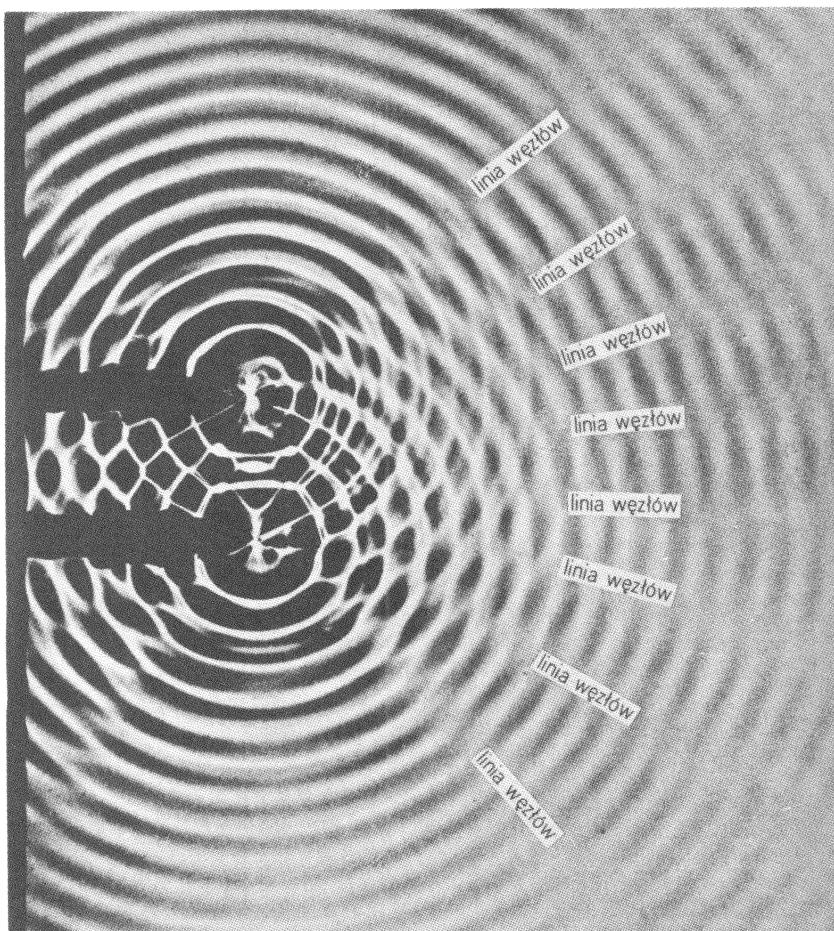
ze współczesną techniką przez zastosowanie długich wąskich szczelin, nie zaś kołowych otworów.

Interferencja nie jest cechą wyłącznie fal świetlnych, lecz towarzyszy wszelkim zjawiskom falowym. Rysunek 45-4 przedstawia obraz interferencyjny fal na wodzie wywoła-

nych w *plytkim naczyniu*. Fale są wytwarzane przez dwa wibratory, które uderzając o powierzchnię wody w zsynchonizowany sposób, wytwarzają dwie rozchodzące się fale kuliste.



Rys. 45-3. Prążki intereferyencyjne dla światła monochromatycznego uzyskane za pomocą urządzenia podobnego do przedstawionego na rys. 45-1, w którym zamiast otworów zastosowano długie, wąskie szczeliny

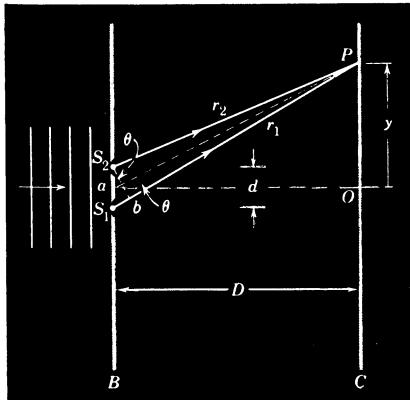


Rys. 45-4. Interferencja fal na wodzie w specjalnym naczyniu. Występuje tu osłabienie natężenia fal wzdłuż linii oznaczonych jako „linie węzłów” oraz wzmacnianie pomiędzy tymi liniami. (Dzięki uprzejmości Physical Science Study Committee)

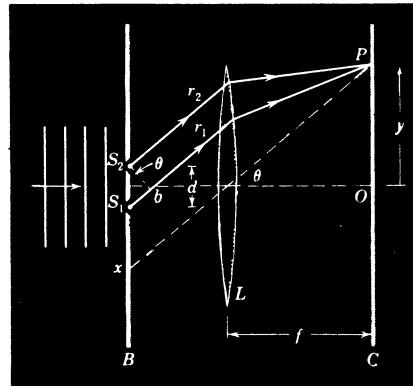
Przeanalizujmy doświadczenie Younga ilościowo, zakładając że światło padające zawsze tylk jedna długość fali. Na rysunku 45-5  $P$  jest dowolnym punktem na ekranie, odległym o  $r_1$  i  $r_2$  od wąskich szczelin  $S_1$  i  $S_2$ . Poprowadźmy linię od  $S_2$  do  $b$  w taki sposób, by linie  $PS_2$  i  $Pb$  były równe. Jeśli odległość  $d$  między szczelinami jest znacznie mniejsza od odległości  $D$  między ekranami (stosunek  $d/D$  na rysunku jest przesadnie duży dla większej jasności), to  $S_2 b$  jest prawie prostopadłe zarówno do  $r_1$  jak i do  $r_2$ . Znaczy to,

że kąt  $S_1 S_2 b$  jest prawie równy kątowi  $PaO$ , przy czym oba kąty są oznaczone na rysunku literą  $\theta$ . Można też powiedzieć, że linie  $r_1$  i  $r_2$  są w przybliżeniu równoległe.

Często przed dwiema szczelinami umieszczamy soczewkę, jak na rys. 45-6, przy czym ekran  $C$  znajduje się w płaszczyźnie ogniskowej soczewki. Wówczas światło skupione



Rys. 45-5. Promienie wychodzące z  $S_1$  i  $S_2$  padają na punkt  $P$ . Przyjęto, że powierzchnie falowe światła padającego na ekran  $B$  są równoległe do siebie. W rzeczywistości  $D \gg d$ ; na rysunku zmieniono proporcje dla uzyskania większej przejrzystości. Punkt równoodległy od szczelin oznaczliśmy literą  $a$



Rys. 45-6. W celu wytworzenia prążków interferencyjnych stosujemy zazwyczaj soczewki (porównać z rys. 45-5). Na rysunku znów zmieniono proporcje dla uzyskania większej przejrzystości; w praktyce  $f \gg d$

w  $P$  musi padać na soczewkę równolegle do linii  $Px$  poprowadzonej z  $P$  przez środek (ciemniej) soczewki. Promienie  $r_1$  i  $r_2$  są wtedy ściśle równoległe, choćby nawet warunek  $D \gg d$  nie był spełniony. Soczewką  $L$  może w praktyce być soczewka i rogówka oka, ekranem  $C$  — siatkówka.

Dwa promienie dobiegające do punktu  $P$  (na rys. 45-5 lub rys. 45-6) z  $S_1$  i  $S_2$  przy szczelinach są zgodne w fazie, gdyż oba pochodzą z tego samego czoła padającej fali płaskiej. Ponieważ promienie mają różne długości dróg optycznych, docierając do  $P$  mają one różne fazy. Charakter interferencji w punkcie  $P$  jest określony liczbą długości fal zawartych w  $S_1 b$ , która to wielkość daje nam różnicę dróg optycznych.

Aby w punkcie  $P$  było maksimum,  $S_1 b$  ( $= dsin\theta$ ) musi zawierać całkowitą liczbę długości fal, czyli

$$S_1 b = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

co można zapisać jako

$$dsin\theta = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots, (\text{maksima}). \quad (45-1)$$

Zauważmy, że każde maksimum powyżej  $O$  (na rys. 45-5 i rys. 45-6) ma symetrycznie położone maksimum poniżej  $O$ . Istnieje też centralne maksimum opisywane przez  $m = 0$ .

Dla uzyskania *minimum* w punkcie  $P$ ,  $S_1 b$  ( $= dsin\theta$ ) musi zawierać połówkową liczbę długości fal, to jest

$$dsin\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots, (\text{minima}). \quad (45-2)$$

Jeśli posługujemy się soczewką, jak na rys. 45-6, może się wydawać, że między promieniami powinna powstać różnica fazy związana nie tylko z odcinkiem  $S_1 b$ , gdyż długości dróg przebytych przez promienie od płaszczyzny  $S_2 b$  do punktu  $P$  są wyraźnie różne. W paragrafie 44-5 widzieliśmy jednak, że takie równoległe promienie zogniskowane przez soczewkę mają te same *długości dróg optycznych*. Dwa promienie o tych samych długościach dróg optycznych zawierają tę samą liczbę długości fal, wobec czego nie powstanie między nimi różnica fazy.

**Przykład 1.** Urządzenie z dwiema szczelinami (jak na rys. 45-5) jest oświetlone światłem, pochodzącym z rtęciowej lampy próżniowej, z którego wydzielono tylko silną zieloną linię ( $\lambda = 546 \text{ nm}$  czyli  $5460 \text{ Å}$ ). Szczeliny odległe są o  $0,10 \text{ mm}$ , a ekran, na którym zachodzi interferencja, znajduje się w odległości  $20 \text{ cm}$ . Jakie jest położenie kątowe pierwszego minimum oraz dziesiątego maksimum.

Dla pierwszego minimum w równaniu (45-2) przyjmujemy  $m = 0$ , czyli

$$\sin \theta = \frac{(m + \frac{1}{2})\lambda}{d} = \frac{\frac{1}{2}(546 \cdot 10^{-9} \text{ m})}{0,10 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 0,0027.$$

Ta wartość  $\sin \theta$  jest tak mała, że możemy ją przyjąć także jako wartość samego kąta  $\theta$  wyrażonego w radianach; wyrażony w stopniach wynosi on  $0,16^\circ$ .

Dla dziesiątego maksimum (nie licząc maksimum centralnego) musimy w równaniu (45-1) podstawić  $m = 10$ . Robiąc to i przeprowadzając obliczenia jak poprzednio, otrzymujemy w wyniku, że maksimum to widać pod kątem  $3,8^\circ$ . Widzimy więc, że w tych warunkach kilkanaście pierwszych prążków leży w bardzo małym przedziale wartości kątów.

**Przykład 2.** Jaka jest odległość liniowa na ekranie  $C$  pomiędzy sąsiednimi prążkami, w sytuacji z przykładu 1?

Jeśli  $\theta$  jest dostatecznie małe, możemy się posłużyć przybliżeniem

$$\sin \theta \approx \operatorname{tg} \theta \approx \theta.$$

Z rysunku 45-5 widać, że  $\operatorname{tg} \theta = y/D$ . Podstawiając ostatnie wyrażenie zamiast  $\sin \theta$  w równaniu (45-1) otrzymujemy

$$\Delta y = m \frac{\lambda D}{d}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, (\text{maksima}).$$

Położenia dwu dowolnych sąsiednich maksymów dane są przez

$$y_m = m \frac{\lambda D}{d}, \quad y_{m+1} = (m+1) \frac{\lambda D}{d}.$$

Odległość  $\Delta y$  między nimi możemy znaleźć wykonując odejmowanie

$$\Delta y = y_{m+1} - y_m = \frac{\lambda D}{d} = \frac{(546 \cdot 10^{-9} \text{ m})(20 \cdot 10^{-2} \text{ m})}{0,10 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 1,09 \text{ mm}.$$

Tak dugo, jak dugo  $\theta$  (na rys. 45-5 i rys. 45-6) jest małe, odległość między sąsiednimi prążkami nie zależy od  $m$ , innymi słowy, prążki są rozmieszczone równomiernie. Zauważmy, że jeśli światło zawiera więcej niż jedną długość fali, na ekranie powstaną nakładające się na siebie oddzielne układy prążków interferencyjnych, każdy o innym odstępie między prążkami.

Równanie (45-1) może nam posłużyć do wyznaczenia długości fali świetlnej; zacytujemy tu samego Thomasa Younga:

„Z porównania różnych doświadczeń wynika, że szerokość falowań (tj. długość fali) światła skrajnie czerwonego musi być równa w powietrzu około  $1/36\,000$  cala\*, podczas gdy odpowiednia szerokość dla skrajnego fioletu wynosi około  $1/60\,000$  cala\*\*; średnia dla całego widma, biorąc pod uwagę jego natężenie równa jest  $1/45\,000$  cala\*\*\*”.

\* To znaczy około  $700 \text{ nm}$  (przyp. tłum.).

\*\* To znaczy około  $400 \text{ nm}$  (przyp. tłum.).

\*\*\* To znaczy około  $570 \text{ nm}$  (przyp. tłum.).

Wartość podana przez Younga dla średniej efektywnej długości fali widma światła słonecznego ( $1/45\,000$  cala) równa jest około 570 nm, co zgadza się dosyć dobrze z długością fali, przy której czułość oka jest maksymalna (555 nm, patrz rys. 42-1). Nie należy sądzić, że praca Younga została przyjęta bezkrytycznie. Jeden ze współczesnych mu uczonych, który był mocno przekonany o słuszności korpuskularnej teorii światła, pisał:

„Chcemy wznieść nasz słaby głos przeciw innowacjom, które nie mogą mieć innego znaczenia, jak tylko zakwestionowanie postępu nauki i odnowienie wszystkich tych dzikich tworów wyobraźni, którym Bacon i Newton kazali ulecieć z jej świątyni. Praca ta nie zawiera nic, co by zasługiwało na miano doświadczenia czy też odkrycia”.

Nie trzeba dodawać, że przyszłość rozstrzygnęła ten spór na korzyść Younga.

## 45-2. Kohärenza

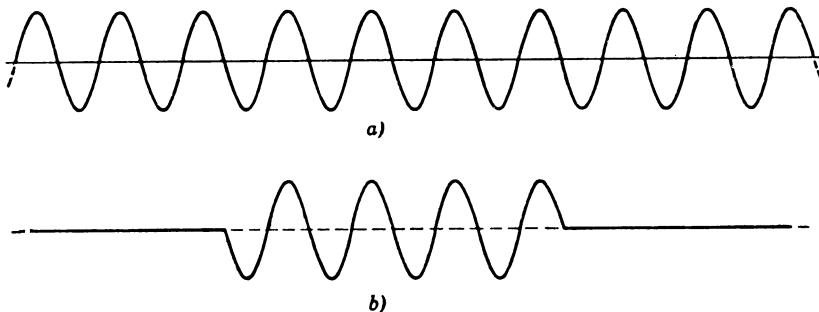
Analiza wyprowadzenia równań (45-1) i (45-2) wskazuje, że podstawowym warunkiem powstania dobrze określonych prążków interferencyjnych na ekranie C (rys. 45-5 i 6) jest, by fale świetlne, które przybywają z punktów  $S_1$  i  $S_2$  do dowolnego punktu  $P$  na tym ekranie, miały dokładnie określoną różnicę faz  $\varphi$  stałą w czasie. Jeśli warunek ten jest spełniony, powstaje trwały, dobrze określony obraz interferencyjny. W pewnych punktach  $P$  różnica faz  $\varphi$  będzie dana, niezależnie od czasu przez  $n\pi$ , gdzie  $n = 1, 3, 5, \dots$ , tak że powstające natężenie będzie dokładnie równe零u i pozostanie takim przez cały czas obserwacji. W pewnych innych punktach  $\varphi$  dane będzie przez  $n\pi$ , gdzie  $n = 0, 2, 4, \dots$  i natężenie stąd wynikające będzie maksymalne. Przy tych założeniach dwa promienie, wychodzące ze szczelin  $S_1$  i  $S_2$  są, jak mówimy, całkowicie *spójne (koherentne)*.

Usuńmy źródło z rys. 45-1 i zastąpmy szczeliny  $S_1$  i  $S_2$  dwoma zupełnie niezależnymi źródłami światła, takimi jak dwa małe żarzące się druciki umieszczone obok siebie w szklanej osłonie. Nie powstaną wówczas żadne prążki interferencyjne, a ekran C będzie po prostu oświetlony względnie równomiernie. Możemy to interpretować w ten sposób, że dla zupełnie niezależnych źródeł światła różnica faz między dwoma promieniami przychodzący do punktu  $P$  będzie się zmieniać w czasie w sposób nieuporządkowany. W pewnym momencie warunki mogą odpowiadać całkowitemu zniszeniu się fal, a w krótkim czasie potem (być może  $10^{-8}$  s) warunki te będą odpowiadać wzmacnianiu się fal. Tak samo nieuporządkowane zachowanie się faz zachodzi dla wszystkich punktów ekranu C, co daje właśnie w wyniku równomierne oświetlenie całego ekranu. Natężenie w dowolnym punkcie równe jest sumie natężeń wytwarzanych oddziennie przez każde źródło w danym punkcie. Gdy takie warunki są spełnione, mówimy że dwa promienie pochodzące z  $S_1$  i  $S_2$  są zupełnie *niespójne (niekoherentne)*.

Zauważmy, że dla promieni światlnych całkowicie *spójnych* (1) najpierw dodaje się wektorowo amplitudy biorąc pod uwagę (stałą) różnicę fazy, a następnie (2) podnosi się do kwadratu otrzymaną amplitudę celem uzyskania wielkości proporcjonalnej do natężenia. Natomiast dla światła całkowicie *niespójnego* (1) najpierw podnosi się do kwadratu poszczególne amplitudy celem otrzymania wielkości proporcjonalnych do poszczególnych natężeń i potem (2) dodaje się te poszczególne natężenia celem otrzymania natężenia końcowego. Postępowanie to jest zgodne z faktem doświadczalnym, że dla zupełnie niezależnych źródeł światła natężenie końcowe w każdym punkcie jest zawsze większe niż natężenie dawane w tym punkcie przez każde ze źródeł z osobna.

Pozostaje jeszcze zbadać, w jakich warunkach doświadczalnych można wytworzyć światło spójne bądź niespójne i podać wyjaśnienie spójności w oparciu o mechanizm po-

wstawiania promieniowania. Rozważmy najpierw równoległą wiązkę promieniowania mikrofalowego pochodzącego z anteny połączonej kablem koncentrycznym z oscylatorem, którym jest rezonansowa wnęka elektromagnetyczna. Organia rezonatora (patrz paragraf 38-5) są w pełni periodyczne w czasie i wytwarzają w antenie ściśle periodyczne zmiany wektorów **E** i **B**. Wypromienowana fala, w dużych odległościach od anteny, jest przedstawiona na rys. 41-13. Zauważmy, że (1) fala jest w zasadzie nieskończona rozciągnięta w czasie, włączając w to czasy przyszłe ( $t > 0$ ) oraz przeszłe ( $t < 0$ ); patrz rys. 45-7a. W dowolnym punkcie, gdy przechodzi przezń fala, zaburzenie falowe (tj. **E**



Rys. 45-7. (a) Część fali nieskończonej i (b) ciąg falowy

lub **B**) zmienia się w czasie ściśle okresowo. (2) Powierzchnie falowe w punktach bardzo oddalonych od anteny są równoległymi płaszczyznami, w zasadzie nieskończonymi, tworzącymi kąty proste z kierunkiem rozchodzenia się fali. W dowolnej chwili zaburzenie falowe zmienia się z odlegością wzdłuż kierunku rozchodzenia się fali w sposób doskonale okresowy.

Dwa promienie wytworzone przez pojedynczą poruszającą się falę, taką jak fala z rys. 41-13, będą całkowicie spójne. Jedną z metod wytwarzania takich dwu promieni jest umieszczenie na drodze promieni nieprzezroczystego ekranu, w którym znajdują się dwie szczeliny. Fale wychodzące ze szczelin w dowolnym punkcie obszaru, w którym będą się na siebie nakładać, będą zawsze miały stałą różnicę faz i powstaną prążki interferencyjne. Spójne promieniowanie radiowe można wytworzyć równie łatwo jak spójne fale sprężyste w ciałach stałych, cieczach i gazach. Dwa ramiona wibrującego urządzenia na rys. 45-4 wytwarzają na przykład dwie spójne fale na wodzie znajdującej się w naczyniu.

Technika wytwarzania dwu wiązek z pojedynczej wiązki (a zatem z tego samego źródła), którą przedstawiśmy, pozwala sprawdzić, czy powierzchnie falowe pojedynczego promienia są rzeczywiście płaszczyznami, to jest czy wszystkie punkty na płaszczyźnie mają tę samą fazę w danej chwili. Dzieląc wiązkę w inny sposób, można sprawdzić, czy jest ona naprawdę periodyczna w przedziale obejmującym wiele okresów oscylacji. Można to zrobić, jak pokazujemy szczegółowo w paragrafie 45-6, przez umieszczenie na drodze wiązki pod kątem  $45^\circ$  do niej cienkiej płytki z materiału mającego tę własność, że rozdzieli on pierwotną wiązkę na dwie, mianowicie wiązkę odbitą (skierowaną pod kątem prostym do wiązki padającej) oraz wiązkę przepuszczoną (o tym samym kierunku co wiązka padająca). W zakresie świata widzialnego taki przyrząd, zwany *zwierciadłem półprzepuszczalnym*, można zbudować z płytki szklanej przez umieszczenie na jej powierzchni odpowiednio cienkiej warstwy srebra. Przez odpowiednie wykorzystanie zwierciadeł (patrz paragraf 45-7) te dwie wiązki można znów zebrać w jedną wiązkę poruszającą się w wybranym kierunku. Jeśli, przed ich ponownym złożeniem, wiązki przebędą różne odległości, to w wiązce złożonej spotkają się ze sobą dwie części tej samej pierwotnej wiązki, przy czym jedna z nich będzie o wiele okresów

wcześniejsza od drugiej. Jeśli pierwotna wiązka jest naprawdę periodyczna w przestrzeni i w czasie, to te dwie wiązki będą całkowicie spójne i po ich nałożeniu powstaną prążki interferencyjne.

Jeśli przejdziemy od źródeł mikrofalowych do zwykłych źródeł światła widzialnego, takich jak żarzące się włókna lub wyładowanie elektryczne w gaziu, zauważymy zasadniczą różnicę. W obu tych źródłach podstawowe procesy emisji światła następują zupełnie niezależnie od siebie w pojedynczych atomach. Akt emisji światła przez pojedynczy atom zachodzi w czasie około  $10^{-8}$  s, a emitowane światło jest poprawnie opisywane przez ciąg falowy (rys. 45-7b), a nie przez pojedynczą falę (rys. 45-7a). Dla czasów emisji, takich jak podane powyżej, ciągi falowe mają długość kilkumetrową.

Efekty interferencyjne dla zwykłych źródeł światła można wytworzyć przez umieszczenie bardzo wąskiej szczeliny ( $S_0$  na rys. 45-1) tuż za źródłem. Zapewnia to, że ciągi falowe, które padną na szczeliny  $S_1$  i  $S_2$  w ekranie  $B$  na tym rysunku, pochodzą z tego samego małego obszaru źródła. Ugięte wiązki wychodzące z  $S_1$  i  $S_2$  należą więc do tej samej grupy ciągów falowych i są spójne względem siebie. Jeśli zmienia się faza światła emitowanego z  $S_0$ , zmiana ta przenosi się równocześnie do  $S_1$  i  $S_2$ . Zatem w dowolnym punkcie na ekranie  $C$  utrzymuje się stała różnica faz między wiązkami wychodzącymi z tych dwóch szczelin i powstaje trwał obraz interferencyjny.

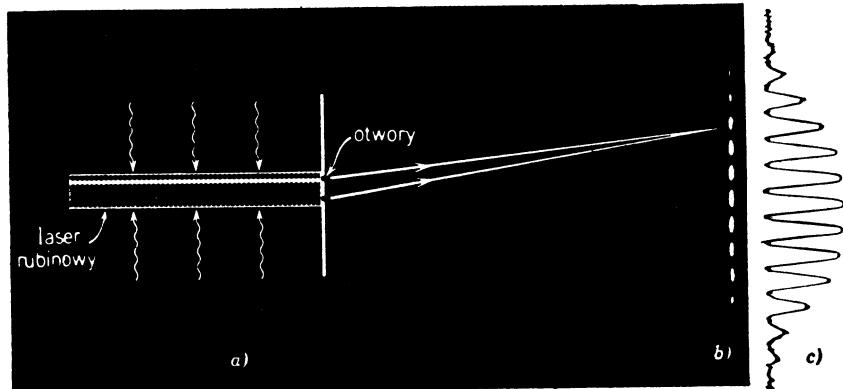
Jeśli będziemy stopniowo zwiększać szerokość szczeliny  $S_0$  z rys. 45-1, dostrzeżemy, że maksima prążków interferencyjnych będą miały coraz to mniejsze natężenie oraz że natężenie w ciemnych dotychczas miejscach przestanie być równe零. Innymi słowy, prążki staną się mniej wyraźne. Jeśli szczelina  $S_0$  będzie dostatecznie szeroka, to zmniejszenie się natężenia w jednych punktach i wzrost natężenia w innych będzie taki, że prążki znikną i pozostanie jedynie równomierne oświetlenie. Możemy powiedzieć, że wiązki promieni wychodzących z  $S_1$  i  $S_2$  przechodzą stopniowo od stanu całkowitej spójności do stanu całkowitej niespójności. Gdy nie zachodzi żaden z tych granicznych przypadków mówimy, że wiązki są częściowo spójne.

Można też zademonstrować częściową spójność dla dwóch wiązek promieni, które są wytwarzane, jak pokażemy na str. 486, przez ustawienie na drodze wiązki półprzepuszczalnego zwierciadła pod kątem  $45^\circ$  do kierunku rozchodzenia się fali. Powstające wówczas dwie wiązki, wiązka odbita i przepuszczana, przebywają drogi o różnych długościach zanim się ponownie nałożą. Jeśli różnica dróg jest mała w porównaniu ze średnią długością ciągu falowego, prążki interferencyjne będą ostro zarysowane i w minimach natężenie będzie w zasadzie równe zero. Gdy powiększymy różnicę dróg, prążki staną się mniej wyraźne, a wreszcie, gdy różnica dróg będzie większa niż średnia długość ciągu falowego, prążki znikną zupełnie. Można więc znowu zmieniać warunki doświadczalne w sposób ciągły od zupełnej spójności do zupełnej niespójności wiązki.

Brak spójności światła pochodzącego ze zwykłych źródeł, takich jak żarzące się włókna, jest wywołany faktem, że emitujące atomy działają zupełnie niezależnie (*niespójnie*). W 1960 r. udowodniono, że można skonstruować źródła światła widzialnego, w których atomy działałyby wspólnie i dla których emitowane światło byłoby w wysokim stopniu spójne. Takie urządzenia nazywamy *laserami*\*; światło, które z nich wychodzi, jest ściśle monochromatyczne, intensywne i wysoce skolimowane. Spójność emitowanego światła można zademonstrować umieszczając na drodze wiązki wychodzącej z lasera ekran z dwoma otworami. Powstaje wówczas obraz interferencyjny, przedstawiony na rys. 45-8. Metody te pozwalają, po raz pierwszy, na stopień kontrolowania emisji światła widzialnego,

\* Laser jest słowem utworzonym z pierwszych liter pełnej nazwy, mianowicie *light amplification through stimulated emission of radiation*. Zainteresowany Czytelnik może sięgnąć do jednego z pierwszych na ten temat artykułu Artura L. Schawlowa „Lasery (masery optyczne)”, zawartego w książce: *Akceleratory, reaktory, lasery*, PWN, Warszawa 1964.

zbliżony do tego jaki jest możliwy dla fal radiowych czy też mikrofal. Zastosowania praktyczne laserów, jak np.: wzmacnianie słabych sygnałów świetlnych, użycie promieni świetlnych jako wysoce efektywnych nośników informacji z punktu do punktu\* oraz wytwarzanie wysokich temperatur przez silne miejscowe nagrzanie, są obecnie intensywnie wykorzystywane\*\*.



Rys. 45-8. Ekran z dwoma małymi otworami umieszczony jest w pobliżu końca lasera. (a) Światło przechodzące przez otwory tworzy obraz interferencyjny na kawałku błony fotograficznej umieszczonej w części (b) rysunku. Fakt, że tworzy się obraz interferencyjny wykazuje, że światło emitowane przez laser jest spójne wzdłuż przekroju wiązki. W części (b) rysunku pokazano obraz powstający na błonie filmowej. Rysunek (c) przedstawia wykres natężenia na błonie filmowej, zmierzonego na podstawie pionaru stopnia zaczernienia błony. (Dzięki uprzejmości D. F. Nelsona i R. J. Collinsa z Bell Telephone Laboratories)

### 45-3. Natężenie w doświadczeniach Younga

Załóżmy, że składowe pola elektrycznego dwóch fal na rys. 45-5 zmieniają się w czasie w punkcie  $P$  następująco

$$E_1 = E_0 \sin \omega t, \quad (45-3)$$

$$E_2 = E_0 \sin(\omega t + \varphi), \quad (45-4)$$

gdzie  $\omega (= 2\pi\nu)$  jest częstotliwością kołową fal, a  $\varphi$  — różnicą faz między nimi. Zauważmy, że  $\varphi$  zależy od położenia punktu  $P$ , które z kolei, przy ustalonej geometrii doświadczenia, opisywane jest przez kąt  $\theta$  na rys. 45-5 i rys. 45-6. Założmy, że szczeliny są tak wąskie, że światło ugięte na każdej ze szczelin oświetla środkową część ekranu równomiernie. Znaczy to, że w pobliżu środka ekranu  $E_0$  nie zależy od położenia punktu  $P$ , a zatem od wartości kąta  $\theta$ .

Wynikłe stąd zaburzenie falowe\*\*\* w punkcie  $P$  jest równe

$$E = E_1 + E_2 \quad (45-5)$$

\* Patrz: W. S. Boyle, Light-Wave Communications, *Scientific American*, August 1977.

\*\* Jeden z przykładów rozlicznych zastosowań laserów można znaleźć w pracy: Edward N. Breinan, Bernard H. Kear, Conrad M. Banas, Processing Materials with Lasers, *Physics Today*, November 1976.

\*\*\* Z „zaburzeniem falowym” identyfikuje się zwykle pole  $E$  fali świetlnej, nie zaś pole  $B$ , ponieważ działanie pola  $B$  na oko ludzkie i na różne detektory światła jest niezmiernie małe. Zauważmy też, że choć równanie (45-5) powinno być równaniem wektorowym, w większości interesujących przypadków wektory  $E$  w dwóch interferujących falach są do siebie równolegle, wobec czego wystarcza równanie algebraiczne.

i (patrz równ. (19-16)) wynosi

$$E = E_0 \sin(\omega t + \beta), \quad (45-6a)$$

gdzie

$$\beta = \frac{1}{2}\varphi \quad (45-6b)$$

oraz

$$E_0 = 2E_0 \cos \beta = E_m \cos \beta. \quad (45-6c)$$

$E_m$ , czyli maksymalna możliwa wartość dla  $E_\theta$ , równa jest podwojonej amplitudzie dodających się fal ( $= 2E_0$ ), co odpowiada maksymalnemu wzmocnieniu. Czytelnik powinien uważnie sprawdzić równania (45-6). Okaże się, że amplituda  $E_\theta$  powstającej fali, która określa natężenie prądków interferencyjnych, jest silnie zależna od kąta  $\theta$ , tj. od położenia punktu  $P$  na rys. 45-5 i rys. 45-6.

W paragrafie 19-6 pokazaliśmy, że natężenie  $I$  fali, mierzone powiedzmy w  $\text{W/m}^2$ , jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy. Dla powstającej fali, pomijając współczynnik proporcjonalności, mamy

$$I_\theta \sim E_\theta^2. \quad (45-7)$$

Związek ten wyda się zrozumiały, jeśli przypomnimy sobie (równ. (30-9)), że gęstość energii w polu elektrycznym jest proporcjonalna do kwadratu natężenia pola elektrycznego. Jest to słuszne zarówno dla szybkozmiennych pól elektrycznych, takich jak w fali świetlnej, jak i dla pól statycznych.

Stosunek natężeń dwu fal świetlnych jest stosunkiem kwadratów natężeń ich pól elektrycznych. Jeśli  $I_\theta$  jest natężeniem fali wypadkowej w  $P$ , a  $I_0$  — natężeniem, jakie by wytworzyła pojedyncza fala, to

$$\frac{I_\theta}{I_0} = \left( \frac{E_\theta}{E_0} \right)^2. \quad (45-8)$$

W połączeniu z równaniem (45-6c) prowadzi to do

$$I_\theta = 4I_0 \cos^2 \beta = I_m \cos^2 \beta. \quad (45-9)$$

Zauważmy, że natężenie fali wypadkowej w dowolnym punkcie  $P$  zmienia się od zera, np. dla punktu, w którym  $\varphi (= 2\beta) = \pi$ , do  $I_m$ , które równe jest czterokrotnemu natężeniu  $I_0$  każdej z pojedynczych fal dla punktu, w którym np.  $\varphi (= 2\beta) = 0$ . Znajdziemy  $I_\theta$  jako funkcję kąta  $\theta$  z rys. 45-5 lub rys. 45-6.

Różnica faz  $\varphi$  w równaniu (45-4) wiąże się z różnicą dróg  $S_1 b$  na rys. 45-5 lub rys. 45-6. Jeśli  $S_1 b$  wynosi  $\frac{1}{2}\lambda$ , to  $\varphi$  będzie równe  $\pi$ , jeśli zaś  $S_1 b$  równe jest  $\lambda$ , to  $\varphi$  będzie  $2\pi$  itd. Nasuwa to myśl, że

$$\begin{aligned} \frac{\text{różnica faz}}{2\pi} &= \frac{\text{różnica dróg}}{\lambda} \\ \varphi &= \frac{2\pi}{\lambda} (d \sin \theta), \end{aligned}$$

czyli ostatecznie, z równania (45-6b),

$$\beta = \frac{1}{2} \varphi = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta. \quad (45-10)$$

To wyrażenie na  $\beta$  można podstawić do równania (45-9) dla  $I_\theta$ , co prowadzi do wyrażenia tej ostatniej wielkości w zależności od  $\theta$ . Dla wygody zbieramy razem wyrażenia dla amplitudy i natężenia w doświadczeniu z dwiema szczelinami:

$$[\text{równ. (45-6c)}] \quad E_\theta = E_m \cos \beta, \quad (45-11a)$$

$$[\text{równ. (45-9)}] \quad I_\theta = I_m \cos^2 \beta, \quad (45-11b)$$

$$[\text{równ. (45-10)}] \quad \beta \left( = \frac{1}{2} \varphi \right) = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta, \quad \begin{cases} \text{interferencja} \\ \text{na wąskich szczelinach} \\ (\text{tj. } a \ll \lambda). \end{cases} \quad (45-11c)$$

W celu znalezienia położenia maksymów natężenia podstawiamy  $\beta = m\pi$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , w równaniu (45-11b). Wówczas z równania (45-11c) otrzymujemy

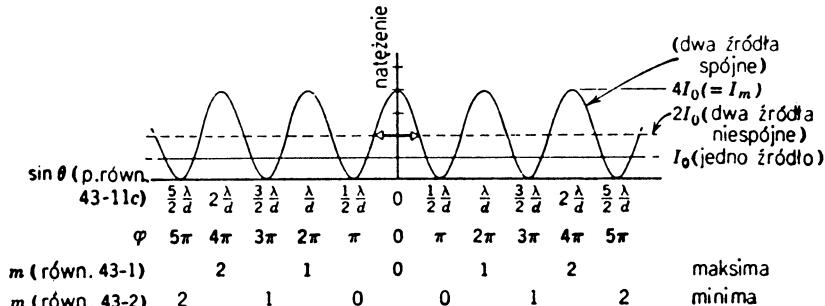
$$d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{maksima}),$$

czyli równanie wyprowadzone już w paragrafie 45-1 (równ. (45-1)). Aby znaleźć minima natężenia, piszemy

$$\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} = \left( m + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{minima}),$$

co daje wyprowadzone poprzednio równanie (45-2).

Rysunek 45-9 przedstawia rozkład natężenia dla interferencji przy dwu szczelinach. Pozioma linia ciągła to  $I_0$ ; opisuje ona (równomierne) natężenie na ekranie, gdy jedna ze szczelin jest zasłonięta. Gdyby światło z dwu źródeł było niespójne, natężenie na całym ekranie byłoby jednostajne i wynosiłoby  $2I_0$ , patrz pozioma linia przerywana na rys.



Rys. 45-9. Rozkład natężenia otrzymany w wyniku interferencji światła wychodzącego z dwu szczelin. Strzałka w środkowym „punkcie” przedstawia połowę szerokości tego punktu. Rysunek ten otrzymano zakładając, że każda z dwóch interferujących fal oświetlałaby równomiernie środkową część ekranu, to znaczy, że  $I_0$  nie zależy od położenia, jak pokazano na rysunku

45-9. Dla źródeł spójnych oczekujemy, że energia będzie taka sama tylko inaczej rozłożona na ekranie, gdyż energia w procesach interferencyjnych nie powstaje ani nie ginie. Zatem średnie natężenie przy interferencji powinno wynosić  $2I_0$ , podobnie jak dla źródeł niespójnych. Widać to od razu, jeśli w równaniu (45-11b) podstawimy  $\frac{1}{2}$  zamiast wyrazu cosinus w kwadracie i jeśli przypomnimy sobie, że  $I_m = 4I_0$ . Z tym, że średnia wartość kwadratu sinusa lub cosinusa dla jednego lub więcej półokresów równa jest  $\frac{1}{2}$ , spotkaliśmy się już kilka razy poprzednio.

#### 45-4. Dodawanie zaburzeń falowych

W paragrafie 45-3 składaliśmy dwa zmienne w czasie zaburzenia falowe, a mianowicie

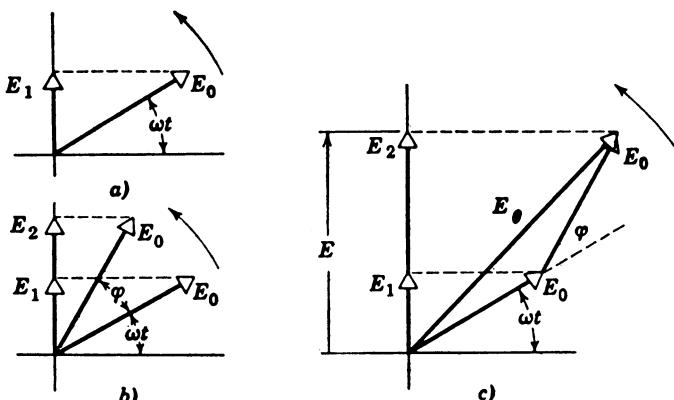
$$E_1 = E_0 \sin \omega t, \quad (45-3)$$

$$E_2 = E_0 \sin(\omega t + \varphi), \quad (45-4)$$

które miały tę samą częstotliwość kołową  $\omega$  i amplitudę  $E_0$ , ale różniły się fazą o  $\varphi$ . W tym przypadku wynik (równania (45-11a, c)) łatwo można uzyskać algebraicznie.

W dalszych rozdziałach będziemy chcieli dodawać większą ilość zaburzeń falowych, często nieskończoną ich ilość, o nieskończonymie małych amplitud poszczególnych fal. Ponieważ metody analityczne stają się wówczas trudniejsze, opiszymy tu metodę graficzną, ilustrując ją przy pomocy wyprowadzenia po raz wtóry równania (45-11a).

Sinusoidalne zaburzenie falowe, takie jak to, które przedstawiliśmy za pomocą równania (45-3), może być również przedstawione graficznie, za pomocą obracającego się wektora. Na rysunku 45-10a wektor o długości  $E_0$  może się obracać wokół początku układu w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, z częstotliwością kołową  $\omega$ . Podobnie jak poprzednio (patrz paragraf 39-2) taki obracający się wektor będziemy nazywać *strzałką fazową* (lub *wskazem*). Zmienne zaburzenie falowe  $E_1$  (równanie (45-3)) przedstawione jest przez rzut tej strzałki na oś pionową.



Rys. 45-10. (b) Zaburzenie falowe  $E_1$  przedstawiono za pomocą obracającego się wektora — strzałki fazowej. (b) Dwa zaburzenia falowe  $E_1$  i  $E_2$  różniące się fazą o  $\varphi$ . Te dwa wektory mogą przedstawić dwa zaburzenia falowe w doświadczeniu z dwiema szczelinami, patrz równanie (45-3), (45-4). (c) Inny sposób przedstawienia przypadku b

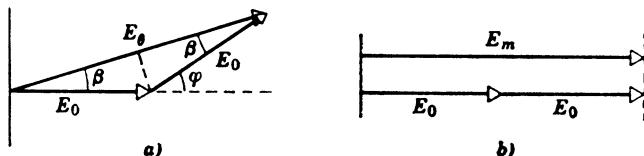
Drugie zaburzenie falowe  $E_2$ , które ma tę samą amplitudę  $E_0$ , ale różni się od  $E_1$  fazą o  $\varphi$ ,

$$E_2 = E_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (45-4)$$

może być przedstawione graficznie (rys. 45-10b) jako rzut na oś pionową drugiej strzałki fazowej o długości  $E_0$ , tworzącej z pierwszą kąt  $\varphi$ . Jak pokazuje rysunek, suma  $E$  wielkości  $E_1$  i  $E_2$  jest sumą rzutów tych dwóch strzałek na oś pionową. Widać to wyraźniej, jeśli się przerysuje strzałki, jak na rys. 45-10c, umieszczając początek jednej strzałki na końcu poprzedniej, utrzymując właściwą różnicę faz i pozwalając całemu układowi ob-

racać się dookoła początku układu w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara.

Na rysunku 45-10c wielkość  $E$  można także uważać za rzut na oś pionową strzałki fazowej o długości  $E_\theta$ , która jest sumą wektorową dwóch strzałek o długości  $E_0$ . Zauważmy, że suma (algebraiczna) rzutów dwóch strzałek fazowych jest równa rzutowi (wektorowej) sumy tych dwóch strzałek.



Rys. 45-11. (a) Konstrukcja służąca do znalezienia wypadkowej amplitudy  $E_\theta$  dwu zaburzeń falowych o amplitudzie  $E_0$  i różnicie faz  $\varphi$ . (b) Największa amplituda po nałożeniu się tych zaburzeń powstaje dla  $\varphi = 0$  i ma wartość  $E_m = 2E_0$

W większości problemów w optyce mamy do czynienia tylko z *amplitudą*  $E_\theta$  wypadkowego zaburzenia falowego, a nie z jego zmiennością w czasie. Pochodzi to stąd, że oko, a także inne pospolite przyrządy pomiarowe, reaguje na wypadkowe natężenie światła (tj. na kwadrat amplitudy), nie może zaś wykryć szybkich zmian w czasie, charakteryzujących światło widzialne. Na przykład dla światła sodowego ( $\lambda = 589 \text{ nm} = 5890 \text{ \AA}$ ) częstotliwość  $\nu$  ( $= \omega/2\pi$ ) wynosi  $5,1 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ . Często zatem nie potrzebujemy rozważać obrotu wektorów (strzałek fazowych), lecz możemy skupić uwagę nad znalezieniem wielkości wektora wypadkowego.

Na rysunku 45-11a pokazano odpowiednie strzałki fazowe dla interferencji Younga w chwili  $t = 0$  (por. rys. 45-10c). Widzimy, że

$$E_\theta = 2E_0 \cos \beta = E_m \cos \beta,$$

przy czym na podstawie twierdzenia, że kąt zewnętrzny ( $\varphi$ ) w trójkącie równy jest sumie dwóch kątów wewnętrznych doń nieprzyległych ( $\beta + \beta$ )

$$\beta = \frac{1}{2} \varphi.$$

Jest to dokładnie taki sam wynik, jaki otrzymaliśmy poprzednio na drodze algebraicznej (por. równanie (45-11a, c)).

W bardziej ogólnym przypadku moglibyśmy chcieć znaleźć wypadkową pewnej liczby ( $> 2$ ) zmieniających się sinusoidalnie zaburzeń falowych. Ogólne postępowanie jest następujące:

(1) Tworzymy układ strzałek fazowych przedstawiających funkcje, które mamy do siebie dodać. Rysujemy je tak, aby początek jednej strzałki łączył się z końcem drugiej, zachowując właściwe różnice fazowe między sąsiednimi strzałkami.

(2) Znajdujemy sumę wektorową tego układu. Długość strzałki wypadkowej daje nam amplitudę wypadkową. Kąt między wypadkową a pierwszą strzałką przedstawia różnicę fazy w stosunku do tej strzałki. Rzut strzałki wypadkowej na oś pionową daje zmienność w czasie wypadkowego zaburzenia falowego.

**Przykład 3.** Znaleźć graficznie wypadkową  $E(t)$  następujących zaburzeń falowych:

$$E_1 = 10\sin\omega t,$$

$$E_2 = 10\sin(\omega t + 15^\circ),$$

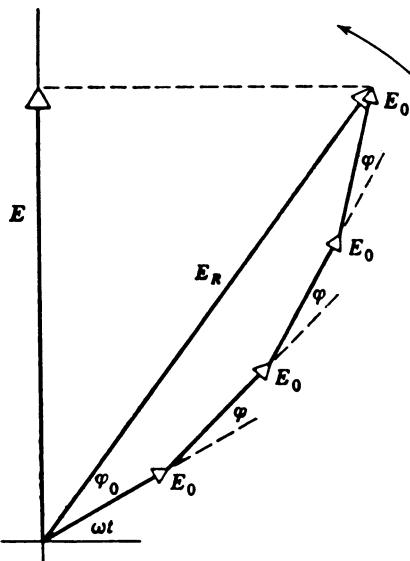
$$E_3 = 10\sin(\omega t + 30^\circ),$$

$$E_4 = 10\sin(\omega t + 45^\circ).$$

Na rysunku 45-12, na którym  $E_0$  wynosi 10, pokazano zespół czterech strzałek fazowych, przedstawiających te funkcje. Ich suma wektorowa, znaleziona graficznie, ma amplitudę  $E_R$  równą 38 i fazę  $\varphi_0$  względem  $E_1$  równą  $23^\circ$ . Innymi słowy

$$E(t) = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = 38\sin(\omega t + 23^\circ).$$

Wynik ten można sprawdzić przy pomocy obliczeń trygonometrycznych.



Rys. 45-12. Przykład 3. Cztery zaburzenia falowe dodano graficznie. Jest to tzw. diagram strzałkowy

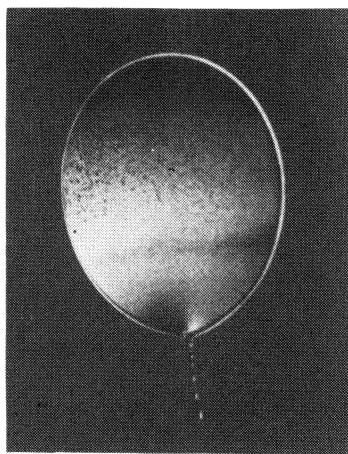
#### 45-5. Interferencja w cienkich błonkach

Barwy baniak mydlanych, tłustych plam na wodzie, a także innych cienkich błonek są wynikiem interferencji. Rysunek 45-13 przedstawia efekty interferencyjne w cienkiej, pionowej błonce z wody z mydłem oświetlonej światłem monochromatycznym.

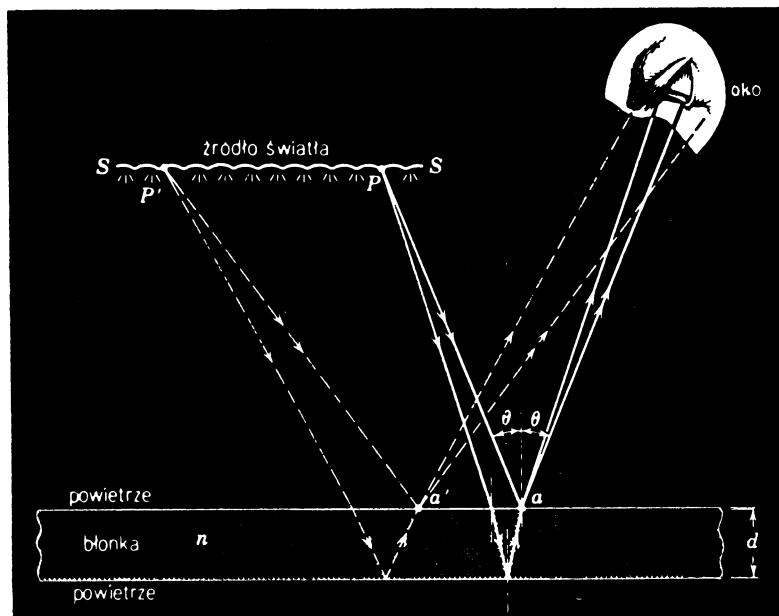
Rysunek 45-14 przedstawia błonkę o stałej grubości  $d$  i współczynniku załamania  $n$ , przy czym oko zogniskowane jest na punkcie  $a$ . Błonka jest oświetlona przez szerokie źródło  $S$  światła monochromatycznego. Na powierzchni tego źródła istnieje taki punkt  $P$ , że dwa promienie, które oznaczyliśmy za pomocą strzałki pojedynczej i podwójnej, wychodzące z tego punktu, mogą wejść do oka (patrz rys. 45-14) po przejściu przez punkt  $a$ . Te dwa promienie przebiegają różne drogi od punktu  $P$  do oka, gdyż jeden z nich odbija się od górnej powierzchni błonki, a drugi — od dolnej. To, czy punkt  $a$  będzie jasny czy ciemny, zależy od charakteru interferencji między dwiema falami, które wychodzą z  $a$ . Fale te są spójne, ponieważ obie pochodzą z tego samego punktu  $P$  na powierzchni źródła.

Jeśli oko „patrzy” na inną część błonki, powiedzmy na punkt  $a'$ , to światło, które wpada do oka, musi pochodzić z innego punktu powierzchni źródła  $P'$ , na co wskazują linie przerywane na rys. 45-14.

Przy padaniu prawie prostopadłym ( $\theta \approx 0$  na rys. 45-14) geometryczna różnica dróg między obu promieniami wychodzącymi z punktu  $P$  będzie wynosiła blisko  $2d$ . Moglibyśmy oczekwać, że fala wypadkowa odbita od błonki w pobliżu punktu  $a$  będzie mieć maksimum interferencyjne, jeśli odległość  $2d$  jest całkowitą wielokrotnością długości fali. Stwierdzenie to trzeba zmodyfikować z dwu przyczyn.



Rys. 45-13. Błonka z wody mydlanej na pętli z drutu, oglądana w świetle odbitym. Czarny kawałek błonki u góry nie oznacza, że w tym miejscu nie ma błonki. Powstaje tam zaciemnienie, gdyż ta część błonki jest tak cienka (ciecz odpływa ku dołowi), że mamy do czynienia z osłabiającą interferencję między światłem odbitym od przedniej i tylnej powierzchni błonki. Przekonamy się, że te dwie odbite fale różnią się w fazie o  $180^\circ$



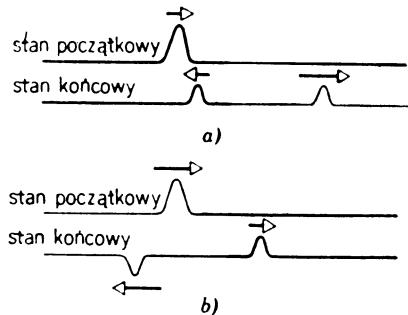
Rys. 45-14. Interferencja przez odbicie od cienkiej błonki, przy zastosowaniu rozciągniętego źródła światła  $S$

Po pierwsze, długość fali musi się odnosić do długości fali  $\lambda_n$  w błonce, a nie do jej długości  $\lambda$  w powietrzu; znaczy to, że musimy rozważyć drogi optyczne, a nie geometryczne długości dróg. Długości fal  $\lambda$  i  $\lambda_n$  (patrz równanie (43-12b)) związane są między sobą zależnością

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n}. \quad (45-12)$$

Zanim przejdziemy do drugiego punktu, założymy, że błonka jest tak cienka, że  $2d$  jest znacznie mniejsze od długości fali. Gdyby nasze założenie było słusze, różnica faz między dwiema falami byłaby bliska zeru, a tymczasem, zamiast oczekiwanej w tym wypadku jasności obserwujemy ciemność. Widać to z rys. 45-13, na którym działanie sił ciężkości powoduje, że błonka ma kształt klinu, gdyż jest bardziej cienka u góry. W miarę, jak coraz więcej cieczy odpływa ku dołowi, ciemny obszar u góry zwiększa swe rozmiary. Aby wyjaśnić to i wiele podobnych zjawisk, musimy założyć, że jeden z dwóch promieni na rys. 45-14 doznaje nagłej zmiany fazy o  $\pi$  ( $= 180^\circ$ ), związanej z odbiciem na powierzchni oddzielającej powietrze od błonki lub też z przejściem przez tę powierzchnię. Jak się okazuje, zmiana fazy doznaje promień odbity od górnej powierzchni. Drugi promień nie zmienia swojej fazy w nagi sposób, ani przy przejściu przez górną powierzchnię, ani też przy odbiciu od powierzchni dolnej.

W paragrafie 19-9 omawialiśmy zmiany faz przy odbiciu dla fal poprzecznych w strunach. Aby rozszerzyć wyciągnięte wówczas wnioski, rozważmy strunę, pokazaną na rys. 45-15, która składa się z dwóch części o różnych masach na jednostkę długości, napiętą określoną siłą. Jeśli impuls poruszający się na rys. 45-15a w stronę prawą, zbliży się do złącza, powstaną dwa impulsy, odbity i przepuszczony, przy czym impuls odbity będzie *zgodny w fazie* z impulsem początkowym. Na rysunku 45-15b sytuacja jest odwrócona, gdyż impuls początkowy biegnie teraz w lejszej części struny. W tym przypadku impuls odbity będzie się różnić w fazie od impulsu padającego o  $\pi$  ( $= 180^\circ$ ). W obu przypadkach impuls przepuszczony będzie zgodny w fazie z impulsem padającym.



Rys. 45-15. Zmiany faz przy odbiciu na złączu między dwiema napiętymi strunami. (a) Impuls początkowy w ciężkiej strunie i (b) impuls początkowy w lekkiej strunie

Rysunek 45-15a może się również odnosić do fali świetlnej, powiedzmy w szkle, zbliżającej się do powierzchni, poza którą znajduje się ośrodek rzadszy optycznie (o mniejszym współczynniku załamania), taki jak powietrze. Natomiast rys. 45-15b przedstawić może falę świetlną w powietrzu zbliżającą się do szkła. Podsumowując powiemy, że gdy odbicie zachodzi od powierzchni oddzielającej ośrodek gęstszy optycznie (przed powierzchnią) od ośrodka rzadszego (za powierzchnią), fala odbija się *bez zmiany fazy*; gdy jednak ośrodek za powierzchnią ma większy współczynnik załamania, faza zmienia się o  $\pi^*$ . Fala przepuszczona nie doznaje zmiany fazy w żadnym przypadku.

Możemy teraz wziąć pod uwagę oba czynniki, które określają charakter interferencji,

\* Twierdzenia te, które można ściśle udowodnić na gruncie teorii Maxwell'a (patrz też paragraf 45-6) muszą być zmodyfikowane, gdy światło pada na rzadszy ośrodek pod takim kątem, że zachodzi całkowite odbicie wewnętrzne. Muszą też one być zmodyfikowane przy odbiciu od powierzchni metali.

a mianowicie różnice w długości dróg optycznych oraz zmiany fazy przy odbiciu. Dla dwu promieni z rys. 45-14 (przy padaniu prostopadłym) musi zachodzić równość

$$2d = (m + \frac{1}{2})\lambda_n, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

aby promienie te po dodaniu się dawały natężenie *maksymalne*. Czynnik  $\frac{1}{2}\lambda_n$  wprowadziły tu ze względu na zmianę fazy przy odbiciu, ponieważ zmiana fazy o  $180^\circ$  równoważna jest różnicą dróg równej połowie długości fali. Podstawiając  $\lambda/n$  zamiast  $\lambda_n$  otrzymujemy ostatecznie

$$2dn = (m + \frac{1}{2})\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots \text{ (maksima).} \quad (45-13)$$

Warunek na natężenie *minimalne* jest następujący

$$2dn = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots \text{ (minima).} \quad (45-14)$$

Równania te są słuszne, jeżeli współczynnik załamania błonki jest większy lub mniejszy od współczynników załamania ośrodków znajdujących się po *obu* stronach błonki. Tylko w tych przypadkach pojawi się względna różnica fazy o  $180^\circ$  dla promieni odbitych na dwu powierzchniach. Błonka wody w powietrzu i błonka powietrza między dwiema płytami szklanymi — oto przykłady przypadków, do których stosują się równania (45-13) i (45-14). Przykład 5 stanowi przypadek, do którego się one nie stosują.

Jeśli grubość błonki nie jest wszędzie jednakowa, jak na rys. 45-13, gdzie błonka ma kształt klinu, w pewnych jej częściach nastąpi interferencja osłabiająca natężenie, a w innych — interferencja wzmacniająca. Powstaną wówczas linie minimalnego i maksymalnego natężenia, to jest prążki interferencyjne. Zwane są one *prążkami stałej grubości*, gdyż każdy prążek odpowiada zbiorowi punktów, dla których grubość błonki  $d$  jest jednakowa. Jeśli zaś błonka jest oświetlona światłem białym, a nie monochromatycznym, to interferencja światła odbitego od różnych części błonki będzie różna dla różnych długości fal. Taka jest przyczyna powstania błyszczących barw na bańkach mydlanych czy też w tłustych plamach na powierzchni wody.

Powstawanie prążków opisanego typu, to jest prążków, które wydają się znajdować na powierzchni błonki i związane są z jej grubością, jest możliwe tylko wtedy, gdy błonka jest „cienka”, co oznacza, że  $d$  nie przekracza kilku długości fali świetlnej. Dla bardzo grubych błonek (powiedzmy, o  $d \geq 1$  cm), różnica dróg między dwoma promieniami na rys. 45-14 będzie równa bardzo wielu długościom fali i różnica fazy w danym punkcie na błonce będzie się zmieniać gwałtownie, nawet gdy tylko trochę przesuniemy się z punktu  $a$ . Dla błonki „cienkiej” natomiast ta sama różnica fazy, która istnieje w punkcie  $a$ , istnieje też w najbliższym otoczeniu tego punktu; wokół dowolnego punktu błonki może więc, jak pokazuje rys. 45-13, wystąpić charakterystyczna „jasna plama”. Prążki interferencyjne można też wytworzyć dla grubych błonek, nie są one jednak umiejscowione na powierzchni błonki, lecz znajdują się w nieskończoności. Patrz paragraf 45-7.

**Przykład 4.** Błonka wodna ( $n = 1,33$ ) znajdująca się w powietrzu ma grubość 320 nm. Jaki kolor będzie miało światło odbite, jeśli błonka jest oświetlona światłem białym padającym prostopadle?

Rozwiązujeając równanie (45-13) względem  $\lambda$  otrzymujemy

$$\lambda = \frac{2dn}{m + \frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot 320 \text{ nm} \cdot 1,33}{m + \frac{1}{2}} = \frac{850 \text{ nm}}{m + \frac{1}{2}} \text{ (maksima).}$$

Rozwiązujeając równanie (45-14) względem  $\lambda$  otrzymamy

$$\lambda = \frac{850 \text{ nm}}{m} \text{ (minima).}$$

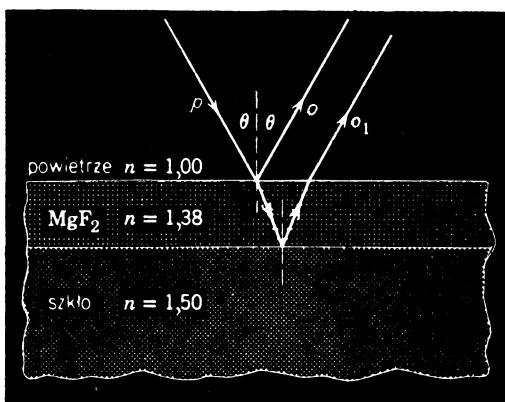
Maksima i minima wystąpią dla następujących długości fal:

$m$	0 (max)	1 (min)	1 (max)	2 (min)	2 (max)
$\lambda, \text{ nm}$	1700	850	570	425	340

Tylko maksimum odpowiadające  $m = 1$  leży w obszarze widzialnym (patrz rys. 42-1); światło o tej długości fali ma kolor żółtozielony. A więc jeśli do oświetlenia tej błonki użyjemy światła białego, to przy odbiciu zostanie wzmacniona jego składowa żółtozielona.

**Przykład 5. Szkło nieodbijające\***. Soczewki często są pokryte cienkimi błonkami przezroczystych substancji, takich jak  $\text{MgF}_2$  ( $n = 1,38$ ), celem zredukowania odbicia od powierzchni szkła. Wykorzystujemy tu zjawisko interferencji. Jak gruba musi być taka błonka, jeżeli chcemy uzyskać minimalne odbicie w środku widma widzialnego (550 nm)?

Załóżmy, że światło pada na soczewkę w kierunku prawie prostopadłym (na rys. 45-16 kąt  $\theta$  przedstawiliśmy dla przejrzystości przesadnie duży). Badamy, kiedy interferencja między promieniami  $o$  i  $o_1$  spowoduje osłabienie natężeń. Równanie (45-14) nie stosuje się do tego przypadku, ponieważ zmiana fazy o  $180^\circ$  następuje dla obu promieni, gdyż zarówno na górnjej, jak i na dolnej powierzchni błonki  $\text{MgF}_2$  zachodzi odbicie od ośrodka o większym współczynniku załamania.



Rys. 45-16. Przykład 5. Niepożądane odbicia od szkła mogą być zredukowane przez pokrycie cienką przezroczną warstwą odpowiedniej substancji

Nie ma tu więc wypadkowej zmiany fazy wytwarzanej przez te dwa odbicia, co znaczy, że różnica dróg optycznych dla interferencji osłabiającej wynosi  $(m + \frac{1}{2})\lambda$  (por. równ. (45-13)), co prowadzi do wyrażenia

$$2dn = (m + \frac{1}{2})\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots \text{ (minima).}$$

Rozwiązuje to równanie względem  $d$  i podstawiając  $m = 0$  otrzymujemy

$$d = \frac{(m + \frac{1}{2})\lambda}{2n} = \frac{\lambda}{4n} = \frac{550 \text{ nm}}{4 \cdot 1,38} = 100 \text{ nm.}$$

**Przykład 6. Pierścienie Newtona.** Rysunek 45-17 przedstawia soczewkę o promieniu krzywizny  $R$  leżącą na dokładnie płaskiej płyce szklanej i oświetloną z góry światłem o długości fali  $\lambda$ . Na rysunku 45-18 widać, że pojawiają się w tym przypadku kołowe pierścienie interferencyjne (pierścienie Newtona), związane z różnicą grubością warstwy powietrza pomiędzy soczewką a płytą. Znaleźć promienie kołowych maksimów interferencyjnych.

Promieniem, który przy odbiciu doznaje zmiany fazy o  $180^\circ$ , jest promień odbity od *dolnej* powierzchni błonki (powietrznej), gdyż ten właśnie promień odbija się od ośrodka o wyższym współczynniku załamania.

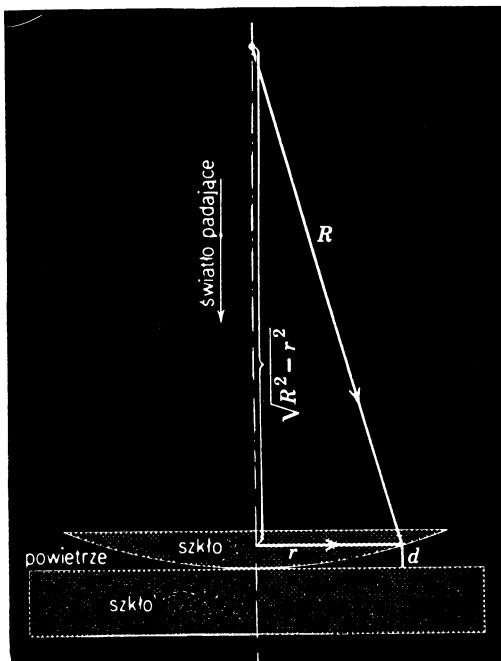
\* Patrz: Philip Baumeister, Gerald Pineus, Optical Interference Coatings, *Scientific American*, December 1970.

Warunek dla maksimum pozostaje jednak niezmieniony (równ. (45-13)), czyli

$$2d = (m + \frac{1}{2})\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (45-15)$$

przy czym przyjęliśmy, że współczynnik załamania błonki powietrznej jest równy 1. Na podstawie rysunku 45-17 można napisać

$$d = R - \sqrt{R^2 - r^2} = R - R \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]^{1/2}.$$



Rys. 45-17. Przykład 6. Urządzenie do obserwacji pierścieni Newtona

Jeśli  $r/R \ll 1$ , to nawias kwadratowy można rozwinić zgodnie z twierdzeniem o kwadracie dwumianu czyli

$$d = R - R \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \dots \right] = \frac{r^2}{2R}.$$

W połączeniu z równaniem (45-15) otrzymujemy

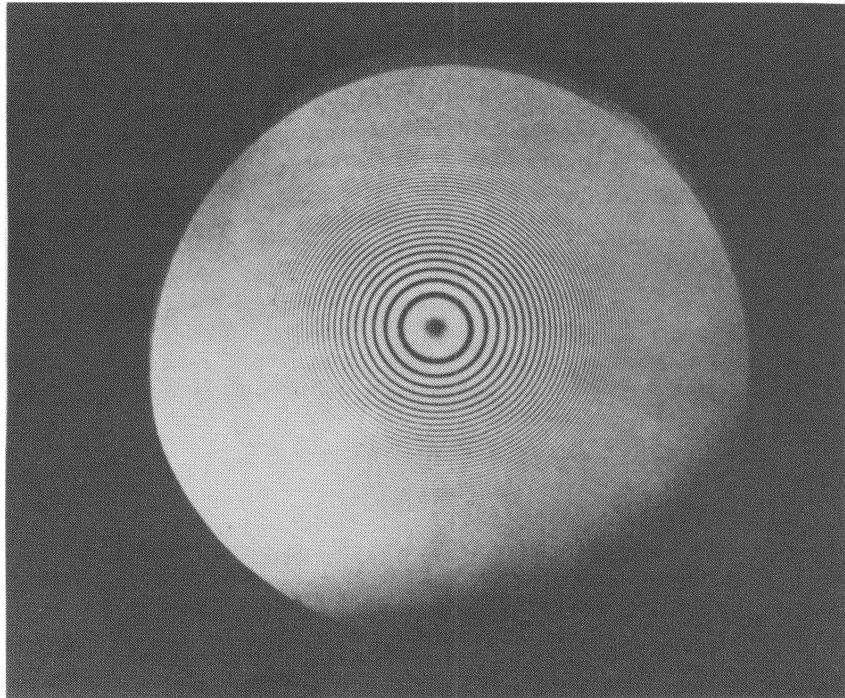
$$r = \sqrt{(m + \frac{1}{2})\lambda R}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Są to promienie jasnych pierścieni. Jeżeli użyjemy światła białego, każda jego składowa wytworzy swój własny układ pierścieni; układy te będą się na siebie nakładać.

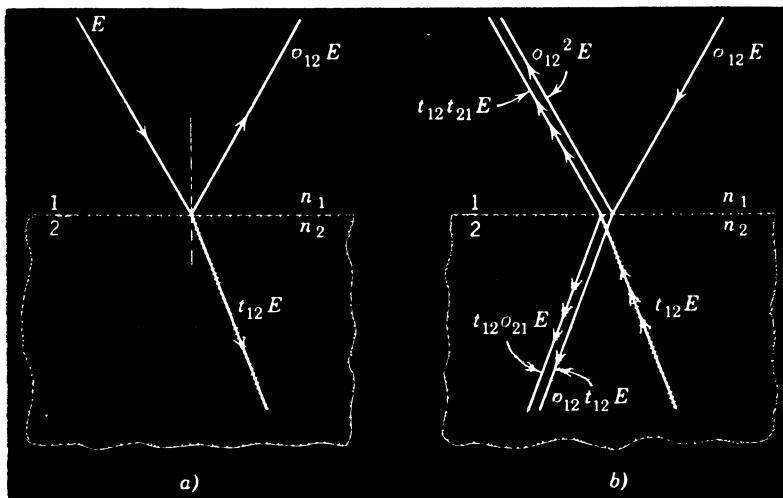
#### 45-6. Odwracalność optyczna i zmiany fazy przy odbiciu

G. G. Stokes (1819–1903) posłużył się zasadą optycznej odwracalności biegu promieni celem zbadania odbicia światła na granicy dwu ośrodków. Zasada ta głosi, że jeśli nie ma pochłaniacza światła, to promień świetlny odbity bądź załamany będzie wracał swoim śladem, jeśli się odwróci jego kierunek. Przypomina nam to fakt, że każdy układ mechaniczny może wrócić do położenia początkowego po tej samej drodze, po której poruszał się do przodu, pod warunkiem, że nie ma pochłaniania energii z powodu tarcia, itp.

Na rysunku 45-19a pokazano falę o amplitudzie  $E$  odbitą i załączaną na powierzchni oddzielającej dwa ośrodki 1 i 2; przyjmujemy, że  $n_2 > n_1$ . Amplituda fali odbitej wynosi  $\alpha_{12}E$ , gdzie  $\alpha_{12}$  jest amplitudowym współczynnikiem odbicia. Amplituda fali załamanej wynosi  $t_{12}E$ , gdzie  $t_{12}$  jest amplitudowym współczynnikiem transmisji.



Rys. 45-18. Przykład 6. Pierścienie Newtona. (Dzięki uprzejmości Bausch and Lomb Optical Co.)



Rys. 45-19. (a) Promień odbity i załamany na powierzchni oddzielającej powietrze od szkła. (b) Sytuacja odwrócona optycznie; dwa promienie po lewej stronie u dołu powinny się redukować

Rozważmy tylko możliwości zmian fazy o  $0^\circ$  i  $180^\circ$ . Jeśli na przykład  $o_{12} = +0,5$ , przy odbiciu następuje zmniejszenie się amplitudy o połowę, bez zmiany fazy. Dla  $o_{12} = -0,5$  mamy zmianę fazy o  $180^\circ$ , gdyż

$$E \sin(\omega t + 180^\circ) = -E \sin \omega t.$$

Na rysunku 45-19b widać, że jeżeli bieg tych dwóch promieni odwrócićmy, to nałożą się one tak, że powstanie promień pierwotny odwrócony co do kierunku. Promień  $o_{12}E$  oznaczony na rysunku za pomocą pojedynczej strzałki zostaje odbity i załamany, tworząc promień o amplitudach  $o_{12}^2 E$  i  $o_{12}t_{12}E$ . Promień  $t_{12}E$  oznaczony za pomocą potrójnej strzałki także zostaje odbity i załamany, tworząc dwa promienie o amplitudach  $t_{12}t_{21}E$  oraz  $t_{12}o_{21}E$ , jak pokazano na rysunku. Zauważmy, że  $o_{12}$  opisuje promień w ośrodku 1 odbity od ośrodka 2, podczas gdy  $o_{21}$  opisuje promień w ośrodku 2 odbity od ośrodka 1. Podobnie  $t_{12}$  opisuje promień, który przechodzi z ośrodka 1 do ośrodka 2, a  $t_{21}$  promień, który przechodzi z ośrodka 2 do ośrodka 1.

Dwa promienie po lewej stronie u góry na rys. 45-19b muszą być równoważne padającemu promieniu z rys. 45-19a, o odwróconym kierunku, natomiast dwa promienie po lewej stronie u dołu muszą się znowić. To drugie żądanie prowadzi do wniosku, że

$$o_{12}t_{12}E + t_{12}o_{21}E = 0,$$

czyli

$$o_{12} = -o_{21}.$$

Na podstawie tego wyniku możemy stwierdzić, że jeśli porównujemy falę odbitą od ośrodka 1 z falą odbitą od ośrodka 2, to zachowują się one odmiennie pod tym względem, że jedna lub druga doznaje zmiany fazy o  $180^\circ$ . Aby wykazać, że (co twierdziliśmy wcześniej) tym promieniem, który doznaje zmiany fazy o  $180^\circ$ , jest promień odbity od ośrodka gęstsze optycznie, musimy się odwołać do doświadczenia albo do analizy opartej na równaniach Maxwell'a.

### 45-7. Interferometr Michelsona\*

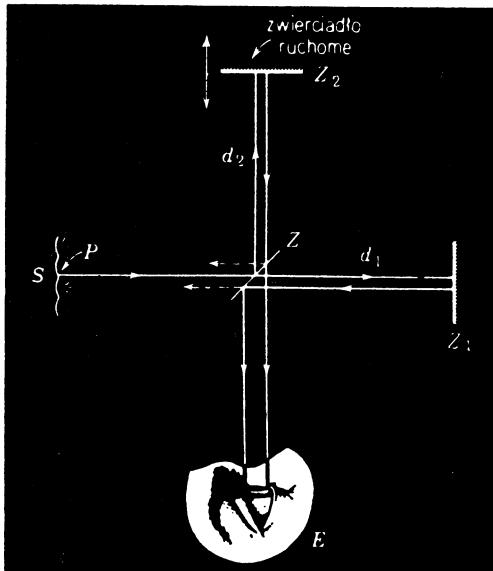
*Interferometr* jest przyrządem służącym do mierzenia z wielką dokładnością długości lub zmian długości za pomocą prążków interferencyjnych. Opisujemy tu taki jego typ, jaki w 1881 zbudował po raz pierwszy Michelson (1852–1931).

Weźmy pod uwagę światło, które wychodzi z punktu  $P$  na powierzchni rozciąglego źródła  $S$  (rys. 45-20) i pada na półprzepuszczalne zwierciadło  $Z$ . Zwierciadło to pokryte jest warstwą srebra tak grubą, by przepuszczało połowę padającego światła i odbijało jego drugą połowę; na rysunku założyliśmy dla prostoty, że grubość zwierciadła jest pomijalna. Po dojściu do zwierciadła  $Z$  światło dzieli się na dwie fale. Jedna z nich zmierza po przejściu zwierciadła  $Z$  w kierunku zwierciadła  $Z_1$ ; druga zaś, po odbiciu, kieruje się ku  $Z_2$ . Fale te odbijają się następnie od każdego z tych dwóch zwierciadeł i biegną z powrotem wzdłuż swoich pierwotnych kierunków padania, przy czym każda fala ostatecznie wpada do oka. Ponieważ fale te, jako pochodzące z tego samego punktu na powierzchni źródła, są spójne, będą one interferować ze sobą.

Jeśli zwierciadła  $Z_1$  i  $Z_2$  są względem siebie dokładnie prostopadłe, otrzymamy efekt taki, jaki by powstał przy padaniu światła pochodzącego z rozciąglego źródła  $S$  na jednolicie grubą warstwę powietrza w szkle, o grubości  $d_2 - d_1$ . Powstaną mianowicie prążki interferencyjne spowodowane małymi zmianami kąta, pod jakim pada na tę warstwę światło z różnych punktów powierzchni źródła. Dla grubych warstw różnica dróg równa jednej długości fali może powstać już przy bardzo małej zmianie kąta padania.

\* Patrz: R. S. Shankland, Michelson: America's first Nobel Prize Winner in Science, *The Physics Teacher*, January 1977. Patrz również: R. S. Shankland, Michelson and his Interferometer's, *Physics Today*, April 1974.

Jeśli zwierciadło  $Z_2$  przesunie się ku przodowi lub do tyłu, zmieni się grubość równoważnej warstwy powietrza. Założymy, że w środku (kołowego) układu prążków jest jasno oraz że zwierciadło  $Z_2$  przesuwa się dokładnie o tyle, by pierwszy jasny, kołowy prążek przesunął się do środka układu. Droga promienia światła padającego na zwierciadło  $Z_2$  została zmieniona o jedną długość fali. Znaczy to (ponieważ światło przechodzi dwa razy przez równoważną warstwę powietrzną), że zwierciadło musiało się przesunąć o pół długości fali.



Rys. 45-20. Interferometr Michelsona; pokazano drogę pewnego promienia wychodzącego z punktu  $P$  na rozciągniętym źródle  $S$

Interferometru używamy do mierzenia zmian długości w ten sposób, że liczymy ilość prążków interferencyjnych, które przechodzą przez pole widzenia w czasie przesunięcia zwierciadła  $Z_2$ . Jeśli się liczy dużą ilość prążków, pomiary długości dokonywane w ten sposób mogą być bardzo dokładne.

Michelson zmierzył długość wzorca metra przechowywanego w Paryżu wyrażając ją liczbą długości fal pewnego monochromatycznego czerwonego światła, emitowanego ze źródła światła zawierającego kadm. Pokazał on, że wzorzec metra jest równoważny 1 553 163,5 długości fal czerwonego światła kadmu. Za to osiągnięcie otrzymał w 1907 r. nagrodę Nobla.

Fizycy od dawna myśleli o korzyściach, jakie przyniosłoby porzucenie wzorcowej sztabki metrowej jako podstawowego wzorca długości i *zdefiniowanie* metra poprzez długość fali jakiegoś starannie wybranego promieniowania monochromatycznego. Sprawiłoby to, że pierwotny wzorzec długości byłby łatwo osiągalny w laboratoriach całego świata. Poprawiłoby to dokładność pomiarów długości, ponieważ nie trzeba by już porównywać nieznanego przedmiotu z przedmiotem wzorcowym (sztabką metrową) posługując się techniką interferometryczną, lecz można by mierzyć nieznaną przedmiot *bezpośrednio*, otrzymując jego bezwzględną długość za pomocą tej właśnie techniki. Dodatkowa korzyść jest taka, że gdyby została zniszczona wzorcowa sztabka metrowa, nie można by jej było nigdy zastąpić, podczas gdy źródło światła i interferometry będą (z pewnością) zawsze dostępne.

W 1961 r. taki atomowy wzorzec długości został powszechnie przyjęty na mocy międzynarodowej umowy. Oto cytat z artykułu opisującego to zdarzenie\*.

„Długość fali pomarańczowo-czerwonego światła kryptonu-86 zastąpiła sztabkę platynowo-irydową jako światowy wzorzec długości. Poprzednio długość fali tego światła była określona jako funkcja długości sztabki metrowej. Obecnie metr jest zdefiniowany jako wielokrotność (1 650 763,73) długości fali tego światła”.

Światło kryptonu 86 zostało użyte dlatego, że w porównaniu ze światłem z innych źródeł atomowych daje ono węższe prążki interferencyjne w interferometrze przy długich drogach optycznych, z jakimi mamy czasami do czynienia przy pomiarach długości.

#### **45-8. Interferometr Michelsona a rozchodzenie się światła\*\***

W paragrafie 40-4 przedstawiliśmy hipotezę Einsteina, obecnie dobrze sprawdzoną, że w przoni światło rozchodzi się z tą samą prędkością  $c$ , bez względu na to jaka jest prędkość względna obserwatora i źródła światła. Wskazywaliśmy, że hipoteza ta była sprzeczna z poglądami XIX-wiecznych fizyków na rozchodzenie się fal. Fizykom tym trudno było uwierzyć, że fale mogą się rozchodzić bez ośrodka, gdyż byli oni przyzwyczajeni do ówczesnej klasycznej fizyki. Gdyby istniał taki ośrodek, można by w naturalny sposób określić  $c$  jako prędkość światła *względem tego ośrodka*, podobnie jak określamy prędkość dźwięku względem ośrodka takiego, jak np. powietrze.

Choć nie znano żadnego specjalnego ośrodka, w którym miałyby się rozchodzić światło, fizycy przyjmowali, że istnieje taki ośrodek, zwany *eterem*\*\*\* i zakładali, że jego własności są takie, iż nie można go wykryć przy pomocy zwykłych metod, takich jak np. ważenie.

W 1881 r. (a więc na 24 lata przed hipotezą Einsteina) A. A. Michelson postawił sobie za zadanie wykryć eter, gdyby on istniał, za pomocą bezpośredniego doświadczenia. W szczególności Michelson, do którego potem dołączył E. W. Morley, próbowali zmierzyć prędkość  $u$ , z jaką Ziemia porusza się względem eteru. Wybrali oni interferometr Michelsona jako podstawowy instrument w słynnym od owego czasu doświadczeniu Michelsona–Morleya.

Ziemia poruszająca się wraz z interferometrem przez eter z prędkością  $u$  równoważna jest interferometrowi w spoczynku, z eterem płynącym przezeń z prędkością  $-u$ , jak pokazano na rys. 45-21. Rozważmy falę, poruszającą się wzduł drogi  $ZZ_1Z$  oraz inną falę, poruszającą się wzduł  $ZZ_2Z$ . Pierwsza z nich odpowiada klasycznie człowiekowi wiosłującemu w łodzi, który przebył odległość  $d$  pod prądem i następnie tę samą odległość z prądem, podczas gdy druga odpowiada przebyciu łodzią odległości  $d$  dwukrotnie w poprzek prądu.

Na podstawie hipotezy o istnieniu eteru prędkość światła na drodze  $ZZ_1$  wynosi  $c+u$ , natomiast na drodze powrotnej ( $Z_1Z$ ) wynosi  $c-u$ . Czas potrzebny na przebycie całej drogi wynosi

$$t_1 = \frac{d}{c+u} + \frac{d}{c-u} = d \frac{2c}{c^2-u^2} = \frac{2d}{c} \frac{1}{1-(u/c)^2}.$$

Prędkość światła, na podstawie hipotezy istnienia eteru, na drodze  $ZZ_2$  wynosi  $\sqrt{c^2-u^2}$ , jak wynika z rys. 45-21. Taka sama jest prędkość przy ruchu z powrotem po drodze  $Z_2Z$ , tak że czas potrzebny na przebycie całej drogi wynosi

$$t_2 = \frac{2d}{\sqrt{c^2-u^2}} = \frac{2d}{c} \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}.$$

Różnica czasu dla tych dwóch dróg jest równa

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2d}{c} \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{u}{c} \right)^2 \right]^{-1} - \left[ 1 - \left( \frac{u}{c} \right)^2 \right]^{-1/2} \right\}.$$

\* Scientific American, str. 75, December 1960.

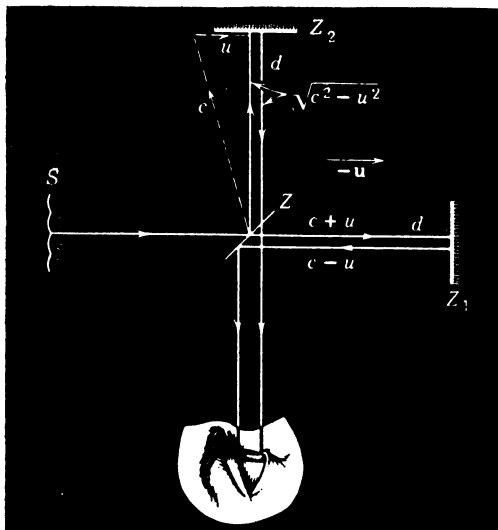
\*\* Patrz uzupełnienie V w tomie I.

\*\*\* Pełna nazwa: świecący (czy też raczej przenoszący światło) eter.

Zakładając, że  $u/c \ll 1$ , możemy rozwinać wielkości w nawiasach kwadratowych, korzystając z twierdzenia o rozwijaniu dwumianu i zatrzymując jedynie dwa pierwsze wyrazy. Prowadzi to do wyrażenia

$$t = \frac{2d}{c} \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{u}{c} \right)^2 + \dots \right] - \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{u}{c} \right)^2 + \dots \right] \right\} = \frac{2d}{c} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{u}{c} \right)^2 \right\} = \frac{du^2}{c^3}. \quad (45-16)$$

Obróćmy teraz nasz przyrząd o kąt  $90^\circ$ . Zamieni to role dróg światła, gdyż  $ZZ_1Z$  będzie teraz drogą w poprzek prądu, a  $ZZ_2Z$  drogą z prądem i pod prąd. Różnica czasu między dwiema falami wpadającymi do oka jest także odwrócona; zmienia to różnicę faz między nakładającymi się falami i narusza położenia maksimów interferencyjnych. *Doświadczenie polega na szukaniu przesunięcia prążków interferencyjnych, gdy obrócimy aparat.*



Rys. 45-21. „Eter” przepływa z prędkością  $-u$  przez interferometr Michelsona. Prędkości fal podane na rysunku obliczone są na podstawie (błędnej) hipotezy o istnieniu eteru

Zmiana w różnicy czasów wynosi  $2\Delta t$ , co odpowiada przesunięciu prążka o  $2\Delta t/T$ , gdzie  $T (= \lambda/c)$  jest okresem drgań światła. Oczekiwane maksymalne przesunięcie przy obrocie o kąt  $90^\circ$  odpowiada ilości prążków (patrz równ. (45-16)) równej

$$\Delta N = \frac{2\Delta t}{T} = \frac{2\Delta tc}{\lambda} = \frac{2d}{\lambda} \left( \frac{u}{c} \right)^2. \quad (45-17)$$

Niech w doświadczeniu Michelsona-Morleya  $d = 11$  m, co uzyskuje się przez wielokrotne odbicie w interferometrze, oraz  $\lambda = 5,9 \cdot 10^{-7}$  m. Jeśli założymy, że  $u$  jest w przybliżeniu rzędu orbitalnej prędkości Ziemi, to wtedy  $u/c = 10^{-4}$ . Oczekiwane przesunięcie prążków przy obrocie interferometru o  $90^\circ$  wynosi zatem

$$\Delta N = \frac{2d}{\lambda} \left( \frac{u}{c} \right)^2 = \frac{2 \cdot 11 \text{ m}}{5,9 \cdot 10^{-7} \text{ m}} (10^{-4})^2 = 0,4.$$

Choć oczekiwano tylko przesunięcia o około 0,4 prążka, Michelson i Morley byli pewni, że mogliby zaobserwować przesunięcie o 0,01 prążka. Jednakże przekonali się oni, że nie było żadnego doświadczalnego przesunięcia prążków.

Znaczy to po prostu, że analogia pomiędzy łodzią poruszającą się na wodzie i falą świetlną w eterze, która w roku 1881 wydawała się tak oczywista, jest po prostu nieprawdziwa. Wyprowadzenie oparte na tej analogii nie stosuje się do fal świetlnych. Kiedy przeprowadza się podobną analizę korzystając z hipotezy Einsteina, wynik negatywny jest oczywisty, gdyż prędkość światła wzdłuż wszystkich dróg wynosi  $c$ . Ruch Ziemi dookoła Słońca i obrót interferometru nie mają, zgodnie z poglądem Einsteina, żadnego wpływu na prędkość fal świetlnych w interferometrze.

Podkreślamy, że choć hipoteza Einsteina jest całkowicie zgodna z negatywnym wynikiem doświadczenia Michelsona–Morleya, samo to doświadczenie nie może służyć jako dowód słuszności tej hipotezy. Einstein powiedział, że żadna ilość doświadczeń, nawet dowolnie duża, nie może udowodnić, że ma on rację, ale wystarczy jedno doświadczenie, żeby obalić jego teorię. Nasza dzisiejsza wiara w hipotezę Einsteina opiera się na całkowitej zgodności wielkiej ilości doświadczeń, które przeprowadzono, by hipotezę tę sprawdzić. Ten „jeden eksperiment”, który mógłby ją obalić, nigdy nie został przeprowadzony.

## Pytania

1. Czy doświadczenie Younga jest doświadczeniem interferencyjnym, czy dyfrakcyjnym, czy też łączy te dwa zjawiska?
2. Czy dla fal dźwiękowych występują efekty interferencyjne? Przypominamy, że światło jest falą poprzeczną, a dźwięk — podłużną.
3. Dlaczego w doświadczeniu Younga z dwiema szczelinami (rys. 45-1), w którym korzysta się z laboratoryjnego źródła światła monochromatycznego, konieczny jest ekran *A*? Co by się stało, gdybyśmy stopniowo zwiększały otwór w tym ekranie?
4. Jakie zmiany nastąpią w rozkładzie prążków interferencyjnych, jeśli aparat przedstawiony na rys. 45-5 umieścimy pod wodą?
5. Jeśli byłaby możliwa interferencja między falami świetlnymi o różnej długości, powinno się obserwować dudnienie światła, podobnie jak obserwuje się dudnienie fal dźwiękowych wychodzących z dwóch źródeł o nieco różnych częstotliwościach. Zastanów się, jak można by doświadczalnie szukać tego zjawiska.
6. Dlaczego użycie równoległych szczelin jest korzystniejsze od użycia otworów, którymi posługiwał się Young w celu pokazania interferencji?
7. Czy spójność światła ma jakieś znaczenie dla odbicia i załamania?
8. Gdybyś miał laserowe źródło światła nie potrzebowałbyś (patrz rys. 45-8) odpowiednika ekranu *A* z rys. 45-1. Dlaczego?
9. Spróbuj obronić następujące stwierdzenie: Fala na rys. 45-7a jest sinusoidą (czy też cosinusoidą), natomiast na rys. 45-7b nie jest. Rzeczywiście krzywej z rys. 45-7b nie da się przypisać określonej częstotliwości. Dlaczego nie? (Wskazówka: Weź pod uwagę analizę fourierowską.)
10. Większość z nas wie jak działają obracające się lub drgające anteny radarowe, które wysyłają odpowiednio obracającą się lub drgającą wiązkę promieniowania mikrofalowego. Możliwe jest również wytworzenie takiej drgającej wiązki bez jakiegokolwiek mechanicznego ruchu anteny nadawczej. Robi się to metodą periodycznej zmiany fazy promieniowania w trakcie wysyłania go przez kolejne sekcje (długiej) anteny nadawczej. Przekonaj się, że dzięki wzmacniającej interferencji promieniowania pochodzącego z różnych części nieruchomej anteny istotnie może powstać drgająca wiązka mikrofal. Na wyspach Aleutach Stany Zjednoczone zainstalowały ogromne urządzenie tego typu, służące do obserwacji eksperymentów z pociskami.
11. Opisać rozkład natężenia światła na ekranie *C* (rys. 45-5), jeśli jedna ze szczelin jest pokryta filtrem czerwonym, a druga — filtrem niebieskim, przy czym światło padające jest białe.
12. Podać dokładną definicję kątów  $\theta$  i  $\varphi$ , które występują w równaniu (45-10) i określić, jaka jest różnica między nimi.
13. Jakie zmiany w natężeniu światła wystąpią w środku ekranu, jeśli jedna ze szczelin na rys. 45-5 będzie zasłonięta?
14. W doświadczeniu Younga z dwiema szczelinami założymy, że ekran *A* na rys. 45-1 zawiera dwie bardzo wąskie, równolegle szczeliny zamiast jednej. (a) Pokazać, że jeśli odstęp między tymi szczelinami jest odpowiednio dobrany, mogą zniknąć prążki interferencyjne. (b) Czy w tych warunkach wiązki wychodzące ze szczelin *S<sub>1</sub>* i *S<sub>2</sub>* na ekranie *B* można nazwać wiązkami spójnymi? Nie wytwarzają one prążków interferencyjnych. (c) Przedyskutować, co by się działo z prążkami interferencyjnymi w przypadku jednej szczeliny w ekranie *A*, gdyby szerokość tej szczeliny była stopniowo powiększana?
15. Jakie są warunki dla maksymalnego natężenia światła, gdy ogląda się cienką błonkę w świetle przepuszczonym przez nią?
16. Czy centralna plamka w doświadczeniu z pierścieniami Newtona, oglądana w świetle odbitym, jest ciemna czy jasna? Wyjaśnić dlaczego.

17. Dlaczego błonka na rys. 45-14 musi być „cienka”, aby oglądany obraz interferencyjny był taki, jak opisano?

18. Dlaczego soczewki pokryte przezroczystą substancją (patrz przykład 5) wyglądają purpurowo w świetle odbitym?

19. Pewna osoba zwilżyła swoje okulary celem oczyszczania ich. Osoba ta spostrzegła, że gdy woda paruje, na krótki okres okulary stają się znacznie mniej odbijające. Wyjaśnić dlaczego.

20. Soczewka jest pokryta specjalną substancją celem zmniejszenia odbicia światła, jak w przykładzie 5. Co dzieje się z energią, która poprzednio była odbijana? Czy jest ona pochłaniana przez warstwę pokrywającą soczewkę?

21. Bardzo małe zmiany w kącie padania nie zmieniają w poważniejszym stopniu warunków interferencyjnych dla błonek „cienkich”, natomiast zmieniają je dla błonek „grubych”. Dlaczego?

22. Nawiązując do zmiany fazy przy odbiciu od powierzchni rozdzielającej dwa ośrodki przezroczyste, czy myślisz, że możliwe jest przesunięcie fazy inne niż 0 lub  $\pi$ ? Czy sądzisz, że przesunięcia fazowe dają się ściśle wyliczać z równań Maxwella?

23. Rozważmy następujące obiekty, które wydają się kolorowe, gdy są oświetlone światłem słonecznym: (1) bańki mydlane, (2) płatki róży, (3) wewnętrzna powierzchnia muszli ostrygi, (4) cienkie plamy oleju, (5) warstwy przeciwdoblaskowe obiektywów fotograficznych oraz (6) pióra pawiego ogona. Wszystkie poza jednym z nich są kolorowe dzięki interferencji, źródłem kolorów nie są tu barwniki. Który z nich jest tym jednym, odmiennym? Przedyskutuj to.

24. Dlaczego warstwy (błonka mydlana, plama oliwy itp.) muszą być „cienkie”, by dawać efekty interferencyjne? Czy muszą? Co to znaczy „cienkie”? Przedyskutuj to.

25. *Optycznie gładką* nazywa się płytka szklana, która jest gładka z dokładnością do małego ułamka długości fali. Jak można ją wykorzystać do sprawdzenia gładkości drugiej płytki szklanej?

26. Charakterystyki kierunkowe pewnej anteny radarowej, która służy jako urządzenie odbiorcze, są znane. Co można powiedzieć o jej charakterystykach kierunkowych, gdy antena służy jako nadajnik?

27. Osoba znajdująca się w ciemnym pokoju i wyglądająca przez małe okienko może widzieć inną osobę, stojącą na zewnątrz w jasnym świetle słonecznym. Natomiast ta druga osoba nie może dojrzeć pierwszej. Czy jest to sprzeczne z zasadą odwracalności biegu promieni w optyce? Założyć, że nie ma pochłaniania światła.

28. Dlaczego w doświadczeniu Michelsona–Morleya trzeba obrócić interferometr?

29. Jak zinterpretować negatywny wynik doświadczenia Michelsona–Morleya zgodnie z einsteinowską teorią względności?

30. Samechód kieruje swoje reflektory na ścianę budynku. Dlaczego nie powstają prążki interferencyjne?

31. Czy można, w zasadzie, skonstruować akustyczną wersję interferometru Michelsona do pomiarów prędkości wiatru? Omów niektóre trudności konstrukcyjne. Czy są prostsze sposoby pomiaru prędkości wiatru?

## Zadania

### Paragraf 45-1

1. Zaprojektować urządzenie z dwiema szczelinami, które by wytwarzalo na odległym ekranie prążki interferencyjne odległe od siebie o  $1^\circ$ . Użyć światła sodu ( $\lambda = 589 \text{ nm}$ ).

*Odp.:* Odległość pomiędzy szczelinami musi być równa  $0,034 \text{ nm}$ .

2. W urządzeniu z dwiema szczelinami odległość między szczelinami wynosi  $5,0 \text{ mm}$ , przy czym znajdują się one w odległości  $1,0 \text{ m}$  od ekranu. Na ekranie można obserwować dwa obrazy interferencyjne, jeden pochodzący od fali o długości  $480 \text{ nm}$ , a drugi od fali o długości  $600 \text{ nm}$ . Jaka jest odległość na ekranie między prążkami interferencyjnymi trzeciego rzędu dla obu tych obrazów?

3. Światło sodowe ( $\lambda = 589 \text{ nm}$ ) pada na dwie szczeliny odległe o  $d = 2,0 \text{ mm}$ .  $D$  na rysunku 45-5 wynosi  $4 \text{ cm}$ . Jaki błąd w procentach popełnimy przy znajdowaniu położenia dziesiątego jasnego prążka, jeśli nie założymy, że  $D \gg d$ ?

*Odp.:*  $0,03\%$ .

4. Odstęp między szczelinami w urządzeniu dwuszczelinowym jest równy  $100 \text{ długosćom fali światła}$  przechodzącego przez szczeliny. (a) Jaka jest odległość kątowa pomiędzy pierwszym i drugim maksimum?

(b) Jaka jest odległość liniowa między pierwszym i drugim maksimum, jeśli ekran znajduje się w odległości 50 cm od szczelin?

5. Urządzenie z dwiema szczelinami wytwarza prążki interferencyjne dla światła sodowego ( $\lambda = 589 \text{ nm}$ ), odległe od siebie o  $0,20^\circ$ . Dla jakiej długości fali odległość kątowa byłaby o 10% większa?

Odp.: 650 nm.

6. Światło sodowe ( $\lambda = 589 \text{ nm}$ ) pada na dwie szczeliny odległe od siebie o  $d = 0,20 \text{ mm}$ . W pobliżu szczeliny umieszczona jest cienka soczewka jak na rys. 45-6. Jaka jest odległość liniowa prążków na ekranie umieszczonym w płaszczyźnie ogniskowej soczewki? Ogniskowa soczewki  $f = +1,0 \text{ m}$ .

7. Spójna wiązka światła monochromatycznego z lasera helowo-neonowego ( $\lambda = 640 \text{ nm}$ ) oświetla układ dwóch szczelin znajdujący się z przodu sali wykładowej. Wiązka ta przebywa odległość  $d$  (20 m) do zwierciadła z tyłu sali, a następnie wraca po tej samej drodze i pada na ekran. (a) Jaka powinna być odległość pomiędzy szczelinami, aby odległość między maksymami interferencyjnymi wynosiła  $s$  (10 cm)? (b) Omów krótko co będzie widać, jeśli wykładowca zasłoni jedną ze szczelin cienkim arkuszem celofanu. Droga optyczna w celofanie jest o 2,5 długości fali dłuższa niż odpowiednia droga w powietrzu.

Odp.: (a)  $0,26 \text{ mm}$ . (b) Zamiast centralnego maksimum będziemy mieli minimum.

8. W doświadczeniu interferencyjnym Younga dwa spójne wibratory umieszczone w dużym naczyniu z wodą (rys. 45-4) znajdują się w odległości 12,0 cm od siebie. Odstęp pomiędzy maksymami w odległości 2,0 m od źródeł drgań wynosi 18,0 cm. Znaleźć częstość drgań wibratorów, jeśli zmarszczki na wodzie przesuwają się z prędkością 25,0 cm/s.

9. Jedną ze szczelin urządzenia mającego dwie szczeliny pokryto cienką płytą z miki ( $n = 1,58$ ), na skutek czego siódmy prążek zostaje przesunięty na środek ekranu. Jaka jest grubość miki, jeśli  $\lambda = 550 \text{ nm}$ ?

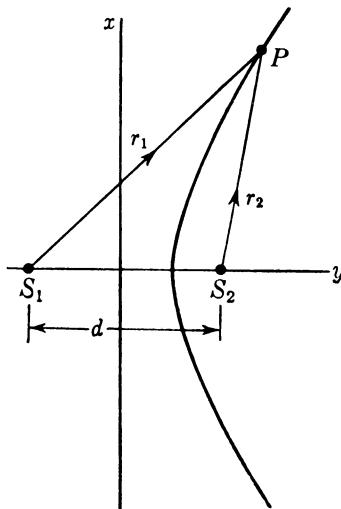
Odp.:  $6,4 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$ .

10. W urządzeniu z dwiema szczelinami jedna szczelina jest zasłonięta przez cienką płytę szklaną o współczynniku załamania 1,7. Na ekranie, w punkcie, w którym poprzednio znajdowało się centralne maksymum, po umieszczeniu płytek szklanych pojawia się prążek, który poprzednio miał numer piąty. Zakładając, że  $\lambda = 480 \text{ nm}$  oraz że płytki mają jednakową grubość  $t$ , znaleźć wartość  $t$ .

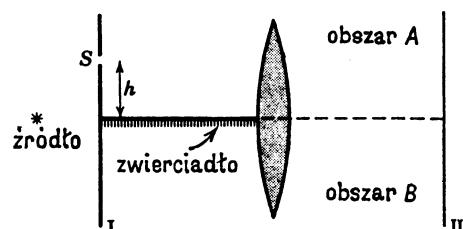
11. Urządzenie z dwiema szczelinami wytwarza prążki interferencyjne dla światła sodowego ( $\lambda = 589 \text{ nm}$ ), odległe od siebie o  $0,20^\circ$ . Jaka odległość kątowa między prążkami zaobserwowałibyśmy po zanurzeniu całego przyrządu w wodzie?

Odp.:  $0,15^\circ$ .

12. Dwa źródła punktowe na rys. 45-22 emittują fale spójne. Pokazać, że krzywe (takie jak przedstawione na rysunku), na których różnica faz dla promieni  $r_1$  i  $r_2$  jest stała, są hiperbolami. (Wskazówka: Stała różnica fazy jest wynikiem stałej różnicy długości między  $r_1$  i  $r_2$ .)



Rys. 45-22. Zadanie 12



Rys. 45-23. Zadanie 13

13. Źródło na rysunku 45-23 emisja monochromatyczne światło o długości fali  $\lambda$ . S jest bardzo wąską szczeliną w nieprzezroczystym ekranie I. W odległości  $h$  poniżej szczeliny umieszczone jest płaskie zwierciadło, na którego powierzchni leży główna oś soczewki przedstawionej na rysunku. Ekran II pokrywa się z płaszczyzną ogniskową soczewki. (a) Znaleźć warunek na maksima i minima prążków obserwanych na ekranie II, wyrażając go przez określony w zwykły sposób kąt  $\theta$ , długość fali  $\lambda$  oraz odległość  $h$ . (b) Czy prążki pojawiają się jedynie w obszarze A (powyżej osi głównej soczewki), jedynie w obszarze B (poniżej osi głównej soczewki) czy w obu obszarach A i B? Wyjaśnić to. (Wskazówka: Należy rozważyć obraz szczeliny S utworzony w zwierciadle).

Odp.: (a)  $2h \sin \theta = m\lambda$  (minimum);  $2h \sin \theta = (m + \frac{1}{2})\lambda$  (maksimum). (b) Tylko w obszarze A.

14. Zaprojektuj półilościowo doświadczenie typu doświadczenia Younga z interferencją na dwóch szczelinach (patrz rys. 45-1) dla fal dźwiękowych w powietrzu. Przymij, że częstotliwość wynosi 500 Hz, a prędkość dźwięku 330 m/s. Omów niektóre założenia projektu, takie jak rodzaj źródła, rozmiary ekranu B, szerokość, wysokość i odległość szczelin, odstęp między „prążkami”, rodzaj detektora prążków itp.

#### Paragraf 45-3

15. Światło o długości fali 600 nm pada prostopadle na dwie równolegle wąskie szczeliny, oddalone od siebie o 0,60 mm. Narysuj zależność natężenia prążków obserwowanych na odległym ekranie od kąta  $\theta$ , określonego jak na rys. 45-5, w zakresie wartości  $0 \leq \theta \leq 0,0040$  radianów.

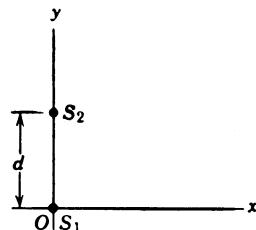
16. Pokazać, że jeśli  $\theta$  jest dostatecznie małe, by można przyjąć, że  $\sin \theta = \theta$ , to szerokość połówkowa  $\Delta\theta$  prążków obserwowanych podczas doświadczeń z dwiema szczelinami (patrz strzałka na rys. 45-9) dana jest wzorem

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{2d}.$$

17. Jedna ze szczelin ekranu z dwiema szczelinami jest szersza od drugiej, tak że amplituda światła padającego na środkową część ekranu z tej szczeliny jest dwa razy większa od amplitudy światła pochodzącego z drugiej szczeliny. Wyprowadzić wyrażenie na  $I_\theta$  w zależności od  $\theta$ , odpowiadające równaniom (45-11b) i (45-11c).

Odp.:  $I_\theta = \frac{1}{9} I_m \left[ 1 + 8 \cos^2 \left( \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right) \right]$ .

18.  $S_1$  i  $S_2$  na rys. 45-24 są efektywnymi punktowymi źródłami promieniowania, wzbudzanego przez ten sam oscylator. Dają one światło spójne i zgodne w fazie. Umieszczone w odległości 4,0 m od siebie, emisja fale elektromagnetyczne o jednakowej długości 1,0 m i jednakowej mocy. (a) Znaleźć położenie pierwszego (tj. najbliższego), drugiego i trzeciego maksimum otrzymywanej sygnału, w miarę jak detektor jest odsuwany wzdłuż osi  $Ox$ . (b) Czy natężenie promieniowania w najbliższym minimum jest równe zeru? Uzasadnić odpowiedź.



Rys. 45-24. Zadanie 18

#### Paragraf 45-4

19. Znaleźć sumę następujących wielkości (a) przy pomocy metody wektorowej i (b) analitycznie:

$$y_1 = 10 \sin \omega t,$$

$$y_2 = 8 \sin(\omega t + 30^\circ).$$

Odp.:  $y = 17 \sin(\omega t + 13^\circ)$ .

20. Dodać graficznie, posługując się metodą wektorową, następujące wielkości

$$y_1 = 10 \sin \omega t,$$

$$y_2 = 15 \sin(\omega t + 30^\circ),$$

$$y_3 = 5 \sin(\omega t - 45^\circ).$$

## 21. Rozważamy zagadnienie określenia wielkości sumy

$$A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) + \dots + A_n \sin(\omega t + \varphi_n)$$

na podstawie wykresu wskazowego\*.

- (a) Pokazać, że sumę tę można zawsze zapisać w postaci  $B \sin \omega t + C \cos \omega t$ . (b) Pokazać, że  $B^2 + C^2 \leq (A_1 + A_2 + \dots + A_n)^2$ . (c) Kiedy w przypadku (b) wystąpi znak równości?

Odp.: (c) Gdy wszystkie kąty fazowe  $\varphi_i$  są równe.

### Paragraf 45-5

22. Płaską płytę szklaną ( $n = 1,50$ ) chcemy pokryć przezroczystą substancją ( $n = 1,25$ ) tak, aby światło o długości fali 600 nm (w próżni) padające prostopadle do powierzchni płytka nie było wcale odbijane. W jaki sposób można to zrobić?

23. Cienka błonka o grubości  $4,0 \cdot 10^{-5}$  cm jest oświetlona białym światłem prostopadlym do jej powierzchni. Jej współczynnik załamania wynosi 1,5. Która spośród fal widma widzialnego będzie wzmacniona w promieniowaniu odbitym?

Odp.: 480 nm (niebieska).

24. Biale światło pada prostopadle na powierzchnię bańki mydlanej. Po odbiciu ma ono w widmie widzialnym jedno maksimum interferencyjne (dla  $\lambda = 600$  nm) i jedno minimum na fioletowym krańcu widma. Obliczyć grubość błonki tworzącej bańkę, jeśli  $n = 1,33$ .

25. Płaska fala światła monochromatycznego pada w kierunku prostopadlym na wszędzie jednakową, cienką błonkę oleju pokrywającą płytę szklaną. Długość fali padającego światła można zmieniać w sposób ciągły. Interferencje powodująca całkowite wygaszenie światła odbitego obserwujemy dla długości fal równych 500 nm i 700 nm i nie obserwujemy dla żadnych innych długości zawartych między nimi. Znaleźć grubość błonki, jeśli współczynnik załamania oleju wynosi 1,30, a szkła 1,50.

Odp.: 670 nm.

26. Płaska fala monochromatyczna pada w powietrzu, w kierunku prostopadlym, na cienką błonkę oleju pokrywającą szklaną płytę. Długość fali można zmieniać, w sposób ciągły. Interferencję powodującą całkowite wygaszenie obserwujemy dla długości fal równych 500 nm i 700 nm i nie obserwujemy dla żadnej innej długości fali zawartej między nimi. Współczynnik załamania szkła wynosi 1,50. Pokazać, że współczynnik załamania oleju musi być mniejszy od 1,50.

27. Gruba płytka szklana (o współczynniku załamania 1,50) pokryta jest cienką warstwą acetolu (współczynnik załamania 1,25). Na warstwę, prostopadle do jej powierzchni, padają płaskie fale o różnych długościach. Przy oglądaniu fali odbitej stwierdza się, że zupełne wygaszanie następuje przy interferencji fal o długości 600 nm, a maksymalne wzmacnienie dla fal o długości 700 nm. Znaleźć grubość warstwy acetenu.

Odp.: 840 nm.

28. Biale światło odbite przy padaniu prostopadlym od błonki mydlanej ma w widmie widzialnym maksimum interferencyjne dla 600 nm, a minimum dla 450 nm, bez żadnego minimum pomiędzy nimi. Jaka jest grubość tej błonki przy założeniu, że jest ona wszędzie jednakowa i że  $n = 1,33$ .

29. W przykładzie 5 założmy, że przy padaniu normalnym nie odbija się światło o długości 550 nm. Obliczyć o ile zmniejszy się w tych warunkach amplituda fali odbitej dla długości fal równych 450 nm i 650 nm.

Odp.: Natężenie zostanie zmniejszone o 88% dla 450 nm oraz o 94% dla 650 nm.

30. Zbiornikowiec wylał do wód Zatoki Meksykańskiej wielką ilość nafty ( $n = 1,2$ ) tworząc ogromną tłustą plamę na powierzchni wody ( $n = 1,3$ ). (a) Dla jakiej (jakich) długości fali w obszarze światła widzialnego odbicie będzie największe, jeśli patrząc prosto w dół z samolotu obserwuje się ten rejon plamy, w którym jej grubość wynosi 460 nm? (b) Dla jakich długości fal światła widzialnego będzie największa transmisja, jeśli obserwacji dokonuje się płynąc pod wodą dokładnie pod tym samym rejonem tłustej plamy?

31. Światło o długości fali 630 nm pada normalnie na błonkę mającą kształt cienkiego klinu, o współczynniku załamania 1,50. Na długości błonki pojawia się dziesięć jasnych i dziewięć ciemnych prążków. O ile zmienia się grubość błonki na tej długości?

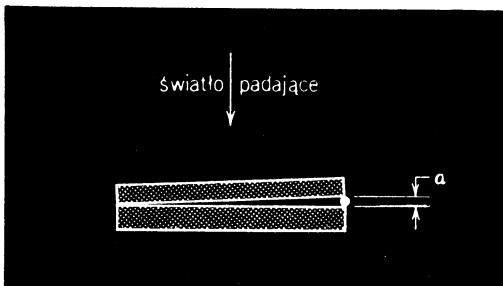
Odp.:  $1,9 \cdot 10^{-6}$  m (= 1,9 μm).

\* Patrz rys. 45-10 (przyp. tłum.).

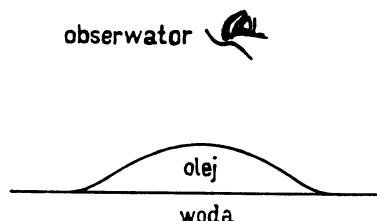
32. Szerokie źródło światła ( $\lambda = 680$  nm) oświetla prostopadle dwie płyty szklane o długości 12 cm, które stykają się na jednym końcu, a na drugim oddzielone są drucikiem o średnicy 0,048 mm (rys. 45-25). Ile jasnych prążków pojawi się na długości owych 12 cm?

33. Kropka oleju ( $n = 1,20$ ) pływająca po powierzchni wody ( $n = 1,33$ ) jest oglądana z góry w świetle odbitym (rys. 45-26). (a) Czy zewnętrzna (najcięższa) część kropli stanowi obszar jasny, czy ciemny? (b) Jaka jest, w przybliżeniu, grubość błonki oleju w miejscu, w którym, patrząc od zewnętrz kropli, widać trzeci niebieski obszar? (c) Dlaczego w miarę jak grubość oleju zwiększa się, kolory stopniowo znikają?

Odp.: (a) Jasny. (b) 594 nm.



Rys. 45-25. Zadanie 32



Rys. 45-26. Zadanie 33

34. Średnica dziesiątego jasnego pierścienia Newtona po wprowadzeniu cieczy między soczewkę a płytą szklaną zmienia się z 1,40 cm na 1,27 cm. Znaleźć współczynnik załamania tej cieczy.

35. W doświadczeniu z pierścieniami Newtona promień krzywizny  $R$  soczewki wynosi 5,0 m, a jej średnica 2,0 cm. (a) Ile pierścieni powstanie? (b) Ile pierścieni będzie dostrzegalnych, gdy urządzenie zostanie zanurzone w wodzie ( $n = 1,33$ )? Założyć, że  $\lambda = 589$  nm.

Odp.: (a) 34. (b) 46.

36. Skorzystaj z wyniku w przykładzie 6, by wykazać, że różnica promieni dla sąsiednich prążków w doświadczeniu z pierścieniami Newtona wynosi

$$\Delta r = r_{m+1} - r_m \cong \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda R}{m}}.$$

Założ, że  $m \gg 1$  i użyj wzoru na rozwinięcie dwumianu. Czy otrzymany wynik jest jakościowo zgodny z rys. 45-18?

37. Skorzystaj z wyniku w przykładzie 6 i w zadaniu 36, by wykazać, że dla  $m \gg 1$  pole powierzchni między sąsiednimi prążkami w doświadczeniu z pierścieniami Newtona jest równe

$$A_m = \pi \lambda R (= \text{const}).$$

Czy wynik ten jest jakościowo zgodny z rys. 45-18?

#### Paragraf 45-7

38. Jeśli zwierciadło  $Z_2$  w interferometrze Michelsona przesuniemy o 0,233 mm, natyczmy 792 prążki. Jaka jest długość fali użytego światła?

39. W jednym z ramion interferometru Michelsona umieszczono cienką błonkę o  $n = 1,40$  dla światła o długości fali 589 nm. Jaka jest grubość błonki, skoro nastąpiło przesunięcie o 7,0 prążków?

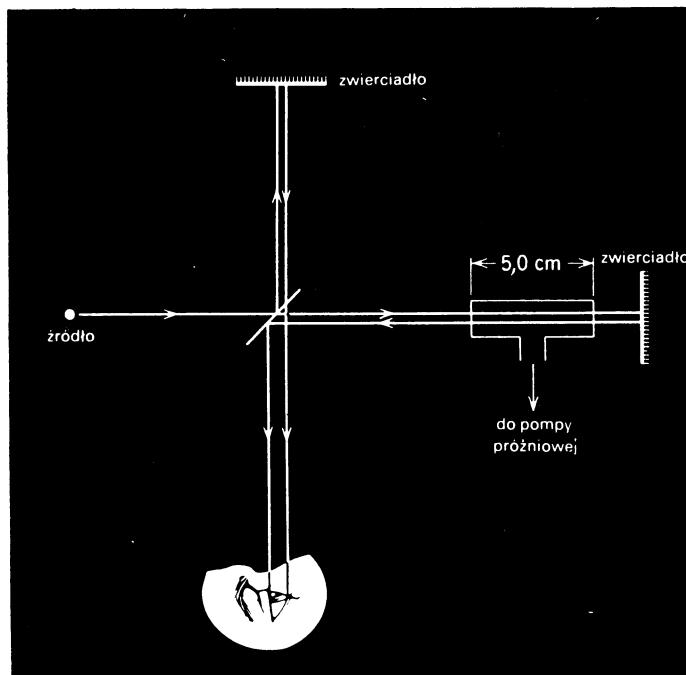
Odp.: 5200 nm.

40. Jako źródła światła dla interferometru Michelsona użyto lampy sodowej. Żółte światło sodowe składa się z dwóch długości fal, 589,0 nm i 589,6 nm. Przy obracaniu zwierciadła  $Z_2$  (rysunek 45-20) obserwuje się, że obraz interferencyjny zanika i pojawia się okresowo. (a) Wyjaśnić to zjawisko. (b) Obliczyć zmianę różnicy dróg pomiędzy dwoma kolejnymi pojawieniami się tego samego obrazu interferencyjnego.

41. Na drodze promieni w jednym z ramion interferometru Michelsona umieszczono gazoszczelną komorę o długości 5,0 cm, zaopatrzoną w szklane okienko (patrz rys. 45-27). W doświadczeniu używano

światła o długości fali  $\lambda = 500,0 \text{ nm}$ . Posługując się pompą próżniową powoli odpompowujemy powietrze z komory. W trakcie usuwania powietrza przez pole widzenia przesuwa się 60 prążków. Na podstawie tych danych znajdź współczynnik załamania powietrza pod ciśnieniem atmosferycznym.

Odp.: 1,00023.



Rys. 45-27. Zadanie 41

42. Znajdź wyrażenie na natężenie obserwowane w interferometrze Michelsona (rys. 45-20) w funkcji położenia ruchomego zwierciadła. Położenie zwierciadła odmierzaj od punktu, w którym  $d_1 = d_2$ .

# 46. Dyfrakcja

## 46-1. Wstęp

Dyfrakcja\* (rys. 44-3) jest to zjawisko polegające na uginaniu się promieni świetlnych przechodzących w pobliżu przeszkody, takiej jak np. brzeg szczeliny. Dyfrakcję światła możemy zaobserwować patrząc przez szparkę między dwoma palcami na odległe źródła światła, np. uliczny neon lub na światło uliczne przez rozpostarty parasol. Zwykle efekty dyfrakcyjne są małe i trzeba ich uważnie szukać. Poza tym większość źródeł światła to przedmioty rozciągłe, wobec czego obraz dyfrakcyjny wytworzony przez jeden punkt źródła nakłada się na obrazy wytworzone przez inne punkty. Wreszcie, zwykle źródła światła nie są monochromatyczne. Obrazy dla różnych długości fali nakładają się na siebie i znów zjawisko jest mniej widoczne.

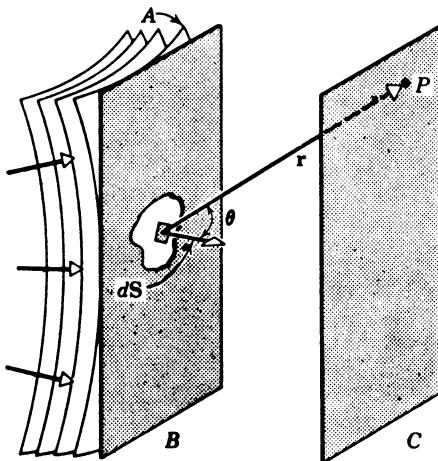
Zjawisko dyfrakcji odkrył Francesco Maria Grimaldi (1618–1663). Zjawisko to było znane zarówno Huygensowi jak i Newtonowi. Newton nie widział w nim jednak żadnego uzasadnienia dla falowej teorii światła. Huygens, choć w tej teorię wierzył, nie wierzył w dyfrakcję! Sądził on, że elementarne fale kuliste ujawniają się tylko w punkcie ich styczności do wspólnej obwiedni, zatem zaprzeczał, jakoby dyfrakcja była możliwa (patrz paragraf 43-3). Mówił on: „Widzimy zatem dlaczego światło... porusza się tylko po liniach prostych w taki sposób, że nie oświetla żadnego przedmiotu, o ile droga od źródła do przedmiotu wzduż takiej linii nie jest wolna”.

Jean Augustin Fresnel (1788–1827) poprawnie zastosował zasadę Huygensa celem wyjaśnienia dyfrakcji. W jego czasach wierzono jeszcze, że fale świetlne są falami mechanicznymi w przenikającym wszystko eterze. Widzieliśmy (paragraf 41-8) w jaki sposób Maxwell pokazał, że fale świetlne są falami elektromagnetycznymi, a nie mechanicznymi. Nasz współczesny pogląd na fale świetlne dostatecznie uksztalتوwał Einstein odrzucając konieczność postulowania istnienia eteru (patrz paragraf 42-4).

Rysunek 46-1 pokazuje ogólnie na czym polega dyfrakcja. Powierzchnia *A* jest czołem fali padającej na *B* — nieprzezroczysty ekran, w którym wycięty jest otwór dowolnego kształtu; światło, które przechodzi przez ten otwór, pada z kolei na ekran *C*. Rozkład

\* Nazywana również *ugięciem* (przyp. tłum.).

natężenia światła na ekranie  $C$  można obliczyć dzieląc czoło fali na elementarne powierzchnie  $dS$ , z których każda staje się źródłem rozchodzącej się fali Huygensa. Natężenie światła w dowolnym punkcie  $P$  znajdujemy przez nałożenie na siebie zaburzeń falowych (to jest wektorów  $E$ ) spowodowanych przez fale docierające do  $P$  ze wszystkich tych elementarnych źródeł.

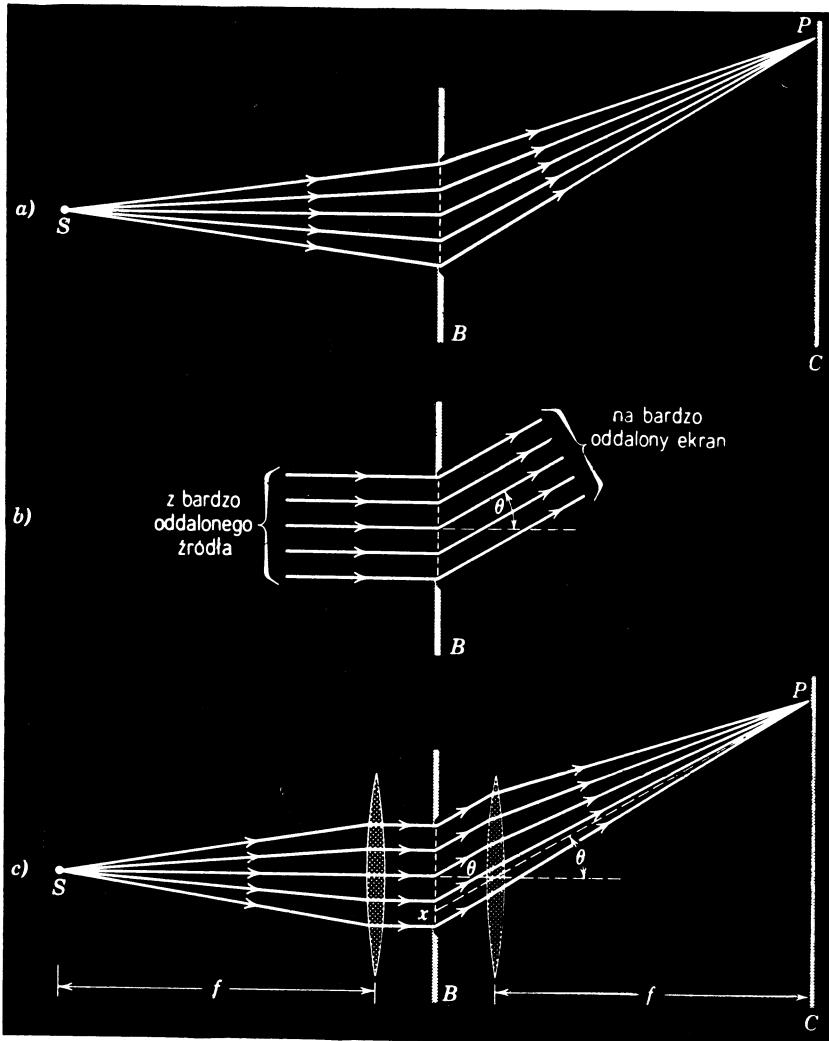


Rys. 46-1. Na otworze w ekranie  $B$  następuje dyfrakcja światła, które oświetla ekran  $C$ . Natężenie w punkcie  $P$  znajdujemy przez podział czoła fali w  $B$  na elementarne źródła promieniujące  $dS$  i dodanie ich efektów w  $P$

Zaburzenia falowe docierające do  $P$  mają różne amplitudy i fazy, ponieważ (a) elementarne źródła znajdują się w różnych odległościach od  $P$ , (b) światło opuszcza te źródła pod różnymi kątami do normalnej do czoła fali (patrz paragraf 43-2) oraz (c) niektóre źródła są zasłonięte przez ekran  $B$ , a inne nie. Obliczenia dyfrakcyjne — proste w teorii — mogą się stać trudne w praktyce. Obliczenia trzeba powtarzać w każdym punkcie na ekranie  $C$ , w którym chcemy znać natężenie światła. Dokładnie według tego programu postępowaliśmy przy obliczaniu rozkładu natążeń w doświadczeniu z dwiema szczelinami w paragrafie 45-3. Obliczenia były wówczas łatwe, ponieważ mieliśmy tam tylko dwa źródła elementarne, a mianowicie dwie wąskie szczeliny.

Rysunek 46-2a pokazuje ogólny przypadek dyfrakcji Fresnela, tzn. takiej, gdy źródło światła i (lub) ekran, na którym pojawia się obraz dyfrakcyjny, znajdują się w skończonej odległości od otworu, na którym zachodzi ugięcie. Czoła fal, które padają na otwór uginający i fal, które po przejściu przez ten otwór oświetlają jakiś punkt  $P$  na ekranie, nie są płaskie. Odpowiednie promienie nie są równoległe.

Sytuacja upraszcza się, gdy źródło  $S$  i ekran  $C$  odsuwamy na duże odległości od otworu uginającego, jak na rys. 46-2b. Ten przypadek graniczny zwany jest dyfrakcją Fraunhofera. Czoła fal padających na otwór uginający z odległego źródła są płaszczyznami, a odpowiadające im promienie są do siebie równoległe. Podobnie czoła fal padających na jakiś punkt  $P$  na odległym ekranie  $C$  są płaskie, odpowiednie zaś promienie — równoległe. Warunki dla wystąpienia dyfrakcji Fraunhofera można również zrealizować w laboratorium za pomocą układu dwóch soczewek skupiających, jak na rys. 46-2c. Pierwsza z nich zamienia falę rozbieżną wychodzącą ze źródła na falę płaską. Druga soczewka sprawia, że fale płaskie opuszczające otwór dyfrakcyjny skupią się w punkcie  $P$ . Wszystkie promienie, które oświetlają  $P$ , będą opuszczać otwór dyfrakcyjny równolegle do linii przerywanej  $Px$  narysowanej z punktu  $P$  przez środek tej drugiej (ciemniejszej) soczewki.



Rys. 46-2. (a) Dyfrakcja Fresnela. (b) Źródło  $S$  i ekran  $C$  są odsunięte na dużą odległość, wobec czego otrzymujemy dyfrakcję Fraunhofera. (c) Dyfrakcja Fraunhofera zrealizowana w laboratorium za pomocą soczewek, przy czym źródło  $S$  i ekran  $C$  znajdują się na swoich początkowo zajmowanych miejscach

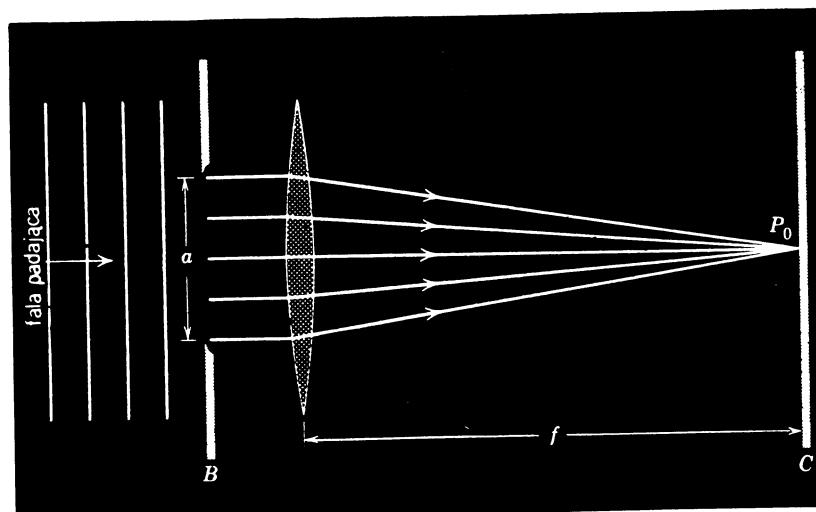
Warunki do powstania dyfrakcji Fraunhofera były z założenia spełnione w doświadczeniu Younga z dwiema szczelinami, opisanym w paragrafie 45-1 (patrz rys. 45-5).

Choć dyfrakcja Fraunhofera jest tylko granicznym przypadkiem ogólniejszej dyfrakcji Fresnela, stanowi ona ważny przypadek i jest łatwiejsza do matematycznego opisu. W tej książce zajmiemy się wyłącznie dyfrakcją Fraunhofera.

## 46-2. Pojedyncza szczelina

Rysunek 46-3 przedstawia falę płaską padającą w kierunku prostopadłym na długą, wąską szczelinę, o szerokości  $a$ . Skupmy uwagę na środkowym punkcie  $P_0$  ekranu  $C$ . Równolegle promienie biegające od szczeliny do tego punktu wszystkie przebywają te

same drogi optyczne (choćż różne geometrycznie), jak widzieliśmy w paragrafie 44-5. Ponieważ w płaszczyźnie szczeliny wszystkie one są w jednakowej fazie, to będą też w jednakowej fazie po dojściu do  $P_0$  i w środkowym punkcie obrazu dyfrakcyjnego, który powstanie na ekranie  $C$ , będzie maksymalne natężenie.



Rys. 46-3. Warunki dla wystąpienia środkowego maksimum w obrazie dyfrakcyjnym. Szczeńina rozciąga się na pewną odległość powyżej i poniżej rysunku, przy czym odległość ta jest znacznie większa od szerokości szczeniny  $a$

Rozważmy teraz inny punkt na ekranie. Promienie światła, które padają na punkt  $P_1$  (rys. 46-4), wybierają ze szczeniny pod kątem  $\theta$ . (Zauważmy, że promień narysowany przerywaną linią,  $xP_1$ , przechodzi przez środek soczewki, nie jest więc odchylony; ten właśnie promień określa kąt  $\theta$ .) Promień  $r_1$  ma początek u góry szczeniny, a promień  $r_2$  — w jej środku. Jeśli kąt  $\theta$  wybierzemy tak, by odległość  $bb'$  na rysunku była równa połowie długości fali, to promienie  $r_1$  i  $r_2$  będą miały przeciwnie fazy i nie wywołają żadnego efektu w  $P_1$ <sup>\*</sup>. Podobnie każdy promień wychodzący z górnej połowy szczeniny będzie się wygaszał z odpowiednim promieniem z dolnej połowy, wychodzącym z punktu leżącego o  $\frac{1}{2}a$  poniżej pierwszego promienia. Punkt  $P_1$ , pierwsze minimum w obrazie dyfrakcyjnym, będzie miał natężenie zerowe (por. rys. 44-3).

Warunek pokazany na rys. 46-4 jest następujący

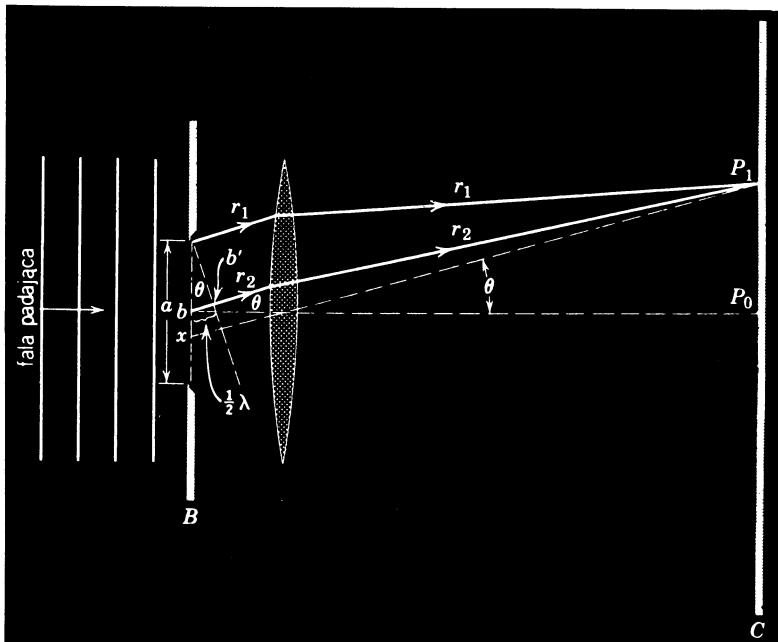
$$\frac{1}{2}a \sin \theta = \frac{1}{2}\lambda,$$

czyli

$$a \sin \theta = \lambda. \quad (46-1)$$

Jak stwierdziliśmy poprzednio (patrz rys. 44-1), środkowe maksimum staje się szersze, w miarę jak szczenina staje się węższa. Gdyby szerokość szczeniny była równa jednej długości fali ( $a = \lambda$ ), wtedy pierwsze minimum pojawiłoby się dla  $\theta = 90^\circ$  ( $\sin \theta = 1$  w równ.

\* Każda różnica faz między promieniami  $r_1$  i  $r_2$ , jaka istnieje w płaszczyźnie zaznaczonej na rys. 46-4 pochyloną linią przerywaną przechodzącą przez punkt  $b'$ , istnieje również w  $P$ , gdyż soczewka nie ma na nią wpływu (patrz paragraf (44-5).



Rys. 46-4. Warunki na wystąpienie pierwszego minimum w obrazie dyfrakcyjnym

(46-1)), czyli środkowe maksimum wypełniałoby całą półkulę przednią. Podobny warunek, jak zakładaliśmy, musiał być spełniony w omawianym (w paragrafie 45-1) doświadczeniu Younga z dwiema szczelinami.

Na rysunku 46-5 szczelina jest podzielona na cztery równe części, przy czym promienie wychodzą ze szczytu każdej z tych części. Wybierzmy kąt  $\theta$  tak, żeby odległość  $bb'$  była równa połowie długości fali. Promienie  $r_1$  i  $r_2$  będą się zatem wygaszać w punkcie  $P_2$ . Promienie  $r_3$  i  $r_4$  także będą się różnić w fazie o pół długości fali i wygaszą się również. Rozważmy cztery inne promienie wychodzące ze szczeliny w pewnej ustalonej odległości odpowiednio poniżej czterech promieni  $r_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Dwa promienie, które powstaną poniżej  $r_1$  i  $r_2$ , wygaszą się całkowicie, podobnie jak dwa promienie poniżej  $r_3$  i  $r_4$ . Podobne rozważania możemy powtórzyć dla całej szczeliny i przekonamy się, że żadne światło nie pada na punkt  $P_2$ ; znaleźliśmy w ten sposób drugi punkt o natężeniu zerowym.

Warunek przedstawiony powyżej (patrz rys. 46-5) wymaga, by

$$\frac{1}{4}a \sin \theta = \frac{1}{2}\lambda,$$

czyli

$$a \sin \theta = 2\lambda.$$

Wzór ten można uogólnić tak, aby otrzymać ogólne wyrażenie dla minimów obrazu dyfrakcyjnego na ekranie  $C$ :

$$a \sin \theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \text{ (minima).} \quad (46-2)$$

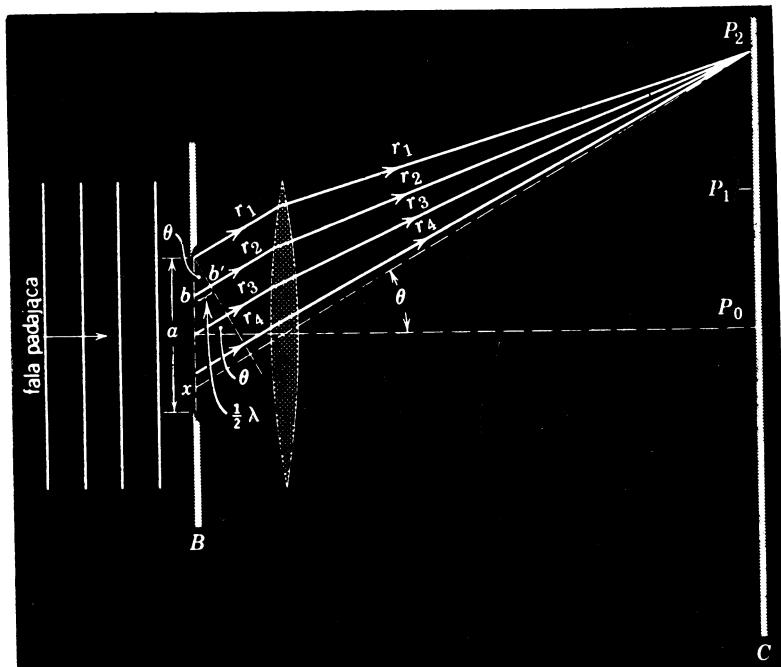
Mniej więcej w połowie odległości między każdą parą sąsiednich minimów występują oczywiście maksima natężenia. Czytelnik powinien zastanowić się, jakie uproszczenia wynikają z rozważania dyfrakcji Fraunhofera zamiast dyfrakcji Fresnela (rys. 46-2c zamiast 46-2a).

**Przykład 1.** Szczelina o szerokości  $a$  oświetlona jest światłem białym. Przy jakiej wartości  $a$  pierwsze minimum dla światła czerwonego powstanie pod kątem  $\theta = 30^\circ$  ( $\lambda = 650 \text{ nm}$ ).

Dla pierwszego minimum podstawiamy w równaniu (46-2)  $m = 1$ . Rozwiążując następnie to równanie względem  $a$  otrzymujemy

$$a = \frac{m\lambda}{\sin \theta} = \frac{1 \cdot 650 \text{ nm}}{\sin 30^\circ} = 1300 \text{ nm}.$$

Zauważmy, że szerokość szczeliny w tym przypadku musi być równa podwojonej długości fal.



Rys. 46-5. Warunki na wystąpienie drugiego minimum w obrazie dyfrakcyjnym

**Przykład 2.** Jaka jest w przykładzie 1 długość fali  $\lambda'$  światła, którego pierwsze maksimum dyfrakcyjne (nie licząc maksimum centralnego) wypada dla kąta  $\theta = 30^\circ$ , pokrywając się w ten sposób z pierwszym minimum dla światła czerwonego?

Maksimum to wypada mniej więcej w połowie odległości między pierwszym i drugim minimum. Można je znaleźć bez popełnienia zbyt wielkiego błędu podstawiając w równaniu (46-2)  $m = 1,5$ , czyli

$$a \sin \theta = 1,5 \lambda'.$$

Z przykładu 1 mamy jednak

$$a \sin \theta = \lambda.$$

Z dwóch powyższych równań otrzymujemy

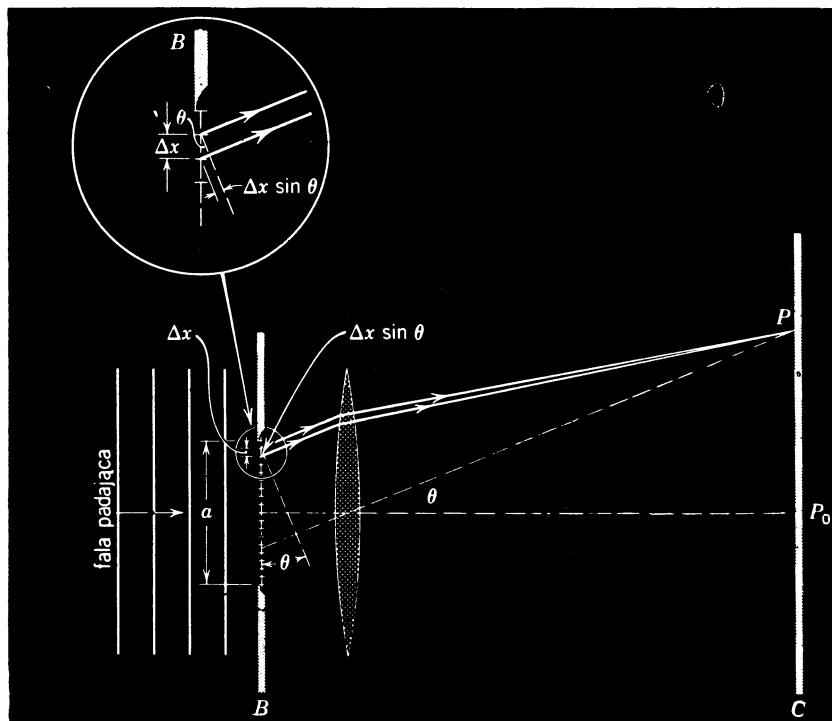
$$\lambda' = \frac{\lambda}{1,5} = \frac{650 \text{ nm}}{1,5} = 430 \text{ nm}.$$

Światło o tej długości fali jest fioletowe. Drugie maksimum dla światła o długości fali 430 nm zawsze będzie pokrywać się z pierwszym minimum dla światła o długości fali 650 nm, bez względu na szerokość szczeliny. Jeśli szczelina jest względnie wąska, kąt  $\theta$ , przy którym nastąpi to nałożenie się, będzie stosunkowo duży.

### 46-3. Pojedyncza szczelina. Rozważania jakościowe

W paragrafie 46-2 określiliśmy położenia maksimów i minimów w obrazie dyfrakcyjnym wytwarzanym przez pojedynczą szczelinę. Obecnie chcemy znaleźć wyrażenie na rozkład natężenia w całym obrazie dyfrakcyjnym jako funkcję kąta  $\theta$ . W bieżącym paragrafie zrobimy to w sposób jakościowy, a w następnym — ilościowy.

Rysunek 46-6 przedstawia szczelinę o szerokości  $a$  podzieloną na  $N$  równoległych pasków o szerokości  $\Delta x$ . Każdy pasek stanowi źródło fal kulistych Huygensa i wytwarza określone zaburzenie falowe w punkcie  $P$ , którego położenie na ekranie można opisać za pomocą kąta  $\theta$ .



Rys. 46-6. Szczelina o szerokości  $a$  podzielona jest na  $N$  pasków o szerokości  $\Delta x$ . Wycinek rysunku widoczny przez lupę przedstawia dokładniej warunki na drugim pasku. W granicy szczelina podzielona jest na nieskończoną liczbę pasków (tj.  $N \rightarrow \infty$ ) o szerokości infinitesymalnej  $dx$ . Dla przejrzystości rysunku przyjęliśmy  $N = 18$

Jeśli paski są dostatecznie wąskie — co będziemy zakładać — wszystkie punkty na danym pasku mają w zasadzie te same drogi optyczne do punktu  $P$ , a zatem całe światło z danego paska po dotarciu do  $P$  będzie miało tę samą fazę. Amplitudy  $\Delta E_0$  zaburzeń falowych w punkcie  $P$  pochodzących z różnych pasków można przyjąć za jednakowe, jeśli  $\theta$  na rys. 46-6 nie jest zbyt wielkie.

Ograniczamy nasze rozważania do punktów, które leżą dostatecznie blisko płaszczyzny z rys. 46-6, lub też na samej tej płaszczyźnie. Można pokazać, że postępowanie to jest słusne dla szczeliny, której długość jest znacznie większa od jej szerokości  $a$ . To samo założenie zrobiliśmy milcząco już poprzednio w tym rozdziale oraz w rozdziale 45; patrz na przykład rys. 45-5 i 45-3.

Zaburzenia falowe pochodzące od sąsiednich pasków mają w punkcie  $P$  stałe różnice faz  $\Delta\varphi$  dane wzorem

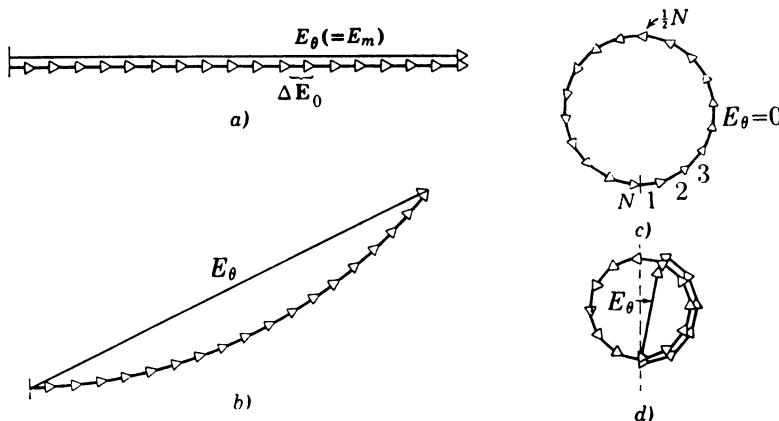
$$\frac{\text{różnica fazy}}{2\pi} = \frac{\text{różnica drogi}}{\lambda},$$

czyli

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x \sin \theta, \quad (46-3)$$

gdzie  $\Delta x \sin \theta$  jest, jak pokazuje wycinek rysunku, różnicą dróg dla promieni pochodzących ze szczytów sąsiednich pasków. Zatem w punkcie  $P$  dodaje się  $N$  wektorów o tej samej amplitudzie  $\Delta E_0$ , tej samej częstotliwości i tej samej różnicy faz  $\Delta\varphi$  między sąsiednimi składnikami tej sumy, tak że tworzą one pewne zaburzenie wypadkowe. Pytamy, jaka jest amplituda  $E_\theta$  wypadkowego zaburzenia falowego dla różnych wartości  $\Delta\varphi$  (tj. dla różnych punktów  $P$  na ekranie odpowiadających różnym wartośćom kąta  $\theta$  — patrz równ. (46-3)). Odpowiedź znajdziemy przedstawiając poszczególne zaburzenia za pomocą odpowiednich strzałek fazowych i obliczając wypadkową amplitudę tak jak to opisano w paragrafie 45-4.

W środku obrazu dyfrakcyjnego  $\theta$  równa się zeru i przesunięcie fazy między sąsiednimi paskami (patrz równ. (46-3)) jest także równe零. Jak pokazano na rysunku 46-7a, strzałki układają się w tym przypadku wzdłuż linii prostej i amplituda wypadkowa przyjmuje wartość maksymalną  $E_m$ . Odpowiada to środkowi centralnego maksimum.



Rys. 46-7. Warunki dla (a) maksimum środkowego, (b) kierunku nieco odmiennego od kierunku maksimum środkowego, (c) pierwszego minimum oraz (d) pierwszego maksimum poza maksymum środkowym dla dyfrakcji na pojedynczej szczelinie. Rysunek ten odpowiada  $N = 18$  na rys. 46-6

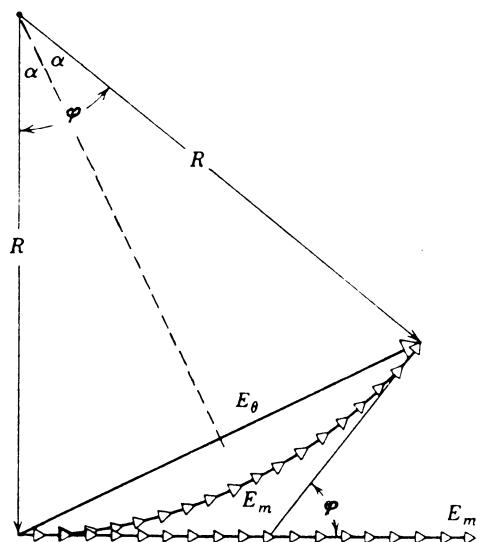
Gdy przechodzimy do wartości  $\theta$  różnych od zera,  $\Delta\varphi$  przybiera określone wartości, różne od zera (patrz znów rys. 46-3) i strzałki układają się tak, jak pokazaliśmy na rys. 46-7b. Amplituda wypadkowa  $E_\theta$  jest teraz mniejsza niż poprzednio. Zauważmy, że długość „łuku” utworzonego z małych strzałek na obu rysunkach jest taka sama i taka sama jest również dla wszystkich rysunków tej serii. Gdy  $\theta$  rośnie, dochodzimy do takiej sytuacji (rys. 46-7c), że krzywa utworzona ze strzałek zamknięta się. Odpowiada to  $E_\theta = 0$ , to jest pierwszemu minimum. W tym przypadku promień wychodzący ze szczytu szczeliny (1 na rys. 46-7c) jest przesunięty w fazie o  $180^\circ$  w porównaniu z promieniem wychodzą-

cym ze środka szczeliny ( $\frac{1}{2}N$  na rys. 46-7c). Te zależności fazowe są zgodne z rys. 46-4, który także przedstawia pierwsze minimum.

Gdy  $\theta$  dalej rośnie, zmiana fazy ciągle wzrasta i łańcuch wektorów zwija się tworząc kąt większy niż  $360^\circ$ . Pokazane jest to na rys. 46-7d, który odpowiada pierwszemu maksimum poza maksimum środkowym. Maksimum to jest znacznie mniejsze od maksimum środkowego. Robiąc to porównanie pamiętajmy, że strzałki oznaczone na rys. 46-7 przez  $E_\theta$  odpowiadają *amplitudom* zaburzenia falowego, a nie *natężeniom*. Abytrzymać odpowiednie natężenia, amplitudy trzeba podnieść do kwadratu (patrz równ. (45-7)).

#### 46-4. Pojedyncza szczelina. Rozważania ilościowe

„Łuk” z małych strzałek na rys. 46-8 utworzony jest ze strzałek fazowych przedstawiających amplitudy i fazy zaburzeń falowych, jakie dochodzą do dowolnego punktu  $P$  na ekranie (rys. 46-6) odpowiadającego dowolnemu kątowi  $\theta$ . Wypadkowa amplituda w punkcie  $P$  jest równa  $E_\theta$ . Jeśli szczelinę z rys. 46-6 podzielimy na nieskończoną ilość nieskończenie małych pasków o szerokości  $dx$ , to łuk strzałek z rys. 46-8 będzie się zbliżał do łuku koła, którego promień  $R$  pokazany jest na tym rysunku. Długość łuku wynosi  $E_m$ , czyli równa jest amplitudzie w środku obrazu dyfrakcyjnego, gdyż w środku tego obrazu wszystkie zaburzenia falowe są w zgodnej fazie i „łuk” ten staje się linią prostą, jak na rys. 46-7a.



Rys. 46-8. Konstrukcja, która służy do obliczenia natężenia w przypadku dyfrakcji na jednej szczelinie. Sytuacja odpowiadającej tej, którą przedstawiliśmy na rys. 46-7b

Kąt  $\varphi$  w dolnej części rys. 46-8 przedstawia różnicę fazy między nieskończonie małymi wektorami leżącymi na lewym i prawym końcu łuku  $E_m$ . Znaczy to, że  $\varphi$  jest różnicą fazy między promieniami wychodzącymi z góry i z dołu szczeliny na rys. 46-6. Z rozważań geometrycznych widzimy, że  $\varphi$  jest także kątem między dwoma promieniami oznaczonymi literą  $R$  na rys. 46-8. Jak widać z tego rysunku, możemy napisać

$$E_\theta = 2R \sin \frac{1}{2}\varphi.$$

W mierze łukowej kąt  $\varphi$ , jak widać na rysunku, wynosi  $\varphi = E_m/R$ . Stąd otrzymujemy

$$E_\theta = \frac{E_m}{\frac{1}{2}\varphi} \sin \frac{1}{2}\varphi,$$

czyli

$$E_\theta = E_m \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad (46-4)$$

gdzie

$$\alpha = \frac{1}{2}\varphi. \quad (46-5)$$

Ponieważ  $\varphi$  jest różnicą faz między promieniami wychodzącymi z dwu krańców szczeliny, a różnica dróg dla tych promieni wynosi  $a \sin \theta$ , więc z rys. 46-6 otrzymujemy

$$\frac{\text{różnica faz}}{2\pi} = \frac{\text{różnica dróg}}{\lambda},$$

czyli

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta.$$

Porównując to z równaniem (46-5) otrzymujemy

$$\alpha = \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta. \quad (46-6)$$

Równanie (46-4) łącznie z równaniem (46-6) daje wielkość amplitudy zaburzenia falowego dla obrazu dyfrakcyjnego na pojedynczej szczelinie, dla pewnego kąta  $\theta$ . Natężenie obrazu  $I_\theta$  jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy, czyli

$$I_\theta = I_m \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2. \quad (46-7)$$

Dla wygody zbierzmy razem, zmieniając nieco oznaczenia, wyrażenia na amplitudę i natężenie dyfrakcji na pojedynczej szczelinie

$$[\text{wzór (46-4)}] \quad E_\theta = E_m \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad (46-8a)$$

$$[\text{wzór (46-7)}] \quad I_\theta = I_m \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{dyfrakcja na pojedynczej szczelinie.} \quad (46-8b)$$

$$[\text{wzór (46-6)}] \quad \alpha (= \frac{1}{2}\varphi) = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad (46-8c)$$

Na rysunku 46-9 pokazano krzywe  $I_\theta$  dla różnych wielkości stosunku  $a/\lambda$ . Zauważmy, że obraz staje się coraz węższy w miarę jak wzrasta  $a/\lambda$ ; porównać ten rysunek z rys. 44-1 i 44-3.

Wyrażenie 46-8b przyjmuje wartość minimalną dla

$$\alpha = m\pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (46-9)$$

Wykorzystując równanie (46-8c) dostajemy

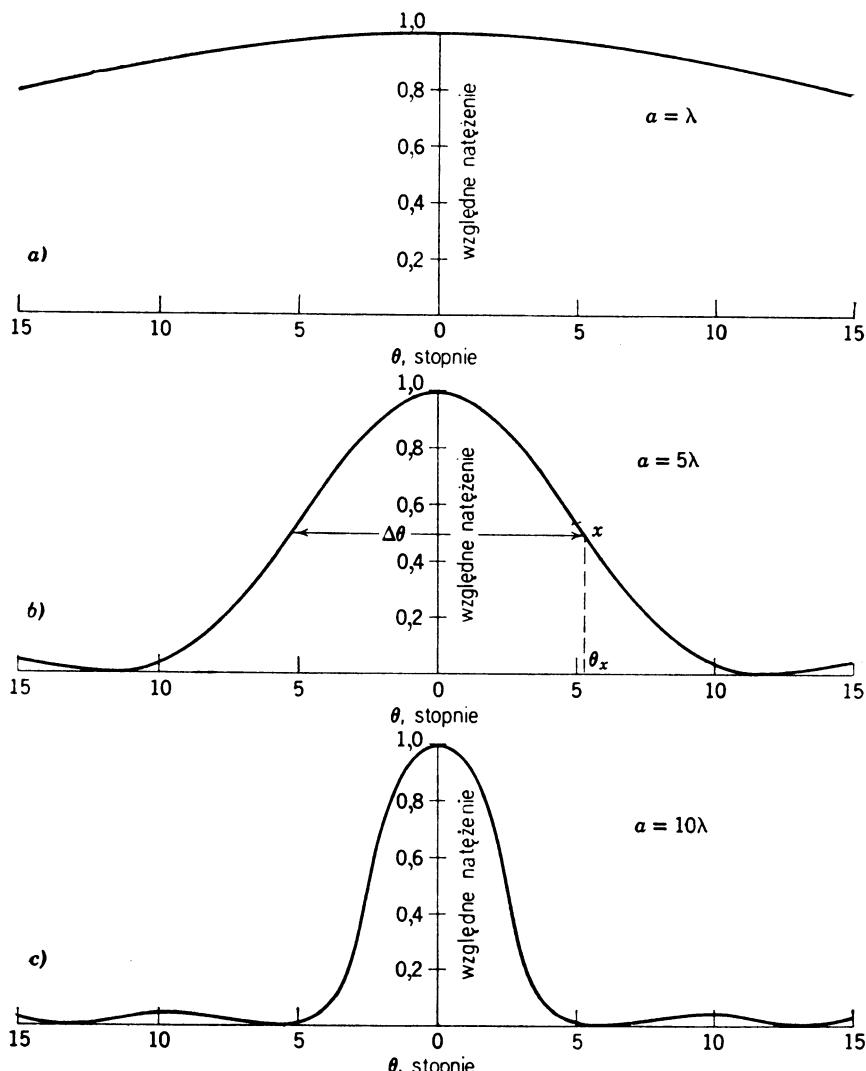
$$a \sin \theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \text{ (minimum),}$$

a więc wynik otrzymany w poprzednim paragrafie (równ. (46-2)). Jednakże wówczas otrzymaliśmy wyłącznie ten wynik, bez ilościowej informacji o natężeniu obrazu dyfrakcyjnego w miejscach, gdzie różni się on od zera. Obecnie (równ. (46-8)) otrzymaliśmy pełną informację o natężeniu.

**Przykład 3. Natężenia dalszych maksimów dyfrakcyjnych.** Obliczyć w przybliżeniu względne natężenie maksimów dyfrakcyjnych Fraunhofera na pojedynczej szczelinie.

Dalsze maksima leżą w przybliżeniu pośrodku między sąsiednimi minimami, a więc w punktach (patrz równ. (46-9)), dla których

$$\alpha \cong (m + \frac{1}{2})\pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$



Rys. 46-9. Względne natężenie dyfrakcji na pojedynczej szczelinie dla trzech wartości stosunku  $a/\lambda$ . Strzałka na rysunku (b) pokazuje połówkową szerokość  $\Delta\theta$  średkowego maksimum

Podstawiając to do równania (46-8b) dostajemy

$$I_\theta = I_m \left[ \frac{\sin(m + \frac{1}{2})\pi}{(m + \frac{1}{2})\pi} \right]^2,$$

co sprowadza się do

$$\frac{I_\theta}{I_m} = \frac{1}{(m + \frac{1}{2})^2 \pi^2}.$$

Stąd otrzymujemy, że dla  $m = 1, 2, 3, \dots$  stosunek  $I_\theta/I_m = 0,045, 0,016, 0,0083$  itd. A więc natężenia kolejnych maksymów bardzo szybko maleją.

**Przykład 4. Szerokość środkowego maksimum dyfrakcyjnego.** Obliczyć połówkową szerokość  $\Delta\theta$  środkowego maksimum dyfrakcyjnego dla dyfrakcji Fraunhofera na pojedynczej szczeblinie (patrz rys. 46-9b). Szerokość połówkowa jest równa kątowi między takimi dwoma punktami obrazu, w którym natężenie równe się połowie natężenia w środku obrazu.

Punkt  $x$  na rys. 46-9b wybrano tak, aby  $I_\theta = \frac{1}{2} I_m$ , czyli z równania (46-8b) otrzymujemy

$$\frac{1}{2} = \left[ \frac{\sin \alpha_x}{\alpha_x} \right]^2.$$

Równania tego nie można rozwiązać analitycznie, aby obliczyć  $\alpha_x$ . Można to jednak zrobić graficznie, z dowolną dokładnością, przez narysowanie krzywej  $y = \frac{1}{2}$ . Współrzędna przecięcia tych krzywych da szukaną wielkość (patrz zadanie 11). Jednakże, gdy chcemy szybko otrzymać wartość przybliżoną, często stosujemy metodę prób i błędów.

Wiadomo, że  $\alpha$  dla pierwszego minimum wynosi  $\pi$ ; przypuśćmy, że  $\alpha_x$  wynosi  $\frac{1}{2}\pi$  ( $= 90^\circ = 1,57$  rad). Podstawiając to do równania (46-8b) otrzymujemy

$$\frac{I_\theta}{I_m} = \left[ \frac{\sin(\frac{1}{2}\pi)}{\frac{1}{2}\pi} \right]^2 = 0,4.$$

Ponieważ ten stosunek natężeń jest mniejszy od 0,05, więc  $\alpha_x$  musi być mniejsze od  $90^\circ$ . Po kilku dalszych próbach stwierdzamy dość łatwo, że

$$\alpha_x = 1,40 \text{ rad} = 80^\circ$$

daje wielkość tego stosunku bliską prawidłowej wielkości 0,5.

Zastosujmy teraz równanie (46-8c) do znalezienia odpowiedniego kąta  $\theta$ :

$$\alpha_x = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta_x = 1,40,$$

skąd, ze względu na to, że na rys. 46-9b  $a/\lambda = 5$ ,

$$\sin \theta_x = \frac{1,40\lambda}{\pi a} = \frac{1,40}{5\pi} = 0,0892.$$

Szerokość połówkowa  $\Delta\theta$  środkowego maksimum (patrz rys. 46-9b) jest dana równaniem

$$\Delta\theta = 2\theta_x = 2\arcsin 0,0892 = 2 \cdot 5,1^\circ = 10,2^\circ,$$

co zgadza się z tym rysunkiem.

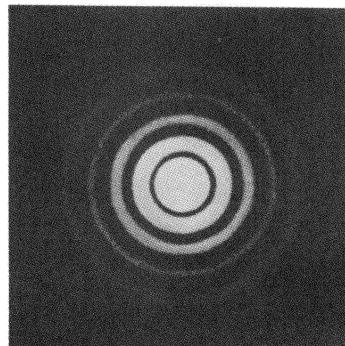
## 46-5. Dyfrakcja na okrągłym otworze

Zjawisko dyfrakcji występuje wtedy, gdy czoło fali jest częściowo zatrzymywane przez nieprzeczysty obiekt, taki jak metalowa tarcza lub nieprzeczysty ekran z otworem. W tym paragrafie zajmiemy się dyfrakcją na okrągłym otworze o średnicy  $d$  stanowiącym brzeg okrągłej soczewki skupiającej.

Przeprowadzona przez nas poprzednio analiza soczewek była oparta na optyce geometrycznej przy założeniu, że nie występują zjawiska dyfrakcji. Ścisła analiza winna być

jednak oparta od początku na optyce falowej, gdyż optyka geometryczna jest tylko przybliżeniem, aczkolwiek najczęściej bardzo dobrym. Zjawiska dyfrakcyjne w takiej analizie, opartej na optyce falowej, powinny pojawić się w sposób naturalny.

Rysunek 46-10 pokazuje obraz punktowego źródła światła (gwiazdy) utworzony na kłosy fotograficznej umieszczonej w płaszczyźnie ogniskowej soczewki skupiającej teleskopu\*. Obraz ten nie jest punktem, jak głosi (w przybliżeniu) optyka geometryczna,



Rys. 46-10. Obraz gwiazdy utworzony przez soczewkę skupiającą jest obrazem dyfrakcyjnym. Należy zwrócić uwagę na środkowe maksimum zwane czasem tarczą Airy (gdzie George Airy w 1835 roku pierwszy rozwiązał problem dyfrakcji na okrągły otworze) i na następne trzy pierścieniowe maksima. Inne, dalsze maksima występują w większych odległościach od środka, lecz są zbyt słabe, by móc je zobaczyć

lecz kołem otoczonym przez kilka coraz słabszych pierścieni. Porównanie z rys. 44-3c pozwala na niewątpliwe stwierdzenie, że mamy do czynienia ze zjawiskiem dyfrakcyjnym, przy czym otwór jest kołem, a nie długą wąską szczeliną. Stosunek  $d/\lambda$ , gdzie  $d$  jest średnicą soczewki (lub okrągłej przesłony umieszczonej przed nią), określa wymiary obrazu dyfrakcyjnego, podobnie jak stosunek  $a/\lambda$  w przypadku szczeliny.

Okazuje się, że pierwsze minimum obrazu dyfrakcyjnego dla okrągłego otworu o średnicy  $d$  przy założeniu warunków Fraunhofera dane jest równaniem

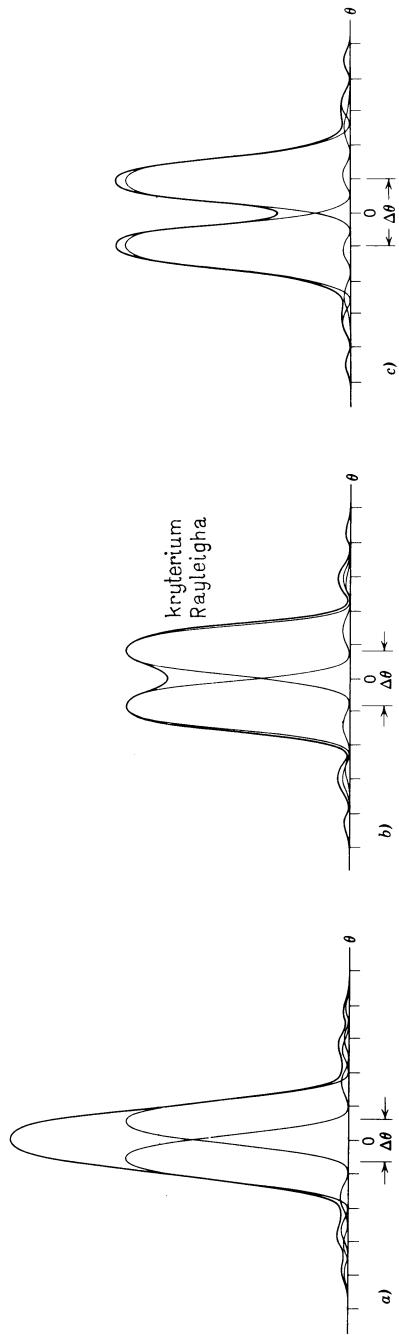
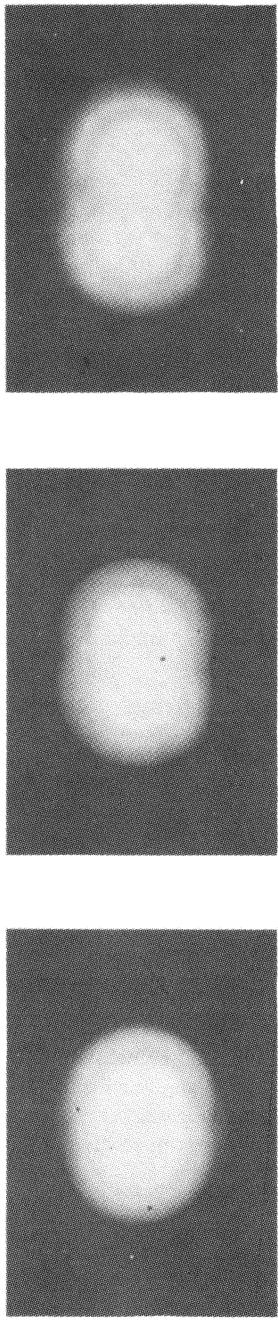
$$\sin \theta = 1,22 \frac{\lambda}{d}. \quad (46-10)$$

Można to porównać z równaniem (46-1):  $\sin \theta = \lambda/a$  określającym położenie pierwszego minimum dla długiej wąskiej szczereliny o szerokości  $a$ . Czynnik 1,22 wynika z obliczeń matematycznych, gdy przeprowadzamy całkowanie po elementarnych źródłach promieniowania, na które można podzielić kołowy otwór.

Dla rzeczywistych soczewek obraz odległego obiektu punktowego będzie nieco większy od pokazanego na rys. 46-10 i może nie mieć radialnej symetrii. Spowodowane jest to przez różne wady soczewki, omówione w paragrafie 44-5. Jednakże nawet wtedy, gdy wszystkie wady zostaną wyeliminowane przez odpowiednie ukształtowanie powierzchni soczewki lub przez zastosowanie soczewek korekcyjnych, to obraz dyfrakcyjny z rys. 46-10 pozostanie. Jest on nieodłącznie związany z wymiarami soczewki i długością fali używanego światła.

Fakt, że obraz dawany przez soczewkę ma charakter dyfrakcyjny staje się ważny, gdy chce się rozróżnić dwa obiekty punktowe, których odległość kątowa jest mała. Rysunek 46-11 pokazuje wygląd obrazu i odpowiedni rozkład natężeń dla dwu obiektów punktowych bliskich siebie kątowo. Na rysunku 46-11a obiekty nie są rozróżnialne, czyli

\* Efekty dyfrakcyjne pojawiają się również w mikroskopie i innych przyrządach optycznych. Są one, w gruncie rzeczy, cechą całego widma elektromagnetycznego.



Rys. 46-11. Obrazy dwu odległych obiektów punktowych (pozorowane gwiazdy) utworzone przez soczewkę skupiającą o średnicy ( $= 10 \text{ cm}$ ) 200 000 razy większej niż efektywna długość fali ( $\lambda = 500 \text{ nm}$ ). W górnej części rysunku pokazano obrazy powstałe w piaszczystej ogniskowej obiektywu teleskopu, a w dolnej odpowiednie krzywe nateżenia. (a) Odległość kątowa obiektów (patrz kreski pionowe) jest tak mała, że obrazy są nierozróżnialne. (b) Obiekty są dalej od siebie i obrazy spełniają kryterium rozróżnialności Rayleigha. (c) Obiekty są jeszcze dalej od siebie i obrazy są dobrze rozróżnialne.

nie można ich odróżnić od pojedynczego obiektu punktowego. Na rysunku 46-11b są one ledwie rozróżnialne, na rysunku 46-11c są rozróżnialne w pełni\*.

Odległość kątowa dwu źródeł punktowych na rys. 46-11b jest tak dobrana, że maksimum obrazu dyfrakcyjnego jednego źródła przypada na pierwsze minimum obrazu dyfrakcyjnego drugiego. Jest to tzw. *kryterium Rayleigha*. Kryterium to, chociaż użyteczne, wybrane jest w sposób dowolny; niekiedy dla określenia, kiedy dwa obiekty są rozróżnialne, używa się innych kryteriów. Z równania (46-10) widać, że jeśli dwa obiekty są ledwie rozróżnialne przy przyjęciu kryterium Rayleigha, to ich odległość kątowa  $\theta_R$  musi być równa

$$\theta_R = \arcsin \frac{1,22\lambda}{d}.$$

Ponieważ takie kąty są raczej niewielkie,  $\sin \theta_R$  można zastąpić przez  $\theta_R$ , czyli

$$\theta_R = 1,22 \frac{\lambda}{d} \quad (46-11)$$

(przy czym  $\theta_R$  jest wyrażone w radianach). Jeżeli odległość kątowa  $\theta$  między obiektemi jest większa od  $\theta_R$ , to można rozróżnić te dwa obiekty; jeśli mniejsza, jest to niemożliwe. Kąt  $\theta_R$  jest najmniejszym odstępem kątowym, dla którego jest możliwe rozróżnienie obiektów w sensie kryterium Rayleigha.

**Przykład 5.** Soczewka skupiąca o średnicy 3 cm ma ogniskową równą 20 cm. a) Jaka musi być odległość kątowa między dwoma odległymi obiektemi, aby było spełnione kryterium Rayleigha (przyjąć, że  $\lambda = 550$  nm).

Z równania (46-11):

$$\theta_R = 1,22 \frac{\lambda}{d} = \frac{1,22 \cdot 5,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{3,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ rad.}$$

(b) O ile odległe są od siebie środki obrazów dyfrakcyjnych tych obiektów w płaszczyźnie ogniskowej soczewki? Odległość liniowa wynosi

$$x = f\theta = 20 \text{ cm} \cdot 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 4400 \text{ nm.}$$

Jest więc równa 8 długościom stosowanej tu fali świetlnej.

Jeśli do rozdzielenia obiektów bliskich kątowo chce się użyć soczewki, to należy możliwe jak najbardziej zmniejszyć środkową część obrazu dyfrakcyjnego. Można to zrobić (patrz rów. (46-11)) przez zwiększenie średnicy soczewki lub zastosowanie krótszej fali. Jednym z powodów konstruowania dużych teleskopów jest otrzymywanie *ostrzejszych* obrazów, tak żeby można było badać więcej szczegółów ciał niebieskich. Obrazy są również *jaśniejsze* i to nie tylko dlatego, że energia koncentruje się na mniejszej powierzchni obrazu dyfrakcyjnego, lecz także i dlatego, że większa soczewka zbiera więcej światła. Dzięki temu udaje się zaobserwować słabsze obiekty, takie jak odległe gwiazdy.

W celu zmniejszenia efektów dyfrakcyjnych w *mikroskopach* stosuje się często światło ultrafioletowe, które z powodu mniejszej długości fali umożliwia badanie mniejszych szczegółów niż to jest możliwe dla tego samego mikroskopu pracującego ze światłem widzialnym. W rozdziale 48 przekonamy się, że wiązki elektronów zachowują się, pod

\* Zjawiska dyfrakcyjne ustalają tzw. dolną granicę rozdzielczości. Jednakże inne efekty przyczyniają się do pogorszenia rozdzielczości. Na temat wpływu zjawisk atmosferycznych na obserwację gwiazd patrz: E. Thomsen, Toward the Diffraction Limit Dietrick *Science News*, August 1975.

pewnymi względami, jak fale elektromagnetyczne. W mikroskopie elektronowym takie wiązki mogą mieć efektywną długość fali około  $4 \cdot 10^{-3}$  nm, czyli 10<sup>5</sup> razy mniejszą od światła widzialnego ( $\lambda = 500$  nm), co umożliwia dokładne badanie bardzo małych obiektów — takich jak wirusy. Gdyby wirusy oglądać przez mikroskop optyczny, ich struktura wewnętrzna byłaby ukryta z powodu dyfrakcji.

## 46-6. Równoczesna interferencja i dyfrakcja na dwóch szczelinach

W doświadczeniu Younga z dwiema szczelinami (paragraf 45-1) przyjmowaliśmy, że szczeliny są dostatecznie wąskie (czyli że  $a \ll \lambda$ ), co oznacza, że centralna część ekranu jest oświetlona w sposób równomierny przez fale ugięte na każdej ze szczelin. Jeżeli takie fale interferują, to wytwarzają prążki o jednakowym natężeniu — jak na rys. 45-9. Ta wyidealizowana sytuacja nie może mieć miejsca w przypadku realnych szczelin, gdyż nie można zazwyczaj zrealizować warunku  $a \ll \lambda$ . Fale wychodzące z takich szczelin, nakładając się w różnych punktach ekranu będą mieć natężenie, które nie jest stałe, lecz zależy od obrazu dyfrakcyjnego dla pojedynczej szczeliny. Osłabienie założenia  $a \ll \lambda$  w doświadczeniu Younga prowadzi do tego, że położenie prążków pozostaje prawie nie zmienione natomiast zmienia się ich natężenie.

Obraz interferencyjny dla nieskończenie wąskich szczelin dany jest równaniem (45-11b) i (45-11c), czyli po małej zmianie oznaczeń

$$I_{\theta, \text{int}} = I_{m, \text{int}} \cos^2 \beta, \quad (46-12)$$

gdzie

$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta, \quad (46-13)$$

przy czym  $d$  jest odległością między środkowymi liniami szczelin.

Natężenie fali ugiętej na każdej ze szczelin jest dane równaniem (46-8b) i (46-8c), czyli po małej zmianie oznaczeń

$$I_{\theta, \text{dyf}} = I_{m, \text{dyf}} \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2, \quad (46-14)$$

gdzie

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta. \quad (46-15)$$

Łączny efekt można otrzymać zastępując  $I_{m, \text{int}}$  w równaniu (46-12) zmienną amplitudą natężenia, daną w rzeczywistości przez  $I_{\theta, \text{dyf}}$  z równania (46-14). To założenie prowadzi do następującego wyrażenia na wypadkowy rozkład natężenia

$$I_{\theta} = I_m (\cos \beta)^2 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2, \quad (46-16)$$

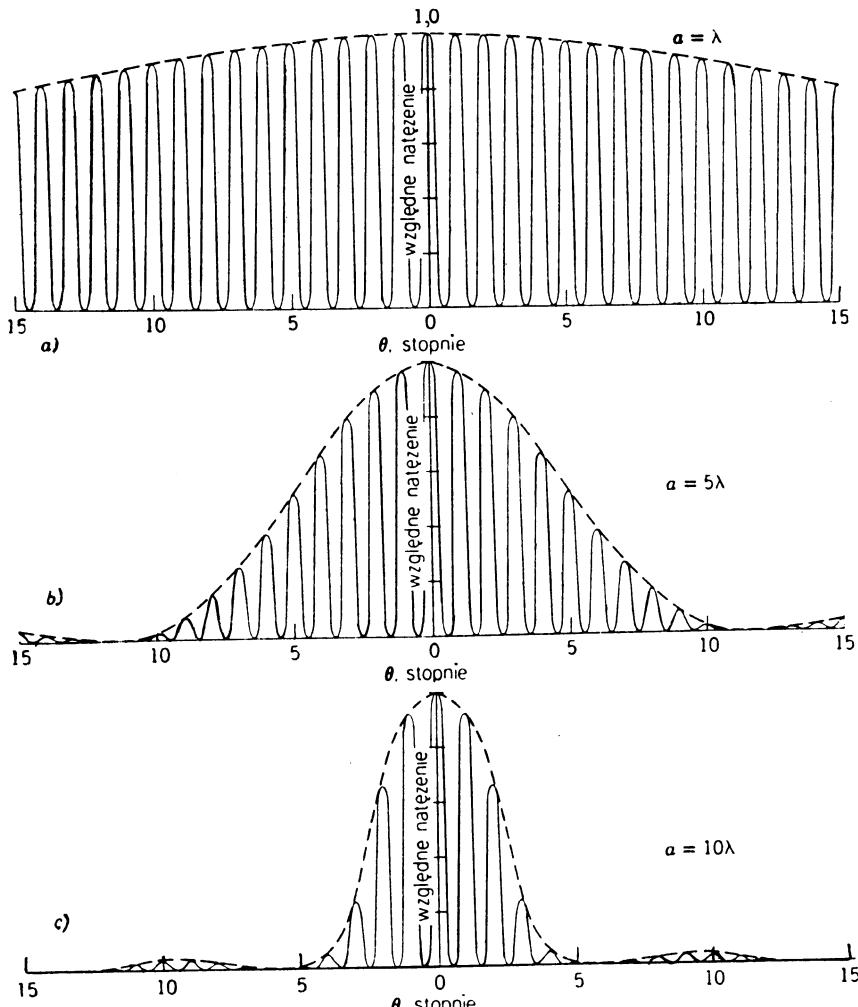
w którym opuściliśmy wszystkie wskaźniki, związane oddzielnie z interferencją i oddzielnie z dyfrakcją.

Wyraźmy ten wynik słowami. W pewnym punkcie ekranu natężenie światła z każdej szczeliny rozpatrywanej oddzielnie dane jest przez obraz dyfrakcyjny tej szczeliny (wzór (46-14)). Obrazy dyfrakcyjne dwóch szczelin rozpatrywanych oddzielnie pokrywają się,

gdyż w przypadku dyfrakcji Fraunhofera promienie równoległe skupiają się w tym samym punkcie (patrz rys. 46-5). Ponieważ obydwie fale ugięte są spójne, więc będą ze sobą interferować.

Efekt interferencji powoduje nierównomiernie rozłożenie energii padającej na ekran i powstanie zespołu prążków. W paragrafie 45-1, gdzie zakładaliśmy  $a \ll \lambda$ , energia była w zasadzie jednakowa we wszystkich punktach ekranu, tak że prążki interferencyjne miały w zasadzie to samo natężenie (patrz rys. 45-9). Jeżeli osiągnąć założenie, że  $a \ll \lambda$ , energia nie jest rozłożona równomiernie na ekranie, lecz dana jest przez rozkład dyfrakcyjny dla szczeliny o szerokości  $a$ . W tym przypadku prążki interferencyjne będą miały natężenie określone przez natężenie rozkładu dyfrakcyjnego w miejscu odpowiadającym poszczególnym prążkom. Równanie (46-16) określa matematycznie wynik tych rozważań.

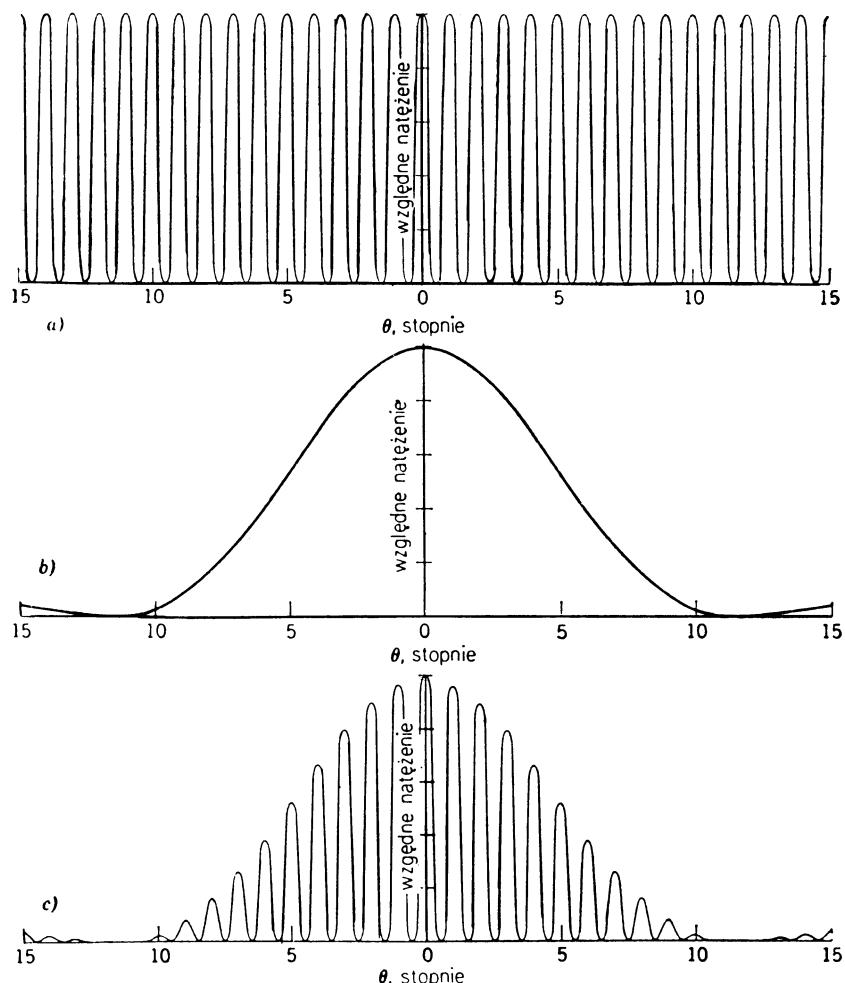
Rysunek 46-12 jest wykresem równania (46-16) dla  $d = 50\lambda$  i dla trzech wartości stosunku  $a/\lambda$ . Widać wyraźnie, że w przypadku wąskich szczelin ( $a = \lambda$ ) prążki mają



Rys. 46-12. Prążki interferencyjne dla dwu szczelin odległych od siebie o  $d = 50\lambda$ , dla trzech różnych szerokości szczelin określonych przez  $a/\lambda = 1, 5$  i  $10$

prawie takie samo natężenie. Jeżeli szczeliny są coraz szersze, to natężenie prążków jest coraz silniej modulowane przez „czynnik dyfrakcyjny” w równaniu (46-16), czyli przez czynnik  $(\sin \alpha/\alpha)^2$ .

Z równania (46-16) widać, że obwiednie prążków z rys. 46-12 pokrywają się dokładnie z obrazami dyfrakcyjnymi pojedynczej szczeliny z rys. 46-9. Jest to szczególnie wyraźnie



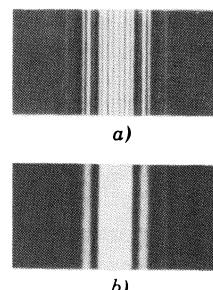
Rys. 46-13. (a) „Czynnik interferencyjny”, (b) „czynnik dyfrakcyjny” z równania (46-16) i (c) ich iloczyn; porównać z rys. 46-12b

widoczne na rys. 46-13, gdzie dla krzywej z rys. 46-12b pokazano (a) „czynnik interferencyjny” w równaniu (46-16) (tj. czynnik  $\cos^2 \beta$ ), (b) „czynnik dyfrakcyjny”  $(\sin \alpha/\alpha)^2$  oraz (c) ich iloczyn.

Jeśli w równaniu (46-16) przyjmiemy  $\alpha = 0$ , to (patrz równ. (46-15))  $\alpha = 0$  oraz  $\sin \alpha/\alpha_{\alpha \rightarrow 0} = \alpha/\alpha = 1$  i równanie to sprowadza się, jak być powinno, do równania natężenia dla dwu nieskończonością wąskich szczelin (równ. (46-12)). Jeśli w równaniu (46-16) przyjmiemy  $d = 0$ , to dwie szczeliny przechodzą w jedną szczelinę o szerokości  $a$ , jak widać

na rys. 46-14;  $d = 0$  powoduje, że  $\beta = 0$  (patrz równ. (46-13)) i  $\cos^2\beta = 1$ . Wówczas równanie (46-16) sprowadza się, jak być powinno, do równania opisującego dyfrakcję na pojedynczej szczelinie (równ. (46-14)).

Na rysunku 46-14 przedstawiono fotografię interferencji na dwu szczelinach. Widać wyraźnie równoległe prążki i modulację ich natężenia przez obraz dyfrakcyjny pojedynczej szczeliny. Po zasłonięciu jednej szczeliny, tak jak na rys. 46-14b, prążki interferencyjne znikają i widoczny jest obraz dyfrakcyjny pojedynczej szczeliny.



Rys. 46-14. (a) Prążki interferencyjne dla dwu szczelin, gdy szerokość szczeliny nie jest zaniedbywalna w porównaniu z długością fali. Natężenie prążków zostało zmodulowane przez dyfrakcyjny obraz pojedynczej szczeliny. (b) Przy zasłonięciu jednej szczeliny prążki interferencyjne znikają i widoczny jest dyfrakcyjny obraz pojedynczej szczeliny. (Dzięki uprzejmości G. H. Carragana, Rensselaer Polytechnic Institute)

**Przykład 6.** Jaki wpływ na krzywą z rys. 46-12b ma: a) zwiększenie szerokości szczeliny, b) zwiększenie odległości między szczelinami i c) zwiększenie długości fali?

(a) Przy zwiększaniu szerokości szczeliny  $a$  obwiednia prążków zmienia się, tak że środkowy pik staje się coraz to węższy (porównać z rys. 46-12c). Odległość między prążkami zależna od  $d/\lambda$  pozostaje niezmieniona.

b) Zwiększenie  $d$  powoduje zbliżanie się do siebie prążków, natomiast obwiednia obrazu pozostaje niezmieniona.

(c) Przy zwiększaniu  $\lambda$  obwiednia staje się szersza, a prążki oddalają się od siebie. Wzrost  $\lambda$  jest równoważny równoczesnemu zmniejszaniu stosunku  $a/\lambda$  i  $d/\lambda$ . Ogólna relacja między obwiednią a prążkami, zależna jedynie od  $d/a$ , nie zmienia się przy zmianach długości fali.

**Przykład 7.** Jaka jest odległość między prążkami, przy dyfrakcji Fraunhofera na dwu szczelinach, na ekranie odległym o 50 cm od szczelin oświetlonych przez światło niebieskie ( $\lambda = 480 \text{ nm}$ ) dla  $d = 0,10 \text{ mm}$  i szerokości szczeliny  $a = 0,02 \text{ mm}$ ? Jaka jest odległość liniowa od środkowego maksimum do pierwszego minimum obwiedni prążków?

Rozkład natężeń jest dany równaniem (46-16), a odległość między prążkami określa czynnik interferencyjny  $\cos^2\beta$ . Z przykładu 2 w rozdziale 45 mamy

$$\Delta y = \frac{\lambda D}{d},$$

gdzie  $D$  jest odlegością ekranu od szczelin. Podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy

$$\Delta y = \frac{480 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 50 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{0,10 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 2,4 \text{ mm}.$$

Odległość do pierwszego minimum obwiedni jest określona czynnikiem dyfrakcyjnym  $(\sin \alpha / \alpha)^2$  w równaniu (46-16). Pierwsze minimum dla tego czynnika wystąpi przy  $\alpha$  równym  $\pi$ .

Z równania (46-15)

$$\sin \theta = \frac{\alpha \lambda}{\pi a} = \frac{\lambda}{a} = \frac{480 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{0,20 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 0,024.$$

Jest to tak mała wielkość, że można przyjąć  $\theta \approx \sin \theta \approx \tan \theta$ , skąd otrzymujemy

$$y = D \tan \theta \approx D \sin \theta = 50 \text{ cm} \cdot 0,024 = 1,2 \text{ cm}.$$

A więc w środkowym piku obwiedni mieści się około 10 prążków.

**Przykład 8.** Jakie warunki muszą być spełnione, aby środkowe maksimum obwiedni dyfrakcyjnego obrazu Fraunhofera dla dwu szczelin zawierało dokładnie jedenaście prążków?

Wymagany warunek będzie spełniony, jeżeli w równaniu (46-16) szóste minimum czynnika interferencyjnego  $\cos^2\beta$  pokryje się z pierwszym minimum czynnika dyfrakcyjnego  $(\sin\alpha/\alpha)^2$ .

Szóste minimum czynnika interferencyjnego w równaniu (46-12) wystąpi dla  $\beta = \frac{11}{2}\pi$ .

Pierwsze minimum czynnika dyfrakcyjnego wystąpi dla  $\alpha = \pi$ . Dzieląc te wyrażenia przez siebie (patrz rów. (46-13) i (46-15)) otrzymujemy

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{d}{a} = \frac{11}{2}.$$

Warunek ten zależy jedynie od geometrii szczelin, a nie od długości fali. Dla długich fal obraz będzie szerszy niż dla fal krótkich, lecz zawsze w środkowym piku obwiedni będzie jedenaście prążków.

Zagadnienie dwu szczelin, jak widać na rys. 46-12, łączy ze sobą ściśle interferencję i dyfrakcję. W zasadzie obydwa te zjawiska są efektami superpozycji i wynikają z dodawania zaburzeń falowych w danym punkcie przy uwzględnieniu odpowiednich różnic faz. Jeżeli nakładające się fale wychodzą ze skończonej (i zazwyczaj niewielkiej) liczby elementarnych, spójnych źródeł promieniowania, jak w doświadczeniu Younga z dwiema szczelinami, to efekt ten nazywamy *interferencją*. Jeżeli nakładające się fale otrzymujemy dzieląc pewne fale na nieskończonym spójne źródła promieniowania, jak w przeprowadzonej przez nas analizie pojedynczej szczeliny (rys. 46-6), to efekt ten nazywamy *dyfrakcją*. To rozróżnienie między dyfrakcją a interferencją jest wygodne i użyteczne. Jednakże nie powinniśmy zapominać o fakcie, że obydwa efekty są wynikiem superpozycji i że często występują równocześnie, jak w doświadczeniu Younga\*.

### Pytania

1. Dlaczego dyfrakcja fal dźwiękowych jest zjawiskiem częściej spotykanym w życiu codziennym niż dyfrakcja fal świetlnych?

2. Dlaczego fale radiowe uginają się na budynkach, a fale świetlne nie?

3. Obserwator trzyma wąską, pionową szczelinę na wprost żrenicy swego oka i patrzy na odległe źródło światła mające kształt długiego, żarzącego się włókna. Czy obraz dyfrakcyjny widziany przez niego jest typu Fresnela czy Fraunhofera?

4. Czy dla obrazów pozornych występują efekty dyfrakcyjne takie jak dla obrazów rzeczywistych? Wyjaśnić to.

5. Czy występują efekty dyfrakcyjne dla obrazów utworzonych przez (a) zwierciadło płaskie, (b) zwierciadło sferyczne? Wyjaśnić to.

6. Skomentuj stwierdzenie: „Dyfrakcja zachodzi dla wszystkich zakresów widma elektromagnetycznego”. Rozważ jako przykład zakres promieni  $X$  i zakres mikrofal; podaj argumenty uzasadniające prawdziwość lub fałszywość powyższego stwierdzenia.

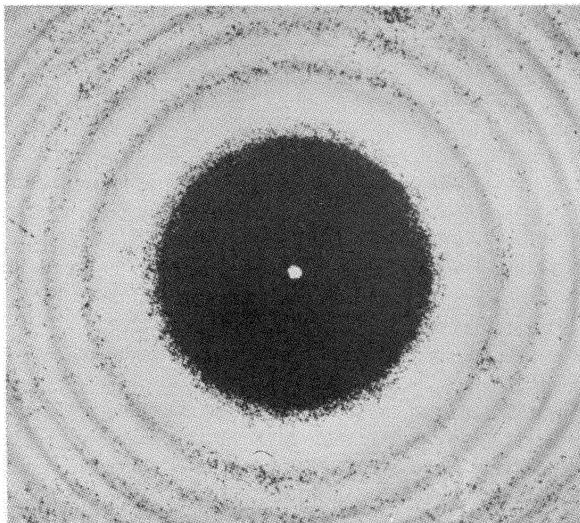
7. Na rysunku 46-1 przedstawiono ogólny przypadek dyfrakcji na otworze o dowolnym kształcie, wyciętym w nieprzeczystym ekranie. Naśladowując argumenty z paragrafu 46-1 przeprowadź ogólną dyskusję przypadku przeciwnego, tj. przypadku dyfrakcji na brzegu nieprzeczystego przedmiotu, takiego na przykład jak klucz czy spinacz do papieru. W tym przypadku nie ma ekranu  $B$ .

8. Zastanów się nad różnicami między dyfrakcją Fresnela i Fraunhofera. Czy u podstaw ich leżą różne zasady fizyczne? Jeśli tak, to jakie to zasady? Jeśli podstawę stanowi ta sama zasada, to jaka?

\* W rozdziale tym nie omawialiśmy *holografii*, techniki, dzięki której można otrzymywać trójwymiarowe obrazy przedmiotów (zamiast dwuwymiarowych jak w zwykłej fotografii). W technice tej główną rolę odgrywa dyfrakcja. Dla zapoznania się z tym patrz: Dennis Gabor, Holography, 1948–1981, *Science*, July 1972. Za to odkrycie (dokonane w 1948 r.) Gabor otrzymał w 1971 r. nagrodę Nobla, a polecaný artykuł jest adaptacją jego wykładu z okazji odbioru nagrody. Patrz także: Alan G. Porter, S. George, An Elementary Introduction to Practical Holography, *American Journal of Physics*, November 1975.

9. Wielu z nas zauważało, że jakość odbioru w radioodbiorniku samochodowym obniża się, gdy przejeżdżamy pod linią wysokiego napięcia. Czy wiąże się to jakoś z prädem elektrycznym w linii; ze zjawiskami dyfrakcyjnymi; ze zjawiskami interferencyjnymi? Przeprowadź dyskusję.

10. *Jasna plamka Fresnela*: Jeśli pomiędzy punktowym źródłem światła a kliną fotograficzną powiemy monetę lub piłeczkę a nawet kulę do krykietu, w środku geometrycznego cienia pojawi się jasna plamka, nazywana plamką Fresnela; patrz rys. 46-15. Pojawiają się również pierścienie dyfrakcyjne i to zarówno w obszarze cienia jak i poza nim. Można by sądzić, że środek geometrycznego cienia, będąc najbardziej osłoniętym od źródła światła, będzie ciemny, natomiast prawdę jest coś przeciwnego. Czy dostrzegasz jakościową możliwość tego, że ten fakt doświadczalny może być zgodny z dyfrakcyjną teorią Fresnela?



Rys. 46-15. Pytanie 10. Jasna plamka Fresnela

(Fresnel, który był z wykształcenia inżynierem budownictwa lądowego i wodnego, przesłał jako pracę konkursową do Francuskiej Akademii Nauk esej na temat dyfrakcji światła. Miał on wówczas 30 lat. Członek jury konkursowego Siméon Poisson, wybitny fizyk zwłaszcza w dziedzinie fizyki matematycznej, był zaprzesiężonym zwolennikiem newtonowskiej korpuskularnej teorii światła i zdecydowanym przeciwnikiem falowej teorii Fresnela i innych. Wykazał on (czego Fresnel nie zrobił), że z teorii Fresnela wynika konieczność istnienia jasnej plamki, noszącej obecnie imię Fresnela. Wkrótce pojawiło się doświadczalne potwierdzenie tego przewidywania. Choć Fresnel otrzymał nagrodę za swoją pracę, Poisson pozostał nieprzekonany do falowej teorii światła i aż do śmierci, która nastąpiła 22 lat później, ciągle trzymał się koncepcji newtonowskiej.)

11. Tuba głośnika ma wylot prostokątny o wysokości 120 cm i szerokości 30 cm. Czy rozkład natężenia dźwięku będzie szerszy w płaszczyźnie poziomej, czy pionowej?

12. Zapewnialiśmy (i jest to prawda), że równania Maxwella przewidują wszystkie klasyczne zjawiska optyki. Mimo to, ani w rozdziale 45 (Interferencja) ani w tym rozdziale (Dyfrakcja) nie było wzmianki o równaniach Maxwella. Czy jest tu jakaś niezgodność? Gdzie zostały „zgubione” równania Maxwella? Przedyskutuj to.

13. Projektowana jest antena radaru przeznaczona do dokładnych pomiarów wysokości, na jakiej znajduje się samolot, i niezbyt dokładnych pomiarów jego odległości w płaszczyźnie poziomej. Czy stosunek wysokości reflektora radaru do jego szerokości musi być mniejszy, równy czy większy od jedności?

14. Jaki jest wpływ zwiększenia (a) długości fali oraz (b) szerokości szczeliny na dyfrakcję Fraunhofera na pojedynczej szczelinie?

15. Światło słoneczne pada na szczelinę o szerokości  $10^3$  nm. Opisać jakościowo, jak wygląda powstający obraz dyfrakcyjny.

16. Na rysunku 46-5 promienie  $r_1$  i  $r_3$  są zgodne w fazie; podobnie promienie  $r_2$  i  $r_4$ . Dlaczego w punkcie  $P_2$  powstaje minimum natężenia, a nie maksimum?

17. Opisać, co stanie się z obrazem dyfrakcyjnym Fraunhofera dla pojedynczej szczeliny, gdy całą aparaturę umieścimy w wodzie?

18. Gdy mówimy o dyfrakcji na pojedynczej „szczelinie” zakładamy w domyśle, że szerokość szczeliny musi być znacznie mniejsza niż jej długość. Przypuśćmy, że w rzeczywistości długość była dwa razy większa niż szerokość. Zastanów się jak powinien z grubsza wyglądać obraz dyfrakcyjny. Nie pytamy oczywiście o dokładne rozwiązanie.

19. Omawiając rysunek 46-3 stwierdziliśmy, zgodnie z prawdą, że drogi optyczne od szczeliny do punktu  $P_0$  są równe. Dlaczego? A dlaczego drogi optyczne promieni z rys. 46-4 od szczeliny do punktu  $P_2$  nie są równe? Czym się różnią te rysunki?

20. Dlaczego  $E_\theta$  z rys. 46-7d, odpowiadające pierwszemu maksimum poza maksimum centralnym, nie jest pionowe? (Wskazówka: Rozważ skutki słabego zwijania się (czy rozwijania) łańcucha wektorów na tym rysunku.)

21. Określić dokładnie, czym są kąty  $\theta$ ,  $\alpha$  i  $\varphi$  w równaniu (46-8c).

22. Jeżeli przeprowadzimy analizę właściwości soczewek z paragrafu 44-5 stosując optykę geometryczną, ale bez ograniczania naszych rozważań do promieni przyosiowych i „ciemnych” soczewek, to czy wynikną z tej analizy zjawiska dyfrakcyjne, takie jak na rys. 46-10? Przedyskutować to.

23. Użyteczność wielkich teleskopów zwierciadłanych rośnie, gdy robimy zwierciadła o coraz to większych średnicach. Podaj co najmniej dwa powody tego.

24. Widzieliśmy, że dyfrakcja ogranicza zdolność rozdzielczą teleskopów optycznych (patrz rys. 46-11). Czy odnosi się to również do radioteleskopów, takich jak pokazany na rys. 41-2?

25. Omówić dokładnie rozróżnienie między interferencją a dyfrakcją w doświadczeniu Younga z dwiema szczelinami.

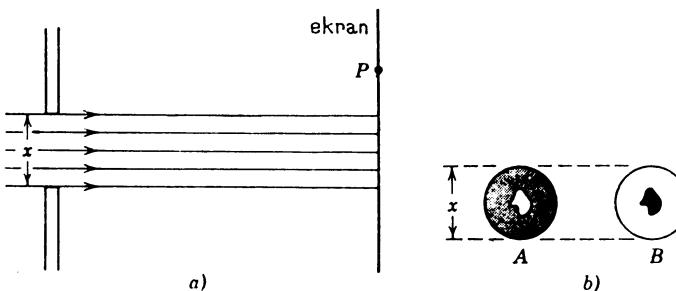
26. Pod jakimi względami zjawiska interferencji i dyfrakcji są do siebie podobne? A pod jakimi są one różne?

27. Mówimy, że w obrazie interferencyjnym dwu szczelin z rys. 46-14a, natężenie prążków interferencyjnych jest modulowane przez obraz dyfrakcyjny pojedynczej szczeliny. Czy można odwrócić ten pogląd i powiedzieć, że natężenie obrazu dyfrakcyjnego pojedynczej szczeliny jest modulowane przez prążki interferencyjne? Przedyskutować to.

## Zadania

### Paragraf 46-1

1. *Zasada Babinet'a:* Monochromatyczna wiązka równoległego światła pada na okrągły otwór „kolimujący” o średnicy  $x \gg \lambda$ . Punkt  $P$  znajduje się w obszarze geometrycznego cienia, na odległym ekranie (patrz rys. 46-16a). W okrągłym otworze umieszczamy kolejno dwie przesłony, pokazane na rys. 46-16b. Przesłona  $A$  jest to nieprzeczroczysty krążek z otworkiem, a przesłona  $B$  stanowi „fotograficzny negatyw”  $A$ . Pokazać, korzystając z zasady superpozycji, że dla każdego z tych dwóch uginających obiektów,  $A$  i  $B$ , natężenie w punkcie  $P$  jest takie samo\*.



Rys. 46-16. Zadanie 1

\* W związku z powyższym można pokazać, że obraz dyfrakcyjny dla drutu jest taki sam jak dla szczeliny o takiej samej szerokości. Patrz: S. M. Curry, A. L. Schawlow, Measuring the Diameter of a Hair by Diffraction, *American Journal of Physics*, May 1974.

#### Paragraf 46-2

2. Odległość między pierwszym i piątym minimum w obrazie dyfrakcyjnym pojedynczej szczeliny na ekranie odległym 40 cm od szczeliny wyniosła 0,35 mm, gdy użyto światła o długości fali 550 nm. Jaka jest szerokość tej szczeliny?

3. W obrazie dyfrakcyjnym pojedynczej szczeliny odległość pomiędzy pierwszym minimum z prawej strony i pierwszym z lewej wynosi 5,2 mm. Ekran, na którym powstaje ten obraz znajduje się w odległości 80 cm od szczeliny, a długość fali wynosi 546 nm. Oblicz szerokość szczeliny.

Odp.: 0,17 mm.

4. Pierwsze minimum dyfrakcji na pojedynczej szczelinie pojawia się dla  $\theta = 90^\circ$ , co oznacza że cała półkula za szczeliną jest wypełniona światłem. Jaki musi być stosunek szerokości szczeliny do długości fali światła, żeby tak właśnie było?

5. Szczelina o szerokości 1,0 mm jest oświetlana światłem o długości fali 589 nm. Obserwujemy obraz dyfrakcyjny na ekranie oddalonym o 3,0 m. Jaka jest odległość pomiędzy dwoma pierwszymi minimami po każdej stronie centralnego maksimum dyfrakcji?

Odp.: 1,8 mm.

6. Fala płaska ( $\lambda = 590$  nm) pada na szczelinę o szerokości  $a = 0,40$  mm. Za szczeliną jest umieszczona soczewka skupiąca ( $f = +70$  cm), która skupia światło na ekranie. Jaka jest odległość liniowa na ekranie od środka obrazu do (a) pierwszego minimum i (b) drugiego minimum?

#### Paragraf 46-4

7. Jaka jest szerokość połówkowa wiązki ugiętej na szczelinie o szerokości równej (a) 1, (b) 5 i (c) 10 długości fali?

Odp.: (a)  $53^\circ$ , (b)  $10^\circ$ , (c)  $5,1^\circ$ .

8. Pojedyncza szczelina jest oświetlona światłem o długościach fali  $\lambda_a$  i  $\lambda_b$  tak dobranych, by pierwsze minimum dyfrakcyjne dla  $\lambda_a$  pokrywało się z drugim minimum dla  $\lambda_b$ . (a) Jaki związek musi zachodzić między tymi długościami fali? (b) Czy jakieś inne minima również pokrywają się?

9. Obliczyć kąt jaki tworzy  $E_\theta$  z kierunkiem pionowym na rys. 46-7d. Założyć, że szczelina została podzielona na infinitezymalne paski o szerokości  $dx$ . Patrz pytanie 20.

Odp.:  $12^\circ$ .

10. (a) Pokazać, że wartości  $\alpha$ , dla których występują maksima natężenia przy dyfrakcji na pojedynczej szczelinie można znaleźć w sposób scisły przez zróżniczkowanie równania (46-8b) względem  $\alpha$  i porównanie do zera, otrzymując w ten sposób warunek  $\operatorname{tg} \alpha = \alpha$ . (b) Znaleźć graficznie wartości  $\alpha$  spełniające ten związek przez wykreślenie krzywej  $y = \operatorname{tg} \alpha$  i prostej  $y = \alpha$  i znalezienie punktów ich przecięcia. Alternatywnie można obliczyć te wartości posługując się kalkulatorem. (c) Znaleźć wartości  $m$  (nie całkowite) odpowiadające kolejnym maksymom obrazu szczeliny. Należy podkreślić, że dalsze maksima nie leżą w środku między minimami.

11. Rozwiązać graficznie równanie przestępne z przykładu 4

$$\frac{1}{2} = \left( \frac{\sin \alpha_x}{\alpha_x} \right)^2$$

względem  $\alpha_x$  z dokładnością do trzech cyfr znaczących.

Odp.:  $79,7^\circ$ .

12. Jeśli podwoi się szerokość pojedynczej szczeliny, natężenie centralnego maksimum dyfrakcyjnego wzrośnie czterokrotnie pomimo, że energia przechodząca przez szczelinę tylko podwaja się. Wyjaśnij to ilościowo.

#### Paragraf 46-5

13. Dwa przednie światła samochodu są odległe od siebie o 120 cm. Z jakiej maksymalnej odległości oko może je rozróżnić? Przyjąć, że średnica żrenicy wynosi 5 mm, a  $\lambda = 550$  nm. Założyć, że odległość ta jest określona wyłącznie przez efekty dyfrakcji na okrągłej żrenicy oka.

Odp.: 10 km.

14. Astronauta znajdujący się w satelicie ziemskim skarży się, że ledwie może odróżnić dwa źródła punktowe umieszczone na Ziemi, 160 km pod nim. Jaka jest odległość tych źródeł, przy założeniu idealnych warunków? Przyjąć, że  $\lambda = 550$  nm, a średnica żrenicy wynosi 5,0 mm.

15. Jak blisko siebie mogą leżeć dwa małe przedmioty żeby były jeszcze rozróżnialne, gdy ogląda się je przez lunetę teodolitu o średnicy obiektywu 3,0 cm, jeśli teodolit znajduje się w odległości 370 m od przedmiotu. Przyjmij, że długość fali wynosi 550 nm.

Odp.: 8,3 mm.

16. (a) Jaka jest odległość kątowa dwu gwiazd, jeżeli ich obrazy są ledwie rozróżnialne przez teleskop soczewkowy (refraktor) o średnicy soczewki 75 cm i ogniskowej 13,5 m? Przyjąć, że  $\lambda = 550$  nm. (b) Znaleźć odległość między tymi ledwie rozróżnialnymi gwiazdami, jeżeli są one odległe o 10 lat świetlnych od Ziemi. (c) Znaleźć średnicę pierwszego ciemnego pierścienia w obrazie dyfrakcyjnym pojedynczej gwiazdy zmierzona na kliszy fotograficznej umieszczonej w płaszczyźnie ogniskowej tego teleskopu. Przyjąć, że struktura obrazu gwiazdy jest związana wyłącznie z dyfrakcją na krańcach soczewki, a nie z (małymi) wadami spowodowanymi przez soczewkę itp.

17. Ściana w dużym pokoju jest pokryta płytami mającymi małe otwory odległe o 5 mm od siebie, licząc między środkami sąsiednich otworów. Jak daleko można znajdować się od tej ściany i jeszcze rozróżnić poszczególne otwory, przy założeniu idealnych warunków? Przyjąć, że średnica żrenicy oka wynosi 4,0 mm, a  $\lambda$  równa się 550 nm.

Odp.: 37 m.

18. Obliczyć odległość dwóch punktów na powierzchni Księżyca, które można ledwie rozróżnić przez teleskop na Mount Palomar o średnicy 5 m, przy założeniu, że odległość ta jest określona efektami dyfrakcyjnymi. Odległość Księżyca od Ziemi wynosi  $3,8 \cdot 10^5$  km, a długość fali jest równa 550 nm.

19. Przy założeniu, że panują idealne warunki ocenić liniową odległość między dwoma przedmiotami znajdującymi się na Marsie, ledwie rozróżnialnymi przez obserwatora na Ziemi (a) gdy patrzy gołym okiem oraz (b) gdy korzysta z 200-calowego teleskopu Mt. Palomar. Dane: odległość do Marsa 80 mln km, średnica żrenicy 5 mm, długość fali 550 nm.

Odp.: (a)  $1,1 \cdot 10^4$  km, (b) 11 km.

20. Satelita orbitujący na wysokości, powiedzmy, 160 km ponad powierzchnią Ziemi jest wyposażony w teleskop o ogniskowej soczewki 2,4 m. Jego zdolność rozdzielcza dla przedmiotów na Ziemi wynosi 36 cm, co oznacza, że może on łatwo zauważać samochód. Jaka jest średnica soczewki, jeśli założyć, że można ją obliczyć na podstawie samych rozważań dyfrakcyjnych? Przyjąć, że  $\lambda = 550$  nm. Wiadomo, że są jeszcze doskonalsze satelity. Patrz: Ted Greenwood, Reconnaissance and Arms Control, *Scientific American*, February 1973.

21. (a) W podwodnym źródle dźwięku przeznaczonym do wykrywania łodzi podwodnych drga z częstotliwością 25 kHz okrągła membrana o średnicy 0,60 m. Daleko od źródła natężenie dźwięku ma taki rozkład jak w dyfrakcyjnym obrazie Fraunhofera dla okrągłego otworu o średnicy równej średnicy membrany. Obliczyć kąt zawarty między prostopadłą do membrany a kierunkiem pierwszego minimum przyjmując, że prędkość dźwięku w wodzie wynosi 1450 m/s. (b) Powtórzyć to obliczenie dla częstotliwości słyszalnej 1,0 kHz.

Odp.: (a)  $6,7^\circ$ . (b) Ponieważ  $1,22\lambda \gg d$ , nie istnieje odpowiedź dla 1,0 kHz; wytłumacz to.

22. Można pokazać, że (pominając kąt  $\theta = 0$ ) kołowa przesłona daje taki sam obraz dyfrakcyjny, jak kołowy otwór o tej samej średnicy. Ponadto, jeżeli mamy wiele takich przesłon (np. krople wody) rozmieszczonych przypadkowo, efekty interferencyjne znikają i pozostaje jedynie obraz dyfrakcyjny związany z pojedynczą przesloną. (a) Wyjaśnić dlaczego w mglistą noc wokół Księżyca obserwuje się jasny pierścień (tzw. „lisią czapę”). Zwykle ten pierścień jest zabarwiony na czerwono. (b) Obliczyć jakie rozmiary mają kropelki wody zawieszone w powietrzu, jeśli średnica pierścienia wokół Księżyca jest 1,5 raza większa od średnicy samego Księżyca. (c) W jakiej odległości od Księżyca może być widoczny pierścień niebieskawy? Czasem pierścienie bywają białe: wyjaśnić to. d) Układ kolorów jest przeciwny niż w tczycy: dlaczego tak powinno być?

23. Przyjąć, że w przykładzie 8 obwiednia środkowego piku zawiera 11 prążków. Ile prążków leży między pierwszym a drugim minimum obwiedni?

Odp.: 5.

24. Ile prążków interferencyjnych leży w środkowym piku obwiedni dla  $d = 2a$  na rys. 46-17?

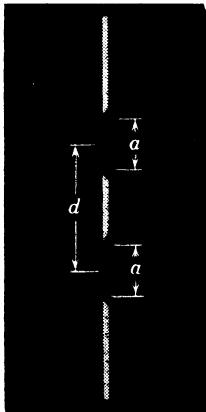
25. Jeśli na rys. 46-17 przyjąć  $d = a$ , to dwie szczeliny zleżą się w jedną o szerokości  $2a$ . Pokazać, że równanie (46-16) sprowadzi się wówczas do równania opisującego rozkład dyfrakcyjny dla takiej szczeliny.

26. Stosując wektory, podobne jak na rys. 46-7, sporządzić wykres obrazu interferencyjnego dwóch szczelin. Dla uproszczenia przyjąć, że  $d = 2a$  (patrz rys. 46-17). Czy można w ten sposób zinterpretować podstawowe cechy rozkładu natężeń?

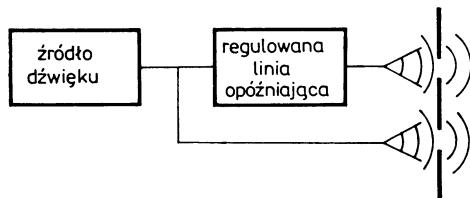
27. (a) Ile całych prążków pojawi się pomiędzy pierwszymi minimami obwiedni prążków po obydwu stronach centralnego maksimum w rozkładzie wytwarzanym przez dwie szczeliny, jeśli  $\lambda = 550 \text{ nm}$ ,  $d = 0,15 \text{ mm}$  oraz  $a = 0,030 \text{ mm}$ ? (b) Jaki jest stosunek natężenia trzeciego prążka bocznego do natężenia prążka centralnego?

Odp.: (a) 9. b) 0,25.

28. (a) Podać taki układ dwu szczelin, w którym nie występuje czwarty prążek, nie licząc środkowego maksimum. (b) Czy jakieś inne prążki również nie występują?



Rys. 46-17. Zadanie 24, 25  
i 26



Rys. 46-18. Zadanie 29

29. Przed układem dwóch szczelin (odległość między szczelinami  $d$ , szerokość szczelin  $a$ ) umieszczone są dwa głośniki, w sposób przedstawiony na rys. 46-18. Faza jednego z tych głośników może być zmieniana przy pomocy regulowanej linii opóźniającej. Opisać szczegółowo, w jaki sposób będzie się zmieniało wy- padkowe natężenie dźwięku w dużych odległościach, gdy różnica faz jest zmieniana od zera do  $2\pi$ . Roz- ważyć zarówno efekty interferencyjne, jak i dyfrakcyjne.

# 47. Siatki dyfrakcyjne i widma

## 47-1. Wstęp

W związku z doświadczeniem Younga (paragrafy 45-1 i 45-3) omówiliśmy interferencję dwu spójnych fal powstały w wyniku dyfrakcji światła na dwu elementarnych „źródłach” (radiatorach) promieniowania (małych otworach lub szczelinach). Na początku zakładaliśmy, że szerokość szczelin jest znacznie mniejsza od długości fali i światło ugięte na każdej ze szczelin oświetla ekran w sposób równomierny. Później w paragrafie 46-6 uwzględniliśmy szerokość szczeliny i pokazaliśmy, że rozkład natężeń prążków interferencyjnych jest modulowany przez „czynnik dyfrakcyjny”  $(\sin \alpha / \alpha)^2$  (patrz równ. (46-16)).

Obecnie rozszerzymy to zagadnienie na przypadki, w których liczba  $N$  źródeł promieniowania lub centrów dyfrakcyjnych jest większa — zazwyczaj znacznie większa od dwu. Rozpatrzymy dwie sytuacje:

- (1) Zespół  $N$  równoległych i równoodległych szczelin zwany *siatką dyfrakcyjną*.
- (2) Trójwymiarowy zespół periodycznie rozłożonych w przestrzeni źródeł promieniowania, np. atomy w krystalicznym ciele stałym, takim jak NaCl. W tym przypadku średnia odległość między elementarnymi źródłami promieniowania jest tak mała, że efektów interferencyjnych należy poszukiwać dla fal o długościach znacznie mniejszych od długości fali światła widzialnego — będziemy mówić o *dyfrakcji promieni Roentgena*.

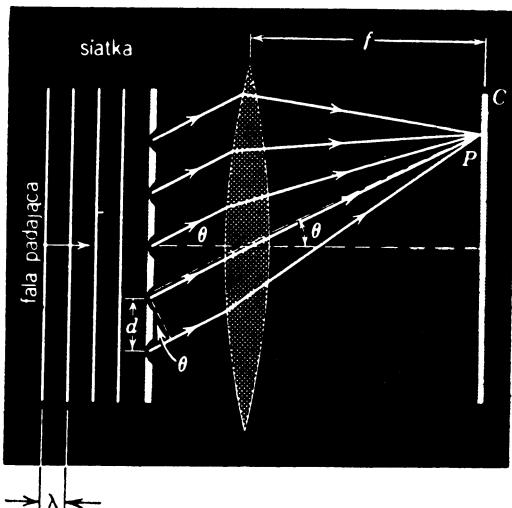
W każdym z tych przypadków będziemy oddzielnie omawiać własności dyfrakcyjne pojedynczego radiatora (szczeliny lub atomu) oraz interferencję spójnych fal utworzonych przez dyfrakcję światła na zespole radiatorów.

## 47-2. Układ wielu szczelin

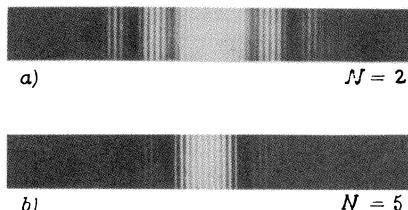
Logicznym rozszerzeniem interferencyjnego doświadczenia Younga z dwiema szczelinami jest zwiększenie ilości szczelin od dwu do znacznie większej liczby  $N$ . Układ taki jak na rys. 47-1, zawierający zazwyczaj znacznie więcej szczelin (liczba tak wielka jak  $10^4$  szczelin/cm nie jest tu niezwykła) jest nazywany *siatką dyfrakcyjną*. Podobnie jak dla dwu szczelin, tak i w tym przypadku rozkład natężeń powstający przy padaniu na siatkę dyfrakcyjną światła monochromatycznego o długości fali  $\lambda$  składa się z serii prążków interferen-

cyjnych. *Wzajemna odległość kątowa* tych prążków jest określona stosunkiem  $\lambda/d$ , gdzie  $d$  jest odlegością między środkami sąsiednich szczelin. Względne *natężenie* tych prążków jest określone przez obraz dyfrakcyjny pojedynczej szczeliny siatki, a więc zależy od stosunku  $\lambda/a$ , gdzie  $a$  jest szerokością szczeliny.

Na rysunku 47-2, na którym zestawiliśmy rozkłady natężeń dla  $N = 2$  i  $N = 5$ , widać wyraźnie, że prążki „interferencyjne” mają natężenie modulowane przez „dyfrakcyjną” obwiednię, jak na rys. 46-14. Na rysunku 47-3 pokazano wyniki obliczeń teoretycznych określających rozkład natężeń dla trzech prążków leżących w pobliżu środków obrazów z rys. 47-2. Z tych dwóch rysunków widać, że zwiększenie liczby szczelin  $N$  (a) nie



Rys. 47-1. Idealna siatka dyfrakcyjna zawierająca pięć szczelin. Dla wygody na rysunku przyjęto, że szerokość szczeliny  $a$  jest znacznie mniejsza od  $\lambda$ , aczkolwiek w rzeczywistości to nie ma miejsca. Ponadto w rzeczywistości  $f$  jest znacznie większe od  $d$



Rys. 47-2. Rozkład natężeń dla „siatek” o (a)  $N = 2$  i (b)  $N = 5$ , dla tych samych wartości  $d$  i  $\lambda$ . Należy zauważyć, że natężenie prążków jest modulowane przez dyfrakcyjną obwiednię, podobnie jak na rys. 46-14; a więc założenie, że  $a \ll \lambda$  nie jest tutaj spełnione. Dla  $N = 5$  pomiędzy każdą parą sąsiednich maksimów głównych występują trzy bardzo słabe maksima wtórne, niewidoczne na tej fotografii

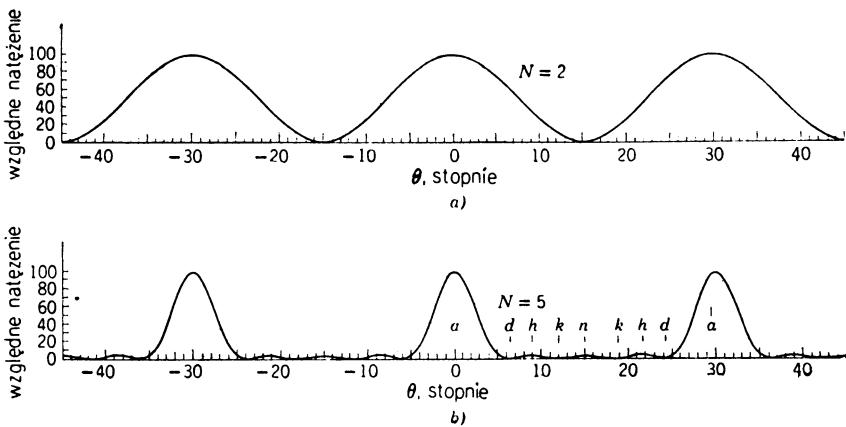
zmienia odległości między (głównymi) maksimami prążków interferencyjnych, jeśli tylko  $d$  i  $\lambda$  pozostają niezmienione, (b) wyostrza maksima (główne) i (c) powoduje wystąpienie małych, wtórnych maksimów między maksimami głównymi. Między każdą parą sąsiednich maksimów głównych na rys. 47-2b występują trzy takie wtórne maksima (lecz nie są one łatwo obserwowlane).

Maksimum główne na rys. 47-1 wystąpi, gdy różnica dróg między promieniami z sąsiednich szczelin ( $= d \sin \theta$ ) dana będzie przez

$$d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots \text{ (maksimum główne)}, \quad (47-1)$$

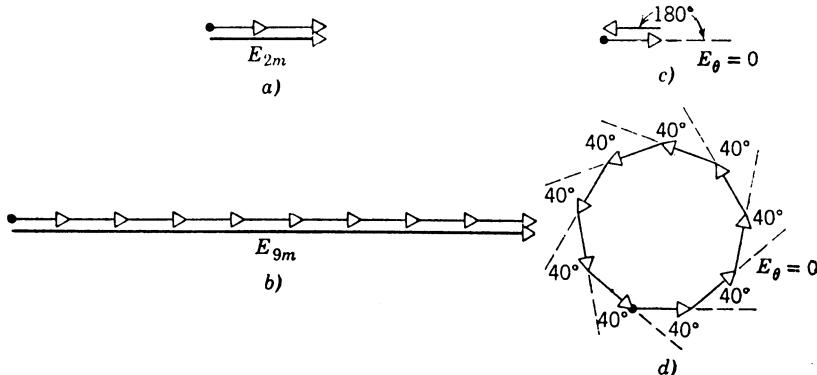
gdzie  $m$  nazywamy *rzędem widma*. Równanie to jest identyczne z równaniem (45-1) określającym położenie maksimów natężeń dla dwu szczelin. *Położenia maksimów (głównych)*

są określone wyłącznie stosunkiem  $\lambda/d$  i nie zależą od  $N$ . Podobnie jak dla dwu szczelin stosunek  $a/\lambda$  określa względne natężenie maksimów głównych, lecz nie zmienia położenia w widoczny sposób.



Rys. 47-3. Wyliczony rozkład natężeń dla siatek (a) z dwiema i (b) z pięcioma szczelinami, dla tych samych wartości  $d$  i  $\lambda$ . Rysunek pokazuje wyostrzenie maksimów głównych i pojawienie się słabych maksimów wtórnych dla  $N > 2$ . Litery na dolnym rysunku odnoszą się do rys. 47-5. Na tym rysunku, w przeciwieństwie do rys. 47-2 przedstawione są tylko trzy prążki, rozmieszczone wokół  $\theta = 0$  z rys. 47-1. Mogliśmy więc przyjąć w zasadzie równe natężenia dla każdego z pokazanych maksimów głównych

Zmianę kształtu maksimów głównych wraz ze wzrostem liczby  $N$  można wyjaśnić w sposób graficzny przy użyciu strzałek fazowych. Rysunki 47-4a i b pokazują ich ułożenie dla jednego z maksimów głównych, dla siatek o dwu i dziewięciu szczelinach. Małe strzałki przedstawiają amplitudy zaburzeń falowych padających na ekran w miejscach odpowiadających maksimum. Dla uproszczenia rozważyliśmy jedynie środkowe maksimum główne, dla którego  $m = 0$ , a więc i  $\theta = 0$ , w równaniu (47-1).



Rys. 47-4. Wykresy (a) i (b) pokazują warunki panujące w miejscu występowania środkowego maksimum głównego dla siatek o odpowiednio dwu i dziewięciu szczelinach. Wykresy (c) i (d) pokazują warunki panujące w miejscach występowania minimum o zerowym natężeniu znajdujących się po obu stronach środkowego maksimum głównego. Przy przejściu od (a) do (c) różnica faz między falami wychodzącymi z sąsiednich szczelin zmienia się o  $180^\circ$  ( $\Delta\varphi = 2 \cdot \frac{1}{2}\pi$ ); przy przejściu od (b) do (d) zmienia się ona o  $40^\circ$  ( $\Delta\varphi = 2 \cdot \frac{1}{9}\pi$ )

Przyjmijmy, że kąt  $\Delta\theta_0$  odpowiada miejscom o zerowym natężeniu, znajdującym się po obu stronach środkowego maksimum głównego. Rysunki 47-4c i d pokazują strzałki fazowe w tych punktach. Różnica faz między falami wychodzącymi z sąsiednich szczelin, równa零 dla środkowego maksimum głównego, musi być zwiększena o tak dobrane  $\Delta\varphi$ , by zespół strzałek fazowych tworzył obwód zamknięty dając wypadkowe natężenie równe zero. Dla  $N = 2$ , różnica faz  $\Delta\varphi = 2 \cdot \frac{1}{2}\pi (= 180^\circ)$ ; dla  $N = 9$ ,  $\Delta\varphi = 2 \cdot \frac{1}{9}\pi (= 40^\circ)$ . W przypadku ogólnym  $\Delta\varphi = 2\pi/N$ .

Ten wzrost różnicy faz między sąsiednimi falami odpowiada wzrostowi różnicy dróg  $\Delta l$  danemu przez

$$\frac{\text{różnica faz}}{2\pi} = \frac{\text{różnica dróg}}{\lambda},$$

czyli

$$\Delta l = \frac{\lambda}{2\pi} \Delta\varphi = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{2\pi}{N} = \frac{\lambda}{N}.$$

Jednakże, jak widać na rys. 47-1, różnica dróg  $\Delta l$  dla pierwszego minimum wynosi  $d \sin \Delta\theta_0$ , wobec czego można napisać, że

$$d \sin \Delta\theta_0 = \frac{\lambda}{N}, \quad \text{czyli} \quad \sin \Delta\theta_0 = \frac{\lambda}{Nd}.$$

Ponieważ dla realnych siatek  $N \gg 1$ , więc  $\sin \Delta\theta_0$  jest zazwyczaj bardzo mały (prążki są ostre) i można zastąpić go z dobrym przybliżeniem przez  $\Delta\theta_0$  wyrażone w radianach; zatem

$$\Delta\theta_0 = \frac{\lambda}{Nd} \quad (\text{środkowe, główne maksimum}). \quad (47-2)$$

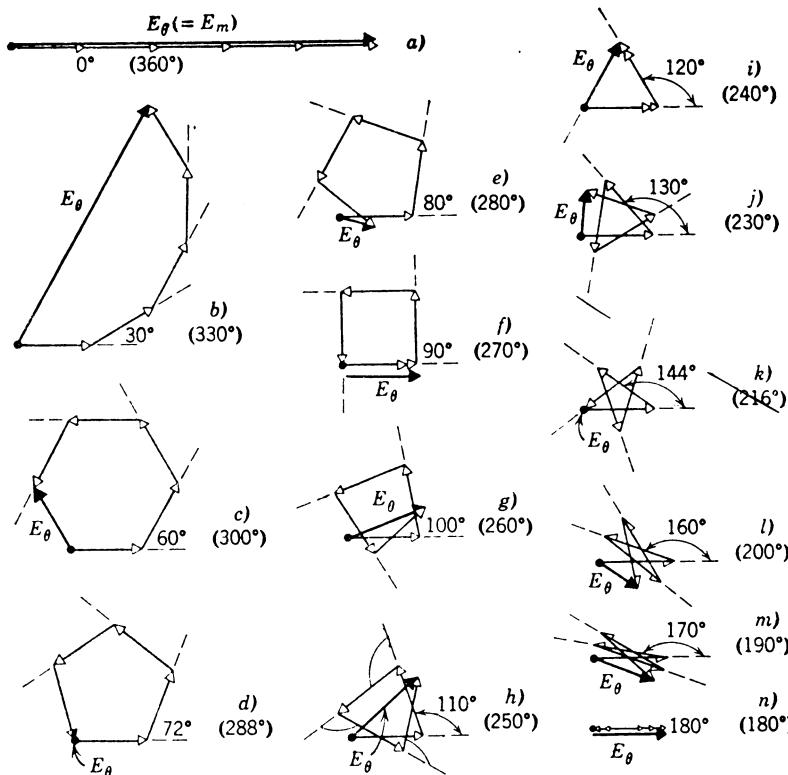
Z równania tego widać, że ze wzrostem  $N$ , przy stałych  $\lambda$  i  $d$ , kąt  $\Delta\theta_0$  maleje, co oznacza, że środkowe maksimum główne staje się coraz bardziej ostre.

Podamy teraz bez dowodu (patrz zadanie 10), że odległość kątowa między położeniem maksimum głównego rzędu  $m$  i sąsiedniego minimum, dla maksimów głównych różnych od środkowego (tzn. dla  $m \neq 0$ ), wynosi

$$\Delta\theta_m = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta_m} \quad (\text{dowolne maksimum główne}). \quad (47-3)$$

Dla środkowego maksimum głównego mamy  $m = 0$ ,  $\theta_m = 0$  i  $\Delta\theta_m = \Delta\theta_0$ , czyli równanie (47-3) staje się identyczne, jak być powinno, z równaniem (47-2).

Pochodzenie wtórnych maksimów występujących przy  $N > 2$  można również wyjaśnić przy pomocy metody strzałek fazowych. Na rysunku 47-5a pokazano warunki występowania środkowego maksimum głównego dla siatki o pięciu szczelinach. Wszystkie wektory są w jednakowej fazie. Gdy oddalamy się od maksimum środkowego, kąt  $\theta$  z rys. 47-1 wzrasta od zera, a różnica faz między sąsiednimi wektorami wzrasta od zera do  $\Delta\varphi = (2\pi/\lambda)d \sin \theta$ . Kolejne rysunki pokazują, jak zmienia się końcowa amplituda  $E_\theta$  fali jako funkcja  $\Delta\varphi$ . Czytelnik powinien sprawdzić graficznie, że każdy z rysunków określa warunki zarówno dla  $\Delta\varphi$ , jak i dla  $2\pi - \Delta\varphi$ . A więc zaczynamy od  $\Delta\varphi = 0$ , przechodzimy



Rys. 47-5. Wykresy oglądane w kolejności od (a) do (n) i następnie z powrotem od (n) do (a) pokazują jak zmienia się rozkład natężeń dla siatki o pięciu szczelinach przy przejściu od środkowego maksimum głównego do sąsiedniego maksimum głównego. Obok rysunków podana została różnica faz między falami wychodzącymi z sąsiednich szczelin przy oglądaniu w kolejności od (n) do (a). Maksima główne występują w przypadku (a), maksima wtórne w przypadkach (h) i (n), punkty o zerowym natężeniu w przypadkach (d) i (k). Porównać z rys. 47-3b

do  $\Delta\varphi = 180^\circ$ , a następnie oglądamy w odwrotnej kolejności podany ciąg rysunków zgodnie z różnicami faz podanymi w nawiasach, aż do osiągnięcia  $\Delta\varphi = 360^\circ$ . Ten ciąg rysunków odpowiada przechodzeniu poprzez rozkład natężeń od środkowego maksimum głównego do sąsiedniego maksimum głównego. Na rysunku 47-5, który należy porównać z rys. 47-3b, widać, że dla  $N = 5$  istnieją trzy wtórne maksima odpowiadające  $\Delta\varphi = 110^\circ$ ,  $180^\circ$  i  $250^\circ$ . Czytelnik powinien przeprowadzić podobną analizę dla  $N = 3$  i pokazać, że wówczas występuje tylko jedno maksimum wtórne. W realnych siatkach dyfrakcyjnych, zawierających zazwyczaj od 10 000 do 50 000 „szczelin”, wtórne maksima leżą tak blisko maksimów głównych i mają tak małe natężenie, że nie można ich rozróżnić doświadczalnie.

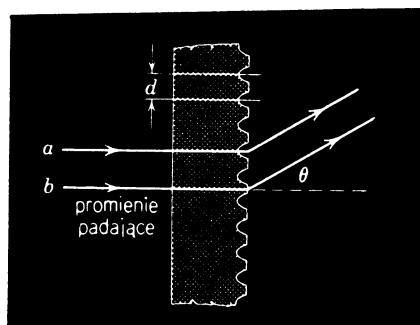
### 47-3. Siatki dyfrakcyjne

Odstęp między szczelinami siatki dyfrakcyjnej (*stala siatki*)  $d$  dla typowych siatek zawierających 12 000 „szczelin” na jeden cal, czyli 2,54 cm szerokości siatki wynosi  $2,54 \text{ cm}/12\,000$ , czyli 2100 nm. Siatki dyfrakcyjne są często używane do pomiarów długości

fali i do badań struktury i natężenia linii widmowych. Niewiele przyrządów wniosło więcej do nowoczesnej fizyki, niż siatki dyfrakcyjne.

Siatki dyfrakcyjne robi się przez nacinanie równoodległych, równoległych rowków na szkle lub metalowej płycie\* za pomocą diamentowego ostrza, którego ruch jest automatycznie sterowany przez skomplikowaną maszynę kreślarską. Sporządziszy taką wzorcową siatkę dyfrakcyjną, można robić następne siatki pokrywając je roztworem kolodium, a następnie zdejmując stwardniałą warstwę. Takie stwardniałe kolodium, przyklejone do płaskiej płytki szklanej czy innej podkładki, jest dobrą siatką dyfrakcyjną.

Rysunek 47-6 pokazuje przekrój typowej siatki naciętej na szkle. W siatce z rysunku 47-1 szczeliny były poprzedzielane nieprzezroczystymi paskami; amplituda zaburzeń falowych zmieniała się w sposób periodyczny spadając do zera na nieprzezroczystych paskach przy przesuwaniu się wzdłuż siatki. Siatka z rysunku 47-6 jest wszędzie przezroczysta, tak że wzdłuż niej występują tylko niewielkie zmiany amplitudy. Nacięcia powodują periodyczne zmiany *optycznej grubości siatki*. Promienie przechodzące przez



Rys. 47-6. Powiększony przekrój siatki dyfrakcyjnej naciętej na szkle. Takie siatki, w których faza wychodzącej fali zmienia się wzdłuż siatki, nazywamy *siatkami fazowymi*

siatkę między nacięciami (*b* na rys. 47-6) mają do przebycia dłuższą drogę, licząc w długościach fali, niż promienie przechodzące przez środek nacięć (*a* na rys. 47-6). Powoduje to periodyczne zmiany fazy przy przesuwaniu się wzdłuż siatki prostopadle do nacięć. Działanie siatek odbijających również zależy od periodycznych zmian fazy fali odbitej; zmiana amplitudy jest tu bardzo mała. Położenie maksymów głównych dla *siatek fazowych* przy założeniu, że światło pada na siatkę pod kątem prostym, dane jest przez to samo wyrażenie, co znalezione wcześniej dla idealnych siatek amplitudowych (szczelinowych), czyli przez

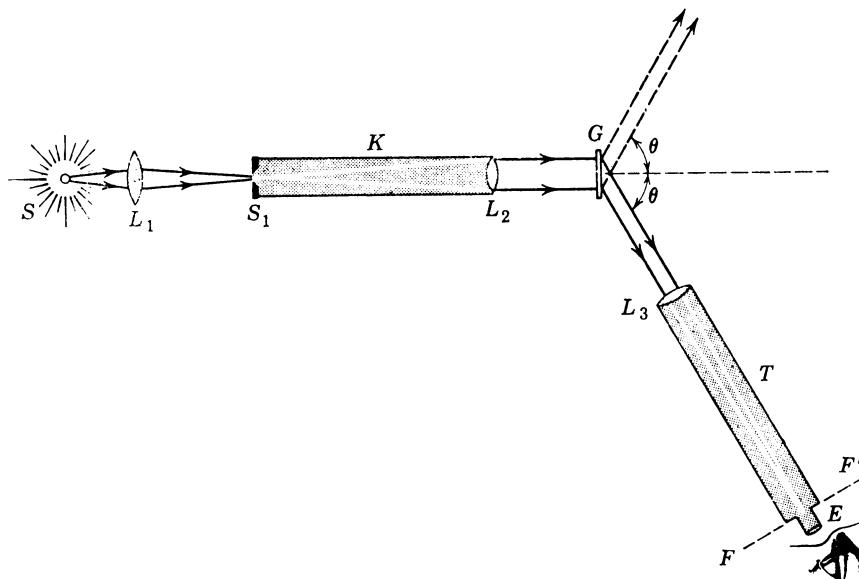
$$ds \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

gdzie *d* jest odlegością między nacięciami, a liczba całkowita *m* jest nazywana *rzędem danego maksimum głównego*. W zasadzie wszystkie siatki używane w obszarze światła widzialnego (zarówno siatki typu transmisyjnego (rys. 47-6), jak i odbiciowego) są siatkami fazowymi.

Rysunek 47-7 pokazuje prosty spektroskop z siatką dyfrakcyjną użyty do obserwacji widma źródła światła emitującego pewną skończoną liczbę różnych długości fal, czyli *linii widmowych*. Światło wychodzące ze źródła *S* jest ogniskowane przez soczewkę *L*<sub>1</sub> na szczelinie *S*<sub>1</sub> umieszczonej w płaszczyźnie ogniskowej soczewki *L*<sub>2</sub>. Równoległa wiązka światła wychodząca z kolimatora *K* pada na siatkę dyfrakcyjną *G*. Równoległa wiązka światła związaną z określonym maksimum interferencyjnym wychodzi pod kątem *θ* i pada na soczewkę *L*<sub>3</sub>, która skupia ją w płaszczyźnie ogniskowej *F*-*F'*. Obraz powstałego na tej płaszczyźnie ogląda się przy użyciu układu soczewek *E* zwanego okularem. Po obu

\* Siatki metalowe nazywane są *siatkami odbijającymi* (refleksyjnymi), gdyż interferencja występuje tu w świetle odbitym, a nie w przechodzącym. Dla zapoznania się z wysoce skomplikowaną techniką wykonania siatek patrz: A. G. Ingoll, Ruling Engines, *Scientific American*, June 1952 oraz E. W. Palmer, J. F. Verrill, Diffraction Gratings, *Contemporary Physics*, May 1968.

stronach położenia środkowego powstaje symetryczny obraz interferencyjny (na rysunku oznaczony linią przerywaną). Całe widmo można obejrzeć obracając lunetkę  $T$ . Instrumenty używane w badaniach naukowych lub przemyśle są bardziej skomplikowane niż prosta aparatura pokazana na rys. 47-7. Korzysta się w nich z zapisu fotograficznego



Rys. 47-7. Prosty typ spektroskopu z siatką dyfrakcyjną używany do analizy długości fal światła emitowanego przez źródło  $S$

lub fotoelektrycznego. Są to tzw. *spektrografy*. Rysunek 49-12 pokazuje mały fragment widma żelaza otrzymany przy użyciu światła z łuku wytworzzonego między elektrodami żelaznymi, badanego spektrografem typu badawczego z zapisem fotograficznym. Każda linia na tym rysunku odpowiada innej długości fali wyemitowanej ze źródła.

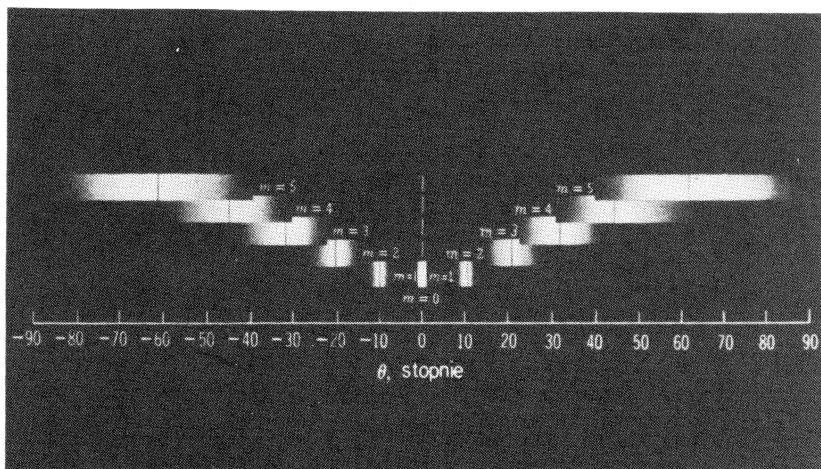
Instrumenty z siatkami dyfrakcyjnymi mogą być użyte do absolutnych pomiarów długości fali, gdyż stałą siatki  $d$  (z rys. 47-1) można dokładnie zmierzyć pod mikroskopem. Zwykle w takich instrumentach powstaje szereg widm odpowiadających  $m = \pm 1, \pm 2$  itd. w równaniu (47-1) (patrz rys. 47-8). Może to spowodować pewne trudności, jeżeli widma zachodzą na siebie. Ponadto występowanie wielu widm powoduje zmniejszenie natężenia określonej linii widmowej, gdyż jej energia rozkładającej się na szereg widm.

Ta niedogodność instrumentów z siatkami dyfrakcyjnymi może być usunięta przez takie uformowanie profilu rowków, żeby znaczna część światła była kierowana do widma określonego rzędu, po jednej stronie (dla danej długości fali). Ta technika, zwana *rozjaśnianiem*, tak zwiększa własności dyfrakcyjne poszczególnych rowków (przez uformowanie ich profilu), że światło o długości fali  $\lambda$  rozproszone przez pojedynczy rowek ma ostry pik o maksymalnym natężeniu przy wybranym kącie  $\theta$  ( $\neq 0$ ).

Siatki mogą oczywiście rozdzielać długości fali, które mają ciągły rozkład, niekoniecznie zawierający ostre linie widmowe (przykładem promieniowanie rozgrzanego do czerwoności pogrzebacza). W Planetarium Flandrau przy Uniwersytecie Stanowym w Ari-

zonie zwiedzający mogą oglądać „na żywo” widmo\* (o  $m = 1$ ) widzialnego promieniowania słonecznego; ma ono 8 stóp (ok. 2,5 m) długości i około 5,5 cala (14 cm) wysokości.

Światło można rozkładać na poszczególne długości fali przez zastąpienie siatki dyfrakcyjnej z rys. 47-7 pryzmatem. W spektrografie pryzmatycznym każda długość fali padającej



Rys. 47-8. Przykład 1. Widmo światła białego widziane w spektroskopie z siatką dyfrakcyjną, taką jak na rys. 47-7. W celu zwiększenia przejrystości rysunku widma różnych rzędów określone przez liczbę  $m$  przesunięto pionowo względem siebie, aczkolwiek w rzeczywistości nie są one tak przesunięte. Linia środkowa w każdym widmie odpowiada  $\lambda = 550$  nm.

wiązki jest odchylana o inny, określony kąt  $\theta$ , zależny od współczynnika załamania pryzmatu dla tej długości fali. Krzywe, takie jak na rys. 43-2 przedstawiającym zależność współczynnika załamania topionego kwarcu od długości fali, pokazują, że im krótsza jest długość fali, tym większy jest kąt odchylenia  $\theta$ . Krzywe takie zależą od rodzaju substancji i mogą być znalezione doświadczalnie. Przyrządy pryzmatyczne nie nadają się do dokładnych, bezwzględnych pomiarów długości fali, gdyż współczynnik załamania materiału, z którego zrobiony jest pryzmat, zazwyczaj nie jest znany zbyt dokładnie. Zarówno przyrządy pryzmatyczne, jak i przyrządy z siatką dyfrakcyjną umożliwiają dokładne porównanie długości fali przy użyciu odpowiedniego widma porównawczego, takiego jak na rys. 49-12, w którym dokonano dokładnego, bezwzględnego określenia długości fal linii widmowych. Przyrząd pryzmatyczny ma tę przewagę nad przyrządem siatkowym, że energia światła koncentruje się w nim na pojedynczym widmie, przez co otrzymuje się jaśniejsze linie.

**Przykład 1.** Siatka dyfrakcyjna mająca 8000 nacięć na 2,54 cm jest oświetlona przez białe światło, padające prostopadle. Opisać otrzymany obraz dyfrakcyjny (przyjąć, że światło ma fale o długościach leżących w obszarze od 400 do 700 nm).

\* Patrz: O. Richard Norton, Eight Feet of the Solar Spectrum, *Sky and Telescope*, September 1977. Nawet w tym przypadku widać ostre linie widmowe. Pojawiają się one jako linie absorpcyjne (a nie emisjne), związane z przechodzeniem promieniowania Słońca przez jego atmosferę. Są to tzw. (ciemne) linie Fraunhofera. Pierwiastek hel (od greckiego słowa *helios* oznaczającego Słońce) został odkryty przy analizie tych linii. Jest to jedyny pierwiastek odkryty po raz pierwszy nie na Ziemi.

Stała siatki  $d$  wynosi 2,54 cm/8000, czyli 3170 nm. Maksimum środkowe, czyli maksimum zerowego rzędu odpowiada  $m = 0$  w równaniu (47-1). Dla kąta  $\theta = 0$  wszystkie długości fal znajdujące się w padającym świetle są nałożone na siebie, co widać na rys. 47-8.

Obraz dyfrakcyjny pierwszego rzędu odpowiada  $m = 1$  w równaniu (45-1). Linia 4000 nm pojawi się pod kątem danym przez

$$\theta = \arcsin \frac{m\lambda}{d} = \arcsin \frac{1 \cdot 400 \text{ nm}}{3170 \text{ nm}} = \arcsin 0,126 = 7,3^\circ.$$

W ten sam sposób można obliczyć, że linia 700 nm będzie ugięta pod kątem  $12,8^\circ$  i podobnie można znaleźć cały obraz z rys. 47-8. Należy zauważyć, że *widmo pierwszego rzędu* ( $m = 1$ ) nie zachodzi na innego, a widma drugiego, trzeciego i czwartego rzędu zachodzą na siebie.

**Przykład 2.** Siatka dyfrakcyjna ma  $10^4$  nacięć równomiernie rozłożonych na 2,54 cm. Pada na nią prostopadle żółte światło lampy sodowej. W świetle tym występują dwie blisko położone linie (dobrze znany *duplet sodowy*) o długościach fal 589,00 i 589,59 nm. (a) Pod jakim kątem będzie występować maksimum pierwszego rzędu dla pierwszej z tych linii?

Stała siatki  $d$  wynosi 2,54 cm/10 000, czyli 2540 nm. Maksimum pierwszego rzędu otrzymujemy z równania (47-1) przyjmując  $m = 1$ . Stąd

$$\theta = \arcsin \frac{m\lambda}{d} = \arcsin \frac{1 \cdot 589 \text{ nm}}{254 \text{ nm}} = \arcsin 0,232 = 13,3^\circ.$$

(b) Jaka jest odległość kątowa między maksimami pierwszego rzędu dla tych linii?

Najprostszym sposobem znalezienia tej odległości jest powtórzenie tego obliczenia dla  $\lambda = 589,59$  nm i odjęcie tych dwóch kątów. Trudność, którą najłatwiej można zauważać przeprowadzając to obliczenie polega na tym, że dla otrzymania dobrej wielkości różnicy tych kątów musimy liczyć używając dużej liczby cyfr znaczących. Aby obliczyć tę różnicę *bezpośrednio*, napiszmy wielkość  $\sin \theta$  z równania (47-1) i zrozniczkujmy otrzymane wyrażenie przyjmując za zmienne  $\theta$  i  $\lambda$ .

$$\sin \theta = \frac{m\lambda}{d}, \quad \cos \theta d\theta = \frac{m}{d} d\lambda.$$

Jeśli długości fal mało się różnią, jak w tym przypadku,  $d\lambda$  można zastąpić odpowiednią różnicą długości fal  $\Delta\lambda$ ;  $d\theta$  przejdzie wówczas w poszukiwaną wielkość  $\Delta\theta$ . W ten sposób otrzymujemy

$$\Delta\theta = \frac{m\Delta\lambda}{d\cos\theta} = \frac{1 \cdot 0,59 \text{ nm}}{254 \text{ nm} \cdot \cos 13,3^\circ} = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 0,014^\circ.$$

Należy podkreślić, że chociaż długości fal zawierają pięć cyfr znaczących, to nasze obliczenia przeprowadzone w ten sposób wymagały tylko dwu, co znacznie uprościło rachunki.

Wielkość  $d\theta/d\lambda$ , zwana *dyspersją kątową*  $D$  siatki dyfrakcyjnej, jest wynikiem pomiaru odległości kątowej dwu linii utworzonych przez dwie padające fale monochromatyczne, których długości fal mało się od siebie różnią. Z tego przykładu widzimy, że

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta}. \tag{47-4}$$

#### 47-4. Zdolność rozdzielcza siatki dyfrakcyjnej

Aby móc rozróżnić fale świetlne, których długości niewiele się różnią, maksima dla tych długości powstałe na siatce dyfrakcyjnej powinny być możliwie jak najwęższe. Mówiąc inaczej, siatka dyfrakcyjna powinna mieć wysoką *zdolność rozdzielczą*  $R$  zdefiniowaną jako

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}, \tag{47-5}$$

gdzie  $\lambda$  jest średnią długością fali dwu linii widmowych ledwie rozróżnialnych, a  $\Delta\lambda$  jest różnicą długości fal między nimi. Im mniejsze jest  $\Delta\lambda$ , tym bliższe siebie linie mogą być rozróżnione; czyli tym większa jest zdolność rozdzielcza  $R$  siatki dyfrakcyjnej. Właśnie w celu osiągnięcia wysokiej zdolności rozdzielczej robi się siatki o wielu nacięciach.

Zdolność rozdzielcza siatki dyfrakcyjnej jest zazwyczaj określana przez ten sam warunek (czyli przez kryterium Rayleigha), jakiego używaliśmy w paragrafie 46-5 dla określenia zdolności rozdzielczej soczewek. Jeśli dwa maksima główne mają być ledwo rozróżnialne, muszą mieć odległość kątową  $\Delta\theta$  taką, by maksimum jednej linii przypadało na pierwsze minimum drugiej; patrz rys. 46-11. Jeśli zastosujemy to kryterium, to możemy pokazać, że

$$R = Nm, \quad (47-6)$$

gdzie  $N$  jest całkowitą ilością nacięć, a  $m$  jest rzędem widma. Jak można było oczekiwac dla środkowego maksimum głównego ( $m = 0$ ) zdolność rozdzielcza wynosi 0, gdyż wszystkie fale są nie odchylone.

Wyprowadźmy równanie (47-6). Odległość kątowa między dwoma maksimami głównymi, których długości fal różnią się o  $\Delta\lambda$ , na podstawie równania (47-4) wynosi

$$\Delta\theta = \frac{m\Delta\lambda}{d\cos\theta}. \quad (47-4)$$

Kryterium Rayleigha (paragraf 46-5) głosi, że ta odległość ma być równa odległości kątowej między maksimum głównym a sąsiednim minimum. Na podstawie równania (47-3), po opuszczeniu wskaźnika  $m$  przy  $\cos\theta_m$ , wynosi ona

$$\Delta\theta_m = \frac{\lambda}{dN\cos\theta}. \quad (47-3)$$

Porównując równanie (47-4) i (47-3) otrzymujemy

$$R (= \lambda/\Delta\lambda) = Nm,$$

czyli poszukiwaną zależność.

**Przykład 3.** Ile nacięć musi mieć siatka z przykładu 2, by można za jej pomocą ledwie rozróżnić dublet sodowy w widmie trzeciego rzędu?

Z równania (47-5), wymagana zdolność rozdzielcza musi wynosić

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{589,00 \text{ nm}}{(589,59 - 589,00) \text{ nm}} = 1000.$$

Z równania (47-6) otrzymujemy, że ilość potrzebnych nacięć wynosi

$$N = \frac{R}{m} = \frac{1000}{3} = 330.$$

Jest to bardzo umiarkowane wymaganie.

Zdolność rozdzielcza siatki dyfrakcyjnej nie musi być związana bezpośrednio z jej dyspersją. Tablica 47-1 zawiera charakterystyczne wielkości dla trzech siatek oświetlonych przez światło o  $\lambda = 589$  nm, dla widma pierwszego rzędu ( $m = 1$  w równaniu (47-1)).

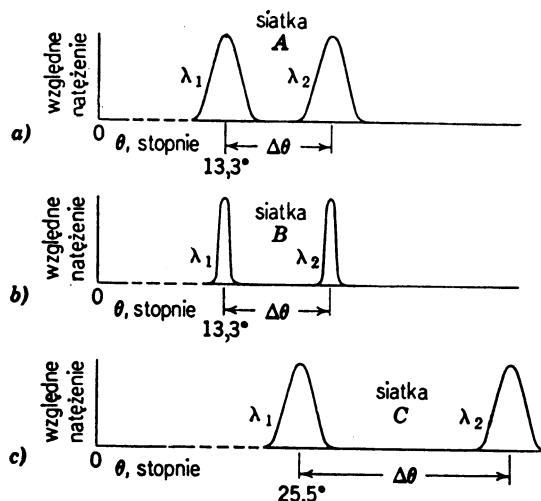
Czytelnik powinien sprawdzić, że podane w tej tablicy wielkości  $D$  i  $R$  można wyliczyć z równań (47-4) i (47-6).

W warunkach podanych w tablicy 47-1 siatki dyfrakcyjne  $A$  i  $B$  mają tę samą dyspersję, a siatki  $A$  i  $C$  tę samą zdolność rozdzielczą. Rysunek 47-9 pokazuje rozkłady natążen otrzymywane przez te siatki dla dwu padających fal o długościach fali  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ , które są

Tablica 47-1. Charakterystyczne wielkości dla trzech siatek dyfrakcyjnych ( $\lambda = 589$  nm,  $m = 1$ )

Siatka	$N$	$d$ , nm	$\theta$	$R$	$D \cdot 10^{-2}$ stopnia/nm
A	10 000	2540	13,3°	10 000	2,32
B	20 000	2540	13,3°	20 000	2,32
C	10 000	1370	25,5°	10 000	4,64

bliskie  $\lambda = 589$  nm. Siatka B mająca wysoką zdolność rozdzielczą daje wąskie maksimum natężenia i lepiej się nadaje do rozróżniania linii nawet o znacznie bliższych długościach fal niż podane na rys. 47-9. Siatka C, mająca wysoką dyspersję, tworzy dwa razy większą odległość między falami  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  niż siatka B.



Rys. 47-9. Rozkład natężen dla światła o długościach fal  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  bliskich 589 nm, padającego na siatki opisane w tablicy 47-1. Siatka B ma największą zdolność rozdzielczą, a siatka C największą dyspersję

**Przykład 4.** Siatka z przykładu 1 ma 8000 linii. Jest ona oświetlona światłem pochodzące z wyładowania w parach rtęci. (a) Jaka jest dyspersja w widmie trzeciego rzędu w sąsiedztwie intensywnej linii zielonej ( $\lambda = 546$  nm)?

Ponieważ  $d = 3170$  nm, z równania (47-1) mamy

$$\theta = \arcsin \frac{m\lambda}{d} = \arcsin \frac{3 \cdot 546 \text{ nm}}{3170 \text{ nm}} = \arcsin 0,517 = 31,1^\circ.$$

Z równania (47-4) otrzymujemy

$$D = \frac{m}{d \cos \theta} = \frac{3}{3170 \text{ nm} \cdot \cos 31,1^\circ} = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ rad/nm} = 6,3 \cdot 10^{-2} \text{ stop./nm}.$$

(b) Ile wynosi zdolność rozdzielczą siatki dla widma piątego rzędu? Z równania (47-6) mamy

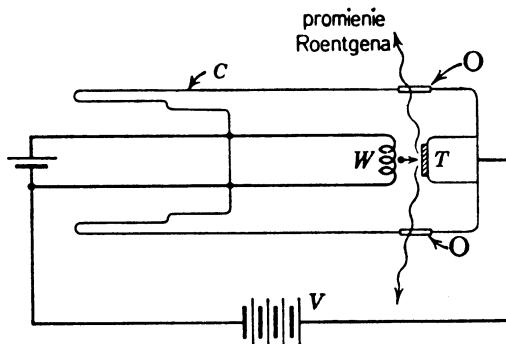
$$R = Nm = 8000 \cdot 5 = 40000.$$

A więc w pobliżu  $\lambda = 546$  nm można rozróżnić fale różniące się długością o  $\Delta\lambda$ , przy czym  $\Delta\lambda$  dane jest równaniem (47-5), czyli

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{R} = \frac{546 \text{ nm}}{40\,000} = 0,014 \text{ nm}.$$

#### 47-5. Dyfrakcja promieni Roentgena (promieni X)

Rysunek 47-10 pokazuje, w jaki sposób wytwarzane są promienie Roentgena, gdy elektryny z żarzącego się włókna  $W$  są przyspieszane przez różnicę potencjałów  $V$  i uderzają w tarczę metalową  $T$ . Promienie X są promieniowaniem elektromagnetycznym o długościach fal rzędu 0,1 nm. Porównajmy tę długość z długością fali środkowej części widma widzialnego, 550 nm. W przypadku tak małej długości fali zwykle używane standardowe, optyczne



Rys. 47-10. Powstawanie promieni Roentgena, gdy elektryny z żarzącego się włókna  $W$ , przyspieszane przez różnicę potencjałów  $V$ , są hamowane na metalowej tarczy  $T$ .  $O$  jest „okienkiem” — przezroczystym dla promieni rentgenowskich w opróżnionym z powietrza pojemniku metalowym  $C$

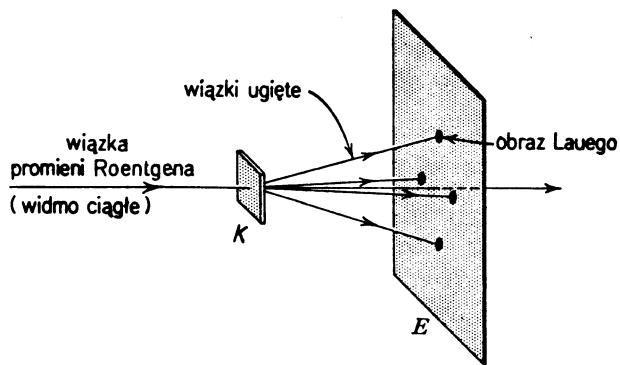
siatki dyfrakcyjne nie mogą być wykorzystane. Na przykład dla  $\lambda = 0,1$  nm i  $d = 3000$  nm na podstawie równania (47-1) widzimy, że maksimum pierwszego rzędu wystąpi pod kątem

$$\theta = \arcsin \frac{m\lambda}{d} = \arcsin \frac{1 \cdot 0,1 \text{ nm}}{3 \cdot 10^3 \text{ nm}} = \arcsin 0,33 \cdot 10^{-4} = 0,002^\circ.$$

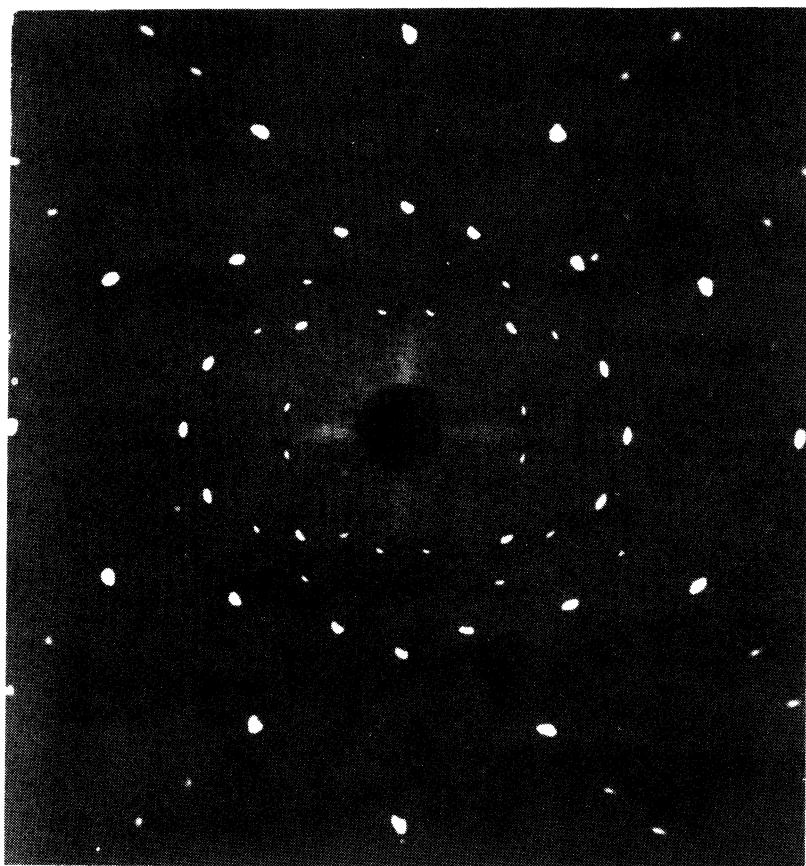
Ten kąt jest zbyt bliski środkowego maksimum, by można było te maksima praktycznie rozróżnić. Pożądana jest w tym przypadku siatka o  $d \approx \lambda$ , lecz ponieważ długości fal promieni Roentgena są w przybliżeniu równe średnicom atomów, takich siatek nie można konstruować mechanicznie.

W 1912 roku przyszło na myśl niemieckiemu fizykowi Maxowi von Laue, że krystaliczne ciało stałe zawierające regularny zespół atomów może tworzyć naturalną, trójwymiarową „siatkę dyfrakcyjną” dla promieni Roentgena. Rysunek 47-11 pokazuje, że jeśli skolimowana wiązka promieni Roentgena o ciągłym widmie długości fal pada na kryształ, taki jak np. chlorek sodu, powstają intensywne wiązki promieni Roentgena rozchodzące się w pewnych ścisłe określonych kierunkach. Wiązki te powstają w wyniku interferencji fal ugiętych na licznych centrach rozpraszających, z których zbudowany jest kryształ. Jeśli takie wiązki padną na kliszę fotograficzną, to utworzą na niej zespół punktów zwany *obrazem Lauego*. Rysunek 47-12 będący fotografią takiego obrazu pokazuje, że hipoteza Lauego jest słuszna. Na podstawie dokładnego zbadania położenia oraz natężen punktów Lauego\* można określić strukturę kryształu; w podobny sposób możemy

\* Inne układy doświadczalne w dużym stopniu wyparły technikę Lauego, jednakże zasada pozostała nie zmieniona (patrz pyt. 21).



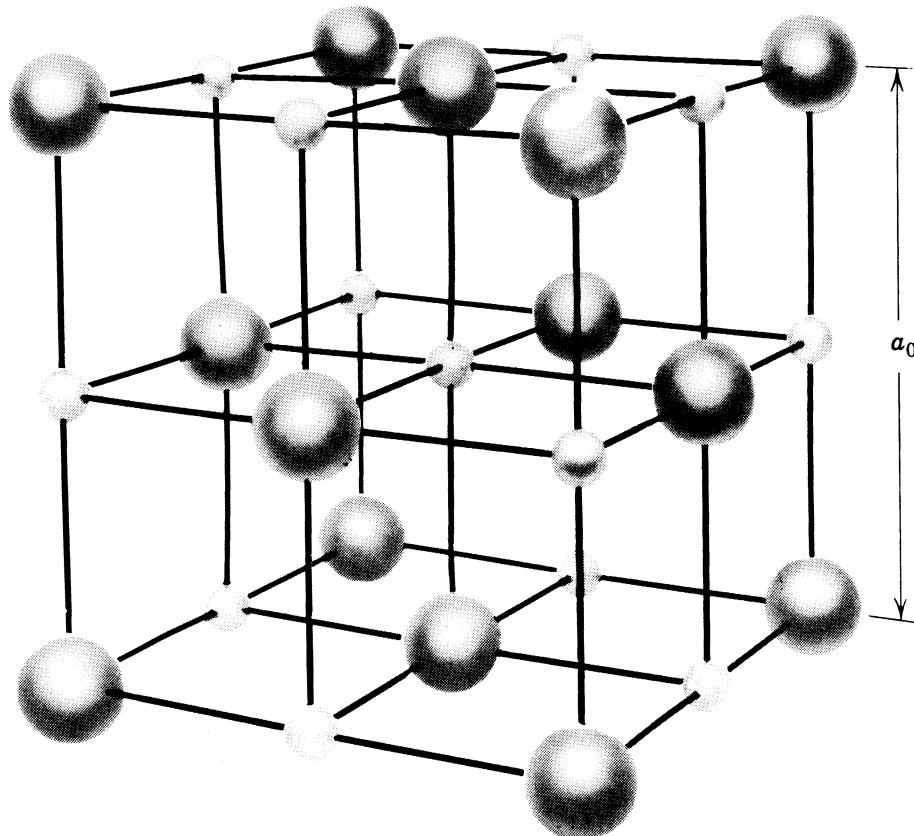
Rys. 47-11. Niemonochromatyczna wiązka promieni Roentgena pada na kryształ  $K$ , np. NaCl. W pewnych kierunkach występują rozproszone wiązki o dużym natężeniu tworząc na kliszy fotograficznej  $E$  tak zwany obraz Lauego



Rys. 47-12. Dyfrakcyjny obraz Lauego dla chlorku sodu i promieni Roentgena. Do jego otrzymania użyto kryształu zwykłej soli kuchennej. (Dzięki uprzejmości W. Arringtona i J. L. Katza, X-ray Laboratory, Rensselaer Polytechnic Institute)

określić strukturę siatki dyfrakcyjnej (czyli szczegóły profilu jej szczezin) przez zbadanie położenia i rozkładu natężenia linii w obrazie interferencyjnym.

Rysunek 47-13 pokazuje, w jaki sposób rozmieszczone są atomy sodu i chloru (ściślej mówiąc jony  $\text{Na}^+$  i  $\text{Cl}^-$ ) tworzące kryształ chlorku sodu. Taki układ atomów mający *strukturę sześcienną* jest jednym z wielu typów ustawień atomów spotykanych w ciałach stałych. Model przedstawia komórkę elementarną chlorku sodu. Jest to najmniejsza jednostka, z której można zbudować kryształ przez odkładanie jej w trzech prostopadłych kierunkach. Czytelnik powinien sprawdzić, że nie może istnieć mniejszy zespół atomów mających te właściwości. Dla chlorku sodu długość boku sześcianu komórki elementarnej wynosi 0,562737 nm.

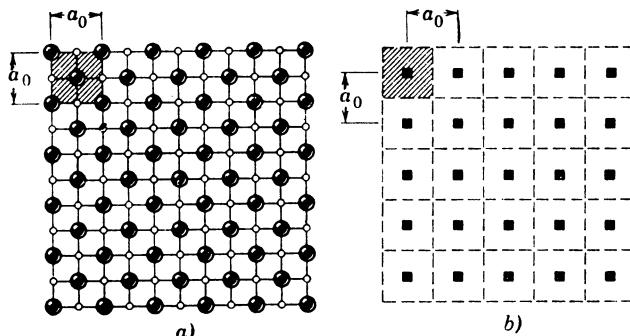


Rys. 47-13. Model rozmieszczenia jonów  $\text{Na}^+$  i  $\text{Cl}^-$ , tworzących elementarną komórkę  $\text{NaCl}$ . Małe kulki przedstawiają jony sodu, duże — jony chloru. Krawędź  $a_0$  elementarnej (sześciennnej) komórki wynosi 0,562737 nm

Każda komórka elementarna chlorku sodu zawiera 4 jony sodu i cztery jony chloru z nimi związane. Jon sodu z rys. 47-13 znajdujący się w środku należy całkowicie do narysowanej komórki. Każdy z pozostałych dwunastu jonów sodu należy również do trzech sąsiednich komórek elementarnych, tak że tylko jedna czwarta każdego jonu należy do narysowanej komórki. Całkowita liczba jonów sodu w komórce wynosi  $1 + \frac{1}{4} \cdot 12 = 4$ . Podobnie rozumując czytelnik może się przekonać, że aczkolwiek na rys. 47-13 znajduje

się czternaście jonów chloru, to w sumie tylko cztery z nich należą całkowicie do pokazanej komórki elementarnej.

Komórka elementarna jest podstawową, powtarzającą się jednostką dyfrakcyjną w krysztale, odpowiadającą szczelinie (i sąsiedniemu nieprzezroczystemu paskowi) w optycznej siatce dyfrakcyjnej z rys. 47-1. Rysunek 47-14a pokazuje jedną z płaszczyzn przechodzących przez kryształ chlorku sodu. Jeżeli każdą komórkę elementarną przeciętą tą płaszczyzną zastąpić małym sześcianem, to otrzymamy sytuację przedstawioną na rys. 47-14b. Czytelnik powinien wyobrazić sobie, jak wyglądałyby każdy z tych rysunków rozciągnięty nieskończoność daleko w przestrzeni trójwymiarowej.



Rys. 47-14. (a) Przekrój kryształu chlorku sodu pokazujący jony sodu i chloru. (b) Komórki elementarne leżące w płaszczyźnie tego przekroju. Każda komórka przedstawiona jest przez mały czarny kwadrat

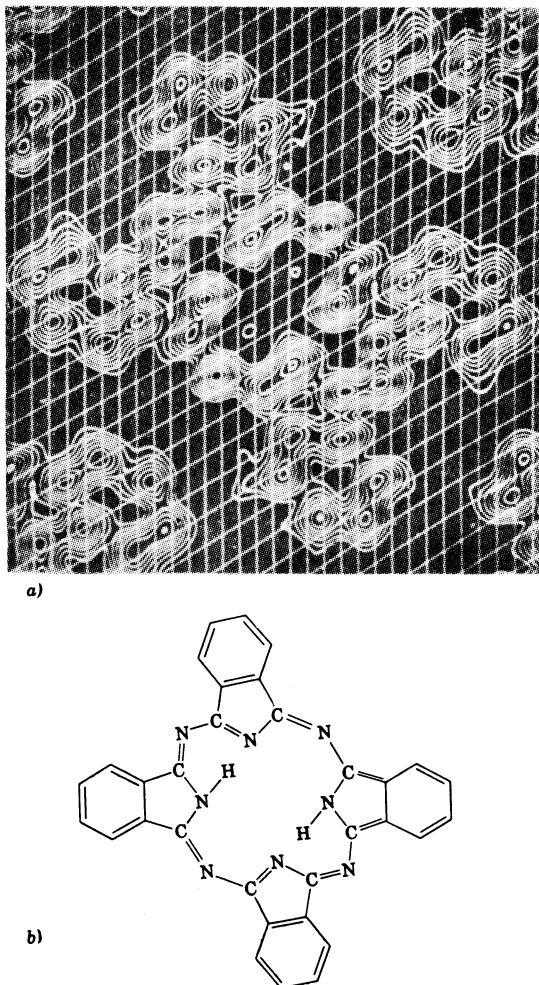
Potraktujmy każdy mały sześciyan z rys. 47-14b jako elementarne centrum rozpraszania odpowiadające szczelinie w siatce optycznej. *Kierunki* (lecz nie natężenie) wszystkich rozproszonych wiązek promieni Roentgena mogących wychodzić z kryształu chlorku sodu (dla określonej długości fali i określonej orientacji wiązki padającej) zależą jedynie od geometrii tej trójwymiarowej sieci centrów rozpraszania. Podobnie *kierunki* (lecz nie natężenia) wszystkich ugiętych wiązek wychodzących z optycznej siatki dyfrakcyjnej (dla określonej długości fali i określonej orientacji wiązki padającej) zależą wyłącznie od geometrii siatki, czyli wyłącznie od stałej siatki  $d$ . Zastąpienie komórki elementarnej czymś co jest w zasadzie punktem, jak pokazano na rys. 47-14b, odpowiada zastąpieniu szczezin siatki dyfrakcyjnej liniami, co zrobiliśmy omawiając doświadczenie Younga w paragrafie 45-1.

*Natężenia* linii dawanych przez optyczną siatkę dyfrakcyjną są określone własnościami rozpraszającymi pojedynczej szczereliny, jak pokazuje rys. 46-14. W idealnym przypadku, przedstawionym na rys. 47-1, zależą one od szerokości szczereliny  $a$ . W normalnie spotykanych optycznych siatkach dyfrakcyjnych własności te zależą od szczegółowego kształtu profilu nacięć siatki.

W dokładnie taki sam sposób *natężenia* rozproszonych wiązek wychodzących z kryształu zależą od własności rozpraszających komórki elementarnej\*. W zasadzie promienie

\* W pewnych kierunkach, w których można oczekiwać istnienia wiązki wychodzącej (ponieważ spełnione są odpowiednie warunki interferencji), wiązka ta nie występuje, gdyż własności rozpraszające komórek są takie, że nie ma żadnej energii rozpraszanej w tym kierunku. Podobnie w siatkach optycznych pewne linie dopuszczalne ze względu na warunki interferencji mogą nie występować, jeśli ich kierunki odpowiadają zerowemu natężeniu w dyfrakcyjnym obrazie pojedynczej szczereliny (patrz rys. 46-12).

Roentgena są rozpraszane przez elektrony; w większości rozpatrywanych przypadków rozproszenie na jądrach zaniedbujemy. Stąd wynika, że właściwości dyfrakcyjne komórki elementarnej zależą od tego, jak wewnątrz jej objętości są rozłożone elektryny. Przez badanie *kierunków* rozproszonych wiązek promieni Roentgena można poznać rodzaj

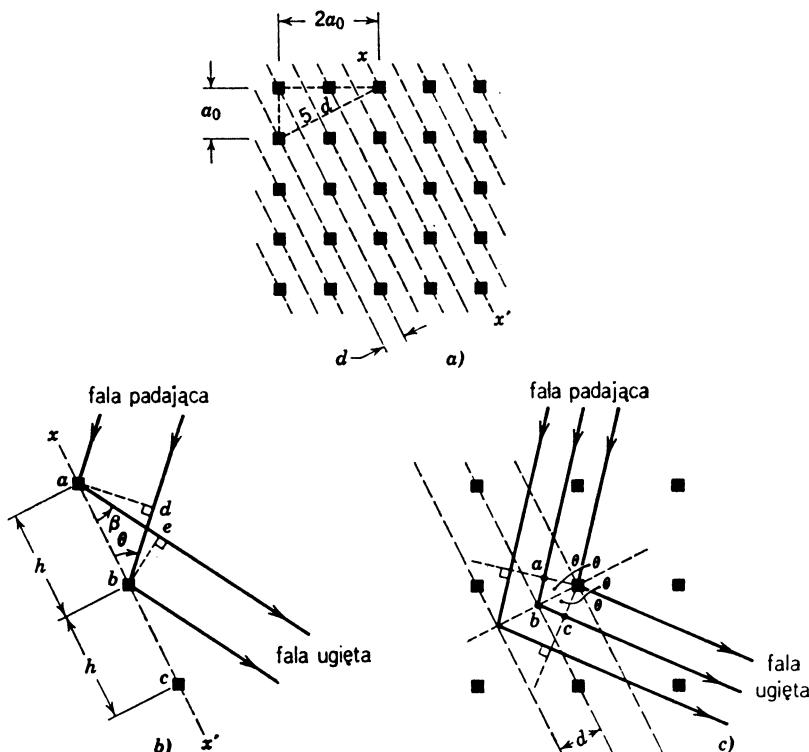


Rys. 47-15. (a) Fotografia ekranu oscyloskopu pokazująca gęstość elektronów we ftalocyjaninie ( $C_{32}H_{18}N_8$ ). Takie krzywe skonstruowane elektronicznie, na podstawie dyfrakcyjnych danych dla promieni Roentgena, za pomocą maszyn analogowych, przedstawiają wewnętrzną strukturę cząsteczek. (b) Schemat przedstawiający strukturę wewnętrzną cząsteczek ftalocyjaniny. Czytelnik powinien dokładnie porównać ten rysunek z rys. a, ustalając położenia różnych atomów zaznaczonych na rys. b. Należy zauważyć, że atomy wodoru zawierające tylko jeden elektron nie są obserwowalne na rys. a

symetrii kryształu. Badając również ich *nateżenie* możemy poznać rozkład elektronów w komórce elementarnej. Rysunek 47-15 pokazuje średnią gęstość elektronów w komórce elementarnej kryształu ftalocyjaniny. Ten godny uwagi rysunek pozwala lepiej zorientować się w możliwościach zastosowań promieni Roentgena do badania struktury ciał stałych.

## 47-6. Prawo Bragga

Prawo Bragga podaje warunki, w jakich jest możliwa dyfrakcja wiązek promieni Roentgena na kryształy. Przy wyprowadzaniu tego prawa zaniedbamy wewnętrzną strukturę komórki elementarnej, gdyż związana jest ona jedynie z natężeniem wiązek. Przerywane skośne linie na rys. 47-16a przedstawiają przecięcie jakiegoś zespołu płaszczyzn przechodzących przez elementarne centra dyfrakcji z płaszczyzną rysunku. Odległość między sąsiednimi płaszczyznami wynosi  $d$ . Można narysować wiele innych rodzin płaszczyzn tego typu o różnych odległościach międzyplaszczyznowych.



Rys. 47-16. (a) Przekrój siatki przestrzennej komórki elementarnej NaCl z rys. 47-14b. Linie pochylone, przedstawiające dowolny zespół płaszczyzn; odległość między nimi wynosi  $d$ . (b) Fala pada na jedną z płaszczyzn ( $xx'$ ), zaznaczoną na rys. a pod kątem  $\theta$  względem niej. (c) Fala pada na cały zespół płaszczyzn pokazany na rys. a. Powstaje silna fala ugięta

Rysunek 47-16b pokazuje falę płaską poruszającą się w płaszczyźnie rysunku, padającą na płaszczyznę należącą do rodziny płaszczyzn pokazanej na rys. 47-16a, przy czym promienie padające tworzą kąt  $\theta$  z płaszczyzną\*. Weźmy zespół ugiętych promieni leżących w płaszczyźnie rysunku 47-16b i tworzących kąt  $\theta$  z płaszczyzną, na której znajdują się elementarne centra rozpraszania. Ugięte promienie będą się sumować, dając maksymum.

\* Przy rozważaniu dyfrakcji promieni Roentgena przyjęto się określić kierunek fali przez podanie kąta między promieniem a płaszczyzną (*kąta poślizgu*), a nie kąta między promieniem a normalną do płaszczyzny.

malne natężenie, jeżeli różnica dróg między sąsiednimi promieniami równa jest całkowitej wielokrotności długości fali

$$ae - bd = h(\cos \beta - \cos \theta) = l\lambda, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (47-7)$$

Dla  $l = 0$  otrzymujemy stąd  $\beta = \theta$ , a więc płaszczyzna wyznaczona przez atomy, niezależnie od wielkości kąta  $\theta$ , działa jak zwierciadło odbijające falę padającą.

Dla innych wielkości  $l$ ,  $\beta$  nie równa się  $\theta$ , lecz zawsze można przyjąć, że wiązka ugięta jest „odbitą” od pewnego układu płaszczyzn, innego niż pokazany na rys. 47-16a i o innej odległości między płaszczyznami  $d$ . Ponieważ każdą wiązkę ugiętą chcemy traktować jako wiązkę „odbitą” od pewnego zespołu płaszczyzn i ponieważ obecnie zajmujemy się zespołem płaszczyzn określonym na rys. 47-16a, możemy zaniedbać wszystkie wielkości  $l$  różne od  $l = 0$  w równaniu (47-7). Można również pokazać, że płaszczyzna przechodząca przez centra ugięcia zawsze działa jak zwierciadło odbijające, czyli że  $\beta = \theta$  niezależnie od tego czy fala padająca leży w płaszczyźnie rys. 47-16b, czy też nie.

Rysunek 47-16c pokazuje falę padającą, oddziałyującą z rodziną płaszczyzn, z których jedna została pokazana na rys. 47-16b. Dla pojedynczej płaszczyzny „odbicie”, takie jak na zwierciadle, występuje dla *każdej* wielkości  $\theta$ . Aby w przypadku wiązki ugiętej na całej rodzinie płaszczyzn otrzymać wzmacnienie w kierunku określonym przez kąt  $\theta$ , promienie odbite od poszczególnych płaszczyzn muszą się wzmacniać. Oznacza to, że różnica dróg dla promieni ugiętych na sąsiednich płaszczyznach ( $abc$  na rys. 47-16c) musi być równa całkowitej wielokrotności długości fali, a więc

$$2d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (47-8)$$

Zależność ta została po raz pierwszy podana przez W. L. Bragga i stąd nazywana jest *prawem Bragga*. W powyższym równaniu  $d$  oznacza odległość między sąsiednimi płaszczyznami, wzdłuż linii prostopadłej do nich. Z analizy rys. 47-16a wynika, że  $d$  zależy od rozmiaru komórki elementarnej  $a_0$  następująco:

$$d = \frac{a_0}{\sqrt{5}}. \quad (47-9)$$

Równanie (47-8), na ogół nie jest spełnione. Jeżeli *monochromatyczna* wiązka promieni rentgenowskich pada na określony zespół płaszczyzn atomowych, pod dowolnym kątem  $\theta$ , to wiązki ugiętej *nie* obserwujemy. Jeżeli natomiast w padającej wiązce występuje *ciągłe* widmo długości fal, to wiązki ugięte otrzymujemy dla długości fali danych równaniem

$$\lambda = \frac{2d \sin \theta}{m}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

jeśli występują w wiązce padającej (patrz rów. (47-8)).

**Przykład 5.** Pod jakimi kątami wiązka promieni Roentgena, o  $\lambda = 0,110$  nm, powinna padać na zespół płaszczyzn przedstawiony na rys. 47-16c, aby powstała wiązka ugięta?

Załóżmy, że wiązka pada na chlorek sodu.

Odległość  $d$  między płaszczyznami dana jest równaniem (47-9)

$$d = \frac{a_0}{\sqrt{5}} = \frac{0,563 \text{ nm}}{2,24} = 0,252 \text{ nm}.$$

Z równania (47-8) mamy

$$\sin \theta = \frac{m\lambda}{2d} = \frac{m \cdot 0,110 \text{ nm}}{2 \cdot 0,252 \text{ nm}} = 0,218 \text{ m.}$$

Wiązki ugięte występują dla  $\theta = 12,6^\circ$  ( $m = 1$ ),  $\theta = 25,9^\circ$  ( $m = 2$ ),  $\theta = 40,9^\circ$  ( $m = 3$ ) i  $\theta = 60,7^\circ$  ( $m = 4$ ). Wiązki wyższego rzędu (tzn. dla większych  $m$ ) nie występują, gdyż  $\sin \theta$  byłby większy od jedności. W wypadku NaCl nie występują wiązki ugięte odpowiadające nieparzystym wartościom  $m$  ( $m = 1, 3$ ). Właściwości dyfrakcyjne tego kryształu są takie, że natężenie światła ugiętego pod kątami odpowiadającymi nieparzystym wartościom  $m$  jest zerowe.

Dyfrakcja promieni Roentgena jest ważną metodą doświadczalną w badaniu rozmieszczenia atomów w kryształach\*. Aby otrzymać wyniki ilościowe, należy znać dokładnie długość fali padających promieni rentgenowskich. Często stosowanym sposobem pomiaru tej długości jest dyfrakcja promieni rentgenowskich na kryształach NaCl. W jednej, z kilku stosowanych tu metod długość krawędzi komórki elementarnej NaCl określa się innymi niż rentgenowskie metodami, a wówczas już dyfrakcja promieni Roentgena na NaCl może być kłyta do określenia ich długości fali. Wiązka ta, następnie, służy do badania struktury kryształów substancji innych niż NaCl\*\*.

Jak wiemy, każda komórka elementarna NaCl składa się z czterech cząsteczek. Jeżeli zmierzona gęstość NaCl jest  $\rho$ , to dla komórki elementarnej z rys. 47-13\*\*\* mamy

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{4m_{\text{NaCl}}}{a_0^3},$$

gdzie  $m_{\text{NaCl}}$ , masa cząsteczki NaCl, dana jest wzorem

$$m_{\text{NaCl}} = \frac{M}{N_0};$$

$M$  oznacza tu masę molową NaCl, a  $N_0$  — liczbę Avogadra. Z obydwu powyższych, równań otrzymujemy

$$a_0 = \left( \frac{4M}{N_0 \rho} \right)^{1/3},$$

co pozwala obliczyć  $a_0$ . Znając  $a_0$ , możemy następnie stosując prawo Bragga wyznaczyć długość fali monochromatycznych promieni Roentgena (równ. (47-8)).

### Pytania

- Przedyskutować stwierdzenie: siatkę dyfrakcyjną możemy także nazywać siatką interferencyjną.
- Jak zmieniłoby się widmo zamkniętego źródła utworzone na ekranie przez siatkę dyfrakcyjną, gdyby źródło, siatka i ekran były zanurzone w wodzie?
- Załóżmy, że granicami widma widzialnego są 430 nm i 680 nm. Czy można zaprojektować siatkę dyfrakcyjną, dla światła padającego prostopadle na siatkę, taką, aby koniec widma pierwszego rzędu pokrywał się z początkiem widma drugiego rzędu?
- W spektrografie siatkowym może się zdarzyć, że w pobliżu jakiegoś kąta pojawi się kilka linii o zupełnie różnych długościach fali należących do różnych rzędów widma. Jak można rozróżnić do jakiego rzędu należy każda linia?

\* Patrz: Sir Lawrence Bragg, *X-ray Crystallography*, *Scientific American*, July 1968.

\*\* W praktyce z wielu przyczyn technicznych jako kryształ standardowy korzystniejszy jest kalcyt ( $\text{CaCO}_3$ ).

\*\*\* Tego związku nie możemy w zasadzie napisać, jeśli nie jest wiadome czy struktura NaCl jest sześcienna. Można ją jednak określić sprawdzając symetrię obrazu z rys. 47-12; długość fali promieni Roentgena nie musi tu być znana.

5. Dla spektroskopu przedstawionego na rys. 47-7 wykazać, że (a) dla siatki dyfrakcyjnej  $\theta$  wzrasta z  $\lambda$ , a (b) dla pryzmatu  $\theta$  maleje wraz z  $\lambda$ .

6. Mamy zdjęcie widma, na którym zaznaczone są położenia kątowe oraz długości fal poszczególnych linii widma. (a) Na podstawie czego możemy powiedzieć czy widmo pochodzi z pryzmatu, czy z siatki dyfrakcyjnej? (b) Jakich informacji o siatce lub pryzmacie dostarcza nam zbadanie takiego widma?

7. Wyjaśnij własnymi słowami dlaczego zwiększenie liczby szczelin  $N$  w siatce dyfrakcyjnej prowadzi do wyostrzenia maksimów? Dlaczego podobny skutek ma zmniejszenie długości fali? Dlaczego podobny skutek ma zwiększenie odstępu  $d$  między szczelinami?

8. (a) Co to jest „siatka fazowa”? (b) Czy można wykonać siatkę dyfrakcyjną w postaci szeregu równoległych cienkich drucików rozpiętych blisko siebie?

9. Jak wiele informacji o budowie siatki dyfrakcyjnej można wydobyć ze starannej analizy wytwarzanego przez nią widma światła monochromatycznego? Niech na przykład  $\lambda = 589 \text{ nm}$ .

10. (a) Dlaczego linie siatki dyfrakcyjnej rozmieszczone są blisko siebie? (b) Dlaczego liczba tych linii jest duża?

11. Światło zawierające tylko dwie, prawie równe długości fali pada na siatkę o  $N$  szczelinach. Linie w obrazie dyfrakcyjnym są tuż poniżej granicy rozdzielczości, ale mogą zostać rozdzielone jeśli zwiększy się liczbę szczelin. Które z poniższych sformułowań stanowią wyjaśnienie tego faktu: (a) przez siatkę może przejść więcej światła, (b) maksima główne stają się bardziej intensywne i stąd lepiej rozróżnialne, (c) rozkład dyfrakcyjny jest bardziej rozciagnięty więc długości fali zostają rozdzielone, (d) jest teraz większa liczba rzędów widma, (e) maksima główne stają się wyższe, a więc lepiej rozróżnialne?

12. Ze związku  $R = Nm$  wynika, że możemy otrzymać dowolnie wysoką zdolność rozdzielczą siatki przez dobranie odpowiednio wysokiego rzędu dyfrakcji. Przedyskutować to.

13. Wykazać, że dla danej długości fali i danego kąta dyfrakcji, zdolność rozdzielcza siatki zależy tylko od jej szerokości  $W$  ( $= Nd$ ).

14. Zgodnie z równaniem (47-3) główne maksima są szersze, tzn.  $\Delta\theta_m$  wzrasta, dla wyższych  $m$  (gdy  $\theta_m$  rośnie). Zdolność rozdzielcza, zgodnie z równaniem (47-6), jest również większa dla wyższych  $m$ . Wy tłumaczyć ten paradoks.

15. W jaki sposób zmierzyć (a) dyspersję  $D$  i (b) zdolność rozdzielczą  $R$  dla spektrometru pryzmatycznego i siatkowego?

16. Jakie określenie obrazu z rys. 47-12 jest bardziej właściwe: obraz dyfrakcyjny czy też interferencyjny?

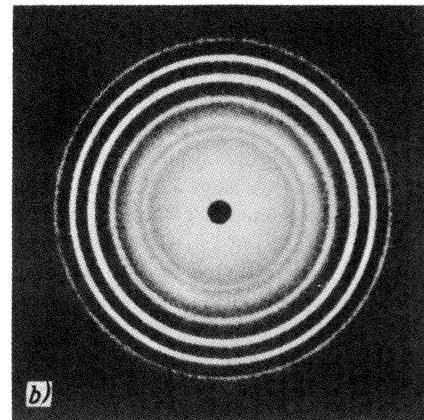
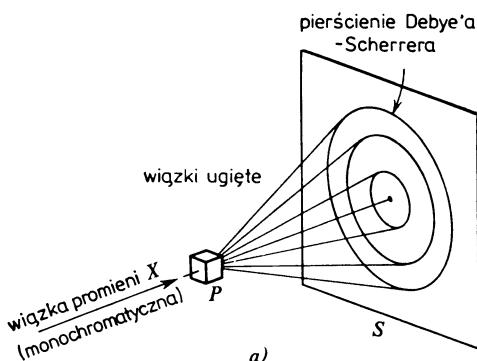
17. Czy długość fali promieni Roentgena, padających na dany zespół płaszczyzn w krysztale, może być (a) za duża, (b) za mała dla otrzymania wiązki ugiętej?

18. Dlaczego sześcian o krawędzi  $\frac{1}{2}a_0$  na rys. 47-13 nie może być komórką elementarną chlorku sodu?

19. Pod pewnymi względami odbicie Bragga różni się od dyfrakcji na płaskiej siatce. Które z następujących zdań są prawdziwe w odniesieniu do odbicia Bragga, a równocześnie fałszywe w odniesieniu do siatki dyfrakcyjnej? (a) Dwie różne długości fali mogą się nakładać. (b) Promieniowanie o danej długości fali może być wysyłane w różnych kierunkach. (c) Długie fale są odchylone bardziej niż fale krótkie. (d) Występuje tylko jeden odstęp „międzyszczelinowy”. (e) Maksima ugięcia dla danej długości fali pojawiają się wyłącznie dla szczególnych kątów padania.

20. Gdy równoległa wiązka promieni Roentgena, o długości fali  $\lambda$ , pada na dowolnie zorientowany kryształ jakiegoś materiału, to w ogólności nie powinniśmy zaobserwować żadnej wiązki ugiętej. Wiązki takie mogą się natomiast pojawiać, jeżeli (a) w wiązce padającej występuje ciągły rozkład długości fali, a nie tylko pewne długości fali lub (b) jeżeli wiązka pada nie na pojedynczy kryształ, ale na drobno rozszczepiony proszek. Wy tłumaczyć to.

21. Na rysunku 47-17a przedstawiliśmy schematycznie układ doświadczalny Debye'a-Scherrera, a na rys. 47-17b odpowiadający mu rozkład dyfrakcyjny promieni  $X$ . (a) Pamiętając, że w metodzie Lauego używa się dużego pojedynczego kryształu i że wiązka promieni  $X$  zawiera ciągle widmo długości fal, wyjaśnij pochodzenie plamek na kliszy. (b) Pamiętając, że w metodzie Debye'a-Scherrera używa się wielkiej liczby pojedynczych kryształów o przypadkowej orientacji przestrzennej i że wiązka promieni  $X$  jest monochromatyczna, wyjaśnij pochodzenie pierścieni. (Wskazówka: Dzięki przypadkowej orientacji małych kryształów pojawiają się wszystkie możliwe kąty padania.)



Rys. 47-17. Pytania 21a i b. (a) Monochromatyczna wiązka promieni  $X$  pada na blok  $P$  zbudowany z bardzo małych kryształków zorientowanych przypadkowo (nazywanych mikrokrystalicznym proszkiem). Silnie ugięte wiązki tworzą pierścienie otaczające plamkę centralną, są to tzw. pierścienie Debye'a-Scherrera, zaznaczone na kliszy fotograficznej  $S$ . (b) rozkład dyfrakcyjny Debye'a-Scherrera dla promieni  $X$ , ugiętych na kryształkach tlenku cyrkonu. (Z książki U. Fano i L. Fano, *Basic Physics of Atoms and Molecules*, John Wiley's Sons, 1959)

### Zadania

#### Paragraf 47-2

- Wykazać, że dla siatki utworzonej przez ułożone na przemian paski przezroczyste i nieprzezroczyste, o jednakowej szerokości, nie istnieją wiązki ugięte odpowiadające parzystym wartościom  $m$  (z wyjątkiem  $m = 0$ ).
- Centralne maksimum natężenia, jakie otrzymujemy za pomocą siatki, wraz z bocznymi wtórnymi maksymami, można rozpatrywać jako obraz dyfrakcyjny pojedynczej szczeliny, której szerokość równa jest szerokości całej siatki. Traktując siatkę jako pojedynczą szczelinę oraz zakładając, że  $m = 0$ , wykazać, że można wyprowadzić równanie (47-2). Zastosować metodę opisaną w paragrafie 46-4.
- Siatka dyfrakcyjna ma szczeliny o szerokości  $300 \text{ nm}$ , a odległości między środkami szczelin są równe  $900 \text{ nm}$ . Siatka jest oświetlona przez płaskie fale monochromatyczne o długości  $\lambda = 600 \text{ nm}$  i kącie padania wynoszącym zero. (a) Ile prążków dyfrakcyjnych daje ta siatka? (b) Jaka jest szerokość kątowa obserwowanych linii widmowych, jeżeli siatka ma  $1000$  szczelin? Szerokość kątową definiujemy jako kąt pomiędzy dwoma położeniami o zerowym natężeniu po obu stronach maksimum.

Odp.: (a) 3 prążki odpowiadające  $m = 0, \pm 1$ . (b)  $1,8 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ .

- Założyćmy, że światło pada na siatkę pod kątem  $\psi$ , jak na rys. 47-18. Wykazać, że warunek występowania maksimum dyfrakcyjnego jest następujący:

$$d(\sin\psi + \sin\theta) = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Przypadek szczególny  $\psi = 0$ , był już omawiany w niniejszym rozdziale (porównać z równ. (47-1)).

- Siatka o  $d = 1,50 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$  jest oświetlana światłem o długości fali  $600 \text{ nm}$ , pod różnymi kątami padania. Wykreślić odchylenie kątowe wiązki ugiętej pierwszego rzędu względem kierunku padania jako funkcję kąta padania (od  $0$  do  $90^\circ$ ).

- Wyprowadzić następujące wyrażenie na natężenie obrazu otrzymanego dla „siatki”, składającej się z trzech szczelin:

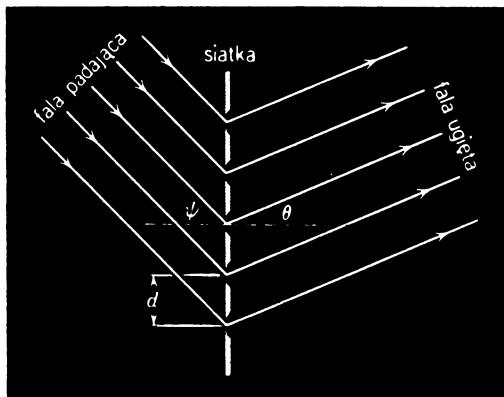
$$I_\theta = \frac{1}{9} I_m (1 + 4\cos\varphi + 4\cos^2\varphi),$$

gdzie  $\varphi = 2\pi d \sin\theta/\lambda$ . Założyć, że  $a \ll \lambda$ , i wzorować się na wyprowadzeniu odpowiedniego wzoru dla siatki dwuszczelinowej (równ. (45-9)).

- (a) Korzystając z wyniku zadania 6 wykazać, że szerokość połówkowa prążków obrazu dyfrakcyjnego, otrzymanego z siatki trójszczelinowej, jest równa  $\Delta\theta \approx \lambda/3,2d$ , zakładając przy tym, że  $\theta$  jest dostatecznie małe, tak że  $\sin\theta = \theta$ . (b) Porównać to z wyrażeniem wyprowadzonym w zadaniu 16, rozdział 45,

dla obrazu z siatki dwuszczelinowej. (c) Czy otrzymane wyniki uzasadniają twierdzenie, że dla ustalonej odległości szczelin, maksima interferencyjne stają się ostrzejsze w miarę zwiększenia liczby szczelin?

8. (a) Korzystając z wyniku zadania 6 wykazać, że dla siatki składającej się z trzech szczelin istnieje tylko jedno wtórne maksimum. Znaleźć (b) jego położenie oraz (c) względne natężenie.



Rys. 47-18. Zadanie 4

9. Siatkę dyfrakcyjną tworzą trzy szczeliny, przy czym odległość między sąsiednimi szczelinami jest  $d$ . Jeżeli środkową szczelinę zasłonimy, to czy połówkowa szerokość maksimów będzie większa czy mniejsza? Patrz zadanie 7.

Odp.: Większa, o czynnik 0,78.

10. Wyprowadzić wyrażenie dla  $\Delta\theta_m$ , tzn. równanie (47-3);  $\Delta\theta_m$  jest odległością kątową między głównym maksimum rzędu  $m$  i najbliższym minimum.

11. W siatce dyfrakcyjnej znajduje się duża liczba  $N$  szczelin, każda o szerokości  $d$ . Niech  $I_{\max}$  oznacza natężenie w pewnym głównym maksymum, a  $I_k$  natężenie  $k$ -tego, sąsiedniego, wtórnego maksimum. (a) Pokazać, korzystając z wykresu strzałkowego\*, że jeżeli  $k \ll N$ , to w przybliżeniu  $I_k/I_{\max} = 1/(k + \frac{1}{2})^2 \pi^2$ . Porównać to z odpowiednim wzorem dla pojedynczej szczeliny. (b) Pokazać, że dla tych wtórnego maksimów, które w przybliżeniu leżą w połowie pomiędzy dwoma sąsiednimi głównymi maksimami, z grubsza biorąc  $I_k/I_{\max} = 1/N^2$ . (c) Rozważyć centralne, główne maksimum oraz te sąsiednie wtórne maksima, dla których  $k \ll N$ . Pokazać, że ta część obrazu dyfrakcyjnego ilościowo przypomina obraz dawany przez pojedynczą szczelinę o szerokości  $Nd$ .

#### Paragraf 47-3

12. Siatka dyfrakcyjna o szerokości 2,0 cm ma 6000 linii. Pod jakimi kątami wystąpią maksima natężenia, jeżeli długość fali padającego promieniowania wynosi 589 nm?

13. Zmierzono, że w świetle z gazowej rury do wyladowań, padającym normalnie na siatkę, w której odległość między środkami sąsiednich szczelin wynosi  $1,73 \cdot 10^{-4}$  cm, linia zielona ma ostre maksima dla następujących kątów transmisji:  $\theta = \pm 17,6^\circ, 37,3^\circ, -37,1^\circ, 65,2^\circ$  oraz  $-65,0^\circ$ . Znaleźć długość fali światła zielonego, która najlepiej pasuje do tych danych.

Odp.: 524 nm.

14. Siatka dyfrakcyjna ma 2000 linii/cm. Dla kąta  $\theta = 30^\circ$  obserwujemy silną wiązkę ugiętą. (a) Jakią długości fal mogą występować w padającej wiązce światła? (b) Jakie to są kolory (patrz rys. 42-1)?

15. Mamy siatkę o 3150 linii/cm. Dla jakich długości fal w widmie widzialnym można obserwować ugięcie piątego rzędu?

Odp.: Dla wszystkich długości fal mniejszych niż 635 nm.

16. Dana jest siatka o 4000 linii/cm. Ile rzędów całego widma widzialnego (400–700 nm) może ona wytworzyć?

17. Siatka dyfrakcyjna o szerokości 3,00 cm w drugim rzędzie widma odchyla światło o długości fali 600 nm o kąt  $30,0^\circ$ . Jaka jest całkowita liczba linii tej siatki?

Odp.: 12 500.

\* Patrz np. rys. 45-10.

18. Światło o długości 600 nm pada prostopadle na siatkę dyfrakcyjną. Dwa sąsiednie maksima główne występują odpowiednio dla  $\sin \theta = 0,2$  i  $\sin \theta = 0,3$ . Czwarty rząd ugięcia nie występuje. (a) Jaka jest odległość pomiędzy sąsiednimi szczelinami? (b) Jaka jest najmniejsza możliwa szerokość pojedynczej szczeliny? (c) Wymienić wszystkie rzędy ugięcia widoczne na ekranie, dla wartości otrzymanych w punktach (a) i (b) tego zadania.

19. Założymy, że granice widma widzialnego wybieramy umownie, jako 430 i 680 nm. Zaprojektować siatkę, która będzie dawała rozmyte widmo pierwszego rzędu, o szerokości odpowiadającej  $20^\circ$ .

Odp.: 11 000 linii/cm.

20. Światło zawierające dwie długości fal, 500 nm i 600 nm, pada prostopadle na siatkę dyfrakcyjną. Żądamy by: (1) pierwsze i drugie główne maksima natężenia dla każdej długości fali występowały pod kątem  $\theta \leq 30^\circ$ , (2) dyspersja była tak duża, jak to jest możliwe i (3) nie było ugięcia trzeciego rzędu dla  $\lambda = 600$  nm. (a) Jaka powinna być odległość między sąsiednimi szczelinami? (b) Jaka będzie najmniejsza, możliwa szerokość pojedynczej szczeliny? (c) Wymienić wszystkie rzędy ugięcia dla  $\lambda = 600$  nm, które pojawią się na ekranie, dla wielkości znalezionych w punkcie (a) i (b) tego zadania.

21. Wąska wiązka światła monochromatycznego padającą prostopadle na siatkę dyfrakcyjną daje ostre maksima przy następujących kątach, mierzonych od normalnej do siatki:  $6^\circ 40'$ ,  $13^\circ 30'$ ,  $20^\circ 20'$  oraz  $35^\circ 40'$ . Pomiędzy kątami  $0^\circ$  i  $35^\circ 40'$  nie pojawiają się żadne inne maksima. Odległość pomiędzy środkami sąsiednich szczelin w siatce wynosi  $5,04 \cdot 10^{-4}$  cm. (a) Obliczyć długość fali użytego światła. (b) Jakie, możliwe najdokładniejsze ilościowe wnioski, dotyczące szerokości każdej ze szczelin, można wyciągnąć z powyższych danych?

Odp.: (a) 586 nm. (b) Szerokość szczeliny zawiera się pomiędzy  $1,01 \mu\text{m}$  i  $1,68 \mu\text{m}$ .

22. Siatka przeznaczona do zastosowania w części podczerwonej widma elektromagnetycznego jest tak wykonana („rozośniona”), że dla  $\lambda = 8000$  nm całe natężenie skoncentrowane jest w maksimum pierwszego rzędu ( $m = 1$ ). Jak wyglądałyby wiązki ugięte, gdyby na opisaną siatkę padało światło widzialne ( $400 \text{ nm} < \lambda < 700 \text{ nm}$ )?

23. Pokazać, że dyspersję siatki można wyrazić wzorem

$$D = \frac{\tg \theta}{\lambda}.$$

24. Siatka o 3500 liniach/cm oświetlana jest światłem białym, padającym wzdłuż jej normalnej. Na ekranie oddalonym od siatki o 30 cm obserwujemy widmo dyfrakcyjne. W ekranie wycinamy otwór kwadratowy o boku 1 cm tak, że jego brzeg wewnętrzny znajduje się w odległości 5 cm od maksimum centralnego. Jaki zakres długości fal przechodzi przez otwór?

25. Dwie linie widmowe mają, odpowiednio, długości fal  $\lambda$  i  $\lambda + \Delta\lambda$ , przy czym  $\Delta\lambda \ll \lambda$ . Pokazać, że odległość kątowa pomiędzy tymi liniami, w spektrometrze siatkowym, dana jest w przybliżeniu wzorem  $\Delta\theta = \Delta\lambda / \sqrt{(d/m)^2 - \lambda^2}$ , gdzie  $d$  jest odlegością pomiędzy środkami sąsiednich szczelin, a  $m$  — rzędem obserwowanych linii. Należy zauważyć, że dla wyższych rzędów widma odległość kątowa jest większa.

26. Siatkę o odległości między liniami  $d = 1500$  nm zastosowano do analizowania miękkich promieni Roentgena o długości fali  $\lambda = 0,5$  nm. Kąt padania  $\theta$  jest równy  $90^\circ - \gamma$ , gdzie  $\gamma$  jest bardzo małym kątem. Maksimum pierwszego rzędu występuje pod kątem  $\theta = 90^\circ - 2\beta$ . Znaleźć wartość  $\beta$ .

#### Paragraf 47-4

27. Siatka dyfrakcyjna o szerokości 6 cm ma 6000 linii/cm. (a) Jaki jest najmniejszy odstęp długości fal, który może być rozdzielony w trzecim rzędzie ugięcia dla  $\lambda = 500$  nm? (b) Ile wyższych rzędów można oglądać? Założyć prostopadle padanie światła na siatkę.

Odp.: (a)  $4,6 \cdot 10^{-3}$  nm. (b) Ani jednego.

28. Siatka ma 40 000 linii rozłożonych na długości 7,6 cm. (a) Jaka będzie dyspersja  $D$  dla światła sodu ( $\lambda = 589$  nm) dla pierwszych trzech rzędów ugięcia? (b) Jaka jest zdolność rozdzielcza dla tych rzędów?

29. Źródło zawierające mieszaninę atomów wodoru i deuteru emisuje dublet o długości fali  $\lambda = 656,3$  nm; odległość między liniami dubletu wynosi 0,18 nm. Znaleźć najmniejszą liczbę linii siatki dyfrakcyjnej potrzebną do rozdzielenia tego dubletu w pierwszym rzędzie ugięcia.

Odp.: 3650.

30. Dla pewnej siatki dublet sodu w trzecim rzędzie (patrz przykład 2) pojawia się pod kątem  $10^\circ$

względem normalnej i jest ledwo rozdzielony. Znaleźć (a) odległość między liniami siatki i (b) całkowitą szerokość linii.

31. Siatka dyfrakcyjna ma zdolność rozdzielczą  $R = \lambda/\Delta\lambda = Nm$ . (a) Pokazać, że odpowiada temu odstęp częstotliwości, jakie jeszcze mogą być rozdzielone, równy  $\Delta\nu = c/Nm\lambda$ . (b) Korzystając z rysunku 47-1 udowodnić, że „czas przelotu” dla dwóch krajowych promieni różni się o wielkość  $\Delta t = Nd\sin\theta/c$ . (c) Pokazać, że  $(\Delta\lambda)(\Delta t) = 1$ , przy czym równość ta jest niezależna od parametrów siatki. Założyć, że  $N \gg 1$ .

32. Wróćmy do zadania 3. Jak zależy szerokość kątowa linii widmowych od zdolności rozdzielczej siatki?

33. Rozważmy nieskończoną, dwuwymiarową, kwadratową siatkę, taką jak na rys. 47-14b. Jedna z odległości międzyplaszczyznowych jest równa  $a_0$ . (a) Znaleźć pięć kolejnych, najmniejszych odległości międzyplaszczyznowych robiąc rysunki podobne do rys. 47-16a. b) Pokazać, że otrzymane wyniki podlegają następującej ogólnej regule

$$d = \frac{a_0}{\sqrt{h^2 + k^2}},$$

gdzie  $h$  i  $k$  są początkowymi liczbami całkowitymi.

#### Paragraf 47-6

34. Kryształ jest oświetlany monochromatyczną wiązką promieni  $X$  o wysokiej energii. Dla jakiego kąta można oczekiwać odbicia drugiego rzędu, jeśli odbicie pierwszego rzędu jest obserwowane dla kąta Bragga  $3,4^\circ$ ?

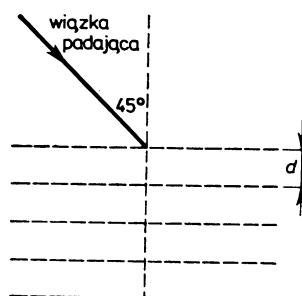
35. Na kryształ NaCl o stałej sieci  $0,3$  nm pada monochromatyczna wiązka promieni  $X$ . Gdy wiązka jest nachylona pod kątem  $60^\circ$  do normalnej, obserwowane jest odbicie Bragga pierwszego rzędu. Jaka jest długość fali promieni  $X$ ?

Odp.:  $0,30$  nm.

36. Badając dwie monochromatyczne wiązki promieni Roentgena o różnych długościach fal, zauważono, że linia  $A$  daje w widmie odbitym maksimum pierwszego rzędu pod kątem  $30^\circ$  względem gładkiej płaszczyzny kryształu. Linia  $B$ , o której wiadomo, że ma długość fali  $\lambda = 0,097$  nm, daje maksimum trzeciego rzędu pod kątem  $60^\circ$  względem tej samej płaszczyzny kryształu. Znaleźć długość fali linii  $A$ .

37. Wiązka monochromatyczna promieni Roentgena ( $\lambda = 0,125$  nm) pada na kryształ chlorku sodu pod kątem  $45^\circ$  względem linii zaznaczonej na rys. 47-19. Płaszczyzny tu pokazane, są to te same płaszczyzny co na rys. 47-16a, dla których  $d = 0,252$  nm. O jakie kąty należy obracać kryształ, aby otrzymać wiązkę odpowiadającą pokazanym płaszczyznom? Założyćmy, że kryształ jest obracany wokół osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku. Zaniedbać możliwość (patrz zadanie 40), że niektóre z wiązek mogą mieć zerowe natężenie.

Odp.:  $30,6^\circ, 15,3^\circ$  zgodnie z ruchem wskazówek zegara;  $3,1^\circ, 37,8^\circ$  przeciwne do ruchu wskazówek zegara.



Rys. 47-19. Zadanie 37, 38

38. Założyć, że na rys. 47-19, padająca wiązka promieni Roentgena nie jest monochromatyczna i zawiera długości fal w pasmie od  $0,095$  do  $0,130$  nm. Czy pojawią się wiązki ugięte związane z płaszczyznami pokazanymi na rysunku? Założyć, że  $a_0 = 0,275$ .

39. Wykaż, że mierzenie kątów braggowskiego odbicia kilku różnych rzędów nie daje informacji wy-

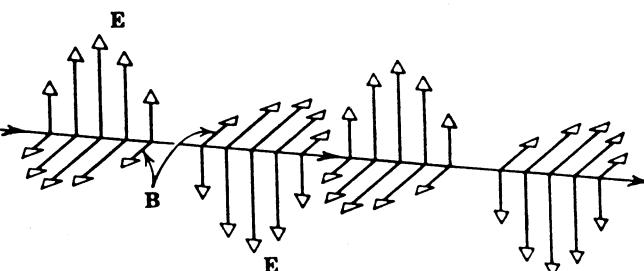
starczających do określenia zarówno długości fali promieniowania jak i odstępu między płaszczyznami odbicia Bragga.

40. *Rzędy ugięcia nie występujące w obrazie dyfrakcyjnym promieni Roentgena.* W przykładzie 5 wiązka odpowiadająca  $m = 1$  ma zerowe natężenie, ze względu na własności dyfrakcyjne komórki elementarnej w takim ustawieniu kryształu względem wiązki. Udowodnić to. (*Wskazówka:* Pokazać, że promienie „odbite” od górnej warstwy atomów w komórkach elementarnych wygaszają się z promieniami „odbitymi” od środkowej warstwy atomów w tych komórkach. Wszystkie nieparzyste rzędy ugięcia wiązki padającej mają więc zerowe natężenie.)

# 48. Polaryzacja

## 48-1. Polaryzacja

Elektromagnetyczna teoria promieniowania przewiduje, że światło, podobnie jak każde promieniowanie elektromagnetyczne, jest falą poprzeczną. Kierunki drgań wektorów elektrycznych są prostopadłe do kierunku ruchu fali, a nie równoległe, jak to ma miejsce w przypadku fal podłużnych. Fale poprzeczne, przedstawione na rys. 48-1 i 41-13, mają ponadto pewną charakterystyczną własność, a mianowicie, są one *plasko spolaryzowane\**. Oznacza to, że drgania wektora  $E$  są równoległe względem siebie we wszystkich punktach fali. Dla wszystkich takich punktów drgający wektor  $E$  tworzy z kierunkiem ruchu fali płaszczyznę zwaną *plaszczyzną drgań*. W fali spolaryzowanej liniowo wszystkie takie płaszczyzny są równoległe.



Rys. 48-1. „Zdjęcie migawkowe” fali spolaryzowanej liniowo pokazujące wektory  $E$  i  $B$  wzduż wyróżnionego promienia. Fala porusza się w prawą stronę z prędkością  $c$ . Płaszczyzna wyznaczona przez drgający wektor  $E$  i kierunek ruchu fali jest *plaszczyzną drgań*

Z opisanych dotychczas doświadczeń z interferencją albo dyfrakcją nie można wydedukować poprzecznej natury fal świetlnych, ponieważ fale podłużne, jak np. fale dźwiękowe, jeśli chodzi o te zjawiska zachowują się tak samo. Podstawy doświadczalne do wykazania poprzecznego charakteru fal świetlnych przygotował Thomas Young w 1817 r. Dwaj współcześni mu fizycy Dominique-François Arago (1768–1853) i Augustin Jean Fresnel (1788–1827) zdolali uzyskać dwie oddzielne wiązki ze światła padającego na krysz-

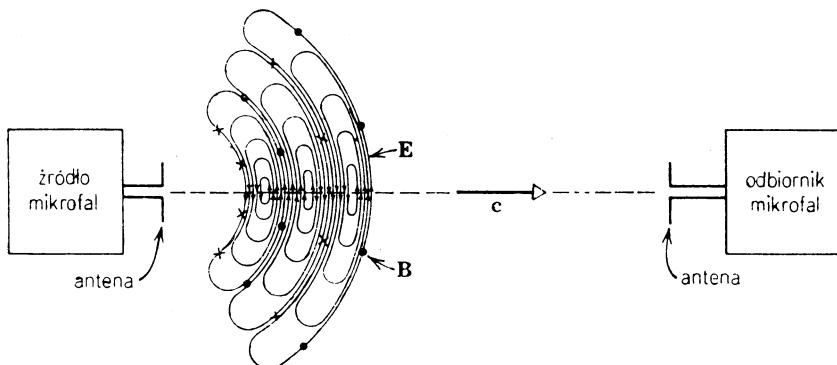
\* W polskiej literaturze zazwyczaj używa się terminu *spolaryzowane liniowo* (przyp. tłum.).

tał kalcytu (patrz paragraf 48-4). Wydawało się wówczas dziwne, że wiązki te, aczkolwiek spójne, nie dawały żadnych prążków interferencyjnych, a tylko równomierne świecenie. Young wywnioskował z tego faktu, że światło musi być falą poprzeczną i że płaszczyzny drgań w obydwu wiązkach muszą być względem siebie prostopadłe. Zaburzenia falowe o kierunkach prostopadłych względem siebie nie mogą dawać efektów interferencyjnych. Czytelnik udowodni ten fakt w zadaniu 1. Słowa Younga skierowane do Arago były następujące:

„Zwracam uwagę na możliwość doskonałego wyjaśnienia zachowania się światła przy pomocy polaryzacji, bez odiegania od właściwej doktryny falowej. Jest zasadą tej teorii, że wszystkie fale przechodzą przez ośrodkie jednorodne jako koncentryczne powierzchnie kuliste, tak jak fale dźwiękowe, wywołujące proste i wsteczne ruchy cząstek w kierunku promienia, oraz towarzyszące tym ruchom zagęszczenia i rozrzedzenia, tj. fale podłużne. Jednocześnie istnieje możliwość wyjaśnienia w ramach tej teorii drgania poprzecznego, rozchodzącego się również w kierunku promienia z tą samą prędkością, przy czym ruchy cząstek odbywają się w pewnym stałym kierunku względem promienia. I to jest *polaryzacja*”.

Zauważmy, że Young przyjmuje możliwość istnienia drgań poprzecznych jako nową ideę. Dotychczas światło uznawano niesłusznie za drgania podłużne.

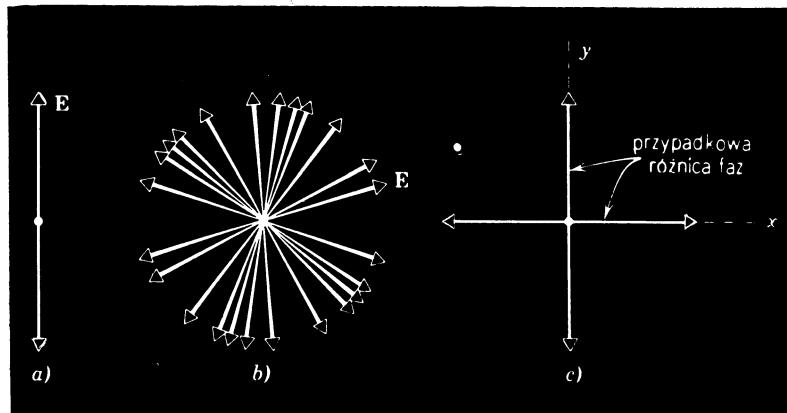
W fali poprzecznej, spolaryzowanej liniowo, należy określić dwa kierunki: kierunek drgania (powiedzmy wektora  $E$ ) oraz kierunek ruchu. W fali podłużnej obydwa te kierunki są identyczne. W fali spolaryzowanej liniowo, ale nie w fali podłużnej, możemy oczywiście zauważać znikania symetrii względem kierunku ruchu. Fale radiowe oraz mikrofale rzeczywiście wykazują brak tej symetrii. Fale te wytwarzane są przez ładunek drgający do góry i na dół w dipolu stanowiącym rodzaj anteny nadawczej (rys. 48-2). Fala wywołana drgającym ładunkiem dipola ma w dużej odległości od dipola, na osi do niego prostopadłej, wektor pola elektrycznego równoległy do osi dipola, a więc jest spolaryzowana liniowo.



Rys. 48-2. Wektory  $E$  wysyłanej fali są równoległe do osi anteny odbiorczej, a więc będzie ona rejestrowana. Jeśli obróciemy antenę o  $90^\circ$  wokół kierunku ruchu fali, żaden sygnał nie będzie zarejestrowany.

Kiedy taka fala pada na drugi dipol połączony z detektorem mikrofal, wówczas zmienny wektor elektryczny fali wywołuje w antenie odbiorczej drganie elektronów do góry i na dół, co rejestruje detektor. Jeśli obróciemy antenę odbiorczą o  $90^\circ$  wokół kierunku padania fali, wskazania detektora spadną do zera. Przy takim bowiem ustawieniu, wektor pola elektrycznego nie może spowodować ruchu elektronów wzdłuż osi dipola, gdyż jest on skierowany względem niej pod kątem prostym. Doświadczenie przedstawione na rys. 48-2 możemy odtworzyć obracając odbiorczą antenę telewizyjną (jeśli jest to antena typu dipola elektrycznego) o  $90^\circ$  wokół osi skierowanej ku stacji nadawczej.

Źródła światła widzialnego różnią się od źródeł fal radiowych i mikrofal tym, że elementarne radiatory, tzn. atomy i cząsteczki, działają niezależnie. Światło rozchodzące się w danym kierunku składa się z niezależnych ciągów fal, których płaszczyzny drgań, zorientowane są w sposób przypadkowy wokół kierunku ruchu, co przedstawia rys. 48-3b. Takie światło, chociaż jest falą poprzeczną, jest *niespolaryzowane*. Przypadkowy charakter orientacji płaszczyzn drgań wytwarza symetrię wokół kierunku ruchu, która na pierwszy rzut oka ukrywa rzeczywistą, poprzeczną naturę tych fal. Dla jej zbadania trzeba znaleźć metodę, która pozwoliłaby rozdzielić fale o różnych płaszczyznach drgań.



Rys. 48-3. (a) Fala poprzeczna spolaryzowana liniowo biegnie w kierunku czytelnika. Pokazany tylko wektor elektryczny. (b) Fala poprzeczna niespolaryzowana, traktowana jako przypadkowa superpozycja wielu spolaryzowanych liniowo ciągów fal. (c) Drugi, zupełnie równoważny opis niespolaryzowanej fali poprzecznej; tutaj falę niespolaryzowaną traktujemy jako dwie spolaryzowane liniowo fale o losowej zmiennej różnicy faz. Orientacja osi x i y względem kierunku ruchu fali jest zupełnie dowolna

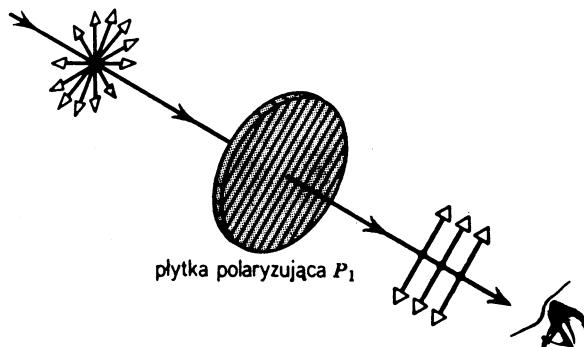
## 48-2. Płytki polaryzujące

Na rysunku 48-4 światło niespolaryzowane pada na płytę z materiału polaryzującego, nazywaną polaroidem\*. W płytce istnieje pewien charakterystyczny kierunek polaryzacji zaznaczony na rysunku liniami równoległymi. Płytki taka przepuszcza tylko te fale, dla których kierunki drgań wektora elektrycznego są równoległe do kierunku polaryzacji, oraz pochłania te fale, dla których są one prostopadłe. A więc światło wychodzące będzie liniowo spolaryzowane. Kierunek polaryzujący płytki ustala się w procesie produkcji, który polega na osadzaniu cząsteczek o strukturze łańcuchowej na elastycznej warstwie plastycznej. Warstwa ta jest następnie rozciągana, co powoduje równoległe ułożenie cząsteczek względem siebie. Można w ten sposób wytwarzać płyty polaryzujące o wymiarach większych niż 0,6 m × 30 m.

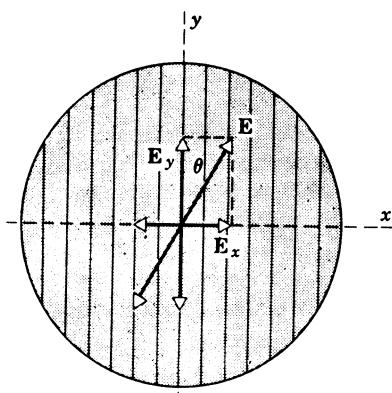
Na rysunku 48-5 płytka polaryzująca (*polaryzator*) leży w płaszczyźnie rysunku, a kierunek padania światła jest prostopadły do tej płaszczyzny. Wektor E wyznacza płasz-

\* Znane są inne metody wytwarzania światła spolaryzowanego, bez użycia polaroidów. Niektóre z nich omówimy poniżej. Patrz również: Jearl Walker, *The Amateur Scientist*, *Scientific American*, December 1977. Znajdziemy tam sposoby wykonania płyt polaryzujących, kwarcfałówki i półfałówki, a także opisy różnych doświadczeń z nimi. [Patrz również: William A. Shurcliff, Stanley S. Ballard *Światło spolaryzowane*, PWN, 1973 (przyp. tłum.)].

czyznę drgań przypadkowo wybranego ciągu fal padającego na płytkę. Wektor ten można zastąpić jego dwiema składowymi: składową  $E_x$  (o długości  $E \sin \theta$ ), równoległą do kierunku polaryzacji płytki oraz składową  $E_y$  (o długości  $E \cos \theta$ ), prostopadłą do tego kierunku. Przez płytkę przechodzi tylko składowa prostopadła, składowa równoległa zaś jest pochłaniana.



Rys. 48-4. Na płytke polaryzującą pada światło niespolaryzowane. Po przejściu przez płytke staje się ono światłem liniowo spolaryzowanym. Linie równoległe, które w rzeczywistości nie są widoczne, przedstawiają charakterystyczne kierunki polaryzujące płytke



Rys. 48-5. Ciąg fal  $E$  jest równoważny ciągom fal o składowych  $E_y$  i  $E_x$ . Przez płytke przechodzi tylko ten pierwszy ciąg

Postawmy teraz na drodze światła drugą płytke polaryzującą  $P_2$  (tak zastosowaną płytke nazywamy *analizatorem*), jak na rys. 48-6. Jeśli płytke  $P_2$  będziemy obracać wokół kierunku padania światła, to dla dwóch położen płytki różniących się o  $180^\circ$  natężenie światła przechodzącego przez obie płytki będzie prawie równe零. Są to te położenia, przy których kierunki polaryzacji  $P_1$  i  $P_2$  są względem siebie prostopadłe.

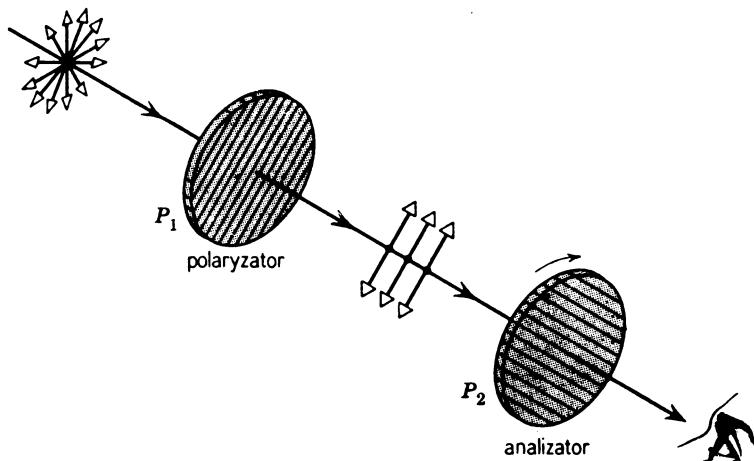
Jeżeli amplituda liniowo spolaryzowanego światła padającego na  $P_2$  jest równa  $E_m$ , to amplituda światła wychodzącego z  $P_2$  jest równa  $E_m \cos \theta$ , gdzie  $\theta$  jest kątem między kierunkami polaryzacji  $P_1$  i  $P_2$ . Ponieważ natężenie wiązki światła jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy, widzimy, że natężenie  $I$  wiązki wychodzącej zmienia się zgodnie z wzorem

$$I = I_m \cos^2 \theta, \quad (48-1)$$

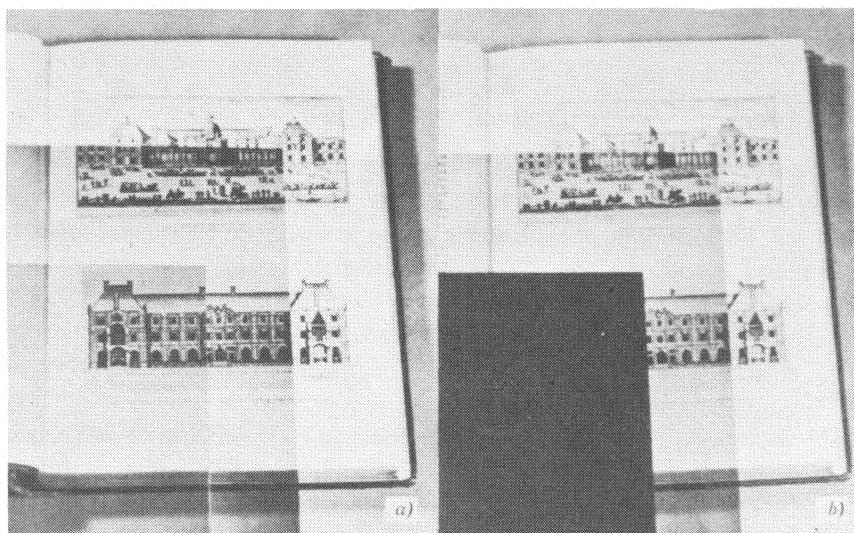
gdzie  $I_m$  oznacza maksymalne natężenie przechodzącego światła.  $I_m$  występuje wówczas,

gdy kierunki polaryzacji  $P_1$  i  $P_2$  są równolegle, to znaczy gdy  $\theta = 0$  albo  $180^\circ$ . Na rysunku 48-7a dwie częściowo zachodzące na siebie płytki polaryzujące ustawione są równolegle ( $\theta = 0$  albo  $180^\circ$  w równ. (48-1)). Światło przechodzące przez obie płytki ma maksymalne natężenie. Na rysunku 48-7b jedna z płytak jest obrócona o  $90^\circ$ , tak że  $\theta$  w równaniu (48-1) równe jest  $90^\circ$  albo  $270^\circ$ . Teraz natężenie światła przechodzącego przez obie płytki jest minimalne.

Równanie (48-1), zwane prawem Malusa, zostało odkryte doświadczalnie przez Étienne Louis Malusa (1775–1812) w 1809 r. Stosował on inną technikę polaryzacji niż opisana tutaj (patrz paragraf 48-3). W równaniu (48-1) widoczny jest brak symetrii, jaki muszą



Rys. 48-6. Światło niespolaryzowane nie jest przepuszczane przez skrzyżowane polaryzatory



Rys. 48-7. Dwa kwadratowe polaroidy położono na otwartej książce. (a) Osie polaryzujące płytaków są równolegle i światło przechodzi przez obydwie płytaki. (b) Jedną z płytaków obrócono o  $90^\circ$ ; światło w ogóle nie przechodzi przez płytaki. Książka otwarta jest na ilustracji Pałacu Luksemburskiego w Paryżu. Malus odkrył zjawisko polaryzacji przy odbiciu oglądając przez kryształ kalcytu światło słoneczne odbite od okien Pałacu

wykały liniowo spolaryzowane fale poprzeczne względem kierunku rozchodzenia się. Fale podłużne nie mogą wykazywać takich efektów. Jest dość ciekawe, że oko ludzkie w pewnych warunkach może wykryć światło spolaryzowane.

**Przykład 1.** Dwie płytki polaryzujące mają własne kierunki polaryzacji ustawione równolegle, a więc natężenie przechodzącego światła  $I_m$  jest maksymalne. O jaki kąt należy obrócić jedną z płyt, aby natężenie przechodzącego światła spadło do połowy wartości maksymalnej? Z równania (48-1), podstawiając  $I = \frac{1}{2}I_m$ , mamy

$$\frac{1}{2}I = I_m \cos^2 \theta$$

albo

$$\theta = \arccos \left( \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \pm 45^\circ, \pm 135^\circ.$$

Otrzymujemy zawsze ten sam wynik, niezależnie od tego, którą płytę obracamy i w jakim kierunku.

Historycznie badania polaryzacji miały na celu badanie natury światła. Dzisiaj odwracamy niejako ten porządek i na podstawie polaryzacji światła emitowanego lub odbitego od badanego przedmiotu uzyskujemy dane o naturze tego przedmiotu. Okazało się rzeczą możliwą wywnioskowanie z badania polaryzacji światła odbitego, że ziarna pyłu kosmicznego obecne w naszej Galaktyce są zorientowane przez słabe pole magnetyczne Galaktyki ( $\sim 5 \cdot 10^{-10}$  T) w ten sposób, że ich dłuższe wymiary są równoległe do tego pola. Badania polaryzacji wykazały, że pierścienie Saturna zawierają kryształki lodu. Z polaryzacji rozproszonego światła nadfioletowego można wyznaczyć kształt i rozmiary wirusów. Dużo cennych informacji można uzyskać o strukturze atomów i jąder, badając polaryzację emitowanego przez nie promieniowania, dla wszystkich długości fal widma elektromagnetycznego. Jest to więc bardzo wygodna technika badania struktury ciał, których wymiary leżą w zakresie od  $\sim 10^{+22}$  m (w Galaktyce) do  $\sim 10^{-15}$  m (jądro atomu). Światło spolaryzowane ma również szerokie zastosowanie w przemyśle i naukach technicznych.

### 48-3. Polaryzacja przez odbicie

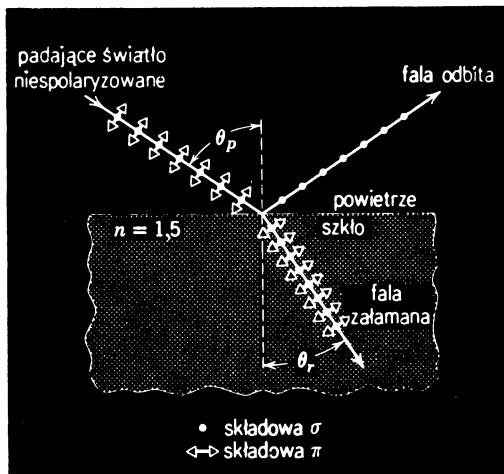
W 1809 roku Malus odkrył, że światło może być częściowo lub całkowicie spolaryzowane przez odbicie. Kto oglądał przez okulary przeciwsłoneczne, wykonane z płyt polaryzujących, Słońce odbite w wodzie, na pewno zauważył to zjawisko. Wystarczy tylko przechylać głowę z boku na bok, a więc obracać polaryzatory, aby spostrzec, że natężenie odbitego światła słonecznego przechodzi przez minimum.

Rysunek 48-8 pokazuje wiązkę niespolaryzowaną padającą na powierzchnię szkła. Wektor  $E$  dla każdego ciągu fal w wiązce można rozłożyć na dwie składowe: składową prostopadłą do płaszczyzny padania, która w naszym przypadku jest płaszczyzną rys. 48-8, oraz składową leczącą w tej płaszczyźnie. Pierwszą składową, oznaczoną na rysunku kropkami, nazywamy *składową  $\sigma$*  (w języku niemieckim *senkrecht* — znaczy prostopadła). Drugą składową, oznaczoną strzałkami, nazywamy *składową  $\pi$*  (równoległą). Dla wiązki światła całkowicie niespolaryzowanej, obie składowe mają równe amplitudy.

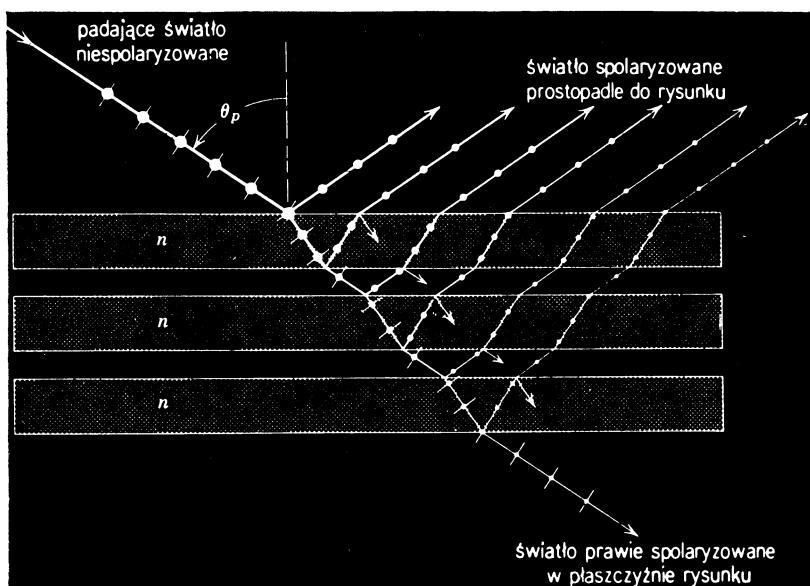
Z doświadczeń wynika, że dla szkła lub innych materiałów dielektrycznych istnieje pewien kąt padania, nazywany *kątem całkowitej polaryzacji*  $\theta_p$ , dla którego współczynnik odbicia składowej  $\pi$  jest równy零. Oznacza to, że wiązka odbita od szkła, chociaż ma małe natężenie, jest spolaryzowana liniowo, a jej płaszczyzna drgań jest prostopadła do

płaszczyzny padania. Polaryzację odbitej wiązki możemy łatwo sprawdzić, analizując ją za pomocą płytki polaryzującej.

Składowa  $\pi$  dla kąta polaryzującego jest całkowicie załamana; składowa  $\sigma$  jest załamana tylko częściowo. W rezultacie wiązka przechodząca, o dużym natężeniu, jest tylko częściowo spolaryzowana. Jeśli zamiast pojedynczej płytki użyjemy kilku płyt, to wystąpią odbicia od kolejnych płaszczyzn i natężenie wiązki odbitej (składowa  $\sigma$ ) wzrośnie (rys. 48-9). Tym samym składowe  $\sigma$  są stopniowo usuwane z wiązki przechodzącej, w której



Rys. 48-8. Dla pewnego kąta padania  $\theta_p$ , światło odbite jest całkowicie spolaryzowane. Światło przechodzące jest spolaryzowane częściowo



Rys. 48-9. Polaryzacja światła przez zespół płyt. Światło niespolaryzowane pada na zespół płyt szklanych pod kątem Brewstera  $\theta_p$ . (Polaryzacja w płaszczyźnie rysunku zaznaczona jest krótkimi kreskami, a polaryzacja prostopadła do tej płaszczyzny — kropkami.) Odbita część wiązki padającej jest spolaryzowana prostopadłe do płaszczyzny rysunku. Światło, które przeszło przez kilka płyt odbijających, nie zawiera już składowej spolaryzowanej prostopadłe

zaczynają przeważać składowe  $\pi$ . W rezultacie otrzymujemy wiązkę przechodzącą w dużym stopniu spolaryzowaną.

Stwierdzono doświadczalnie, że jeżeli kąt padania równy jest kątowi całkowitej polaryzacji, wiązki odbita i załamana tworzą kąt prosty (rys. 48-8),  $\theta_p + \theta_r = 90^\circ$ . Z prawa Snella mamy

$$n_1 \sin \theta_p = n_2 \sin \theta_r.$$

Z tych dwóch równań otrzymujemy

$$n_1 \sin \theta_p = n_2 \sin(90^\circ - \theta_p) = n_2 \cos \theta_p$$

albo

$$\tan \theta_p = \frac{n_2}{n_1}, \quad (48-2)$$

przy czym promień pada z ośrodka 1 i załamuje się w ośrodku 2. Powyższe równanie możemy zapisać następująco

$$\tan \theta_p = n, \quad (48-3)$$

gdzie  $n (= n_2/n_1)$  jest współczynnikiem załamania ośrodka 2 względem ośrodka 1. Równanie (48-3) jest znanyim *prawem Brewstera*. Sir David Brewster (1781–1868) znalazł to prawo doświadczalnie w 1812 r. Można je wyprowadzić ściśle przy pomocy równań Maxwella.

**Przykład 2.** Zastosujemy jako polaryzator płytę szklaną ( $n = 1,50$ ). Jaki jest kąt całkowitej polaryzacji? Jaki jest kąt załamania?

Z równania (48-3) mamy

$$\theta_p = \arctan 1,50 = 56,3^\circ.$$

Kąt załamania otrzymujemy z prawa Snella:

$$1 \sin \theta_p = n \sin \theta_r,$$

skąd

$$\sin \theta_r = \frac{\sin 56,3^\circ}{1,50} = 0,555, \quad \theta_r = 33,7^\circ.$$

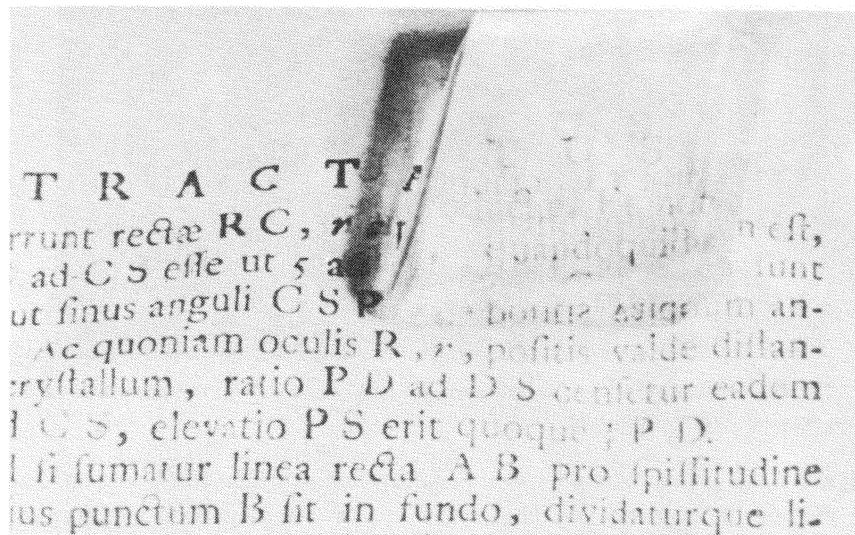
#### 48-4. Załamanie podwójne (dwójlomność)

W poprzednich rozdziałach zakładaliśmy, że prędkość światła, a więc i współczynnik załamania, nie zależą od kierunku rozchodzenia się światła w ośrodku, ani od jego polaryzacji. Ciecene, bezpostaciowe ciała stałe, takie jak szkło, oraz ciała stałe krystaliczne o symetrii sześciennnej spełniają to założenie i nazywamy je *ciałami optycznie izotropowymi*. Istnieje jednak szereg ciał o budowie krystalicznej, które są optycznie *anizotropowe* (tzn. nie są izotropowe)\*.

\* Niektóre spośród przezroczystych ciał stałych bezpostaciowych, jak szkło i tworzywa sztuczne, poddane naprężeniom mechanicznym stają się optycznie anizotropowe. Fakt ten jest szeroko wykorzystywany w technice przy badaniu naprężen w różnych mechanizmach, przy budowie mostów itp. Naprężenie można wyznaczyć ilościowo, budując model plastyczny urządzenia, który jest następnie poddawany działaniu różnych sił. Anizotropię optyczną, jaka przy tym powstaje w modelu, bada się przy pomocy polaryzacji.

Ciało stałe mogą być anizotropowe ze względu na wiele własności. Mika łamie się łatwo tylko w jednej płaszczyźnie; sześcienny kryształ grafitu ma różny opór elektryczny między poszczególnymi parami przeciwnego kierunku ścian; sześcian z krystalicznego niklu łatwiej magnesuje się w pewnych kierunkach niż w innych itd. Jeżeli ciało stałe jest mieszaniną dużej ilości małych kryształków, może ono wydawać się izotropowe, ponieważ orientacja poszczególnych kryształów jest przypadkowa. Na przykład, sproszkowana mika, uformowana za pomocą spoiwa w stałą masę, nie wykazuje żadnej anizotropii ląplliwości, tak charakterystycznej dla jej postaci krystalicznej.

Rysunek 48-10 przedstawia wypolerowany kryształ kalcytu ( $\text{CaCO}_3$ ), położony na drukowanym tekście. Widzimy tu optyczną anizotropię tego kryształu — obraz liter jest podwójny. Na rysunku 48-11 niespolaryzowana wiązka światła pada na kryształ kalcytu prostopadle do jednej z jego ścian. Pojedyncza wiązka rozszczepia się na powierzchni kryształu na dwie. To „podwójne zagięcie” wiązki przechodzącej przez kalcyt, przedstawione na rys. 48-10 i 48-11, nazywamy podwójnym załamaniem.



Rys. 48-10. Kryształ kalcytu wytwarza dwa obrazy, dla których kierunki polaryzacji różnią się o  $90^\circ$ . Kryształ leży na książce Huygensa *Opera Reliqua*, w której omawiane jest zjawisko podwójnego załamania

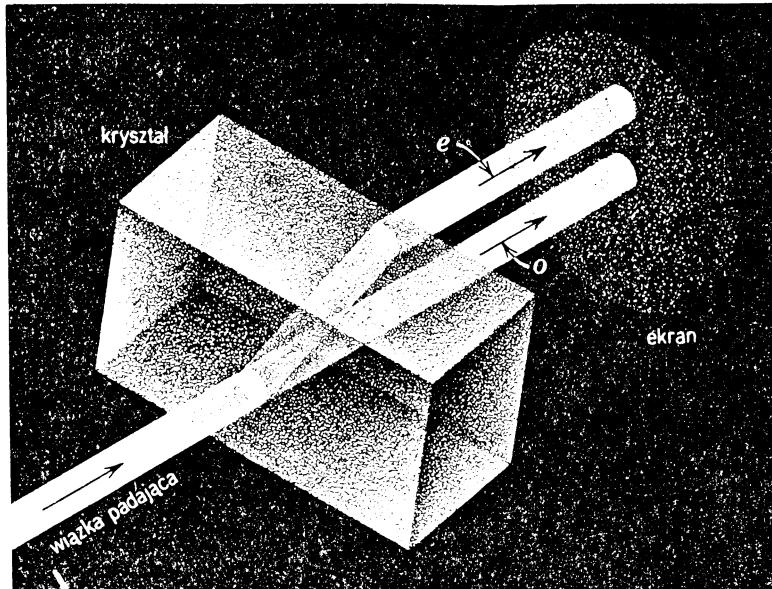
Jeżeli obydwie wychodzące wiązki (rys. 48-11) analizujemy za pomocą płytki polaryzującej, to okazuje się, że są one spolaryzowane liniowo, przy czym ich płaszczyzny drgań są względem siebie prostopadłe. Zjawisko to odkrył Huygens w 1678 r. Do badania stanu polaryzacji wiązek oznaczonych na rysunku przez  $o$  i  $e$  użył on kryształu kalcytu.

Jeżeli będziemy zmieniać kąt padania światła, to okaże się, że jedna z wiązek na rys. 48-11 (*promień zwyczajny*, tj. promień  $o$ ) będzie spełniała prawo Snella, dokładnie tak jak promień przechodzący z jednego izotropowego ośrodku do drugiego. Druga wiązka (*promień nadzwyczajny*, tj. promień  $e$ ) nie spełnia tego prawa. Na rysunku 48-11 kąt padania światła jest równy zeru, ale kąt załamania promienia  $e$  jest różny od zera, co jest sprzeczne z prawem Snella. Na ogół promień  $e$  nie leży w płaszczyźnie padania.

Różnica między falami przedstawionymi przez promienie  $o$  i  $e$  może być, w odniesieniu do prawa Snella, wyjaśniona następująco:

(1) Fala  $o$  przechodzi przez kryształ z taką samą prędkością  $v_0$  we wszystkich kierunkach. Inaczej mówiąc, dla takiej fali kryształ ma tylko jeden współczynnik załamania  $n_0$ , tak jak izotropowe ciało stałe.

(2) Fala  $e$  przechodzi przez kryształ z prędkością zmieniającą się wraz z kierunkiem od wartości  $v_0$  do pewnej większej (dla kalcytu) wartości  $v_e$ . Innymi słowy, współczynnik załamania określony przez  $c/v$ , zmienia się wraz z kierunkiem od  $n_0$  do wartości mniejszej (dla kalcytu)  $n_e$ .



Rys. 48-11. Wiązka niespolaryzowanego światła padająca na kryształ kalcytu rozszczepia się na dwie wiązki spolaryzowane wzajemnie prostopadłe

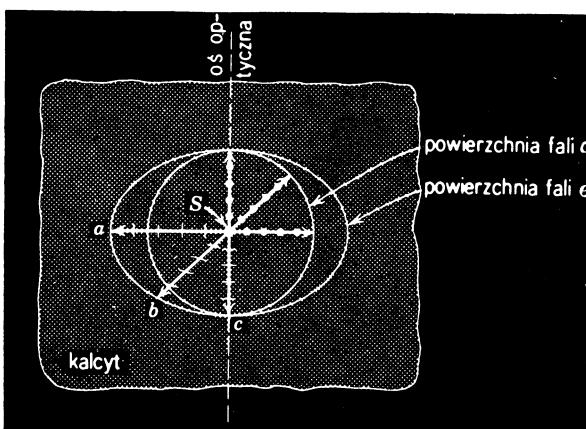
Wielkości  $n_e$  i  $n_0$  nazywamy *głównymi współczynnikami załamania kryształu*. Zadanie 12 sugeruje metodę ich pomiaru. W tablicy 48-1 zestawione są główne współczynniki załamania dla sześciu podwójnie załamujących kryształów. Dla trzech z nich fala  $e$  ma mniejszą prędkość niż fala  $o$ , dla pozostałych większą. Niektóre podwójnie załamujące kryształy (mika, topaz itp.) są optycznie bardziej złożone niż kalcyt i dla opisu ich własności optycznych potrzebne są *trzy* główne współczynniki załamania. Kryształy o strukturze

Tablica 48-1. Główne współczynniki załamania dla kilku podwójnie załamujących kryształów (dla światła sodu,  $\lambda = 589$  nm)

Kryształ	Wzór chemiczny	$n_o$	$n_e$	$n_e - n_o$
lód	$H_2O$	1,309	1,313	+ 0,004
kwarc	$SiO_2$	1,541	1,553	+ 0,012
siarczek cynku	$ZnS$	2,356	2,378	+ 0,022
kalcyt	$CaCO_3$	1,658	1,486	- 0,172
dolomit	$CaO \cdot MgO \cdot 2CO_2$	1,681	1,500	- 0,181
syderyt	$FeO \cdot CO_2$	1,875	1,635	- 0,240

sześcienniej (patrz rys. 47-13) są optycznie izotropowe i mają tylko *jeden* współczynnik załamania.

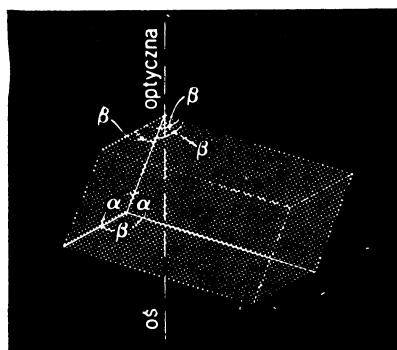
Na rysunku 48-12 przedstawione jest zachowanie się fal przechodzących przez kalcyt. Pokazane są powierzchnie falowe fal, o różnych prędkościach wychodzących z punktowego źródła światła  $S$ , znajdującego się wewnątrz kryształu (umieszczały je tam jedynie myślowo). Powierzchnia fali  $o$  jest kulista, jak oczekiwaliśmy, gdyby ośrodek był izotropowy. Powierzchnia fali  $e$  jest elipsoidą obrotową, której oś obrotu pokrywa się z charakterystycznym kierunkiem w krysztale, zwanym *osią optyczną*. Te dwie powierzchnie



Rys. 48-12. Powierzchnie falowe Huygensa wytwarzane przez punktowe źródło  $S$ , znajdujące się wewnątrz kryształu kalcytu. Stany polaryzacji trzech fal  $o$  i trzech fal  $e$  przedstawione są odpowiednio przez kropki i kreski. Zauważmy, że (promień  $Sb$ ) kreski przedstawiające kierunek polaryzacji nie są prostopadłe do promienia  $e$

falowe przedstawiają światło o dwóch różnych stanach polaryzacji. Rozpatrzmy promienie leżące w płaszczyźnie rys. 48-12. Dla tych promieni (a) płaszczyzna polaryzacji wiązki  $o$  jest prostopadła do płaszczyzny rysunku, co zaznaczono jest kropkami, a (b) płaszczyzna polaryzacji wiązki  $e$  leży w płaszczyźnie rysunku, co zaznaczono krótkimi kreskami. Pełny opis stanów polaryzacji podamy na końcu tego paragrafu.

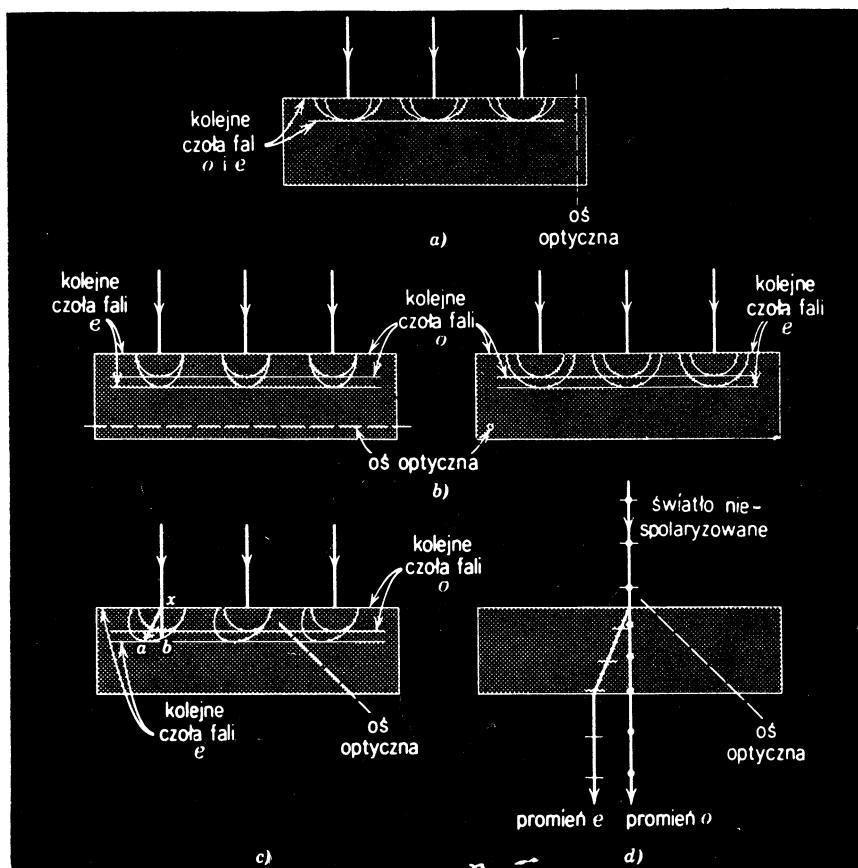
Na rysunku 48-13 pokazany jest typowy kryztał kalcytu wycięty z naturalnie występujących kryształów. Widzimy, w jaki sposób należy poprowadzić oś optyczną. Brzegi



Rys. 48-13. Kryztał kalcytu,  $\alpha = 78^\circ 05'$ ,  
 $\beta = 101^\circ 55'$

kryształu mogą mieć dowolną długość, ale kąty, pod jakimi się one przecinają, mają zawsze jedną z dwu możliwych wartości:  $78^{\circ}05'$  albo  $101^{\circ}55'$ . Oś optyczną znajdujemy prowadząc prostą wychodzącą z wierzchołka, w którym spotykają się trzy kąty rozwarte, i tworzącą równe kąty z krawędziami kryształu. *Każda linia w kryształku równoległa do tej prostej jest również osią optyczną.*

Zasadę Huygensa możemy zastosować do badania ruchu fal świetlnych w kryształach podwójnie załamujących. Na rysunku 48-14a widzimy przypadek szczególny, kiedy światło niespolaryzowane pada prostopadle na płytę wyciętą z kryształu kalcytu w ten sposób, że os optyczna płytki jest prostopadła do powierzchni, na którą pada światło. Rozpatrzmy czoło fali, która w chwili  $t = 0$  osiąga powierzchnię kryształu. Zgodnie z zasadą Huygensa każdy punkt tej powierzchni możemy traktować jako źródło podwójnych fal elementarnych, takich jakie pokazano na rys. 48-12. Płaszczyzna styczna do powierzchni falowych tych fal wyznacza położenie czoła fali w każdej późniejszej chwili  $t$ . Wiązka padająca, jak na rys. 48-14a, przechodzi przez kryształ bez odchylenia, z prędkością  $v_0$ . Wiązka

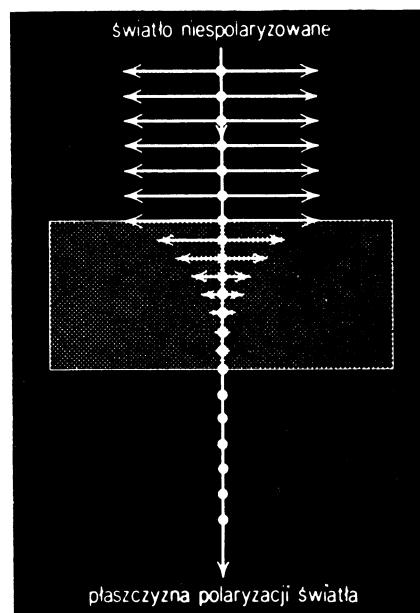


Rys. 48-14. Światło niespolaryzowane pada prostopadle na płytę wyciętą z kryształu kalcytu. Elementarne fale Huygensa są odpowiednimi przekrojami elipsoid obracanych wokół osi optycznej, określonej na rys. 48-13. (a) Nie występuje załamanie podwójne ani różnica prędkości. (b) Nie występuje załamanie podwójne, ale pojawia się różnica prędkości. (c) Widzimy podwójne załamanie i różnicę prędkości. (d) Tak samo jak (c), ale pokazane są stany polaryzacji promieni wychodzących

wychodząca z płytki ma tę samą polaryzację co padająca. Płytki z kalcytu jedynie w tych szczególnych warunkach zachowuje się tak, jak materiał izotropowy i nie odróżnia fali  $o$  od fali  $e$ .

Rysunek 48-14b przedstawia dwa inne przypadki szczególny, kiedy światło niespolaryzowane pada prostopadle na płytę wyciętą tak, że os optyczna jest równoległa do jej powierzchni. W tym przypadku wiązka padająca przechodzi również bez odchylenia. Jednakże można teraz odróżnić fale  $o$  i  $e$ , które przechodzą przez kryształ z różnymi prędkościami  $v_o$  i  $v_e$ . Fale te są spolaryzowane prostopadle względem siebie.

Niektóre podwójnie załamujące kryształy mają interesującą właściwość zwaną *dichroizmem*, która polega na tym, że jedna ze składowych polaryzacji pochłaniana jest w krysztale znacznie silniej niż druga, która przechodzi z niewielkim osłabieniem. Właściwość ta, zilustrowana na rys. 48-15, jest podstawą, na której opiera się działanie szeroko stosowanych polaroidów. Duża liczba małych kryształów umieszczonych w płytce plastycznej tak, że ich osie optyczne są względem siebie równoległe, wykazuje działanie polaryzujące równoważne działaniu płytki jednorodnej wyciętej z dużego kryształu.



Rys. 48-15. Absorpcja jednej ze składowych polaryzacji wewnętrz kryształu dwójlomnego użytego jako polaroid

Na rysunku 48-14c światło niespolaryzowane pada prostopadle na płytę, wyciętą z kryształu kalcytu w ten sposób, że jej os optyczna tworzy dowolny kąt z powierzchnią kryształu. Widzimy, że po przejściu przez płytę powstają dwie przestrzennie rozdzielone wiązki, jak na rys. 48-11. Przechodzą one przez płytę z różnymi prędkościami, przy czym prędkość fali  $o$  wynosi  $v_o$ , a dla fali  $e$  prędkość zawarta jest między  $v_o$  i  $v_e$ . Zauważmy, że promień  $xa$  przedstawia najkrótszą drogę optyczną potrzebną do przeniesienia energii światła z punktu  $x$  do czoła fali  $e$ . Aby energię tę przenieść inną drogą, np. wzduż promienia  $xb$ , potrzeba dłuższego czasu, co wynika z faktu, że prędkość fali  $e$  zmienia się wraz z kierunkiem\*. Rysunek 48-14d pokazuje ten sam przypadek co rys. 48-14c. Przed-

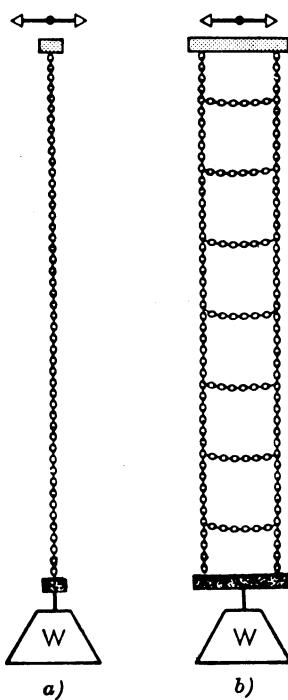
\* Czytelnik, który nie zapoznał się dokładnie z paragrafem 43-6, o zasadzie Fermata, powinien zróbić to teraz.

stawia on promienie wychodzące z płytki, tak jak na rys. 48-11; jest oczywiste, że wiązki wychodzące są spolaryzowane pod kątem prostym względem siebie, co oznacza, że są one *spolaryzowane poprzecznie*.

Postaramy się obecnie wytlumaczyć istnienie poprzecznie spolaryzowanych fal świetlnych o różnych prędkościach, na podstawie atomowej budowy kryształów optycznie anizotropowych. Przechodzeniu światła przez kryształ towarzyszy oddziaływanie wektorów fali  $E$  z elektronami kryształu. Elektryny te, podlegające działaniu sił elektrostatycznych dążących do przywrócenia elektronom położenia równowagi, zostają wprowadzone w wymuszone drgania okresowe wokół położenia równowagi, w kierunku prostopadłym do kierunku ruchu fali świetlnej. Wielkość sił sprężystych można wyznaczyć przy pomocy stałej sprężystości  $k$  podobnie jak dla prostego oscylatora harmonicznego, omawianego w rozdziale 15 (patrz równe. (15-4)).

W ośrodkach optycznie izotropowych stała sprężystości  $k$  jest jednakowa dla wszystkich kierunków odchylenia elektronów od ich położen równowagi. Natomiast dla kryształów podwójnie załamujących  $k$  zmienia się wraz ze zmianą kierunku. Jeżeli elektryny drgają w płaszczyźnie prostopadłej do osi optycznej,  $k$  ma stałą wartość  $k_o$ , niezależnie od tego, jakie są kierunki tych drgań. Dla drgań równoległych do osi optycznej  $k$  przyjmuje większą wartość (dla kalcytu)  $k_e^*$ . Zwróćmy uwagę, że prędkość fali w krysztale zależy od kierunku drgań wektorów  $E$ , a nie od kierunku ruchu. Drgania poprzeczne wektora  $E$  powodują działanie sił przywracających elektronom położenie równowagi, a więc określają prędkość fali. Zauważmy również, że im większe są te siły, a więc im większa  $k$ , tym większa jest prędkość fal. Dla fal biegących np. wzduż rozciągniętej linki siła przywracająca jej stan równowagi określona jest naprężeniem linki  $F$ . Z równania (19-12) widać, że wzrost  $F$  oznacza zwiększenie prędkości fali  $v$ .

Rysunek 48-16, przedstawiający długą drabinkę łańcuchową obciążoną i zamocowaną na górnym



Rys. 48-16. Dwa przykłady jednowymiarowego modelu mechanicznego dla podwójnego załamania

\* Dla kryształów podwójnie załamujących o  $n_e > n_o$  (patrz tablica 48-1) stała  $k$  dla drgań równoległych do osi optycznej jest mniejsza niż dla drgań prostopadłych. Również dla kryształów o trzech głównych współczynnikach załamania istnieją trzy stałe sprężystości. Kryształy takie mają dwie osie optyczne i nazywane są *dwoosiowymi*. Kryształy wymienione w tablicy 48-1 mają tylko jedną osią optyczną i nazywamy je *jednoosiowymi*.

końcu, daje jednowymiarową analogię mechaniczną podwójnego załamania. Stosuje się ona do fal o i e, biegących pod kątem prostym do osi optycznej, jak na rys. 48-14b. Jeśli bloczek przytrzymujący drabinkę drga tak jak na rys. 48-16a, wzdłuż drabinki biegnie z pewną prędkością fala poprzeczna. Jeśli bloczek drga tak jak na rys. 48-16b, biegnie również druga fala poprzeczna. Siła przywracająca położenie równowagi jest dla drugiej fali większa niż dla pierwszej, ponieważ drabinka jest bardziej sztywna w płaszczyźnie rys. 48-16b niż w płaszczyźnie rys. 48-16a. W rezultacie druga fala biegnie wzdłuż drabinki z większą prędkością niż pierwsza.

W języku optycznym możemy powiedzieć, że prędkość fali poprzecznej w drabince zależy od orientacji płaszczyzny drgań fali. Gdyby górny koniec drabinki drgał w sposób przypadkowy, zaburzenie falowe w dowolnym jej punkcie można by wyrazić jako sumę dwu fal spolaryzowanych prostopadle względem siebie i biegących z różnymi prędkościami. Odpowiada to dokładnie sytuacji przedstawionej na rys. 48-14b.

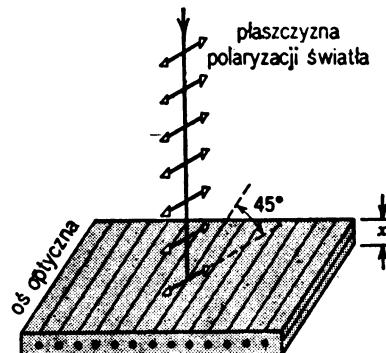
Dla fal biegających równolegle do osi optycznej, jak na rys. 48-14a, albo dla fal w ośrodkach optycznie izotropowych, takim przybliżonym modelem mechanicznym może być pojedynczy, wiszący łańcuch obciążony u dołu. Tutaj występuje tylko jedna prędkość fali, niezależnie od tego, jak drga górnego końca łańcucha. Siły przywracające równowagę są w tym przypadku jednakowe dla wszystkich orientacji płaszczyzny polaryzacji fal.

Rozważania te pozwalają nam lepiej zrozumieć stany polaryzacji światła, przedstawione na rys. 48-12 jako dwie powierzchnie falowe. Dla (sferycznej) powierzchni fali o drgania wektora  $\mathbf{E}$  muszą być zawsze prostopadłe do osi optycznej. Wówczas zawsze występuje ta sama stała  $k_o$ , i w rezultacie fale o będą biegać z tą samą prędkością we wszystkich kierunkach. Mówiąc dokładniej, jeżeli poprowadzimy promień z punktu  $S$  na rys. 48-12 do powierzchni fali o traktowanej trójwymiarowo (tzn. jako kula), to drgania wektora  $\mathbf{E}$  będą zawsze prostopadłe do płaszczyzny wyznaczonej przez ten promień i oś optyczną. A więc drgania będą zawsze prostopadłe do osi optycznej.

Dla (elipsoidalnej) powierzchni fali e drgania wektora  $\mathbf{E}$  mają na ogół składową równoległą do osi optycznej. Dla promieni takich jak  $Sa$  na rys. 48-12 albo dla promieni e na rys. 48-14b, drgania są całkowicie równoległe do tej osi. Stała  $k_e$  (dla kalcytu) będzie więc odpowiednio większa, a zatem prędkość fali  $v_e$  również będzie większa. Dla promieni e, takich jak  $Sb$  z rys. 48-12, składowa równoległa drgań wektora  $\mathbf{E}$  stanowi mniej niż 100%, a więc i odpowiednia prędkość fali jest mniejsza niż  $v_e$ . Dla promienia  $Sc$ , rys. 48-12, składowa równoległa jest równa zeru i różnica między promieniami o i e znika.

#### 48-5. Polaryzacja kolowa

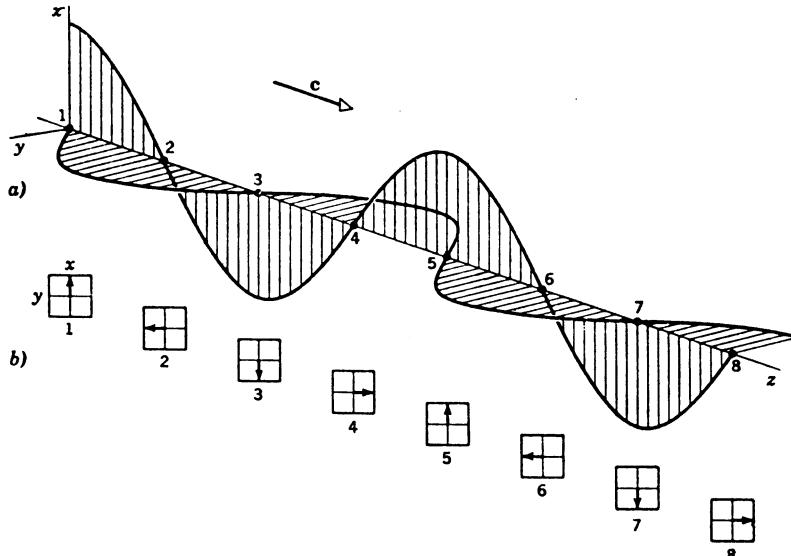
Niech światło spolaryzowane liniowo, o częstotliwości kołowej  $\omega$  ( $= 2\pi\nu$ ) pada prostopadle na płytke kalcytu wyciętą tak, że jej oś optyczna jest równoległa do powierzchni, jak na rys. 48-17. Dwie fale wychodzące będą spolaryzowane liniowo, w kierunkach prostopadłych względem siebie i jeżeli płaszczyzna drgań światła padającego tworzy kąt  $45^\circ$  z osią optyczną, to fale te będą miały równe amplitudy. Ponieważ fale biegną przez kryształ z różnymi prędkościami, przy wyjściu z płytki będą się one różniły w fazie o  $\varphi$ . Jeżeli



Rys. 48-17. Światło spolaryzowane liniowo pada na podwójnie załamującą płytke o grubości  $x$ , wyciętą tak, że jej oś optyczna jest równoległa do powierzchni. Płaszczyzna drgań światła padającego tworzy kąt  $45^\circ$  z osią optyczną płytki

grubość płytki dla danej częstości światła wybierzymy tak, aby  $\varphi = 90^\circ$ , to taką płytke nazwamy *płytką ćwierćfalową*. Światło wychodzące z niej jest *spolaryzowane kołowo*.

W paragrafie 15-7 mówiliśmy, że dwie opisane tu fale wychodzące, liniowo spolaryzowane (drgające prostopadle z różnicą faz równą  $90^\circ$ ) można przedstawić jako rzut wektora obracającego się z częstością kołową  $\omega$  wokół kierunku ruchu na dwie osie prostopadłe. Obydwa opisy kołowo spolaryzowanego światła są zupełnie równoważne. Rysunek 48-18 wyjaśnia związki między tymi interpretacjami.



Rys. 48-18. (a) Dwie liniowo, prostopadłe względem siebie spolaryzowane fale o różnych amplitudach poruszają się w kierunku osi  $z$ . Fale te różnią się w fazie o  $90^\circ$ . Tam, gdzie jedna z fal ma amplitudę maksymalną, druga ma zerową. (b) Obrazy wypadkowej amplitudy fali widziane przez obserwatorów znajdujących się w położeniach zaznaczonych na osi  $z$ . Należy zauważyć, że wektor wypadkowy obraca się w czasie zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara

**Przykład 3.** Kwartcową płytke ćwierćfalową chcemy oświetlać linią sodu ( $\lambda = 589 \text{ nm}$ ). Jaka powinna być jej grubość?

Dwie fale przechodzą przez płytke z prędkościami odpowiadającymi głównym współczynnikom załamania, które podano w tablicy 48-1 ( $n_e = 1,553$  i  $n_o = 1,541$ ). Jeśli grubość kryształu jest  $x$ , to liczba długości fal pierwszej fali, mieszczących się w kryształku, jest równa

$$N_e = \frac{x}{\lambda_e} = \frac{x n_e}{\lambda},$$

gdzie  $\lambda_e$  jest długością fali  $e$  w kryształku, a  $\lambda$  oznacza długość fali w powietrzu. Dla drugiej fali odpowiadającej wielkość jest równa

$$N_o = \frac{x}{\lambda_o} = \frac{x n_o}{\lambda},$$

gdzie  $\lambda_o$  jest długością fali  $o$  w kryształku. Różnica  $N_e - N_o$  musi być równa  $\frac{1}{4}$ , a więc

$$\frac{1}{4} = \frac{x}{\lambda} (n_e - n_o).$$

Z równania tego otrzymujemy

$$x = \frac{\lambda}{4(n_e - n_o)} = \frac{589 \text{ nm}}{4(1,553 - 1,541)} = 0,012 \text{ nm}.$$

A więc płytka ta jest bardzo cienka. Większość płytka ćwierćfalowych wykonuje się z miki, zdejmując kolejne warstwy z grubszej płytki aż do uzyskania poprawnej grubości.

**Przykład 4.** Wiązka światła spolaryzowanego kołowo pada na polaryzator. Opisać wiązkę wychodzącą.

Światło spolaryzowane kołowo, wchodzące do płytki, możemy przedstawić następująco:

$$E_x = E_m \sin \omega t,$$

$$E_y = E_m \cos \omega t,$$

gdzie  $x$  i  $y$  przedstawiają dowolne osie prostopadłe. Z równań tych wynika, że fala spolaryzowana kołowo jest równoważna dwu falom spolaryzowanym liniowo, o różnych amplitudach i różnicy faz  $90^\circ$ .

Amplituda wypadkowej fali padającej, spolaryzowanej kołowo jest równa

$$E_{ks} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{E_m^2(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)} = E_m.$$

Otrzymaliśmy wynik, który jest słuszny w przypadku przedstawienia fali spolaryzowanej kołowo przez obracający się wektor. Natężenie wypadkowej fali padającej jest proporcjonalne do  $E_m^2$ ,

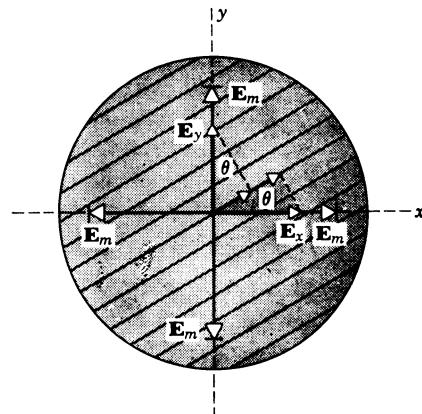
$$I_{ks} \sim E_m^2. \quad (48-4)$$

Założymy, że kierunek polaryzujący płytki tworzy pewien kąt z osią  $x$ , jak na rys. 48-19. Amplituda chwilowa liniowo spolaryzowanej fali, przechodzącej przez płytke, jest równa

$$E = E_y \sin \theta + E_x \cos \theta = E_m \cos \omega t \sin \theta + E_m \sin \omega t \cos \theta = E_m \sin(\omega t + \theta).$$

Natężenie fali przechodzącej przez płytke jest proporcjonalne do  $E^2$ , a więc

$$I \sim E_m^2 \sin^2(\omega t + \theta).$$



Rys. 48-19. Światło spolaryzowane kołowo pada na płytke polaryzującą.  $E_x$  i  $E_y$  to dwie chwilowe składowe wektora  $E$ , których wielkość maksymalna jest  $E_m$ .

Oko lub inne przyrządy pomiarowe reagują tylko na uśrednione natężenie  $\bar{I}$ , które znajdujemy przedstawiając zamiast  $\sin^2(\omega t + \theta)$  jego wartość uśrednioną ( $= \frac{1}{2}$ ), a więc

$$\bar{I} \sim \frac{1}{2} E_m^2.$$

Porównując to z równaniem (48-4) widzimy, że wprowadzenie płytka polaryzującej w wiązkę światła redukuje jej natężenie do połowy. Orientacja płytka nie odgrywa roli, ponieważ kąt  $\theta$  w równaniu tym nie występuje. Należy tego oczekwać w przypadku przedstawienia światła spolaryzowanego kołowo przez obracający się wektor, gdyż wszystkie kierunki azymutalne wokół kierunku ruchu fali są równoważne. Wprowadzenie płytka polaryzującej w wiązkę światła niespolaryzowanego daje identyczny efekt i dlatego zwykła płytka polaryzująca nie może być stosowana do wykazania kołowej polaryzacji światła.

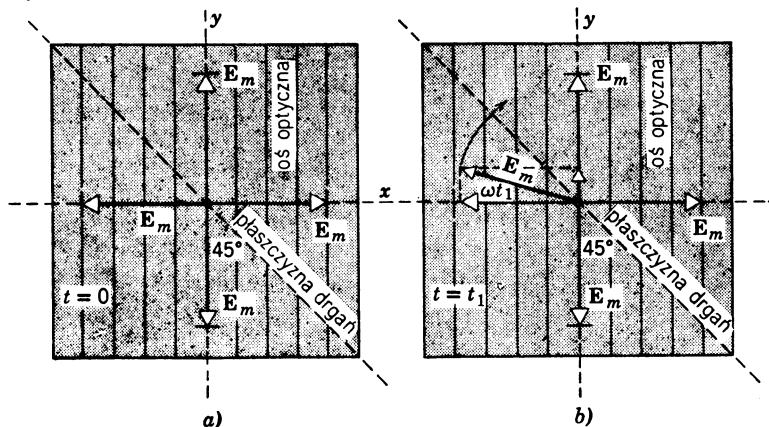
**Przykład 5.** Zakładamy, że wiązka światła jest spolaryzowana kołowo. Jak możemy to sprawdzić?

Wprowadzamy w wiązkę światła płytke ćwierćfalową. Jeżeli światło jest spolaryzowane kołowo, dwie składowe będą miały różnicę faz równą  $90^\circ$ . Płytki wprowadza dodatkową różnicę  $\pm 90^\circ$ , w rezultacie

czego różnica faz światła wychodzącego będzie równa  $0^\circ$  albo  $180^\circ$ . W obydwu przypadkach powstanie fala spolaryzowana liniowo, którą możemy całkowicie wygasić, obracając polaryzator ustawiony na drodze światła.

Czy przy przeprowadzaniu tego doświadczenia płytki ćwierćfalowej może być zorientowana w sposób dowolny?

**Przykład 6.** Fala świetlna liniowo spolaryzowana, o amplitudzie  $E_0$ , pada na kwarcową płytę ćwierćfalową. Płaszczyzna drgań fali tworzy kąt  $45^\circ$  z osią optyczną płytki, którą przyjmujemy za osią  $y$  (rys. 48-20). Światło wychodzące będzie spolaryzowane kołowo. W jakim kierunku będzie się obracał wektor elektryczny? Fala wychodząca porusza się prostopadle do płaszczyzny rysunku w kierunku patrzącego.



Rys. 48-20. Światło liniowo spolaryzowane pada od tyłu na płytę ćwierćfalową ustawioną tak, że światło wychodzące z płaszczyzny rysunku jest spolaryzowane kołowo. W tym przypadku obserwator patrzący od przodu na źródło światła widzi, że wektor elektryczny  $E_m$  obraca się zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara

Składowa fali, której drgania są równoległe do osi optycznej (fala  $e$ ), może być przy wyjściu z płytki przedstawiona następująco:

$$E_y = E_0 \cos 45^\circ \sin \omega t = \frac{1}{2} E_0 \sin \omega t = E_m \sin \omega t.$$

Składowa fali, której drgania są prostopadłe do osi optycznej (fala  $o$ ), wyraża się wzorem

$$E_x = E_0 \sin 45^\circ \sin(\omega t - 90^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}} E_0 \cos \omega t = -E_m \cos \omega t,$$

przy czym przesunięcie fazy o  $90^\circ$  wynika z działania płytki ćwierćfalowej. Zauważmy, że w kalcycie  $E_x$  osiąga wartość maksymalną o  $\frac{1}{4}$  obrotu później niż  $E_y$ , a więc fala  $E_x$  (fala  $o$ ) biegnie wolniej niż fala  $E_y$  (fala  $e$ ).

Aby ustalić kierunek obrotu  $E$ , rozpatrzmy obracający się wektor elektryczny w dwóch momentach czasu: (a)  $t = 0$  i (b)  $t = t_1$ , przy czym czas  $t_1$  jest tak dobrany, że  $\omega t_1$  jest kątem małym. W chwili  $t = 0$  współrzędne końca obracającego się wektora (rys. 48-20a) wynoszą

$$E_y = 0, \quad E_x = -E_m.$$

Dla  $t = t_1$  współrzędne te wyrażają się następująco:

$$E_y = E_m \sin \omega t_1 \cong E_m \omega t_1,$$

$$E_x = -E_m \cos \omega t_1 \cong -E_m.$$

Rysunek 48-20b pokazuje, że wektor, który przedstawia światło wychodzące spolaryzowane kołowo, obraca się zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. W sposób umowny światło takie nazywamy spolaryzowanym prawoskrętnie dla obserwatora patrzącego od przodu na źródło światła.

Jeżeli płaszczyzna drgań światła padającego, rys. 48-20, obróci się o kąt  $\pm 90^\circ$ , światło wychodzące będzie spolaryzowane lewoskrętnie.

## 48-6. Moment pędu światła

Fale świetlne, padające na ekran pochłaniający lub na zwierciadło przekazują tym obiektem pewien *pęd*, co jest całkowicie zgodne z klasyczną teorią elektromagnetyzmu, z fizyką kwantową oraz z doświadczeniem. Istnienie polaryzacji kołowej sugeruje, że tak spolaryzowane światło może mieć pewien związany z nią *moment pędu*. Przypuszczenie to jest zgodne z klasyczną teorią elektromagnetyzmu, jak również z fizyką kwantową. Dowód doświadczalny tego faktu podał w 1936 r. Richard Beth, który wykazał, że płytka podwójnie załamująca, wytwarzająca światło spolaryzowane kołowo, obraca się w kierunku przeciwnym do kierunku polaryzacji.

Moment pędu unoszony przez światło odgrywa ogromną rolę w rozumieniu emisji światła przez atomy oraz promieni  $\gamma$  przez jądra. Jeżeli światło emitowane przez atom unosi moment pędu, to moment pędu pozostającego atomu musi się zmienić dokładnie o tę samą wielkość, która została zabrana, inaczej całkowity moment pędu izolowanego układu *atom-svetlo* nie byłby przy tym zachowany.

Zarówno teoria klasyczna, jak i kwantowa przewidują, że jeżeli spolaryzowana kołowo wiązka światła padającego na dany przedmiot zostaje całkowicie pochłonięta, to moment pędu przekazany temu przedmiotowi jest równy

$$L = \frac{U}{\omega}, \quad (48-5)$$

gdzie  $U$  oznacza energię pochłoniętą,  $\omega$  zaś częstotliwość kołową światła. Czytelnik powinien sprawdzić czy w równaniu (48-5) zgadzają się wymiary.

## 48-7. Rozpraszanie światła

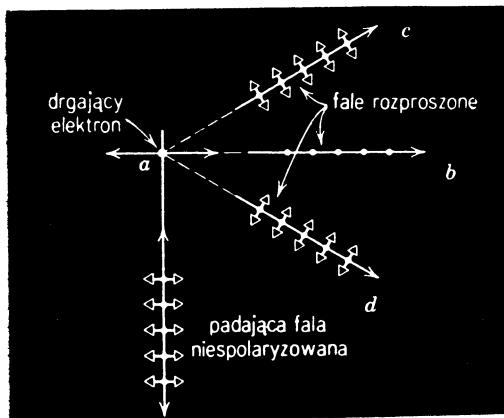
Fala świetlna, padając na przezroczyste ciało stałe, wywołuje w nim okresowe drgania elektronów, spowodowane działaniem zmieniającego się w czasie wektora elektrycznego. Fala, która przechodzi przez ośrodek, jest wypadkową fali padającej oraz promieniowania emitowanego przez drgające elektryny. Maksymalne natężenie fali wypadkowej występuje w kierunku wiązki padającej i maleje gwałtownie w sąsiednich kierunkach. Część wiązki padającej ulega rozproszeniu na boki i zasadniczo, w bardzo dużym krysztale, cała wiązka powinna być rozproszona; fakt, że straty natężenia na rozproszenie są małe, jest spowodowany spójnym działaniem ładunków drgających w danym ośrodku.

Kiedy światło przechodzi przez gaz, rozproszenie jest znacznie większe. W gazie drgające elektryny znajdują się w dużych odległościach od siebie i nie są tak silnie związane jak w ciele stałym. Działają więc raczej niezależnie niż spójnie. Dlatego też gaz powoduje silne rozproszenie światła, natomiast natężenie wiązki przechodzącej wprost (tzn. w kierunku padania) jest znacznie mniejsze niż przy przechodzeniu światła przez ciało stałe.

Svetlo rozproszone przez gaz może być częściowo lub całkowicie spolaryzowane, nawet jeśli wiązka padająca jest niespolaryzowana. Rysunek 48-21 pokazuje wiązkę poruszającą się ku górze i padającą na atom gazu w punkcie  $a$ . Elektryczna składowa fali wywołuje w punkcie  $a$  drgania elektronów, równoważnych dwu drgającym dipolom, o osiach zaznaczonych na rysunku przez strzałkę i kropkę (w punkcie  $a$ ). Drgający dipol nie promieniuje wzdłuż swej własnej linii drgań. A więc obserwator znajdujący się w punkcie  $b$ , nie odbiera żadnego promieniowania emitowanego przez dipol oznaczony strzałką. Promieniowanie, które on obserwuje, pochodzi całkowicie od dipola oznaczonego w punkcie  $a$  kropką. A więc promieniowanie to powinno być liniowo spolaryzowane, przy czym

płaszczyzna drgań powinna przeходить przez linię *ab*, prostopadle do płaszczyzny rysunku.

Obserwatorzy znajdujący się w punkcie *c* i *d* odbierają światło częściowo spolaryzowane, ponieważ dipol oznaczony strzałką emiteme trochę promieniowania w tych kierunkach. Obserwatorzy oglądający światło przechodzące lub rozproszone do tyłu nie zauważą żadnej polaryzacji, ponieważ obydwa dipole promieniują jednakowo w tych dwóch kierunkach.



Rys. 48-21. Światło spolaryzowane częściowo (*c* i *d*) albo całkowicie (*b*) przez rozproszenie na cząsteczce gazu w punkcie *a*

Znanym przykładem tego zjawiska jest rozproszenie światła słonecznego przez cząsteczki atmosfery ziemskiej. Gdyby nie było atmosfery, niebo byłoby czarne, chyba że patrzylibyśmy wprost na Słońce. Zostało to potwierdzone przez pomiary wykonane w załogowych i bezzałogowych pojazdach kosmicznych znajdujących się powyżej atmosfery ziemskiej. Łatwo możemy sprawdzić, że światło przechodzące z bezchmurnego nieba jest przynajmniej częściowo spolaryzowane. Fakt ten wykorzystywany jest w tzw. *busoli słonecznej* używanej podczas wypraw polarnych. Urządzenie to pozwala ustalić kierunek geograficzny na podstawie polaryzacji rozpraszanego światła słonecznego. Jest rzeczą znaną, że kompasy magnetyczne w obszarach podbiegunowych nie mogą być używane. Znany jest również fakt\*, że pszczoły w swych lotach pomiędzy ulem a źródłem pyłku kwiatowego orientują się w kierunkach właśnie dzięki polaryzacji światła słonecznego. Oczy pszczół mają „urządzenia” czule na polaryzację światła.

Pozostaje jeszcze wytlumaczyć, dlaczego światło rozproszone w atmosferze jest przeważnie niebieskie i dlaczego światło biegające wprost ze Słońca — szczególnie o zachodzie, kiedy grubość warstwy atmosfery jest największa — jest czerwone. Przekrój czynny atomu lub cząsteczki na rozproszenie światła zależy od długości fali. Światło niebieskie jest znacznie silniej rozprasiane niż czerwone i dlatego światło przechodzące wprost ma kolor normalnego światła słonecznego, pozbawionego części niebieskiej, a więc wydaje się bardziej czerwone.

Fakt, że przekrój czynny na rozproszenie światła niebieskiego jest większy niż dla czerwonego, jest uzasadniony. Elektrony w atomach czy cząsteczkach są związane siłami dążącymi do zachowania równowagi. Elektrony te mają pewną określoną częstość własną, podobnie jak mała masa zawieszona w prze-

\* Patrz: Talbot H. Waterman, Polarized Light and Animal Navigation, *Scientific American*, July 1955, oraz R. Wehner, Polarized-Light Navigation by Insects, *Scientific American*, July 1976.

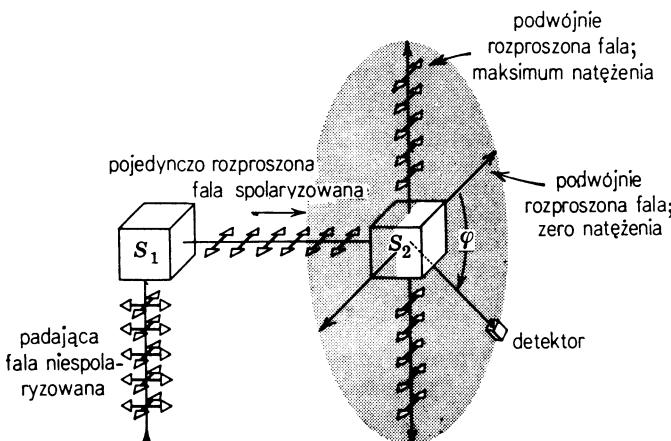
strzeni za pomocą układu sprężyn. Ta własna częstość elektronów w atomach i cząsteczkach odpowiada na ogół częstotliwości światła fioletowego lub ultrafioletowego.

Kiedy światło pada na związane elektrony, wywołuje ono wymuszone drgania o częstotliwości równej częstotliwości padającej wiązki. W mechanicznych układach rezonansowych najsilniejsze drgania wzbudza siła zewnętrzna, której częstotliwość jest najbliższa częstotliwości rezonansowej. W przypadku światła częstotliwość niebieskiej składowej widma bliższa jest częstotliwości rezonansowej elektronów związanych niż częstotliwość składowej czerwonej. Dlatego też światło niebieskie z większą wydajnością wzbudza drgania elektronów, a zatem jest silniej rozpraszane.

#### 48-8. Rozpraszanie podwójne

Odkrycie promieni Roentgena w 1898 roku wywołało wiele dyskusji na temat ich natury. Zastanawiano się czy są one falami, czy cząstkami. W 1906 roku Charles Glover Barkla (1877-1944) przeprowadził eksperyment polaryzacyjny dowodzący, że są to fale poprzeczne.

Niespolaryzowana wiązka promieni Roentgena, padająca na rozpraszający blok  $S_1$  (rys. 48-22), wywołuje w nim drgający ruch elektronów. Z rozważań przytoczonych w poprzednim paragrafie wynika, że promienie Roentgena rozpraszane w kierunku drugiego bloku rozpraszającego  $S_2$  są liniowo spolaryzowane, jak pokazano na rysunku. Weźmy pod uwagę promienie rozproszone na  $S_2$  i zbadajmy je obracając



Rys. 48-22. Doświadczenie z podwójnym rozproszeniem wykonane przez Barklę dla wykazania, że promienie Roentgena są falami poprzecznymi

detektor  $D$  w płaszczyźnie prostopadłej do linii łączącej  $S_1$  i  $S_2$ . Elektryny będą drgały równolegle względem siebie, a położenia maksymalnego i zerowego natężenia będą takie, jak pokazano na rysunku. Wykres wskaźników detektora jako funkcji kąta  $\varphi$  potwierdza przypuszczenie, że promienie Roentgena są falami poprzecznymi. Gdyby to były cząstki albo fale podłużne, opisane tutaj efekty byłyby zupełnie niezrozumiałe. Tak więc, doniosłe doświadczenie Barkli wykazało, że promienie Roentgena stanowią część widma elektromagnetycznego.

Dalsze studia przekonają czytelnika, że cząstki takie, jak elektryny, protony i piony można również traktować jako fale. Przy badaniu polaryzacji tych cząstek, często jest stosowana technika rozpraszania (włączając rozpraszanie podwójne)\*.

#### Pytania

1. Mówi się, że światło ze zwyczajnych źródeł jest niespolaryzowane. Czy potrafisz wskazać jakieś zwyczajne źródła wysyłające światło spolaryzowane?

\* Patrz: Gilbert Shapiro, Polarized Accelerator Targets, *Scientific American*, July 1976.

2. Dlaczego okulary słoneczne wykonane z polaryzatora mają znaczną przewagę nad tymi, które tylko pochłaniają światło?

3. Światło niespolaryzowane pada na dwa polaryzatory tak ustawione względem siebie, że światło nie przechodzi przez nie. Czy będzie ono mogło przejść, jeśli między te polaryzatory wstawimy trzeci?

4. We wczesnych latach pięćdziesiątych bardzo popularne było kino trójwymiarowe. W takim kinie potrzebne były dwa projektorzy z umieszczonymi przed nimi płytami polaryzującymi, a widzowie patrzyli przez okulary polaryzujące. Wyjaśnij działanie tego systemu. Czy potrafisz wskazać jakieś problemy, które doprowadziły do jego szybkiego porzucenia?

5. Druciana siatka, którą jest zespół drutów ułożonych wzajemnie równolegle, może polaryzować pierwotnie niespolaryzowaną wiązkę światła przechodzącą przez nią. Wyjaśnij następujące fakty: (a) Jeśli działanie polaryzujące ma być skuteczne, średnica drutów oraz odstęp między nimi muszą być znacznie mniejsze niż długość fali padającej. (b) Przepuszczona będzie ta składowa, której wektor elektryczny drga w kierunku prostopadłym do drutów.

6. Prawo Brewstera określa kąt całkowitej polaryzacji przy odbiciu od dielektryka. Wiarygodną interpretacją braku odbicia składowej  $\pi$  dla takiego kąta jest, że ładunki elektryczne w dielektryku są przez tę składową zmuszane do drgań w kierunku promienia odbitego, a więc nie promieniują w tym kierunku. Przemyśl problem i ustosunkuj się do wiarygodności powyższej interpretacji.

7. Światło pada na powierzchnię graniczną między dwoma ośrodkami. Czy może wystąpić polaryzacja przez odbicie, jeśli ośrodek, z którego pada fala świetlna, ma większy współczynnik załamania (np. jeśli światło przechodzi ze szkła do powietrza)?

8. Podać sposób wyznaczania kierunku polaryzującego polaroidu.

9. Czy oś optyczna podwójnie załamującego kryształu jest jedynie linią w przestrzeni? Czy ma ona określony zwrot podobnie jak wektor? Co wiemy o charakterystycznym kierunku polaryzującego polaroidu?

10. Wiemy, że lód jest kryształem podwójnie załamującym (patrz tablica 48-1). Dlaczego nie widzimy dwóch obrazów przedmiotu oglądanego przez sześciian lodu?

11. Czy jest możliwe wywołanie efektów interferencyjnych metodą nakładania wiązki  $o$  i wiązki  $e$ , wyzielonych z pierwotnie niespolaryzowanej wiązki z rys. 48-11 przez kryształ kalcytu? Uzasadnij odpowiedź.

12. Czy można sądzić na podstawie tablicy 48-1, że płytki ćwierćfalowej wykonana z kalcytu będzie grubsza od płytka wyciętej z kwarcu?

13. Czy zawsze fale  $e$  przechodzą przez kryształy podwójnie załamujące z prędkością równą  $c/n_e$ ?

14. Posługując się rysunkami 48-14a i b, opisać jakościowo zjawiska występujące wtedy, gdy kąt padania fali jest różny od zera. Założyć dla każdego przypadku, że wiązka pada w płaszczyźnie rysunku.

15. Podać sposób wyznaczania kierunku osi optycznej w płytce ćwierćfalowej.

16. Założmy, że światło liniowo spolaryzowane pada na płytę ćwierćfalową. Płaszczyzna drgań tworzy z osią płytki kąt: (a)  $0^\circ$  lub (b)  $90^\circ$ ; opisać światło przechodzące. (c) Jeżeli ten kąt jest wybrany w sposób dowolny, światło przechodzące jest *eliptycznie spolaryzowane*. Opisać takie światło.

17. Mamy pewną płytę, która może być: (a) dyskiem z szarego szkła, (b) polaryzatorem, (c) płytą ćwierćfalową albo (d) płytą półfalową (patrz zadanie 14). W jaki sposób można określić co to za płyta?

18. Czy światło liniowo spolaryzowane można przedstawić jako sumę dwu kołowo spolaryzowanych wiązek o przeciwnych kierunkach obrotu wektora elektrycznego? Jak wpływa zmiana fazy jednej z wiązek na wiązkę wypadkową?

19. W jaki sposób ze światła spolaryzowanego prawoskrętnie można otrzymać światło spolaryzowane lewoskrętnie?

20. Czy (a) fala radarowa i (b) fala dźwiękowa w powietrzu może być spolaryzowana kołowo?

21. Mamy wiązkę światła, które może być niespolaryzowane, spolaryzowane liniowo albo spolaryzowane kołowo. W jaki sposób określić doświadczalnie właściwą polaryzację?

22. Równoległa wiązka pochłaniana jest przez przedmiot umieszczony na jej drodze. W jakich warunkach zostanie przekazany przedmiotowi (a) pęd i (b) moment pędów?

23. Obserwując czyste niebo przez płytę polaryzującą zauważymy, że przy obrocie płytki natężenie światła zmienia się o czynnik 2. Jeśli w ten sposób oglądamy chmurę, podobnego efektu nie widzimy. Jak to解释?

24. W 1949 r. odkryto, że światło pochodzące z odległych gwiazd naszej Galaktyki jest w pewnym stopniu spolaryzowane liniowo, przy czym preferowana płaszczyzna drgań jest równoległa do płaszczyzny naszej Galaktyki. Wiąże się to prawdopodobnie z anizotropowym rozpraszaniem tego światła na wydłużonych i trochę uporządkowanych kierunkowo cząsteczkach pyłu kosmicznego. Jeśli, jak to było mówione w tekście, cząstki te są zorientowane dłuższą osią równolegle do linii sił międzygwiazdowego pola magnetycznego i pochłaniają oraz emittują fale elektromagnetyczne podobnie do elektronów drgających w antenie radiowej, to jak musi być zorientowane pole magnetyczne względem płaszczyzny galaktyki?

## Zadania

### Paragraf 48-1

1. Udowodnić, że dwie fale świetlne liniowo spolaryzowane, o równych amplitudach i prostopadłych płaszczyznach drgań, nie interferują ze sobą. (*Wskazówka:* Udowodnić, że natężenie fali świetlnej, uśrednione po jednym lub kilku okresach drgań, jest zawsze jednakowe niezależnie od różnicy faz między falami.)

2. Światło niespolaryzowane pada na dwie płytki polaryzujące, umieszczone bardzo blisko siebie. Jaki musi być kąt między charakterystycznymi kierunkami płyt, jeśli natężenie światła przechodzącego przez nie stanowi (a) jedną trzecią maksymalnego natężenia wiązki przechodzącej oraz (b) jedną trzecią natężenia wiązki padającej? Zakładamy, że każda z płyt jest idealna, tzn. że redukuje ona natężenie wiązki niespolaryzowanej o 50%.

3. Wiązka światła o polaryzacji liniowej pada na dwie płyty polaryzujące. Charakterystyczny kierunek pierwszej płyty tworzy kąt  $\theta$  z kierunkiem drgań w wiązce padającej, a dla charakterystycznego kierunku drugiej płyty kąt ten wynosi 90°. Obliczyć kąt  $\theta$ , jeśli wiadomo, że natężenie wiązki przepuszczanej wynosi 0,1 natężenia wiązki padającej.

*Odp.:* 20° lub 70°.

4. Światło niespolaryzowane pada na zespół czterech płyt polaryzujących. Są one tak ustawione, że kierunek polaryzacji każdej z nich jest obrócony zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara o kąt 30° względem kierunku poprzedniej płytki. Jaka część światła padającego przechodzi przez płytki?

5. Wiązka światła jest mieszaniną światła spolaryzowanego liniowo oraz światła o polaryzacji przypadkowej. Przepuszczając tę wiązkę przez płytę polaryzującą stwierdzamy, że natężenie wiązki przepuszczanej zmienia się o czynnik pięć przy zmianie orientacji płytki polaroidu. Znaleźć względne natężenie obu składowych w wiązce padającej.

*Odp.:*  $\frac{2}{3}$  dla spolaryzowanej liniowo i  $\frac{1}{3}$  dla spolaryzowanej przypadkowo.

6. Światło częściowo spolaryzowane (mieszanka wiązki niespolaryzowanej i liniowo spolaryzowanej) może być przedstawione jako dwie liniowo spolaryzowane wiązki o różnych natężeniach ( $I$  wzdłuż osi  $x$  oraz  $i$  wzdłuż osi  $y$ ) i o losowo zmiennej różnicy faz. W tej sytuacji definiuje się stopień polaryzacji, w postaci  $p = (I-i)/(I+i)$ .

(a) Przypuśćmy, że wiązka częściowo spolaryzowanego światła przechodzi przez płytę polaroidu, którego charakterystyczny kierunek tworzy kąt  $\theta$  z osią  $x$ ; wykazać, że natężenie  $I_t$  wiązki przechodzącej wynosi

$$I_t = I \frac{1 + p \cos 2\theta}{1 + p}.$$

(b) Czy wzór ten prowadzi do spodziewanych wartości dla  $p = 1$  i  $p = 0$ ?

7. Chcemy obrócić o 90° płaszczyznę polaryzacji wiązki światła liniowo spolaryzowanego. (a) W jaki sposób można tego dokonać korzystając wyłącznie z płyt polaryzujących? (b) Jakiej ilości płyt musimy użyć, jeśli chcemy, aby straty natężenia nie przekroczyły 5%? Zakładamy, że płytki polaryzujące są idealne.

*Odp.:* 48.

### Paragraf 48-3

8. (a) Przy jakim kącie padania światło odbite od wody będzie całkowicie spolaryzowane? (b) Czy kąt ten zależy od długości fali światła?

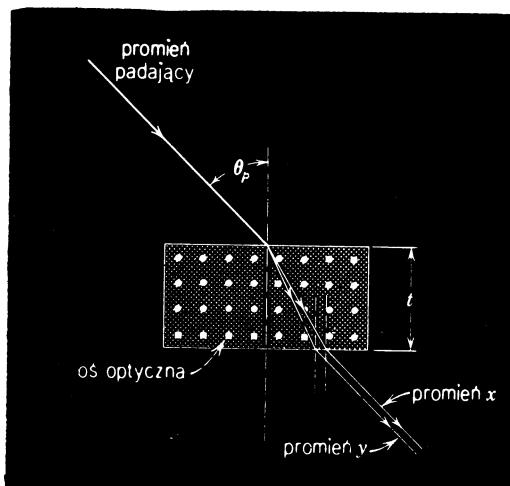
9. Obliczyć zakres kątów polaryzujących dla światła białego, padającego na stopiony kwarc. Rozważyć zakres długości fal od 400 nm do 700 nm i skorzystać z krzywej dyspersji z rys. 43-2.

*Odp.:* 55°30' do 55°46'.

#### Paragraf 48-4

10. Liniowo spolaryzowane światło o długości fali 525 nm pada prostopadle na kryształ siarczku cynku, wycięty prostopadle do osi optycznej. Jaka jest najmniejsza możliwa grubość kryształu żeby wychodzący promień  $o$  i promień  $e$  dawały światło liniowo spolaryzowane? Patrz tablica 48-1.

11. Wąski strumień światła niespolaryzowanego pada na kryształ kalcytu wycięty tak, jak na rys. 48-23. (a) Obliczyć odległość między promieniami  $x$  i  $y$  wzdłuż linii prostopadłej dla  $t = 1,0 \text{ cm}$  i  $\theta_p = 45^\circ$ . (b) Który promień jest promieniem  $o$ , a który promieniem  $e$ ? (c) Jaka jest polaryzacja promieni wychodzących? (d) Co się dzieje, jeśli w wiązce padającej umieszczamy polaryzator i obracamy go? (Wskazówka:

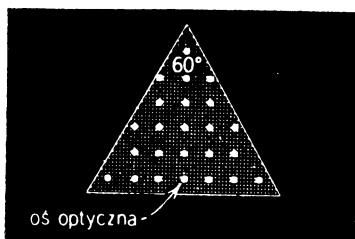


Rys. 48-23. Zadanie 11

Wewnątrz kryształu dla jednego z promieni drgania wektora  $E$  są zawsze prostopadłe do osi optycznej, dla drugiego zaś zawsze równoległe. Te dwa promienie odpowiadają współczynnikom  $n_o$  i  $n_e$ ; w pokazanej płaszczyźnie oba promienie spełniają prawo Snella.)

Odp.: (a) 0,55 mm. (b) promień  $x$  odpowiada  $e$ , natomiast  $y$  odpowiada  $o$ . (c)  $E$  w promieniu  $y$  leży w płaszczyźnie rysunku;  $E$  w promieniu  $x$  ma kierunek prostopadły do rysunku. (d) Co każde  $90^\circ$  jedna lub druga wiązka, na zmianę, będzie wygaszana.

12. Z kalcytu wycięto pryzmat w ten sposób, że osią optyczna jest równoległa do boku pryzmatu, jak pokazano na rys. 48-24. Opisać, w jaki sposób można zastosować taki pryzmat do wyznaczania dwóch głównych współczynników załamania kalcytu. (Wskazówka: Patrz wskazówka w zadaniu 11; patrz również przykład 3 w rozdziale 43.)



Rys. 48-24. Zadanie 12

13. Jaką grubość powinna mieć warstwa miki, żeby stanowiła płytę ćwierćfalową dla światła żółtego,  $\lambda = 589 \text{ nm}$ ? Mika łupie się tak, że współczynniki załamania dla światła przechodzącego prostopadle do płaszczyzny łupliwości są 1,6049 i 1,6116.

Odp.: 0,022 mm.

### Paragraf 48-5

14. Jakie powinno być działanie *płytki półfalowej* (tzn. płytki dwukrotnie grubszej od ćwierćfalowej) na: (a) światło spolaryzowane liniowo (przy założeniu, że płaszczyzna drgań tworzy kąt  $45^\circ$  z osią optyczną płytki), (b) światło spolaryzowane kołowo i (c) światło niespolaryzowane?

15. Opisać stany polaryzacji przedstawione przez zespoły równań:

$$(a) E_x = Esin(kz - \omega t),$$

$$E_y = Ecos(kz - \omega t);$$

$$(b) E_x = Ecos(kz - \omega t),$$

$$E_y = Ecos(kz - \omega t + \frac{1}{4}\pi);$$

$$(c) E_x = Esin(kz - \omega t),$$

$$E_y = -Esin(kz - \omega t).$$

Odp.: Przy założeniu, że używany jest prawoskrętny układ współrzędnych: (a) kołowa, przeciwna do ruchu wskazówek zegara, gdy patrzy się w kierunku źródła; (b) eliptyczna, przeciwna do ruchu wskazówek zegara, gdy patrzy się w stronę źródła, z wielką osią elipsy ułożoną wzdłuż prostej  $y = x$ , (c) liniowa, wzdłuż prostej  $y = -x$ .

16. Płytkę polaryzującą oraz płytke ćwierćfalową sklejono w taki sposób, że jeżeli otrzymamy układ przyłożymy do powierzchni błyszczącej monety stroną *A*, powierzchnia ta, po oświetleniu światłem o odpowiedniej długości fali będzie mogła być widoczna. Jeśli natomiast układ ten przyłożymy do monety stroną przeciwną, powierzchni monety nie będziemy mogli oglądać. (a) Która z płytak znajduje się po stronie *A*? (b) Jaka jest względna orientacja tych płytak?

### Paragraf 48-6

17. Wykazać, że w równoległej wiązce światła spolaryzowanego kołowo moment pędu na jednostkę objętości  $L_v$  jest równy  $L_v = P/\omega c$ , gdzie  $P$  oznacza moc na jednostkę powierzchni wiązki. Skorzystać z równania (48-5).

18. Założmy, że równoległa wiązka światła spolaryzowanego kołowo, o natężeniu 100 W, pochłaniana jest w pewnym przedmiocie. (a) Z jaką szybkością przekazywany jest temu przedmiotowi moment pędu? (b) Jeśli przedmiotem jest płaski dysk o średnicy 5,0 mm i masie  $1,0 \cdot 10^{-2}$  g, po jakim czasie osiągnięcie on prędkość kątową 1 obrót/s? Zakładamy, że obraca się on swobodnie wokół swojej osi oraz że długość fali padającej wynosi 500 nm.

# 49. Światło a fizyka kwantowa

## 49-1. Źródła światła

Do tej pory badaliśmy różne cechy i zachowania światła, w tym jego rozchodzenie się, odbicie, załamanie, polaryzację i interferencję. Obecny rozdział poświęcony jest zagadnieniu wytwarzania światła oraz pokazaniu, w jaki sposób badania prowadzone nad światłem od roku 1900 doprowadziły do narodzenia współczesnej fizyki kwantowej.

Najbardziej znanymi źródłami światła są ogrzane ciała stałe i gazy, w których zachodzi elektryczne wyładowanie. Przykładem pierwszego są wolframowe włókna żarówek, drugiego — neonów ulicznych. Analizując światło za pomocą spektrometru, możemy badać, jak silnie źródło światła promieniaje różne długości fal. Na rysunku 49-1, pokazującym typowe widmo dla ogrzanych ciał stałych, przedstawiono wyniki pomiarów dla ogrzanej do temperatury 2000 K taśmy wolframowej.

Rzędna  $\mathcal{R}_\lambda$  na wykresie z rys. 49-1 nazywana jest *widmową zdolnością emisyjną promieniowania* i jest tak zdefiniowana, że wielkość  $\mathcal{R}_\lambda d\lambda$  oznacza szybkość, z jaką jednostkowy obszar powierzchni wypromienia energię odpowiadającą długościom fal zawartym w przedziale między  $\lambda$  i  $\lambda + d\lambda$ . Najczęściej stosowaną jednostką dla  $\mathcal{R}_\lambda$  jest  $\text{W}/(\text{cm}^2 \cdot \mu\text{m})$ ; odpowiednią jednostką dla  $\mathcal{R}_\lambda d\lambda$  jest  $\text{W}/\text{cm}^2$ . Przy pomiarze  $\mathcal{R}_\lambda$  bierzemy pod uwagę całkowite promieniowanie wysyłane do przedniej półkuli otaczającej jednostkową powierzchnię.

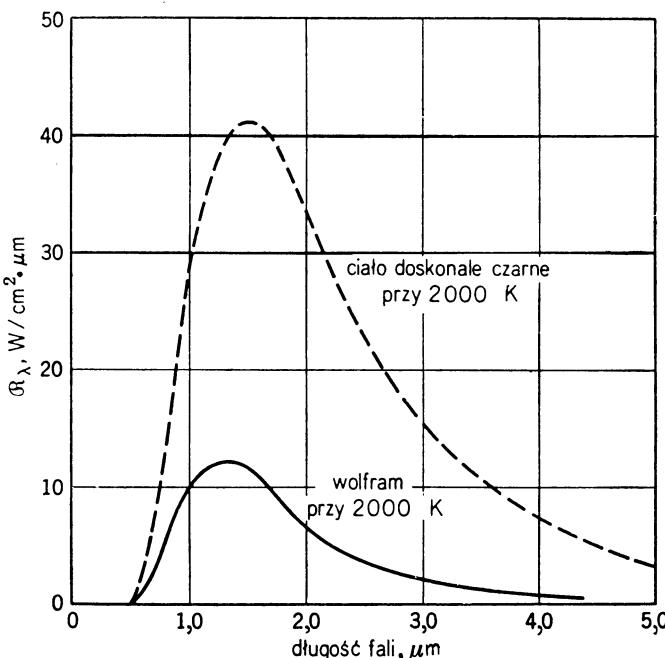
Czasami chcemy rozpatrywać całkowitą energię wysyłanego promieniowania bez względu na jego długość fali. Właściwą wielkością jest wówczas całkowita *emisja energetyczna promieniowania*  $\mathcal{R}$ , określona jako szybkość, z jaką jednostka powierzchni wypromienia energię do przedniej półkuli. Odpowiednią jednostką jest  $\text{W}/\text{cm}^2$ . Emisję energetyczną promieniowania  $\mathcal{R}$  można otrzymać całkując  $\mathcal{R}_\lambda d\lambda$  po wszystkich długościach fal

$$\mathcal{R} = \int_0^\infty \mathcal{R}_\lambda d\lambda. \quad (49-1)$$

Emisję energetyczną promieniowania  $\mathcal{R}$  można interpretować jako powierzchnię zawartą pod wykresem  $\mathcal{R}_\lambda$  względem  $\lambda$ . Na rysunku 49-1 powierzchnia ta, a więc i wartość  $\mathcal{R}$ ,

jest równa  $23,5 \text{ W/cm}^2$ . Czytelnik powinien zauważyc formalne podobieństwo między tymi krzywymi a krzywą rozkładu Maxwella dla prędkości (patrz paragraf 24-2).

Dla każdej substancji istnieje rodzina krzywych promieniowania widmowego, podobnych do tej, którą przedstawia rys. 49-1. Każda krzywa odpowiada określonej temperaturze. Jeżeli porównamy takie rodziny krzywych, nie zauważymy żadnych regularności.



Rys. 49-1. Widmo promieniowania wolframu w temperaturze 2000 K. Linia przerywana odnosi się do promieniowania ciała doskonale czarnego o tej samej temperaturze. Jeden mikrometr ( $= 1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m} = 10^3 \text{ nm}$ )

Ilościowe interpretacje tych krzywych przy pomocy znanych teorii przedstawiają poważne trudności. Na szczęście możemy rozpatrywać wyidealizowane, ogrzane ciało stałe, zwane *ciałem doskonale czarnym*. Okazuje się, że w tym wypadku właściwości emitowanego światła nie zależą od rodzaju substancji i zmieniają się w prosty sposób wraz z temperaturą. Podobnie, dużo łatwiej mieć do czynienia z idealnym gazem, niż badać właściwości nieskończonej różnorodności gazów rzeczywistych. Ciało doskonale czarne jest *idealnym ciałem stałym*, jeżeli chodzi o właściwości emitowanego światła. W dwóch następnych paragrafach opiszemy, w jaki sposób teoretyczne badania nad promieniowaniem ciała doskonale czarnego przeprowadzone w roku 1900 przez niemieckiego fizyka Maxa Plancka (1858–1947) dały podstawy współczesnej fizyki kwantowej.

## 49-2. Ciało doskonale czarne

Utwórzmy puste wnęki wewnętrz każdego z trzech bloków metalowych, w ściankach których wywiercono małe okienko. Przypuśmy, że bloki te sły zrobione z jakichkolwiek odpowiednich materiałów, na przykład z wolframu, tantalu i molibdenu. Niech każdy blok b edzie równomiernie ogrzany do tej samej temperatury (powiedzmy 2000 K), okreś

lonej za pomocą odpowiedniego termometru. Bloki znajdują się w ciemnym pokoju i obserwujemy je za pośrednictwem wysyłanego przez nie światła. Pomiary  $\mathcal{R}$  i  $\mathcal{R}_\lambda$  wykazują co następuje:

(1) Promieniowanie wychodzące z wnętrza bloków ma zawsze większe natężenie niż promieniowanie ścian zewnętrznych. Porównanie dwóch krzywych z rys. 49-1 wyjaśnia to dla wolframu. Dla trzech wymienionych substancji, w temperaturze 2000 K stosunek promieniowania zewnętrznej powierzchni do promieniowania wnętrza wynosi 0,259 (wolfram), 0,212 (molibden) i 0,232 (tantal).

(2) W danej temperaturze emisja energetyczna promieniowania wychodzącego z otworów jest identyczna dla wszystkich trzech źródeł promieniowania, pomimo że odpowiednie wielkości dla zewnętrznych powierzchni są różne. W temperaturze 2000 K emisja energetyczna promieniowania ciała doskonale czarnego (to jest promieniowania wychodzącego z otworów) wynosi 90,0 W/cm<sup>2</sup>.

(3) W przeciwnieństwie do promieniowania zewnętrznych powierzchni, emisja energetyczna promieniowania ciała doskonale czarnego  $\mathcal{R}_c$  zmienia się wraz z temperaturą w prosty sposób, mianowicie

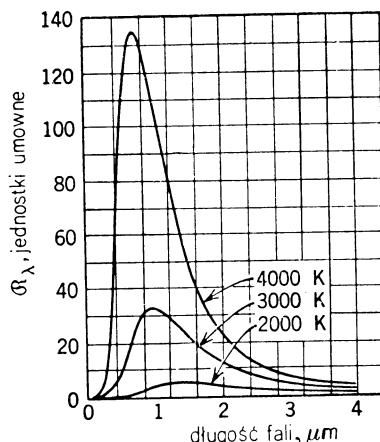
$$\mathcal{R}_c = \sigma T^4, \quad (49-2)$$

gdzie  $\sigma$  oznacza stałą uniwersalną (stałą Stefana–Boltzmanna). Pomiary wykazały, że jest ona równa  $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$ . Emisja energetyczna promieniowania dla zewnętrznych powierzchni zmienia się w bardziej skomplikowany sposób i jest różna dla różnych substancji. Jest ona często zapisywana w postaci

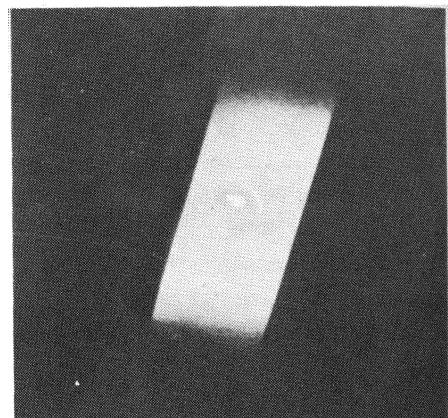
$$\mathcal{R} = e\mathcal{R}_c = e\sigma T^4, \quad (49-3)$$

gdzie tzw. zdolność emisyjną  $e$  jest wielkością, zależną od rodzaju substancji i temperatury.

(4)  $\mathcal{R}_\lambda$  dla ciała doskonale czarnego zmienia się wraz z temperaturą tak, jak na rys. 49-2. Krzywe te zależą tylko od temperatury i są całkiem niezależne od materiału oraz kształtu i wielkości ciała czarnego.



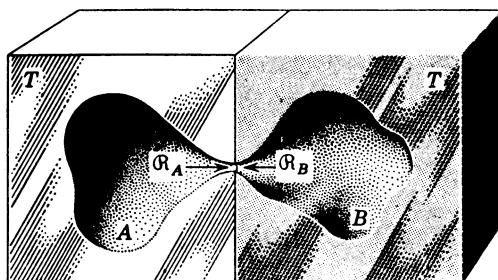
Rys. 49-2. Widmo promieniowania ciała doskonale czarnego w trzech różnych temperaturach



Rys. 49-3. Fotografia świecącej lampy wolframowej. Widoczny jest mały otwór w ścianie lampy. Promieniowanie wychodzące z tego otworu jest przykładem promieniowania ciała czarnego

Na rysunku 49-3 przedstawiono ciało doskonale czarne, którym jest wydrążony cienkościenny cylinder z wolframu, ogrzewany przepuszczanym przezeń prądem elektrycznym. Cylinder umieszczony jest w opróżnionej z powietrza kuli szklanej. W ścianie cylindra wywiercono mały otwór. Na przedstawionej fotografii widać wyraźnie, że promieniowanie wnętrza cylindra jest silniejsze niż promieniowanie jego ścian.

Z rys. 49-4 można wynioskować wiele z przedstawionych tu faktów, dotyczących promieniowania ciała doskonale czarnego. Na rysunku tym pokazano dwie wnęki wydrążone w różnych substancjach. Kształt wnęek jest dowolny, a temperatura ścianek  $T$  jednakowa dla obu wnęek. Promieniowanie oznaczone przez  $\mathcal{R}_A$  przechodzi z wnęki  $A$  do wnęki  $B$ , a promieniowanie oznaczone przez  $\mathcal{R}_B$  przechodzi w przeciwnym kierunku.



Rys. 49-4. Dwa ciała doskonale czarne będące początkowo w jednakowej temperaturze umieszczone obok siebie

Jeżeli te dwie szybkości przepływu energii nie są równe, to jeden koniec wykonanego z dwóch substancji bloku zacznie się ogrzewać, a drugi koniec zacznie stygnąć. Oznaczałoby to pogwałcenie drugiej zasady termodynamiki (Dlaczego?) Tak więc musimy mieć

$$\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_B = \mathcal{R}_c, \quad (49-4)$$

gdzie  $\mathcal{R}_c$  opisuje całkowite promieniowanie dla wszystkich wnęek.

Nie tylko całkowita emisja energetyczna promieniowania, lecz także rozkład wyemitowanej energii w zależności od długości fali musi być taki sam dla obu wnęek. Można to pokazać umieszczając między wnękami filtr tak dobrany, aby przepuszczał tylko wybrane wąskie pasma promieniowania o określonych długościach fal. Stosując to samo rozumowanie co poprzednio możemy pokazać, że musi być

$$\mathcal{R}_{\lambda A} = \mathcal{R}_{\lambda B} = \mathcal{R}_{\lambda c} \quad (49-5)$$

gdzie  $\mathcal{R}_{\lambda c}$  oznacza widmową zdolność emisyjną promieniowania dla dowolnej wnęki.

### **49-3. Prawo Plancka dla promieniowania ciała doskonale czarnego**

Teoretyczne wyjaśnienie rozkładu promieniowania ciała doskonale czarnego, które przez wiele lat przed rozpoczęciem naszego stulecia było nierozerwiązaniem zagadnieniem, miało doniosłe znaczenie. Wielu fizyków stworzyło oparte na fizyce klasycznej teorie, które miały to zagadnienie wytlumaczyć, jednakże miały one tylko ograniczone znaczenie. Na przykład rys. 49-5 ilustruje teorię Wiena. Pokrywanie się krzywej teoretycznej z punktami eksperymentalnymi jest dosyć dobre ale odchylenia nie mieszczą się w ramach błędu doświadczalnego. Wzór Wiena ma następującą postać

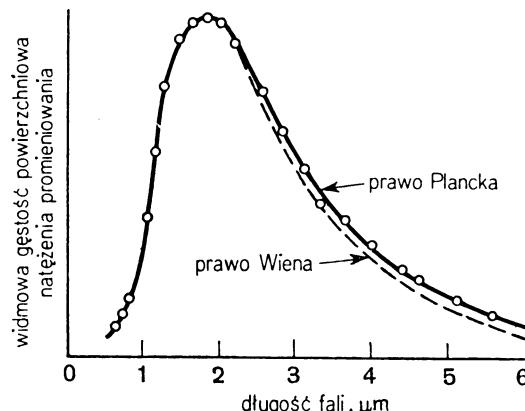
$$\mathcal{R}_\lambda = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{c_2/\lambda T}},$$

gdzie  $c_1$  i  $c_2$  oznaczają stałe, które trzeba określić doświadczalnie, porównując wzór teoretyczny z danymi doświadczalnymi.

W 1900 roku Max Planck zwrócił uwagę na to, że gdyby wzór Wiena zmienić w prosty sposób, dawałby on wyniki dokładnie zgodne z doświadczeniem. Wzór Plancka przedstawiony Berlińskiemu Towarzystwu Fizycznemu 19 października 1900 roku ma postać

$$\mathcal{R}_\lambda = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{c_2/\lambda T} - 1}. \quad (49-6)$$

Wzór ten, chociaż bardzo interesujący i ważny, wtedy jednak miał charakter empiryczny i nie stanowił nowej teorii.



Rys. 49-5. Kółka przedstawiają doświadczalne widmo promieniowania ciała doskonale czarnego Coblencka. Zaznaczono również widmo obliczone na podstawie praw Wiena i Plancka. To ostatnie pokrywa się całkowicie z widmem otrzymanym doświadczalnie

Planck usiłował stworzyć taką teorię, posługując się szczegółowym modelem procesów atomowych, zachodzących w ścianach wnęki (ciała doskonale czarnego). Założył on, że atomy ściany zachowują się podobnie jak małe oscylatory elektromagnetyczne, z których każdy ma charakterystyczną częstotliwość drgań. Oscylatory te emitują do wnęki i absorbują z niej energię elektromagnetyczną. Tak więc powinno być możliwe otrzymanie właściwości promieniowania zawartego we wnęce w oparciu o własności oscylatorów, z którymi wnęka ta jest w równowadze.

Rozumowanie Plancka doprowadziło go do przyjęcia dwóch radykalnych założeń dotyczących oscylatorów atomowych. Założenia te mogą być sformułowane w następujący sposób:

(1) Oscylator nie może mieć dowolnej energii, lecz tylko energie dane wzorem

$$E = nh\nu, \quad (49-7)$$

gdzie  $\nu$  oznacza częstotliwość oscylatora,  $h$  — stałą (zwana obecnie *stałą Plancka*) i  $n$  — pewną liczbę (zwaną obecnie *liczbą kwantową*), która może przybierać tylko całkowite wartości. Z równania (49-7) wynika, że energia oscylatora jest skwantowana. Późniejsze odkrycia pokazały, że poprawny wzór na energię oscylatora harmonicznego ma postać  $E = (n + \frac{1}{2})h\nu$ . Jednakże zmiana ta nie ma wpływu na wnioski wyciągnięte przez Plancka.

(2) Oscylatory nie wypromieniowują energii w sposób ciągły, lecz skokami czyli *kwan-*

tami. Kwanty energii są emitowane, kiedy oscylator przechodzi z jednego do drugiego kwantowego stanu energetycznego. Tak więc, jeżeli  $n$  zmienia się o jednośc, z równania (49-7) widać, że wypromieniowana zostaje ilość energii, dana wzorem

$$\Delta E = \Delta nh\nu = h\nu. \quad (49-8)$$

Dopóki oscylator pozostaje w jednym ze swoich stanów kwantowych (zwane są one *stanami stacjonarnymi*), dopóty ani nie emmituje, ani nie absorbuje energii.

Założenia te rzeczywiście radykalnie zmieniały istniejące teorie i sam Planck przez wiele lat opierał się przyjęciu ich bez zastrzeżeń. Powiedział on później: „Moje daremne usiłowania uzgodnienia pojęcia elementarnego kwantu działania z teorią klasyczną trwały wiele lat i kosztowały mnie wiele wysiłku”.

Rozważmy zastosowanie hipotez Plancka do dużego oscylatora, takiego jakim jest układ masa-sprężyna albo obwód  $LC$ . Śmiało można podtrzynać ogólne mniemanie, że drganiom takich układów odpowiadają dowolne wartości energii całkowitej, a nie tylko jej dyskretne wartości. Można stwierdzić, że w czasie tłumienia drgań (wskutek występowania tarcia w przypadku sprężyny, wskutek istnienia oporu i promieniowania w obwodzie  $LC$ ) zarówno mechaniczna, jak i elektromagnetyczna energia zmniejsza się w sposób ciągły, a nie „skokowo”. Nie stanowi to jednak żadnej podstawy do podważenia założeń Plancka jako sprzecznych ze zdrowym rozsądkiem, ponieważ stała Plancka ma małą wartość, mianowicie

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}.$$

Następujący przykład wyjaśnia to zagadnienie.

**Przykład 1.** Sprzęyna o masie  $m = 1,0 \text{ kg}$  i stałej sprężystości  $k = 20 \text{ N/m}$  wykonuje drgania o amplitudzie  $1,0 \text{ cm}$ . (a) Jeżeli energia sprężyny jest skwantowana, zgodnie z równaniem (49-7), jaka jest liczba kwantowa  $n$ ?

(a) Zgodnie z równaniem (15-11) wartość częstości  $\nu$  wynosi

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{20 \text{ N/m}}{1,0 \text{ kg}}} = 0,71 \text{ Hz}.$$

Na podstawie równania (7-8) wartość energii mechanicznej wynosi

$$E = \frac{1}{2} kx_{\max}^2 = \frac{1}{2} (20 \text{ N/m}) (10^{-2} \text{ m})^2 = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ J}.$$

Na podstawie równania (49-7) wartość liczby kwantowej wynosi

$$n = \frac{E}{h\nu} = \frac{1,0 \cdot 10^{-3} \text{ J}}{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 0,71 \text{ Hz}} = 2,1 \cdot 10^{30}.$$

(b) Jaka jest względna zmiana energii przy zmianie  $n$  o jeden? Jeżeli  $n$  zmienia się o jednośc, względna wartość zmiany energii otrzymujemy dzieląc równanie (49-8) przez (49-7), co daje

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{h\nu}{nh\nu} = \frac{1}{n} = \sim 10^{-30}.$$

Tak więc dla dużych oscylatorów liczby kwantowe są olbrzymie i kwantowa natura energii drgań nie ujawnia się. Podobnie w makroskopowych doświadczeniach nie dostrzegamy dyskretnej natury masy i kwantowej natury ładunku, tj. istnienia atomów i elektronów.

Na podstawie dwóch przytoczonych powyżej założeń Planck mógł wyprowadzić teoretycznie swoje prawo promieniowania (równ. (49-6)). Znalezione przez niego na drodze

teoretycznej wyrażenia na wartości stałych  $c_1$  i  $c_2$ , które do tej pory otrzymywano doświadczalnie, mają postać

$$c_1 = 2\pi c^2 h, \quad c_2 = \frac{hc}{k},$$

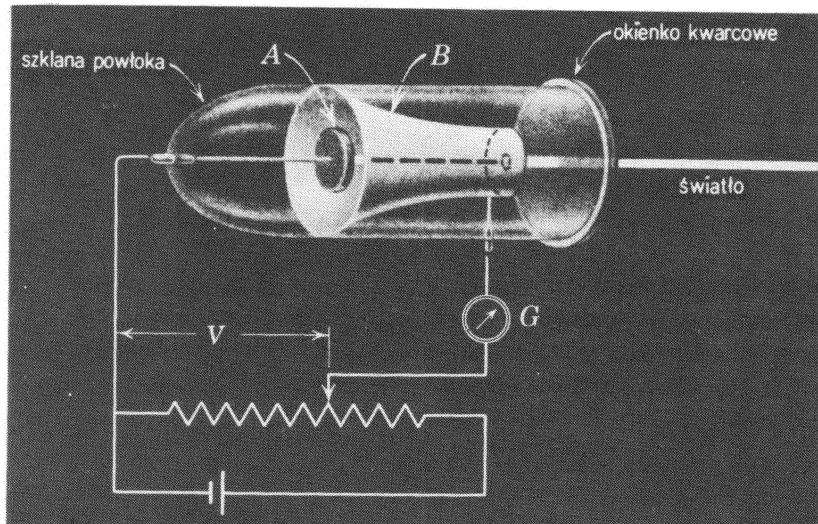
gdzie  $k$  oznacza stałą Boltzmanna (patrz paragraf 23-5), a  $c$  — prędkość światła. Porównując te wyrażenia teoretyczne z wartościami doświadczalnymi dla  $c_1$  i  $c_2$ , Planck otrzymał wartości  $h$  i  $k$ . Planck przedstawił swoją teorię Berlińskiemu Towarzystwu Fizycznemu 14 grudnia 1900 roku. Fizyka kwantowa datuje się od tego dnia. Idee Plancka zostały przyjęte przez Einsteina, który w 1905 roku zastosował koncepcję kwantyzacji energii do nowego zjawiska fizycznego, mianowicie do efektu fotoelektrycznego.

Zanim przejdziemy do omawiania tego efektu, należy podkreślić, że chociaż Planck uważało energię oscylatorów, znajdujących się w ścianach otaczających wnękę, za skwantowaną, samo promieniowanie wnęki traktowało on w dalszym ciągu jako falę elektromagnetyczną. Analizując efekt fotoelektryczny Einstein po raz pierwszy wskazał na to, że w pewnych warunkach falowy obraz światła jest niewystarczający.

#### 49-4. Efekt fotoelektryczny

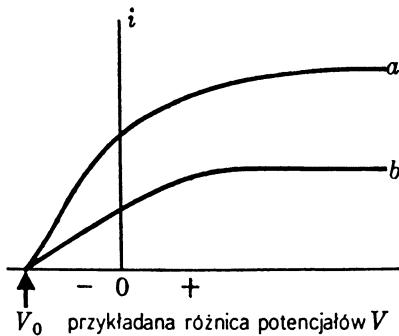
Na rysunku 49-6 pokazano aparaturę stosowaną do badania efektu fotoelektrycznego. Światło monochromatyczne, padające na płytce metalowej  $A$ , wyzwała fotoelektrony, które mogą być wykrywane jako prąd, jeżeli są przyciągane do naczynia metalowego  $B$  przy pomocy różnicy potencjałów  $V$ , przyłożonej między  $A$  i  $B$ . Galwanometr  $G$  służy do pomiaru natężenia prądu fotoelektrycznego.

Na rysunku 49-7 (krzywa  $a$ ) podano wykres natężenia prądu fotoelektrycznego, powstającego w aparaturze podobnej do tej, jaka jest przedstawiona na rys. 49-6, jako funkcję różnicy potencjałów  $V$ . Jeżeli  $V$  jest dostatecznie duże, prąd fotoelektryczny osiąga pewną graniczną wartość, przy której wszystkie fotoelektrony emitowane przez płytę  $A$  są zbierane przez naczynie  $B$ .



Rys. 49-6. Aparat do badania zjawiska fotoelektrycznego. Napięcie  $V$  można zmieniać w sposób ciągły; można również zamieniać znaki elektrod za pomocą przełącznika nie uwidocznionego na rysunku

Jeżeli zmienimy znak  $V$ , natężenie prądu fotoelektrycznego nie spadnie gwałtownie do zera; dowodzi to, że z płytki  $A$  emitowane są elektrony o prędkościach różnych od zera. Niektóre z nich dochodzą do naczynia  $B$ , pomimo faktu, że pole elektryczne przeciw- działa ich ruchowi. Jednakże jeżeli odwróci ona różnicę potencjałów dostatecznie zwiększy- my, to osiągniemy taką wartość  $V_0$  (potencjał hamujący), przy której natężenie prądu



Rys. 49-7. Niektóre dane zmierzone aparatem przedstawionym na rys. 49-6. Przyłożone napięcie  $V$  nazywamy dodatnim, kiedy elektroda  $B$  na rys. 49-6 jest dodatnia względem fotoelektrody  $A$ . Krzywą  $b$  uzyskano przy dwukrotnym zmniejszeniu natężenia światła, które stosowano w przypadku  $a$

fotoelektrycznego spada do zera. Ta różnica potencjałów  $V_0$  pomnożona przez wielkość ładunku elektrycznego jest miarą energii kinetycznej  $K_{\max}$  najszybszych elektronów. Innymi słowami

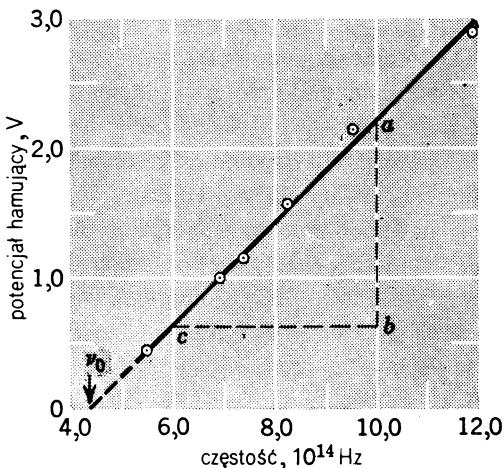
$$K_{\max} = eV_0. \quad (49-9)$$

Okazuje się, że  $K_{\max}$  nie zależy od natężenia światła. Widzimy to na rys. 49-7, gdzie krzywa  $b$  odpowiada natężeniu światła, zredukowanemu do połowy w porównaniu z natążeniem światła, któremu odpowiada krzywa  $a$ .

Na rysunku 49-8 podano wykres potencjału hamującego dla sodu jako funkcję częstości światła padającego. Zauważmy, że istnieje określona częstotliwość graniczna  $\nu_0$ , poniżej której efekt fotoelektryczny nie występuje. Dane te zostały uzyskane przez R. A. Millikana (1868–1953), którego trudna, obszerna praca na temat efektu fotoelektrycznego przyniosła mu w 1923 roku nagrodę Nobla. Ponieważ efekt fotoelektryczny jest w dużym stopniu zjawiskiem powierzchniowym, konieczne było usunięcie warstw tlenków, tłuszczy oraz innych skażeń powierzchniowych. Millikan posłużył się do tego celu specjalną techniką *ścinania skażeń* z powierzchni metalu w warunkach próżniowych.

Trzy zasadnicze cechy efektu fotoelektrycznego nie dadzą się wyjaśnić przy pomocy falowej teorii światła:

(1) Z teorii falowej wynika, że energia kinetyczna fotoelektronów powinna wzrastać



Rys. 49-8. Wykres zawierający wyniki pomiarów potencjału hamującego (pracy wyjścia) przeprowadzonych przez Millikana dla sodu przy różnych częstotliwościach. Częstością „odcienia” jest  $\nu_0 = 4,39 \cdot 10^{14}$  Hz

przy wzroście natężenia wiązki światła. Jednakże, jak widać z rys. 49-7,  $K_{\max}$  ( $= eV_0$ ) nie zależy od natężenia światła; fakt ten został ustalony dla zakresu natężeń równego  $10^7$ .

(2) Zgodnie z teorią falową efekt fotoelektryczny powinien występować dla dowolnej częstotliwości światła, jeśli tylko natężenie światła jest dostatecznie duże. Jednakże, jak widać z rys. 49-8, dla każdego rodzaju powierzchni istnieje charakterystyczna częstotliwość *odcięcia*  $\nu_0$ . Dla częstotliwości mniejszych niż  $\nu_0$  efekt fotoelektryczny nie występuje, niezależnie od tego, jak silne będzie oświetlenie.

(3) Jeżeli energia fotoelektronów pobierana jest przez płytke metalową z fali padającej, nie jest prawdopodobne, aby „efektywna powierzchnia tarczy” dla elektronu w metalu była dużo większa niż kilka średnic atomowych. Tak więc jeżeli światło jest dostatecznie słabe, powinno występować mierzalne opóźnienie w czasie (patrz przykład 2) między padaniem światła na powierzchnię a emisją fotoelektronu. W ciągu tego okresu elektron powinien pobierać energię z wiązki, dopóki nie zbierze dostatecznej energii do „wyparowania”. Jednakże nie zmierzono żadnego wykrywalnego opóźnienia w czasie. Niezgodność ta jest szczególnie uderzająca, kiedy fotoelektryczną substancję stanowi gaz; w tym wypadku energia emitowanego fotoelektronu musi być na pewno pobierana z wiązki przez pojedynczy atom.

**Przykład 2.** W odległości 5 m od monochromatycznego źródła światła o mocy  $10^{-3}$  W umieszczona jest płytka metalowa. Przypuśćmy, że pewien określony elektron emitowany przez płytke może gromadzić energię padającą na kołowej powierzchni płytki o promieniu równym dziesięciu średnicom atomowym ( $10^{-9}$  m) i środku w miejscu, gdzie znajduje się elektron. Energia potrzebna do emisji elektronu z powierzchni metalu wynosi 5,0 eV. Zakładając, że światło jest falą, określić: jaki okres czasu musiałby upływać, aby taka kołowa „tarcza” mogła pobrać tak dużo energii z opisanego źródła światła?

Powierzchnia tarczy wynosi  $\pi(10^{-9} \text{ m})^2$ , tzn.  $3 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2$ . Powierzchnia kuli o promieniu 5 m ze środkiem w miejscu, gdzie znajduje się źródło światła, wynosi  $4\pi(5 \text{ m})^2 \cong 300 \text{ m}^2$ . Tak więc, jeżeli źródło światła promienia jednako we wszystkich kierunkach, to szybkość  $P$ , z jaką energia pada na tarczę, dana jest wzorem

$$P = 10^{-3} \text{ W} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2}{300 \text{ m}^2} = 10^{-23} \text{ J/s.}$$

Zakładając, że cała ta energia jest absorbowana, możemy obliczyć szukany czas z równania

$$t = \frac{5 \text{ eV}}{10^{-23} \text{ J/s}} \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} = 20 \text{ h.}$$

Jednakże dotychczas w żadnym z doświadczeń nie udało się zmierzyć wykrywalnego opóźnienia w czasie między absorpcją światła a emisją elektronu.

## 49-5. Fotonowa teoria Einsteina

Einsteinowi udało się wyjaśnić efekt fotoelektryczny dzięki całkiem nowemu założeniu, mianowicie, że energia wiązki światlowej rozchodzi się w przestrzeni w postaci skończonych porcji energii zwanych *fotonami*\*. Energia  $E$  pojedynczego fotonu dana jest wzorem

$$E = h\nu. \quad (49-10)$$

\* Słowo *foton* zostało wprowadzone w 1926 r. przez amerykańskiego fizykochemika G. N. Lewisa. Napisał on: „Dlatego też pozwalam sobie zaproponować dla tego historycznego nowego atomu... nazwę *foton*”. Max Planck, gdy wprowadzał Einsteinę w poczet członków Berlińskiego Towarzystwa Fizycznego, wypowiedział się przeciw pracy Einsteina z 1905 r. dotyczącej teorii fotonowej, mówiąc jednak, że tak wielkiemu człowiekowi należy wybaczyć ten mały błąd. Pamiętajmy, że Planck był (co prawda prawie niechętnym) odkrywcą kwantowania! Einstein w 1921 r. dostał nagrodę Nobla nie za teorię względności, ale właśnie za swoją koncepcję fotonów.

Przypomnijmy sobie, że Planck utrzymywał, iż światło, chociaż przez źródło jest emitowane w sposób nieciągły, jednak w przestrzeni rozchodzi się jako fala elektromagnetyczna. Hipoteza Einsteina sugeruje, że światło rozchodzące się w przestrzeni zachowuje się nie jak fala, lecz jak cząstka. Millikan, którego doświadczenia potwierdziły we wszystkich szczegółach idee Einsteina, mówił o „śmiałej, żeby nie powiedzieć zuchwałej hipotezie” Einsteina.

Jeśli zastosujemy koncepcję fotonową Einsteina do efektu fotoelektrycznego dostaniemy

$$h\nu = E_0 + K_{\max}, \quad (49-11)$$

gdzie  $h\nu$  oznacza energię fotonu. Równanie to głosi, że jeden foton dostarcza powierzchni energię  $h\nu$ . Część tej energii ( $E_0$ ) zostaje zużyta na przejście elektronu przez powierzchnię metalu. Nadmiar energii ( $h\nu - E_0$ ) elektron otrzymuje w postaci energii kinetycznej. Jeżeli przed opuszczeniem metalu elektron nie traci energii przy zderzeniach wewnętrznych, całą energię  $h\nu - E_0$  zachowa po emisji jako energię kinetyczną. Tak więc  $K_{\max}$  oznacza maksymalną energię kinetyczną, jaką może mieć fotoelektron na zewnątrz powierzchni. W większości przypadków na skutek strat wewnętrz metalu będzie on miał energię mniejszą niż  $K_{\max}$ .

Rozpatrzmy hipotezę Einsteina w zestawieniu z trzema zarzutami wysuniętymi przeciwko falowej interpretacji efektu fotoelektrycznego. Co do zarzutu 1 (brak zależności  $K_{\max}$  od natężenia światła), istnieje zupełna zgodność teorii fotonowej z doświadczeniem. Podwajając natężenie światła podwaja się jedynie liczbę fotonów, a więc podwaja się prąd fotoelektryczny; nie zmienia to energii ( $= h\nu$ ) pojedynczych fotonów ani natury pojedynczych procesów fotoelektrycznych opisanych przez równanie (49-11).

Cecha 2 (istnienie częstości granicznej) wynika z równania (49-11). Jeżeli  $K_{\max}$  równa się zeru, to mamy

$$h\nu_0 = E_0.$$

Równanie to głosi, że foton ma dokładnie tyle energii, aby mogła nastąpić emisja fotoelektronu, nie ma natomiast nadmiaru energii, która by się ujawniła jako energia kinetyczna fotoelektronu. Wielkość  $E_0$  nazywa się *pracą wyjścia* dla danej substancji. Jeżeli  $\nu$  jest mniejsze niż  $\nu_0$ , pojedyncze foton, niezależnie od tego ile ich jest (to znaczy niezależnie od natężenia światła), nie mają dostatecznej energii, aby spowodować emisję fotoelektronów.

Cecha 3 (brak opóźnienia w czasie) wynika natychmiast z teorii fotonowej, ponieważ potrzebna energia jest dostarczana w postaci skończonych porcji, a nie jest rozłożona równomiernie na dużej powierzchni, jak to wynika z teorii falowej.

Chociaż hipoteza fotonowa całkowicie potwierdza fakty związane ze zjawiskiem fotoelektrycznym, wydaje się, że jest ona sprzeczna z teorią falową, która — jak widzieliśmy w poprzednich rozdziałach — również została potwierdzona przez liczne doświadczenia. Nasz obecny punkt widzenia na naturę światła jest taki, że ma ono dwoisty charakter, tzn. w pewnych warunkach zachowuje się jak fala, a w innych jak cząstka, czyli foton. Dwoistą falowo-fotonową naturę światła omówimy w rozdziale 50. Przedtem zajmiemy się rozważeniem doświadczeń potwierdzających koncepcję fotonową.

Przepiszmy „fotoelektryczne” równanie Einsteina (równ. 49-11) podstawiając za  $K_{\max}$  wielkość  $eV_0$  (patrz równ. (49-9)). Po uporządkowaniu otrzymujemy

$$V_0 = \frac{h}{e} \nu - \frac{E_0}{e}. \quad (49-12)$$

Tak więc teoria Einsteina przewiduje liniowy związek między  $V_0$  a  $\nu$ , co jest całkowicie zgodne z doświadczeniem; patrz równanie (49-8). Nachylenie krzywej eksperymentalnej na rysunku powinno wynosić  $h/e$ , czyli

$$\frac{h}{e} = \frac{ab}{bc} = \frac{2,20 \text{ V} - 0,65 \text{ V}}{(10 \cdot 10^{14} - 6 \cdot 10^{14}) \text{ Hz}} = 3,9 \cdot 10^{-15} \text{ V} \cdot \text{s.}$$

Stałą  $h$  możemy znaleźć mnożąc ten iloraz przez ładunek elektronu  $e$ ,

$$h = 3,9 \cdot 10^{-15} \text{ V} \cdot \text{s} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 6,2 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s.}$$

Z bardziej wnikliwej analizy tych i innych danych obejmujących między innymi dane dotyczące powierzchni litu, Millikan otrzymał wartość  $h = 6,57 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  z dokładnością do około 0,5%. Zgodność tej wartości z wartością otrzymaną z formuły promienowania podanej przez Plancka jest poważnym potwierdzeniem koncepcji Einsteina\*.

**Przykład 3.** Znaleźć z równania (49-8) wielkość pracy wyjścia dla sodu.

Przecięcie linii prostej na rys. 49-8 z osią poziomą odpowiada częstości granicznej  $\nu_0$ . Podstawienie odpowiednich wartości daje

$$E_0 = h\nu_0 = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 4,39 \cdot 10^{14} \text{ Hz} = 2,92 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1,82 \text{ eV.}$$

## 49-6. Efekt Comptona

Doświadczalne potwierdzenie istnienia fotonu jako skończonej porcji energii zostało dostarczone w roku 1923 przez A. H. Comptona (1892–1962), który za swoją pracę w roku 1927 otrzymał nagrodę Nobla\*\*. Wiązkę promieni Roentgena o dokładnie określonej długości fali kierował Compton na blok grafitowy, w sposób przedstawiony na rys. 49-9, oraz mierzył dla różnych kątów rozproszenia natężenie promieni Roentgena jako funkcję ich długości fali. Na rysunku 49-10 pokazane są wyniki jego doświadczenia. Widzimy, że chociaż wiązka padająca zawiera jedną długość fali  $\lambda$ , rozproszone promienie Roentgena mają maksimum rozproszenia przy dwóch długościach fali; jedna z nich jest taka sama jak długość fali padającej; druga,  $\lambda'$ , jest większa o wielkość  $\Delta\lambda$ . To tak zwane *przesunięcie Comptona*  $\Delta\lambda$  zmienia się wraz z kątem, dla którego obserwujemy rozproszone promienie Roentgena.

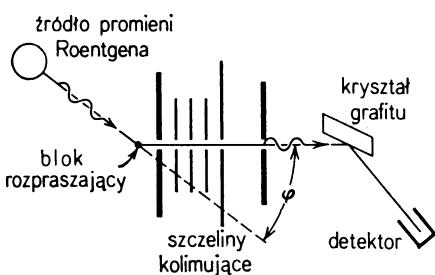
Jeżeli padające promienie Roentgena traktować jako falę elektromagnetyczną, jak to przedstawia rys. 41-13, nie można zrozumieć występowania fali rozproszonej o długości  $\lambda'$ . Na tym rysunku widzimy, że fala padająca o częstości  $\nu$  pobudza elektryny w rozpraszającym bloku do drgań z tą samą częstością. Te drgające elektryny, podobnie jak ładunki poruszające się do przodu i do tyłu w małej nadawczej antenie radiowej, wypromienio-

\* W rzeczywistym eksperymencie moglibyśmy mieć do czynienia z pewną różnicą potencjałów kontaktowych, która może występować pomiędzy metalem płyty  $A$  i (innym) metalem naczynia  $B$  z rys. 49-6. Ścisły opis odnoszący się do takiej sytuacji znajdziemy, na przykład, w książce: A. C. Melissinos, *Experiments in Modern Physics*, Academic Press, New York 1966.

\*\* W celu zapoznania się z historycznego punktu widzenia z badaniami Comptona należy przeczytać pracę: A. H. Compton, The Scattering of X Rays as Particles, *Am. J. Phys.*, December 1961, s. 817. W artykule tym Compton przypomniał, że wybitny fizyk indyjski Sir C. V. Raman, który w 1930 r. dostał nagrodę Nobla, powiedział do niego: „Compton, Pan jest doskonałym dyskutantem, ale w tym co Pan głosi nie ma prawdy”. Ta i wcześniejsza wypowiedź Plancka dotycząca Einsteina, wskazują na niecheć, z jaką nowe idee były przyjmowane nawet przez tak wspaniałych fizyków jak Planck i Raman. Okazało się, że Compton (i Einstein) miał rację.

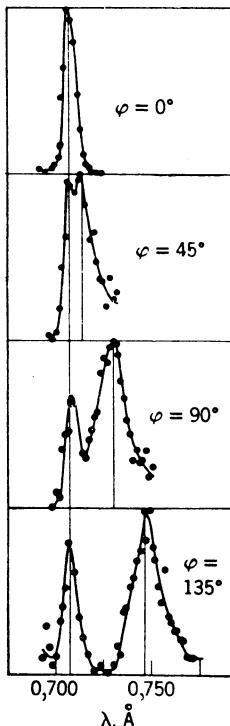
wują fale elektromagnetyczne, które znowu mają tę samą częstotliwość  $\nu$ . Tak więc w obrazie falowym fala rozproszona powinna mieć tę samą częstotliwość  $\nu$  i tę samą długość fali  $\lambda$  co fala padająca.

Compton\* potrafił wyjaśnić wyniki swojego doświadczenia przyjmując, że padająca wiązka promieni Roentgena nie jest falą, lecz zbiorem fotonów o energii  $E (= h\nu)$  i że fotony te, podobnie jak kule bilardowe, ulegają zderzeniom ze swobodnymi elektronami bloku. Promieniowanie rozproszone tworzą, według tego punktu widzenia, „odrzucone”



Rys. 49-9. Schemat aparatury Comptona. Monochromatyczna wiązka promieni Roentgena o długości fali  $\lambda$  pada na grafitowy blok rozpraszający. Rozkład natężenia i długości fal rozproszonych promieni Roentgena jest mierzony pod różnymi kątami  $\varphi$ . Długości fal rozproszonych mierzy się obserwując odbicia Bragga od kryształu, patrz równanie (47-8). Natężenie rozproszonych fal mierzy się detektorem typu komory jonizacyjnej

fotony, wychodzące z bloku. Ponieważ padający foton przekazuje część swojej energii elektronowi, z którym się zderza, więc foton rozproszony musi mieć niższą energię  $E'$ ; musi więc mieć mniejszą częstotliwość  $\nu (= E'/h)$ , to znaczy większą długość fali  $\lambda' (= c/\nu)$ . Ten punkt widzenia tłumaczy, przynajmniej jakościowo, występowanie przesunięcia długości fali  $\Delta\lambda$ . Zauważmy, jak różny jest ten cząstkowy model rozpraszania promieni

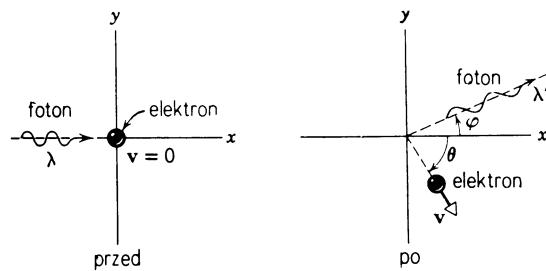


Rys. 49-10. Wyniki doświadczeń Comptona. Ciągła linia pozioma z lewej strony odpowiada długości fali  $\lambda$ , z prawej strony — długości  $\lambda'$ . Przedstawiono dane dla czterech różnych kątów rozproszenia  $\varphi$ . Przesunięcie Comptona  $\Delta\lambda$  dla  $\varphi = 90^\circ$  wynosi  $h/m_0 c = 0,0243 \text{ \AA}$

\* Jednocześnie i niezależnie od Comptona taką samą interpretację przedstawił P. W. Debye.

Roentgena od modelu opartego na obrazie falowym. Przeanalizujemy teraz ilościowo pojedyncze zderzenie fotonu z elektronem.

Na rysunku 49-11 przedstawione jest zderzenie pomiędzy fotonem i elektronem, przy czym zakłada się, że elektron początkowo znajduje się w stanie spoczynku i jest zupełnie swobodny, to znaczy nie jest związany z atomami ośrodka rozpraszającego. Zastosujmy



Rys. 49-11. Foton o długości fali  $\lambda$  rozprasza się na nieruchomym elektronie. Po zderzeniu foton zmienia kierunek o kąt  $\varphi$  i ma zwiększoną długość fali  $\lambda'$ , natomiast elektron z prędkością  $v$  porusza się pod kątem  $\theta$

do tego zderzenia prawo zachowania energii. Ponieważ odrzucone elektrony mogą mieć prędkość  $v$ , porównywalną z prędkością światła, przeto dla energii kinetycznej elektronu musimy użyć wyrażenia relatywistycznego. Na podstawie równań (49-10) i (8-21) możemy napisać

$$hv = hv' + (m - m_0)c^2.$$

Drugi wyraz po prawej stronie tego równania stanowi relatywistyczne wyrażenie na energię kinetyczną odrzuconego elektronu,  $m$  oznacza masę relatywistyczną,  $m_0$  — masę spoczynkową elektronu. Podstawiając zamiast  $v$  wyrażenie  $c/\lambda$  (i  $c/\lambda'$  zamiast  $v'$ ) oraz korzystając z równania (8-20) w celu wyeliminowania masy relatywistycznej  $m$ , otrzymujemy

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1 \right). \quad (49-13)$$

Zastosujemy do zderzenia przedstawionego na rys. 49-11 prawo (wektorowe) zachowania pędu. Najpierw potrzebne jest wyrażenie na pęd fotonu. W paragrafie 42-2 wiadomo, że jeżeli jakiś przedmiot pochłania z padającej na niego równoległą wiązki świetlnej energię  $U$ , to zgodnie z falową teorią światła przedmiotowi temu będzie jednocześnie przekazany pęd dany przez  $U/c$ . W obrazie fotonowym wyobrażamy sobie, że pęd ten jest przenoszony przez pojedyncze fotony; każdy z fotonów niesie pęd w ilości równej  $p = h\nu/c$ , gdzie  $h\nu$  oznacza energię fotonu. Tak więc jeżeli zamiast  $\lambda$  podstawimy  $c/v$ , możemy napisać

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \quad (49-14)$$

Wniosek ten, że pęd fotonu dany jest wyrażeniem  $h/\lambda$ , można również wyprowadzić z teorii względności.

Dla elektronu wyrażenie relatywistyczne na pęd dane jest równaniem (9-13), to znaczy

$$\mathbf{p}_e = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Z prawa zachowania pędu dla składowej  $x$  otrzymujemy

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} \cos \varphi + \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \cos \theta, \quad (49-15)$$

zaś dla składowej  $y$

$$0 = \frac{h}{\lambda'} \sin \varphi - \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \sin \theta. \quad (49-16)$$

Naszym bezpośrednim celem jest znalezienie zmiany długości fali  $\Delta\lambda (= \lambda' - \lambda)$  rozproszonych fotonów tak, aby móc ją porównać z wynikami doświadczalnymi przedstawionymi na rys. 49-10. Doświadczenie Comptona nie obejmuje obserwacji odrzuconego elektronu w bloku rozpraszającym. Spośród pięciu zmiennych zderzenia ( $\lambda$ ,  $\lambda'$ ,  $v$ ,  $\varphi$  i  $\theta$ ) występujących w trzech równaniach (49-13), (49-15) i (49-16) możemy wyeliminować dwie zmienne. Na te zmienne wybieramy  $v$  i  $\theta$  (odnoszą się one tylko do elektronu) tak więc redukujemy trzy równania do jednego związku między zmiennymi.

Stosując odpowiednie przekształcenia algebraiczne (patrz zadanie 31) otrzymujemy wynik w postaci

$$\Delta\lambda (= \lambda' - \lambda) = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \varphi). \quad (49-17)$$

Tak więc przesunięcie Comptona  $\Delta\lambda$  zależy tylko od kąta rozproszenia  $\varphi$ , a *nie* zależy od początkowej długości fali  $\lambda$ . W ramach błędu doświadczalnego równanie (49-17) daje przesunięcia Comptona zgodne z obserwowanymi doświadczalnie i przedstawionymi na rys. 49-10. Z równania tego widzimy, że  $\Delta\lambda$  zmienia się od zera (dla  $\varphi = 0$ , co odpowiada na rys. 49-11 zderzeniu „perfyferyjnemu”, w którym padający foton prawie wcale nie zmienia kierunku) do  $2h/m_0 c$  (dla  $\varphi = 180^\circ$ , co odpowiada zderzeniu „centralnemu”, w czasie którego padający foton zmienia kierunek na przeciwny).

Pozostaje wyjaśnić występowanie (patrz rys. 49-10) maksimum, dla którego długość fali *nie* zmienia się przy zderzeniu. Można przypuszczać, że maksimum to występuje dzięki zderzeniu pomiędzy fotonem a elektronami związanymi w rdzeniu jonowym rozpraszającego bloku. W czasie zderzeń z fotonem elektrony związane zachowują się podobnie jak elektrony swobodne (rys. 49-11) tyle tylko, że ich masa efektywna jest dużo większa. Wynika to z faktu, że w zderzeniu ulega odrzutowi cały rdzeń jonowy. Masa efektywna  $M$  dla węgla jest w przybliżeniu równa masie jądra węgla. Ponieważ jądro to zawiera 6 protonów i 6 neutronów, mamy w przybliżeniu  $M = 12 \cdot 1840 m_0 = 22\,000 m_0$ . Jeżeli w równaniu (49-17) zastąpimy  $m_0$  przez  $M$ , to widzimy, że przesunięcie Comptona dla zderzeń z całkowicieowanymi elektronami jest niemierzalnie małe.

Podobnie jak w zagadnieniu promieniowania ciała doskonale czarnego (równ. (49-7)) oraz w efekcie fotoelektrycznym (równ. (49-11)), tak i w efekcie Comptona stała Plancka ma zasadnicze znaczenie. Wielkość  $h$  jest najważniejszą stałą w fizyce kwantowej. We Wszechświecie, w którym byłoby  $h = 0$ , nie byłoby fizyki kwantowej, a fizyka klasyczna stosowałaby się również w dziedzinie atomowej. W szczególności w takim Wszechświecie, jak widać z równania (49-17), nie występowałby efekt Comptona (tj. byłoby  $\Delta\lambda = 0$ ).

**Przykład 4.** Promienie Roentgena o  $\lambda = 0,10$  nm są rozpraszane przez blok węgla. Rozproszone promieniowanie obserwuje się pod kątem  $90^\circ$  do wiązki padającej. (a) Jakie jest przesunięcie Comptona  $\Delta\lambda$ ? (b) Jaka energia kinetyczna jest przekazana odrzuconemu elektronowi?

(a) Podstawiając w równaniu (49-17)  $\varphi = 90^\circ$  otrzymujemy dla przesunięcia Comptona

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos\varphi) = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}} (1 - \cos 90^\circ) = \\ = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 2,43 \cdot 10^{-3} \text{ nm.}$$

(b) Jeżeli energię kinetyczną elektronu oznaczymy przez  $K$ , równanie (49-13) możemy napisać w postaci

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + K.$$

Ponieważ  $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$ , otrzymujemy

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda} + K,$$

skąd

$$K = \frac{hc}{\lambda(\lambda + \Delta\lambda)} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot (30 \cdot 10^8 \text{ m/s}) \cdot 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ m}}{1,00 \cdot 10^{-10} \text{ m} \cdot (1,00 + 0,024) \cdot 10^{-10} \text{ m}} = 4,73 \cdot 10^{-17} \text{ J} = 295 \text{ eV.}$$

Można wykazać, że początkowa energia fotonu  $E (= h\nu = hc/\lambda)$  wynosi w tym przypadku 12 400 eV, tak że w tym zderzeniu foton traci około 2,3% swojej energii. Można również pokazać, że foton, którego energia jest dziesięć razy większa ( $= 124\,000$  eV), traci w podobnym zderzeniu 23% swojej energii. Wykazuje to fakt, że  $\Delta\lambda$  nie zależy od początkowej długości fali. Stąd też dla bardziej energetycznych promieni Roentgena, o mniejszej długości fali, długość fali zwiększa się o wyższy procent, tzn. względny ubytek energii jest większy.

## 49-7. Widma liniowe

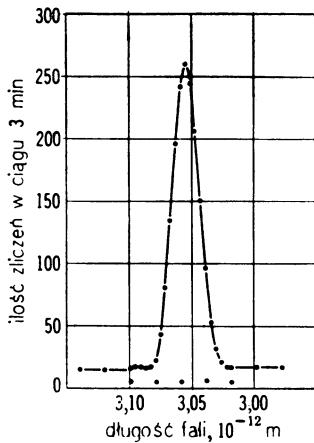
Widzieliśmy, jak Planck z powodzeniem wyjaśnił naturę promieniowania ogrzanych ciał stałych, których prototypem jest ciało doskonale czarne. Promieniowanie tego rodzaju tworzy *widmo ciągłe* w przeciwieństwie do *widm liniowych*, takich jak na rys. 49-12, który przedstawia promieniowanie wysyłane przez jony i atomy żelaza w łuku elektrycznym, powstającym między żelaznymi elektrodami. Zobaczmy, że odpowiednio rozwinięte idee kwantyzacji Plancka prowadzą również do zrozumienia natury widm liniowych.



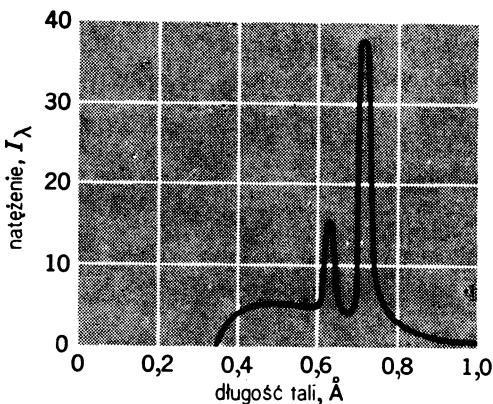
Rys. 49-12. Odcinek optycznego widma żelaza obejmujący obszar długości fal od 3400 do 3500 Å (340 do 350 nm)

Jednym z pierwszych zbadanych widm liniowych było widmo atomu wodoru, który jako najprostszy atom ma najprostsze widmo.

Widma liniowe występują we wszystkich częściach widma elektromagnetycznego. Na rysunku 49-13 pokazane jest widmo promieni  $\gamma$  ( $\lambda \approx 10^{-12}$  m) emitowanych przez radioaktywne jądro izotopu rtęci. Na rysunku 49-14 widzimy widmo promieni Roentgena



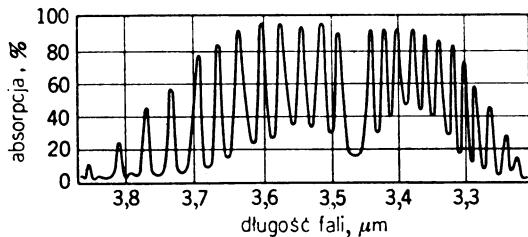
Rys. 49-13. Pojedyncza linia promieni  $\gamma$  emitowanych przez jądro rtęci  $^{198}\text{Hg}$ . (Według danych otrzymanych przez Du Monda i współpracowników)



Rys. 49-14. Widmo charakterystyczne promieni Roentgena emitowanych przez tarczę molibdenową bombardowaną elektronami o energii 35 keV. Ponad ciągłym widmem występują dwie ostre linie. Długość fali linii o większym natężeniu wynosi  $7,1 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ , czyli  $0,71 \text{ \AA}$ . (Według danych otrzymanych przez Ulreya)

( $\lambda \approx 10^{-10} \text{ m}$ ) emitowanych przez tarczę molibdenową pod wpływem wiązki elektronowej o energii 35 keV. Ostre linie emisywne nałożone są na ciągłe tło.

Na rysunku 49-15 widzimy widmo związane z cząsteczką HCl. Występuje ono w podczerwieni, długość fali promieniowania  $\lambda \approx 10^{-6} \text{ m}$ . Jest to *widmo absorpcyjne*, a nie emisywne, jak przedstawione na rys. 49-12. Doświadczenie pokazuje, że pojedyncze atomy i cząsteczki zarówno吸收ują, jak i emitują promieniowanie o dyskretnych długościach fali.



Rys. 49-15. Widmo absorpcyjne cząsteczek HCl w otoczeniu fali o długości  $\lambda = 3,5 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 3,5 \mu\text{m}$ . (Według danych otrzymanych przez E. S. Imesa)

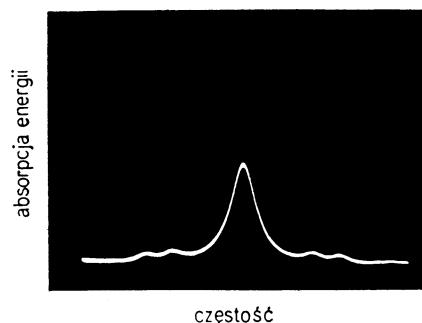
Na rysunku 49-16 pokazana jest część widma absorpcyjnego amoniaku ( $\text{NH}_3$ ) w zakresie mikrofal ( $\lambda \approx 10^{-2} \text{ m}$ ). Wreszcie na rys. 49-17 pokazano, jak promieniowanie w zakresie częstotliwości radiowych ( $\lambda \approx 43 \text{ m}$ ) jest absorbowane przez cząsteczki wodoru umieszczone w polu magnetycznym.

#### 49-8. Modele atomu — model Bohra atomu wodoru

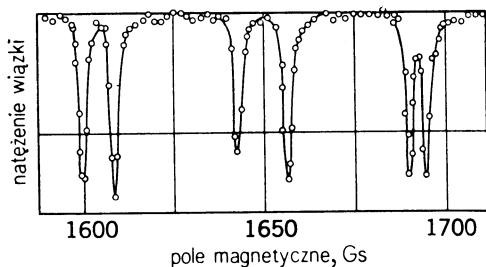
Usiłowania fizyków, zmierzające do wyjaśnienia obserwowalnych zjawisk w języku modeli teoretycznych dających matematyczne wyrażenia dotyczące świata fizycznego, nigdzie nie znajdują lepszej ilustracji niż w rozwoju modeli atomu. Kluczowym faktem,

w odniesieniu do powyższego, prowadzącym ostatecznie do koncepcji falowo-mechanicznej atomu, było liniowe widmo wodoru.

W 1815 roku Prout (1785–1850) wysunął pomysł, że pierwiastki są zbudowane z wodoru, uważając za dowód tego fakt, że masy atomowe wielu pierwiastków są prawie cał-



Rys. 49-16. Widmo absorpcyjne amoniaku w obszarze częstotliwości mikrofalowych. Na ekranie oscylografu widać jedną silną i cztery słabe linie



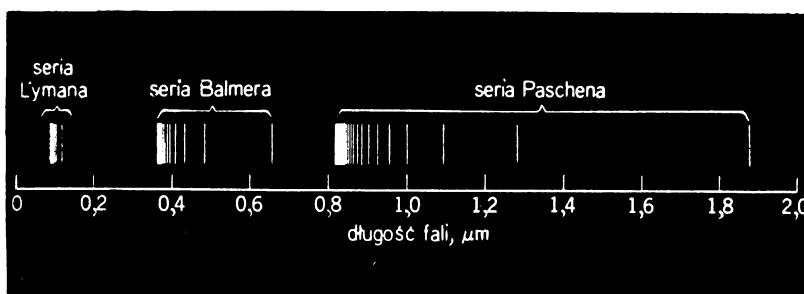
Rys. 49-17. Odcinek widma absorpcyjnego protonów w cząsteczkach wodoru w otoczeniu fali o długości  $\lambda \approx 43$  m. W pomiarach tego typu częstość jest stała, a zmienia się natężenie pola magnetycznego, w którym umieszczona jest próbka. (Według danych otrzymanych przez Kellogga, Rabiego i Zachariasza)

kowitymi wielokrotnościami masy atomowej wodoru. Wraz z odkryciem w roku 1897 przez J. J. Thomsona (1856–1940) elektronu poziom wymyślności znacznie wzrósł. Thomson zaproponował model „ciasta z rodzynkami”, w którym to modelu ładunek dodatni atomu miał zajmować cały obszar atomu (kula o promieniu około  $10^{-10}$  m), a elektrony były rozmiieszczane tu i tam, jak rodzynki w cieście. Następnie w 1911 r. Ernest Rutherford (1871–1937) wykazał niezgodność pomiędzy wynikami Geigera i Marsdена uzyskanymi w doświadczeniach z rozpraszaniem cząstek  $\alpha$ , a thomsonowskim modelem atomu i w zamian zaproponował jądrowy model atomu, będący podstawą teorii nam współczesnych. W tym modelu ładunek dodatni jest uwięziony w jądrze, tj. w bardzo małej kulce o promieniu około  $10^{-14}$  m. Elektrony krążą wokół jądra w objętości tego samego rzędu wielkości co thomsonowska kula.

Badanie widma wodoru doprowadziło Nielsa Bohra (1885–1962) do sformułowania postulatu, że kołowe orbity elektronów są skwantowane, tj. że ich moment pędu może mieć wartość równą wyłącznie którejś z całkowitych wielokrotności pewnej podstawowej wartości. Obecnie przedstawimy tu atom Bohra szczegółowo. Atom Bohra, chociaż w pewnych szczegółach nie pozbawiony braków, ilustruje ideę kwantowania w prostszym matematycznie obszarze fizyki klasycznej. Zanim jednak przystąpimy do szczegółowego omówienia, musimy podkreślić, że atom Bohra został następnie zastąpiony atomem falowo-mechanicznym, co pokażemy w paragrafach 50-3 i 50-4. Dalej, modele jądra, chociaż zachowały podstawowe cechy pochodzące od Rutherforda, zostały znacznie wysubtelione, tak że współcześnie przyjmuje się obecność w jądrze cząstek subjądrowych, poruszających się w jego wnętrzu i tworzących jądro.

Moglibyśmy próbować powiązać częstotliwość emitowanej linii widmowej, jak np. linii wodoru (rys. 49-18), z częstotliwością elektronu krążącego po orbicie wewnętrz atomu. Kla-

syczna teoria elektromagnetyczna przewiduje, że przyspieszane ładunki wypromieniowują energię. W ten sposób emitowane są fale elektromagnetyczne z nadawczej anteny radiowej, w której elektrony poddane są ruchowi drgającemu. Promieniowanie to przedstawia stratę energii poruszających się elektronów, która to strata w antenie radiowej kompensowana jest przez energię dostarczaną z oscylatora. Jednakże w odosobnionym atomie żadna energia nie jest dostarczana z zewnętrznego źródła. Moglibyśmy się zatem spodziewać, że częstość elektronu, a więc także częstość wysyłanego promieniowania będzie zmieniać się w sposób ciągły w miarę ubywania energii. Tego przewidywania teorii klasycznej nie można pogodzić z istnieniem ostrych linii widmowych. Tak więc fizyka klasyczna nie może wyjaśnić ani wodorowego, ani żadnego innego widma.



Rys. 49-18. Widmo wodoru. Rysunek obejmuje tylko trzy z istniejących serii widmowych. Każda z serii ma regularną budowę. Linie zagęszczają się w kierunku *granicy serii*, którą jest linia o najkrótszej długości fali w danej serii

Bohr uniknął tej trudności zakładając, że atom wodoru, podobnie jak oscylatory Plancka, może znajdować się jedynie w pewnych ściśle określonych stanach stacjonarnych, w których nie wypromieniowuje energii. Wypromieniowanie następuje tylko wtedy, gdy atom przechodzi z jednego stanu, o energii  $E_k$ , do innego stanu o niższej energii  $E_j$ . Możemy to zapisać w postaci równania

$$h\nu = E_k - E_j, \quad (49-18)$$

gdzie  $h\nu$  oznacza kwant energii uniesionej przez foton, który jest w czasie przejścia wypromieniowany z atomu.

W celu znalezienia dozwolonych częstości przewidzianych przez równanie (49-18) konieczna jest znajomość energii różnych stanów stacjonarnych, w których może się znajdować atom wodoru. Tego rodzaju obliczenia przeprowadził po raz pierwszy Bohr, opierając się na podanym poprzednio przez siebie modelu atomu wodoru. Model Bohra pozwolił osiągnąć duże sukcesy przy badaniu atomu wodoru i miał ogromny wpływ na dalszy rozwój fizyki atomowej. Obecnie uważany jest za ważne, początkowe stadium w rozwoju kompletnej teorii fizyki kwantowej.

Załóżmy, że elektron w atomie wodoru porusza się po kołowych orbitach o promieniu  $r$  ze środkiem w miejscu, gdzie znajduje się jądro. Zakładamy, że jądro, które jest pojedynczym protonem, jest tak ciężkie, że środek masy układu pokrywa się ze środkiem protonu. Obliczmy energię takiego atomu.

Pisząc drugą zasadę Newtona dla ruchu elektronu i korzystając z prawa Coulomba mamy

$$F = ma$$

albo

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m \frac{v^2}{r}.$$

Pozwala to nam obliczyć energię kinetyczną elektronu; jest ona równa

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}. \quad (49-19)$$

Energia potencjalna układu proton-elektron dana jest równaniem

$$U = V(-e) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (49-20)$$

gdzie  $V (= e/4\pi\epsilon_0 r)$  oznacza potencjał pola wytworzonego przez proton w odległości równej promieniowi orbity elektronu.

Całkowita energia  $E$  układu jest równa

$$E = K + U = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}. \quad (49-21)$$

Ponieważ promień orbity, ogólnie biorąc, może przyjmować dowolną wartość, więc tak samo energia  $E$  może być dowolna. Problem kwantowania energii sprowadza się więc do problemu kwantowania promienia  $r$ .

Jeżeli dany jest promień, określone są wszystkie własności orbity. Z równań (49-19), (49-20) i (49-21) wynika, że jest to słuszne dla energii  $K$ ,  $U$  i  $E$ . Z równania (49-19) widać, że prędkość liniowa  $v$  elektronu również zależy od  $r$ :

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mr}}. \quad (49-22)$$

Częstość obrotów  $\nu_0$  znajdujemy bezpośrednio z równania

$$\nu_0 = \frac{v}{2\pi r} = \sqrt{\frac{e^2}{16\pi^3\epsilon_0 mr^3}}. \quad (49-23)$$

Pęd  $p$  otrzymujemy z równania (49-22):

$$p = mv = \sqrt{\frac{me^2}{4\pi\epsilon_0 r}}. \quad (49-24)$$

Moment pędu  $L$  dany jest równaniem

$$L = pr = \sqrt{\frac{me^2r}{4\pi\epsilon_0}}. \quad (49-25)$$

Tak więc, jeżeli  $r$  jest znane, znane są również parametry orbitalne:  $K$ ,  $U$ ,  $E$ ,  $v$ ,  $\nu_0$ ,  $p$  i  $L$ . Jeżeli jakakolwiek z tych wielkości jest skwantowana, to wszystkie muszą być skwantowane.

W tym stadium teorii Bohr nie miał jeszcze żadnych zasad, którymi mógłby się kierować; wobec tego (po pewnym, niezbyt prostym rozumowaniu, którego nie będziemy

przytaczać) wysunął śmiałą hipotezę, mianowicie, że kwantyzacja parametrów orbitalnych jest najprostsza, jeżeli zastosujemy ją do momentu pędu  $L$  i założył, że  $L$  może przybierać tylko wartości dane równaniem

$$L = n \frac{h}{2\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (49-26)$$

Występuje tu znów stała Plancka; stała  $n$  oznacza liczbę kwantową.

Kombinacja równań (49-25) i (49-26) prowadzi do

$$r = n^2 \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m e^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (49-27)$$

Z równań (49-27) widać jak skwantowane jest  $r$ . Podstawienie równania (49-27) do równania (49-21) daje

$$E = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (49-28)$$

Z równania (49-28) otrzymujemy bezpośrednio wartości energii dozwolonych stanów stacjonarnych.

Rysunek 49-19 przedstawia energie stanów stacjonarnych i związane z nimi liczby kwantowe. Z równania (49-27) widać, że promień orbity wzrasta jak  $n^2$ . Górnny poziom na rys. 49-19, oznaczony przez  $n = \infty$ , odpowiada stanowi, w którym elektron jest całkowicie usunięty z atomu (tzn.  $E = 0$  i  $r = \infty$ ). Na rysunku 49-19 pokazane są również pewne przeskoki kwantowe, które następują między różnymi stanami stacjonarnymi.

Kombinacja równań (49-18) i (49-28) pozwala napisać czysto teoretyczny wzór dla częstości linii widmowych wodoru. Wzór ten ma następującą postać:

$$\nu = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^3} \left( \frac{1}{j^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad (49-29)$$

gdzie  $j$  i  $k$  są liczbami całkowitymi, opisującymi odpowiednio niższy i wyższy stan stacjonarny. Odpowiednie długości fal można łatwo znaleźć ze wzoru  $\lambda = c/\nu$ . W tablicy 49-1 podane są — w ten sam sposób obliczone — niektóre długości fal; powinny one zostać uważanie porównane z liniami widmowymi na rys. 49-18 i 49-19.

**Przykład 5.** Obliczyć energię wiązania atomu wodoru (energię wiążącą elektron z jądrem) z równania (49-28).

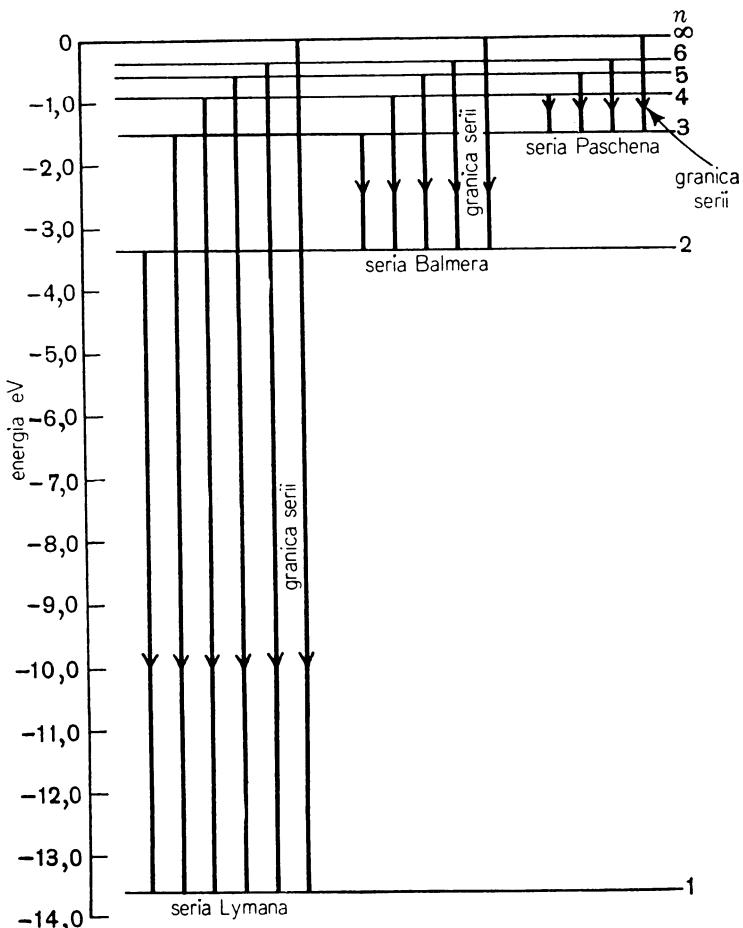
Energia wiązania jest liczbowo równa energii najniższego stanu przedstawionego z rys. 49-19. Największa ujemna wartość  $E$  w równaniu (49-28) odpowiada  $n = 1$ . Daje to

$$E = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} = -\frac{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})^4}{8(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2))^2 (6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2} = -2,17 \cdot 10^{-18} \text{ J} = -13,6 \text{ eV},$$

co zgadza się z doświadczalnie obserwowaną energią wiązania dla wodoru.

W zasadzie elektron w atomie wodoru (lub innym) mógłby zostać zastąpiony jakkolwiek ujemnie naładowaną cząstką, również związaną z jądrem i krążącą wokół jądra w sposób podobny jak to czyni elektron. Utworzony w ten sposób nowy atom nosi nazwę atomu egzotycznego\*. W praktyce trudno jest budować atomy egzotyczne, ponieważ wiele z zastępczych, naładowanych ujemnie cząstek to cząstki nietrwałe, albo też tworzące, po schwytaniu ich przez jądro, nietrwałe atomy. Niemniej jednak atomy takie można zbudować, a następnie badać.

\* Patrz: Clyde E. Wiegand, Exotic Atoms, *Scientific American*, November 1972.



Rys. 49-19. Schemat poziomów energetycznych w atomie wodoru. Liczba kwantowa  $n$  oznacza numer poziomu. Pomiędzy poziomem  $n = 6$  a  $n = \infty$  znajduje się nieskończoność wielu poziomów. Porównać z rys. 49-18

Model Bohra można stosować również do wodoropodobnego atomu egzotycznego i wówczas z równania (49-27) wynika, że im większa masa krającej cząstki, tym mniejszy promień orbity. Tak na przykład, mion (patrz dodatek F) będzie krążył znacznie bliżej jądra niż elektron i na jego zachowanie silny wpływ będzie miał rozkład ładunku wewnętrz jądra. Dlatego też badanie mionium (atomu z mionem zamiast elektronu) — patrz zadanie 49-46 — dostarcza informacji o tym, jaki rozkład w jądrach mają ładunki dodatnie (protony).

W ogólności motywacją badania atomów egzotycznych jest albo chęć dowiedzenia się czegoś o rozmiarach jądra i szczegółach jego budowy, albo też chęć poznania własności (takich jak np. masa) samych cząstek ujemnych, które to własności można łatwiej określić, gdy cząstki pozostają w układzie związanym, niż gdy poruszają się swobodnie.

### 49-9. Zasada odpowiedniości

Chociaż wszystkie teorie w fizyce mają ograniczenia, zazwyczaj ważność ich nie urywa się nagle, lecz w sposób ciągły daje wyniki, które coraz mniej zgadzają się z doświadczeniem. Tak więc przewidywania mechaniki newtonowskiej stają się coraz mniej dokładne,

Tablica 49-1. Widmo wodoru (niektóre wybrane linie)

Nazwa serii	Liczba kwantowa		Długość fali, nm
	j (stan niższy)	k (stan wyższy)	
Lymana	1	2	121,6
	1	3	102,6
	1	4	97,0
	1	5	94,9
	1	6	94,0
	1	$\infty$	91,2
Balmera	2	3	656,3
	2	4	486,1
	2	5	434,1
	2	6	410,2
	2	7	397,0
	2	$\infty$	365,0
Paschena	3	4	1875,1
	3	5	1281,8
	3	6	1093,8
	3	7	1005,0
	3	8	954,6
	3	$\infty$	822,0

w miarę jak prędkość zbliża się do prędkości światła. Podobny związek musi istnieć między fizyką kwantową a fizyką klasyczną; pozostaje znaleźć warunki, przy których ta ostatnia teoria staje się szczególnym przypadkiem pierwszej.

Promień orbity wodoru dla stanu o najniższej energii (tzw. *stanu podstawowego*) znajdujemy podstawiając w równaniu (49-27)  $n = 1$ ; okazuje się, że wynosi on  $5,3 \cdot 10^{-11}$  m. Jednakże, jeżeli  $n = 10\ 000$ , promień jest  $10\ 000^2$  razy większy i wynosi 5,3 mm. „Atom” ten jest tak duży, że podejrzewamy, iż jego zachowanie się powinno być dokładnie opisane przez fizykę klasyczną. Sprawdźmy to obliczającczęstość emitowanego światła na podstawie zarówno klasycznych, jak i kwantowych założeń. Obliczenia te powinny różnić się przy małych liczbach kwantowych, lecz powinny zgadzać się przy dużych liczbach kwantowych. Twierdzenie, że fizyka kwantowa przechodzi w fizykę klasyczną przy dużych liczbach kwantowych, nazywa się *zasadą odpowiedniości*. Zasada ta podana przez Nielsa Bohra, była bardzo użyteczna w ciągu wielu lat rozwoju fizyki kwantowej. Sam Bohr oparł swoją teorię atomu wodoru na argumentach wynikających z tej zasady.

Według fizyki klasycznej częstotliwość  $\nu_0$  światła emitowanego przez atom jest równa częstotliwości krążenia\* elektronu na orbicie. Fakt ten można wyrazić przy pomocy liczby kwantowej  $n$  łącząc równania (49-23) i (49-27), co daje

$$\nu_0 = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^3} \frac{2}{n^3}. \quad (49-30)$$

\* Istnieją również całkowite wielokrotności tej częstotliwości, lecz możemy je zaniedbać bez szkody dla rozumowania.

Fizyka kwantowa przewiduje, że częstotliwość  $\nu$  emitowanego światła jest dana równaniem (49-29). Rozważając przejście między orbitą o liczbie kwantowej  $k = n$  i  $j = n-1$  otrzymujemy

$$\nu = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^3} \left[ \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right] = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^3} \left[ \frac{2n-1}{(n-1)^2 n^2} \right]. \quad (49-31)$$

Gdy  $n \rightarrow \infty$ , wyrażenie w nawiasach kwadratowych dąży do  $2/n^3$ , tak że  $\nu \rightarrow \nu_0$ , gdy  $n \rightarrow \infty$ . Tablica 49-2 ilustruje ten przykład zasady odpowiedniości.

Tablica 49-2. Zasada odpowiedniości w zastosowaniu do atomu wodoru

Liczba kwantowa	Częstość obrotów na orbicie (równ. (49-30)), Hz	Częstość promieniowania przy przejściu na sąsiedni niższy poziom (równ. (49-31)), Hz	Różnica, %
2	$8,20 \cdot 10^{14}$	$24,6 \cdot 10^{14}$	67
5	$5,26 \cdot 10^{13}$	$7,38 \cdot 10^{13}$	29
10	$6,57 \cdot 10^{12}$	$7,72 \cdot 10^{12}$	14
50	$5,25 \cdot 10^{10}$	$5,42 \cdot 10^{10}$	3
100	$6,578 \cdot 10^9$	$6,677 \cdot 10^9$	1,5
1000	$6,5779 \cdot 10^6$	$6,5878 \cdot 10^6$	0,15
10000	$6,5779 \cdot 10^3$	$6,5789 \cdot 10^3$	0,015
25000	$4,2099 \cdot 10^2$	$4,2102 \cdot 10^2$	0,007

### Pytania

- Zagłębia utworzone przez węgiel w piecu węglowym wydają się jaśniejsze niż sam węgiel. Czy temperatura w takich zagłębiach jest znacznie wyższa niż temperatura powierzchniowa żarzącego się węgla?
- Związek  $\mathcal{R} = \sigma T^4$  (równ. (49-2)) jest ściśle spełniony przez ciała doskonale czarne i obowiązuje dla wszystkich temperatur. Dlaczego nie używamy tego związku jako podstawy do definicji temperatury przy, powiedzmy,  $100^\circ\text{C}$ ?
- Czy dla wszystkich żarzących się ciał stałych obowiązuje prawo czwartej potęgi temperatury, jak to wydaje się sugerować równanie (49-3)?
- Promieniującą wnękę nazywamy *ciałem doskonale czarnym*. Dlaczego?
- Stwierdzono, że jeżeli zagładamy do wnęki, której ściany utrzymywane są w stałej temperaturze, to nie dostrzegamy wewnętrz żadnych szczegółów. Czy wydaje się to uzasadnione?
- Kawałek metalu w temperaturze  $1100\text{ K}$  żarzy się na jasnoczerwono. Natomiast kawałek kwarcu w tej samej temperaturze nie żarzy się wcale. Wyjaśnij to. (*Wskazówka*: Kwarc jest przezroczysty dla światła widzialnego.)
- Czy w fizyce klasycznej miewamy do czynienia z wielkościami skwantowanymi? Jeśli tak, podaj przykłady. Czy energia jest skwantowana w fizyce klasycznej?
- Czy ma sens mówienie o skwantowaniu ładunku? Czym, jeśli czymkolwiek, różni się to od skwantowania energii?
- Wykaż, że stała Plancka ma wymiary momentu pędu. Czy z tego musi wynikać, że moment pędu jest wielkością skwantowaną?
- Jaki rząd wielkości musiałaby mieć stała  $h$ , żeby efekty kwantowe były zjawiskami „codziennymi” (Patrz: G. Gamow, *Mister Tompkins w krainie czarów*, PWN, Warszawa 1962. Znajdziesz tam piękną popularyzację świata, w którym stałe fizyczne  $c$ ,  $G$  i  $h$  wydają się oczywiste).

11. Dlaczego wykres natężenia prądu fotoelektrycznego na rys. 49-7 nie rośnie pionowo aż do wartości maksymalnej (nasycenie), gdy przyłożone napięcie jest choć trochę większe niż  $V_0$ ?
12. Dlaczego istnienie częstości granicznej w efekcie fotoelektrycznym przemawia za teorią fotoową, a przeciwko teorii falowej światła?
13. Dlaczego pomiary fotoelektryczne są tak czułe na rodzaj powierzchni fotoelektrycznej?
14. Dlaczego nawet wtedy, gdy padające promieniowanie jest monochromatyczne, prędkości emitowanych fotoelektronów są rozłożone w pewnym przedziale?
15. W jaki sposób energia fotonu może być dana wzorem  $E = h\nu$  (równ. (49-10)), skoro z występowania częstości  $\nu$  w tym wzorze wynika, że światło jest falą?
16. Czy teoria fotoelektryczności Einsteina, postulująca fotonowy charakter światła, unieważnia doświadczenie Younga dotyczące interferencji?
17. Uzasadnij stwierdzenie, że żadne oczy nie mogłyby zarejestrować słabego światła gwiazdy gdyby natura światła nie była korpuskularna.
18. Załóż, że emisja fotonów przez źródło promieniowania ma przypadkowy rozkład kierunkowy. Czy możesz oczekwać, że w opisie fotonowym natężenie (lub gęstość energii) zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości od źródła, czyli tak jak w opisie falowym?
19. Jaki jest kierunek comptonowskiego rozproszenia elektronów z maksymalną energią kinetyczną w zestawieniu z kierunkiem padającej, monochromatycznej wiązki fotonowej?
20. Dlaczego w schemacie rozpraszania comptonowskiego (rys. 49-11) można przewidywać, że  $\Delta\lambda$  nie zależy od rodzaju materiałów, z których składa się rozpraszająca tarcza?
21. Dlaczego nie obserwujemy efektu Comptona dla światła widzialnego?
22. Światło pochodzące z odległych gwiazd zanim dobiegnie do nas, wielokrotnie ulega rozproszeniu comptonowskemu na swobodnych elektronach w przestrzeni międzygwiazdnej. Powoduje to przesunięcie kolorów światła ku czerwieni. Jak można odróżnić to przesunięcie od przesunięcia dopplerowskiego ku czerwieni, związanego z ruchem oddalających się gwiazd?
23. Dlaczego w widmie wodoru najpierw zauważono i poddano analizie serię Balmera a nie serie Lymana i Paschena?
24. W świetle z laboratoryjnej rury do wyładowań w gazie można zaobserwować tylko stosunkowo niewielką liczbę linii serii Balmera, podczas gdy w widmach gwiazd obserwuje się wielką liczbę tych linii. Wyjaśnij to, powołując się na małą gęstość, wysoką temperaturę i dużą objętość gazów w atmosferach gwiazd.
25. Co wynika z faktu, że w teorii Bohra dla orbit wodorowych energia potencjalna jest ujemna i większa co do wartości niż energia kinetyczna?
26. (a) Czy atom wodoru może pochłonąć foton, którego energia przewyższa jego energię wiązania, równą 13,6 eV? (b) Jaką najmniejszą energię musi mieć foton, by wywołać fotoefekt w gazowym wodorze?
27. Przy emisji fotonu atom wodoru, w związku z prawem zachowania pędu, ulega odrzutowi. Wyjaśnij fakt, że energia wyemitowanego fotonu jest mniejsza niż różnica energii pomiędzy poziomami energetycznymi czynnymi w tym procesie emisji.
28. Czy mógłbyś oczekwać, że zaobserwujesz wszystkie linie atomowego wodoru, gdyby taki gaz był wzbudzany elektronami o energii 13,6 eV? Uzasadnij odpowiedź.
29. Jak byś oszacował temperaturę gazowego wodoru, w której zderzenia międzyatomowe powodują znaczną jonizację atomów?
30. Przytoczyć i przedyskutować dokładnie założenia zrobione: przez Plancka w związku z zagadniением promieniowania ciała czarnego, przez Einsteina w związku z efektem fotoelektrycznym i przez Bohra w związku z zagadnieniem atomu wodoru.
31. Opisz kilka metod, których można użyć do eksperymentalnego określenia stałej Plancka  $\hbar$ .
32. Przedyskutować przykład 1 opierając się na zasadzie odpowiedniości.
33. Zgodnie z mechaniką klasyczną elektron poruszający się po orbicie może mieć dowolny moment pędu. Jednakże według teorii Bohra dla atomu wodoru moment pędu jest skwantowany zgodnie ze wzorem  $L = nh/2\pi$ . Uzgodnić te dwa podejścia, korzystając z zasady odpowiedniości.
34. W sformułowaniu zasady odpowiedniości mówi się o granicznym przejściu z  $n$  do nieskończoności lub z  $\hbar$  do zera. Wyjaśnij relację pomiędzy tymi dwiema technikami postępowania dla znalezienia przybliżenia klasycznego.

35. Czy można skorzystać z przejścia granicznego  $h \rightarrow 0$  w celu uzyskania klasycznego przybliżenia wyników kwantowych w przypadku efektu fotoelektrycznego? Uzasadnij odpowiedź.

36. (a) Zakładano, że newtonowskie cząstki światła zachowują się zgodnie z prawami mechaniki Newtona. Czy koncepcja fotonu jest powrotem do tej idei cząstek światła? (b) Jako ośrodek, którego falowanie jest falami świetlnymi wymyślono eter. Czy koncepcja fotonu usuwa potrzebę wprowadzenia eteru?

## Zadania

### Paragraf 49-2

1. Na rysunku 49-1 zestawiono krzywą widmowej zdolności emisyjnej promieniowania wolframu w temperaturze 2000 K z odpowiednią krzywą dla ciała doskonale czarnego. Sprawdź, że jeśli emisja energetyczna — pole powierzchni pod krzywą dla wolframu — wynosi  $23,3 \text{ W/cm}^2$ , to zdolność emisyjna wolframu w temperaturze 2000 K jest równa 0,259.

2. Jaką moc w temperaturze  $800^\circ\text{C}$  wypromieniuje drut chromonikielinowy o długości 1,0 m i średnicy 1,5 mm, jeśli zdolność emisyjna chromonikieliny wynosi 0,92?

3. Nominalna moc żarówki oznacza pobieraną z sieci moc elektryczną. (a) Żarówka o mocy nominalnej  $P = 300 \text{ W}$  ma wolframowe włókno żarowe o średnicy  $d = 0,40 \text{ mm}$  i długości  $l = 30 \text{ cm}$ . Zdolność emisyjna wolframu jest równa 0,26. Jaką temperaturę ma to włókno? (b) Świetłówka o mocy nominalnej 40 W daje tyle widzialnego światła co 100-watowa żarówka. Wyjaśnij dlaczego tak jest?

Odp.: (a) 1470 K.

4. Przeciętna moc promieniowania słonecznego przypadająca na jednostkę powierzchni Ziemi wynosi  $335 \text{ W/m}^2$ . (a) Wyjaśnij zgodność tej liczby z tzw. stałą słoneczną (energią docierającą ze Słońca w ciągu jednostki czasu do ustawionej prostopadle jednostkowej powierzchni na Ziemi), której wartość wynosi  $1340 \text{ W/m}^2$ . (b) Potraktuj Ziemię jak ciało doskonale czarne promieniujące energią w przestrzeni z taką samą szybkością. Jaka temperaturę powierzchniową miałaby Ziemia w tych warunkach?

5. (a) Przyjmując temperaturę powierzchniową Słońca  $5700 \text{ K}$  obliczyć na podstawie prawa Stefana-Boltzmanna ubytek masy spoczynkowej Słońca w ciągu sekundy na promieniowanie. W obliczeniach przyjąć, że Słońce ma średnicę  $1,4 \cdot 10^9 \text{ m}$ . (b) Jaka część spoczynkowej masy Słońca jest tracona na promieniowanie w ciągu roku? Przyjąć, że masa spoczynkowa Słońca wynosi  $2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ .

Odp.: (a)  $4,1 \cdot 10^9 \text{ kg}$ . (b)  $6,5 \cdot 10^{-14} \text{ kg}$ .

6. Piec, w którego wnętrzu temperatura wynosi  $227^\circ\text{C}$ , ogrzewa pokój, w którym temperatura jest równa  $27^\circ\text{C}$ . W jednej ze ścian pieca jest zrobiony mały otwór o powierzchni  $5,0 \text{ cm}^2$ . Jaka wypadkowa moc jest przenoszona z pieca do pokoju? (Wskazówka: Traktuj zarówno piec jak i pokój jako ciała doskonale czarne.)

### Paragraf 49-3

7. Długość fali  $\lambda_{\max}$ , dla której widmowa zdolność emisyjna osiąga swoją wartość maksymalną, dla danej temperatury  $T$  jest określona przez prawo przesunięć Wiena,  $\lambda_{\max} \cdot T = \text{const}$ . W otoczeniu jakiej długości fali ciało doskonale czarne o temperaturze 6000 K promieniuje najsilniej na jednostkę przedziału długości fal? Wynikającą z doświadczeń wartością stałej Wiena jest liczba  $2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$ .

Odp.: 480 nm.

8. Pokazać, że dla małych długości fal albo niskich temperatur prawo Wiena jest szczególnym przypadkiem prawa Plancka (równ. (49-6)).

9. Udowodnij prawo Stefana-Boltzmanna, pokazując bezpośrednio z wzoru Plancka równość

$$\int_0^{\infty} \mathcal{R}_{\lambda} d\lambda = AT^4,$$

w której  $A$  jest stałą.

10. Wnęka, której ściany są utrzymywane w temperaturze 4000 K, ma w jednej ze ścian otwór kołowy o średnicy 5,0 mm. (a) Z jaką szybkością energia promienista w obszarze widzialnym (rozumianym jako zakres długości fal od  $0,40 \mu\text{m}$  do  $0,70 \mu\text{m}$ ) ucieka przez ten otwór? (b) Jaką to stanowi część całkowitego promieniowania opuszczającego wnękę przez otwór? Rozwiąż zadanie analitycznie lub graficznie.

#### Paragraf 49-4

11. W przykładzie 2 założmy, że „tarczę” stanowi pojedynczy atom gazu o promieniu 0,10 nm i że natężenie źródła światła jest zredukowane do  $10^{-5}$  W. Jakiego czasu opóźnienia dla efektu fotoelektrycznego możemy oczekwać na podstawie falowej teorii światła, jeżeli energia wiązania elektronu naj słabiej związanej w atomie wynosi 2,0 eV?

Odp.: 10 lat.

#### Paragraf 49-5

12. Wykazać, że energia fotonu (w eV) jest związana z długością fali (w nm) zależnością

$$E = 1,24 \cdot 10^3 / \lambda.$$

13. Promieniowanie słoneczne pada na Ziemię z szybkością 2,0 cal/(cm<sup>2</sup> · min). Ile to jest fotónów/(cm<sup>2</sup> · min), przyjmując, że średnia długość fali wynosi 5500 Å?

Odp.:  $2,3 \cdot 10^{19}$ .

14. 100-watowa sodowa lampa próżniowa promieniuje równomiernie we wszystkich kierunkach. (a) W jakiej odległości od lampy średnia gęstość fotonów będzie równa  $10/\text{cm}^3$ ? (b) Jaka jest średnia gęstość fotonów 2,0 metra od lampy? Przyjąć, że światło jest monochromatyczne, o długości fali  $\lambda = 589$  nm.

15. Atom absorbuje foton o długości fali 375 nm i natychmiast emisję innego fotonu, o długości fali 580 nm. Ile energii wchłonął atom w tym procesie? W celu ułatwienia obliczeń skorzystaj z wyniku do zadania 12.

Odp.: 1,17 eV.

16. Jaka jest (a) częstość, (b) długość fali i (c) pęd fotonu, którego energia równa się energii spoczynkowej elektronu?

17. Energia potrzebna do usunięcia elektronu z powierzchni sodu wynosi 2,3 eV. Czy dla sodu występuje efekt fotoelektryczny dla pomarańczowego światła o długości fali  $\lambda = 680$  nm?

Odp.: Nie.

18. Chcesz dobrać substancję dla fotokomórki przeznaczonej do pracy w zakresie światła widzialnego. Która z wymienionych (prace wyjścia podane w nawiasach) będzie odpowiednia: tantal (4,2 eV); wolfram (4,5 eV); aluminium (4,2 eV); bar (2,5 eV); lit (2,3 eV)?

19. Nadbiegające fotony uderzają w powierzchnię sodu (praca wyjścia  $E_0 = 2,2$  eV) powodując emisję fotoelektronów. Do wygaszenia pojawiającego się wówczas fotoprądu potrzebny jest potencjał hamujący  $V_0 = 5,0$  V. Jaka jest długość fali tych fotonów?

Odp.: 172 nm.

20. Oblicz maksymalną energię kinetyczną fotoelektronów, jeśli praca wyjścia dla materiału, z którego pochodzą jest równa  $2,0 \cdot 10^{-19}$  J, a częstość promieniowania wynosi  $3,0 \cdot 10^{15}$  Hz.

21. (a) Jaki powinien być potencjał hamujący, jeśli metal ma pracę wyjścia 1,8 eV, a oświetlany jest promieniowaniem o długości fali 400 nm? (b) Jaka wówczas będzie maksymalna prędkość fotoelektronów emitowanych z powierzchni metalu?

Odp.: (a) 1,3 V. (b)  $6,8 \cdot 10^5$  m/s.

22. Światło o długości fali 200 nm pada na powierzchnię aluminium. W celu usunięcia elektronu z powierzchni aluminium potrzebna jest energia 4,2 eV. Jaka jest energia kinetyczna (a) najszybszych i (b) najwolniejszych emitowanych fotoelektronów? (c) Jaki jest potencjał hamowania? (d) Jaka jest dla aluminium graniczna długość fali?

23. Wielkość pracy wyjścia dla czystej powierzchni litu wynosi 2,3 eV. Zrobić przybliżony wykres potencjału hamowania  $V_0$  w zależności od częstości światła padającego na tę powierzchnię.

24. Pokazać, rozważając zderzenie między fotonem a swobodnym elektronem (na gruncie mechaniki relatywistycznej), że niemożliwe jest, aby foton oddał całą swoją energię swobodnemu elektronowi. Innymi słowy, pokazać, że efekt fotoelektryczny nie może występować dla całkowicie swobodnych elektronów, elektrony muszą być związane w ciele stałym albo w atomie.

#### Paragraf 49-6

25. Fotony o długości fali 0,024 Å zderzają się ze swobodnymi elektronami. (a) Oblicz długość fali fotonu rozproszonego pod kątem 30°, licząc względem kierunku pierwotnej wiązki. (b) Zrób to samo dla kąta rozproszenia równego 120°.

Odp.: (a)  $2,7 \cdot 10^{-12}$  m. (b)  $6,0 \cdot 10^{-12}$  m.

26. Monochromatyczna wiązka fotonów, o długości fali  $1,4 \cdot 10^{-3}$  nm, ulega rozproszeniu Comptona na warstwie miedzi. Jaka będzie maksymalna energia elektronów odrzutu? (Patrz przykład 4.)

27. Foton promieniowania rentgenowskiego o długości fali  $\lambda = 0,10 \text{ \AA}$  uderza „czolowo” w elektron ( $\varphi = 180^\circ$ ). Określić: (a) zmianę długości fali fotonu, (b) zmianę energii fotonu, (c) końcową energię kinetyczną elektronu.

Odp.: (a)  $0,049 \text{ \AA}$ . (b)  $-41 \text{ keV}$ . (c)  $41 \text{ keV}$ .

28. Foton o długości fali  $0,20 \text{ nm}$  padając na blok węglowy zostaje rozproszony w comptonowskim zderzeniu, w wyniku czego jego częstość zostaje przesunięta o  $0,010\%$ . (a) Jaki jest kąt rozproszenia tego fotonu? (b) Ile energii uzyskuje elektron, na którym rozproszył się ten foton? (Zauważ, że w każdym ruchu falowym  $\Delta\nu = -(c/\lambda^2)\Delta\lambda$ )

29. Obliczyć, w procentach, zmianę energii fotonu przy zderzeniu Comptona przedstawionym na rys. 49-11, dla  $\varphi$  równego  $90^\circ$ , dla promieniowania: (a) w zakresie mikrofal o  $\lambda = 3,0 \text{ cm}$ ; (b) w zakresie widzialnym o  $\lambda = 500 \text{ nm}$ , (c) w zakresie promieni Roentgena o  $\lambda = 1,00 \text{ \AA}$  i (d) w zakresie promieni  $\gamma$ , dla których energia fotonów wynosi  $1,0 \text{ MeV}$ . Jakie wnioski można wyciągnąć odnośnie znaczenia efektu Comptona w tych różnych obszarach widma elektromagnetycznego, jedynie z punktu widzenia kryterium straty energii w pojedynczym zderzeniu Comptona?

Odp.: (a)  $8,1 \cdot 10^{-9}\%$ , (b)  $4,9 \cdot 10^{-4}\%$ , (c)  $2,4\%$ , (d)  $68\%$ .

30. Foton „zderza się czołowo” z elektronem, w wyniku czego zostaje odrzucony do tyłu, dokładnie wzdłuż linii padania. Elektron uzyskuje prędkość  $\beta c$ , przy czym  $\beta \ll 1$  (na przykład  $\beta = 10^{-3}$ ). Wykazać, że stosunek końcowej energii kinetycznej elektronu do początkowej energii fotonu jest równy dokładnie  $\beta$ . (Wskazówka: Potraktuj problem jako nierelatywistyczne „zderzenie” comptonowskie.)

31. W celu otrzymania wzoru na przesunięcie Comptona (równ. (49-17)) przeprowadź konieczne przekształcenia algebraiczne eliminując  $v$  i  $\theta$  z równań (49-13), (49-15) i (49-16).

#### Paragraf 49-8

32. Linia widma rentgenowskiego złota odpowiada fotonom, które wszystkie mają prawie taką samą długość fali  $0,185 \text{ \AA}$ . Jeśli energia tych fotonów pochodzi z przeskoków z poziomu o energii  $-13,7 \text{ keV}$ , do drugiego, o niższej energii, to jaka jest energia tego drugiego poziomu?

33. Atom wodoru emitemie światło o długości fali  $486,3 \text{ nm}$ . (a) Jakie przejście w tym atomie jest odpowiedzialne za to promieniowanie? (b) Do jakiej serii widmowej należy to promieniowanie?

Odp.: (a)  $n = 4$  do  $n = 2$ . (b) Do serii Balmera.

34. Wskazać na diagramie poziomów energetycznych wodoru liczby kwantowe odpowiadające przejściu, dla którego długość fali emitowanego fotonu wynosi  $121,6 \text{ nm}$ .

35. Jaka jest (a) energia, (b) pęd i (c) długość fali fotonu wyemitowanego, gdy atom wodoru podlega przejściu ze stanu o  $n = 3$  do stanu o  $n = 1$ ?

Odp.: (a)  $12 \text{ eV}$ , (b)  $6,5 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ , (c)  $103,0 \text{ nm}$ .

36. (a) Używając wzoru Bohra na częstości linii spektralnych wodoru znaleźć trzy największe długości fal w seriach Balmera. (b) Między jakimi granicznymi długościami fal leżą serie Balmera?

37. Jakie są zgodnie z teorią Bohra, w stanie podstawowym atomu wodoru: (a) liczba kwantowa, (b) promień orbity, (c) moment pędu, (d) pęd, (e) prędkość kątowa, (f) prędkość liniowa, (g) siła działająca na elektron, (h) przyspieszenie elektronu, (i) energia kinetyczna, (j) energia potencjalna i (k) energia całkowita?

Odp.: (a) 1. (b)  $5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ . (c)  $1,1 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ . (d)  $2,0 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ . (e)  $4,1 \cdot 10^{16} \text{ rad/s}$ . (f)  $2,2 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ . (g)  $8,2 \cdot 10^{-8} \text{ N}$ . (h)  $9,0 \cdot 10^{22} \text{ m/s}^2$ . (i)  $+13,6 \text{ eV}$ . (j)  $-27,2 \text{ eV}$ . (k)  $-13,6 \text{ eV}$ .

38. Jak zmieniają się wraz z liczbą kwantową wielkości od (b) do (k) w zadaniu 37?

39. Jaka energia jest potrzebna do usunięcia elektronu z atomu wodoru znajdującego się w stanie o  $n = 8$ ?

Odp.:  $0,21 \text{ eV}$ .

40. Atom wodoru jest wzbudzany ze stanu o  $n = 1$  do stanu o  $n = 4$ . (a) Obliczyć energię, którą musi pochłonąć atom. (b) Obliczyć i przedstawić na wykresie poziomów energetycznych różne energie fotonów, które mogą być emitowane, jeżeli atom powraca do stanu o  $n = 1$ . (c) Obliczyć prędkość odrzutu atomu wodoru przy założeniu, że jest on początkowo w spoczynku, jeżeli przejście ze stanu o  $n = 4$  do stanu o  $n = 1$ , następuje w pojedynczym skoku kwantowym.

41. Atom wodoru będący w stanie o energii wiązania (to jest energii potrzebnej do usunięcia elektro-

nu) równej 0,85 eV ulega przejściu do stanu o energii wzbudzania (to jest różnicy energii tego stanu i stanu podstawowego) równej 10,2 eV. (a) Znaleźć energię emitowanego fotonu. (b) Wskazać to przejście na diagramie energetycznym dla wodoru, zaznaczając odpowiednie liczby kwantowe.

Odp.: (a) 2,6 eV. (b)  $n = 4$  do  $n = 2$ .

42. Neutron o energii kinetycznej równej 6,0 eV zderza się z pozostającym w spoczynku atomem wodoru w stanie podstawowym. Zastosować do tego zderzenia prawo zachowania pędu i energii i pokazać, że zderzenie musi być elastyczne (tzn. musi być zachowana energia kinetyczna).

43. W oparciu o diagram poziomów energetycznych wodoru wyjaśnij znany z obserwacji fakt, że częstość drugiej linii serii Lymana jest sumą częstości pierwszej linii serii Lymana i częstości pierwszej linii serii Balmera. Jest to przykład odkrytej empirycznie zasady kombinacji Ritza. Korzystając z diagramu znajdź inne przykłady stosownalności tej zasady.

44. Używając teorii Bohra obliczyć energię potrzebną do usunięcia elektronu z pojedynczo zjonizowanego atomu helu w stanie podstawowym, tj. z atomu helu pozbawionego już jednego elektronu.

45. Zastosuj teorię Bohra do porównania widma jednokrotnie zjonizowanego helu z widmem wodoru.

Odp.: Dla odpowiednich linii będzie  $\lambda_{He} = \frac{1}{4} \lambda_H$ .

46. *Atomy mezonowe (mionium)*. Zastosować teorię Bohra do atomu mezonowego, który składa się z jądra o ładunku  $Ze$  i ujemnego mezonu (częstki elementarnej o ładunku  $-e$  i masie  $m$ , która jest 207 razy większa niż masa elektronu) krążącego wokół jądra. Obliczyć (a) promień pierwszej orbity Bohra, (b) energię jonizacji i (c) długość fali fotonu o największej energii, który może być emitowany. Założyć, że mezon krąży dookoła jądra wodoru ( $Z=1$ ).

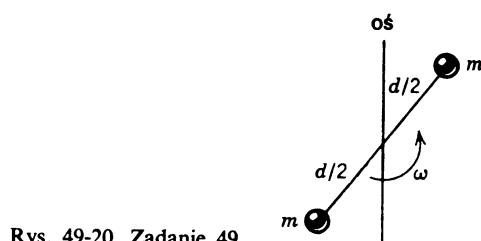
47. *Pozytonium*. Zastosować teorię Bohra do atomu pozytonium. Składa się on z dodatniego i ujemnego elektronu, obracających się dookoła ich środka masy. (a) Jaki związek istnieje między widmem pozytonium a widmem atomu wodoru? (b) Jaki jest promień orbity dla stanu podstawowego? (Wskazówka: Konieczne jest przeanalizowanie tego problemu z punktu widzenia zasad podstawowych, ponieważ „atom” ten nie ma jądra; obie cząstki obracają się dookoła punktu znajdującego się w połowie odległości między nimi.)

Odp.: (a) Odpowiednie długości fali promieniowania pozytonium będą dwukrotnie większe. (b) Odległość do środka masy będzie równa promieniu orbity w atomie wodoru.

48. Być może dałoby się utworzyć atom z elektronu i neutronu, związanych siłami grawitacyjnymi. Oblicz promień orbity elektronowej stanu podstawowego takiego atomu korzystając z modelu podobnego do modelu Bohra, w którym przyciągająca siła Coulomba została zastąpiona przyciągającą siłą grawitacyjną.

49. Dwuatomowa cząsteczka gazu składa się z dwóch atomów o masach  $m$  oddalonych o stałą odległość  $d$ . Cząsteczka ta obraca się wokół osi, tak jak na rys. 49-20. Zakładając, że jej moment pędu jest skwantowany tak samo jak w atomie Bohra, określ (a) możliwe prędkości kątowe oraz (b) możliwe skwantowane energie ruchu obrotowego. (c) Przedstaw te energie na diagramie poziomów energetycznych.

Odp.: (a)  $nh/\pi md^2$ . (b)  $n^2 h^2 / 4\pi^2 m d^2$ .



Rys. 49-20. Zadanie 49

#### Paragraf 49-9

50. (a) Jaka byłaby liczba kwantowa  $n$ , gdyby moment pędu Ziemi związany z jej ruchem dookoła Słońca, był skwantowany zgodnie z formułą Bohra  $L = nh/2\pi$ ? (b) Jeżeli istnieje taka kwantyzacja, czy może być ona wykryta?

51. Pokazać, że wielkości podane w ostatniej kolumnie tablicy 49-2 dane są dla dużych liczb kwantowych wzorem

$$\frac{100(\nu - \nu_0)}{\nu} \cong \frac{150}{n}.$$

52. Jeżeli elektron wykonuje orbitalny ruch obrotowy z częstotliwością  $\nu_0$ , klasyczna teoria elektromagnetyczna przewiduje, że wypromieniuje on energię odpowiadającą nie tylko częstotliwości  $\nu_0$ , lecz również  $2\nu_0, 3\nu_0, 4\nu_0$  itd. Wykazać, że przewiduje to również teoria Bohra atomu wodoru dla granicznego przypadku dużych liczb kwantowych.

# 50. Fale i cząstki

## 50-1. Fale materii

W 1924 roku francuski uczyony, Louis de Broglie, na podstawie teoretycznych rozumowań doszedł do następujących wniosków: (a) pod wieloma względami przyroda jest zasadzająco symetryczna; (b) nasz dostrzegalny Wszechświat składa się wyłącznie ze światła i z materii; (c) jeżeli światło ma dwoistą, falowo-cząstkową naturę, być może materia również ma taką naturę. Chociaż materię traktowano wtedy jako twór złożony z cząstek, rozumowanie de Broglie'a sugerowało, że należy zbadać czy materia nie wykazuje również własności falowych.

Sugestia de Broglie'a nie zwróciłaby większej uwagi, gdyby nie przewidział on długości tak zwanych fal materii. Przypomnijmy sobie, że kiedy około roku 1680 Huygens rozwiniął teorię falową światła, nie została ona powszechnie uznana nie tylko dlatego, że wydawała się przeczyć newtonowskiej teorii korpuskularnej (czyli cząstkowej), ale również dlatego, że Huygens nie był w stanie stwierdzić, jaka jest długość fali świetlnej. Uczynił to dopiero Thomas Young w 1800 roku. Od tego czasu falowa teoria światła zaczęła być powszechnie uznawana.

De Broglie założył, że długość przewidzianych fal materii jest określona tym samym związkiem, który stosuje się do światła, mianowicie związkiem danym przez równanie (49-14), tzn.

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad (50-1)$$

który wiąże długość fali świetlnej z pędem fotonów. W równaniu tym, jak również w równaniu (49-10) ( $E = h\nu$ ) wyraźnie ujawnia się dwoista natura światła. Każde z tych równań zawiera w swojej strukturze zarówno pojęcia falowe ( $\nu$  i  $\lambda$ ), jak i cząstkowe ( $E$  i  $p$ ). De Broglie przewidział, że długość fali materii jest dana również równaniem (50-1), gdzie  $p$  oznacza teraz pęd cząstki materialnej.

**Przykład 1.** Jaką długość fali przewiduje równanie (50-1) dla wiązki elektronów, których energia kinetyczna wynosi 100 eV?

Prędkość elektronów znajdujemy z równania  $K = \frac{1}{2}mv^2$ , więc

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \frac{2 \cdot 100 \text{ eV} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} = 5,9 \cdot 10^6 \text{ m/s.}$$

Dla pędu  $p$  otrzymujemy

$$p = mv = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 5,9 \cdot 10^6 \text{ m/s} = 5,4 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s.}$$

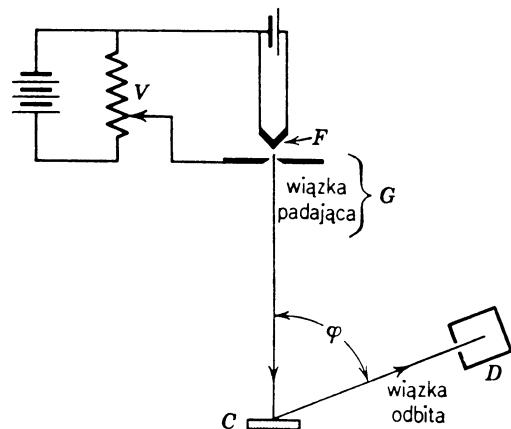
Długość fali (zwana *długością fali de Broglie'a*) znajdujemy z równania (50-1). Mamy więc

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{5,4 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}} = 0,12 \text{ nm.}$$

Jest ona rzędu wielkości atomu albo odległości między sąsiednimi płaszczyznami atomowymi w ciele stałym.

W roku 1926 Elsasser zwrócił uwagę na fakt, że falową naturę materii można zbadać w ten sam sposób, w jaki poprzednio była badana falowa natura promieni Roentgena, mianowicie skierując wiązkę elektronów o odpowiedniej energii na kryształ. Atomy kryształu służą jako trójwymiarowe ugrupowanie centrów dyfrakcyjnych dla „fali” elektronowej; powinniśmy więc poszukiwać silnych maksimów dyfrakcyjnych w pewnych charakterystycznych kierunkach, tak jak to ma miejsce przy dyfrakcji promieni Roentgena.

Doświadczenie tego typu przeprowadzili C. J. Davisson i L. H. Germer w USA i G. P. Thomson w Szkocji\*. Na rysunku 50-1 pokazano aparaturę, jakiej używali Da-



Rys. 50-1. Aparat Davissona i Germera. Elektrony z gorącego włókna  $F$  są przyspieszane przez dającą się zmieniać różnicę potencjałów  $V$ . Po „odbiciu” od kryształu  $C$  trafiają do detektora  $D$

visson i Germer. Elektrony z ogrzewanego włókna przyspieszane są przez dającą się regulować różnicę potencjałów  $V$  i opuszczają „elektronowe działko”  $G$  z energią kinetyczną  $eV$ . Wiązka zostaje skierowana prostopadle na pojedynczy kryształ niklu, znajdujący się w miejscu oznaczonym literą  $C$ . Detektor  $D$  jest ustawiony pod pewnym szczególnym kątem  $\varphi$ , a natężenie „odbitej” wiązki jest odczytywane przy różnych wartościach przyspieszającego potencjału  $V$ . Na rysunku 50-2 widać, że silna wiązka występuje przy  $\varphi = 50^\circ$  dla  $V = 54 \text{ V}$ .

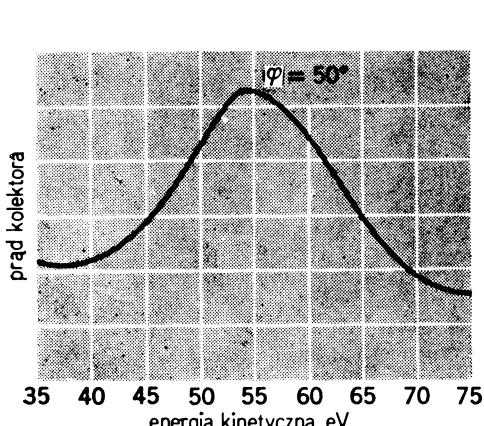
Wszystkie takie silne wiązki „odbite” można znaleźć zakładając, że wiązka elektro-

\* Historyczne sprawozdanie z prac Thomsona znajdziemy w artykule: Sir George Thomson, Early Work in Electron Diffraction, *Scientific American*, December 1961. Warto wiedzieć, że G. P. Thomson, który doświadczalnie pokazał falowe zachowanie się elektronów, jest synem J. J. Thomsona, który doświadczalnie pokazał, że są one cząstками (patrz paragraf 33-8). Zarówno ojciec, jak i syn otrzymali (w 31-letnim odstępie) nagrody Nobla.

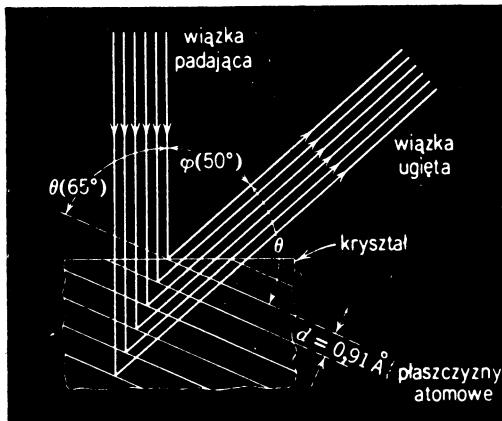
nowa ma długość fali daną wzorem  $\lambda = h/p$  i że „odbicia Bragga” następują na pewnych rodzinach płaszczyzn atomowych dokładnie tak, jak to opisano dla promieni Roentgena w paragrafie 47-6.

Na rysunku 50-3 pokazano takie odbicie Bragga, spełniające wzór Bragga

$$m\lambda = 2ds\sin\theta, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (50-2)$$



Rys. 50-2. Prąd kolektora w detektorze  $D$  z rys. 50-1 jako funkcja energii kinetycznej padających elektronów ujawnia dyfrakcyjne maksimum. Przy kącie  $\varphi$  na rys. 50-1 równym  $50^\circ$  prąd jest maksymalny, a przy kątach wyraźnie mniejszych albo większych dyfrakcyjne znika



Rys. 50-3. Przy kącie  $\varphi = 50^\circ$  i napięciu  $V = 54$  V powstaje silna wiązka dyfrakcyjna „odbita”, podobnie do fali, od zespołu płaszczyzn sieciowych o stałej  $d = 0,091$  nm. Kąt Bragga  $\theta = 65^\circ$ . Dla uproszczenia pominięto załamanie fali przy wejściu i wyjściu z kryształu

W warunkach przedstawionych na rys. 50-3 analiza przeprowadzona przy pomocy promieni Roentgena wykazuje, że odległość  $d$  między płaszczyznami w kryształku wynosi  $0,091$  Å. Ponieważ  $\varphi$  jest równe  $50^\circ$ , stąd wynika, że  $\theta$  jest równe  $90^\circ - \frac{1}{2} \cdot 50^\circ$ , tzn.  $65^\circ$ . Długość obliczona na podstawie równania (50-2) przy założeniu  $m = 1$  wynosi

$$\lambda = 2ds\sin\theta = 2 \cdot 0,091 \text{ nm} \cdot \sin 65^\circ = 0,165 \text{ nm}.$$

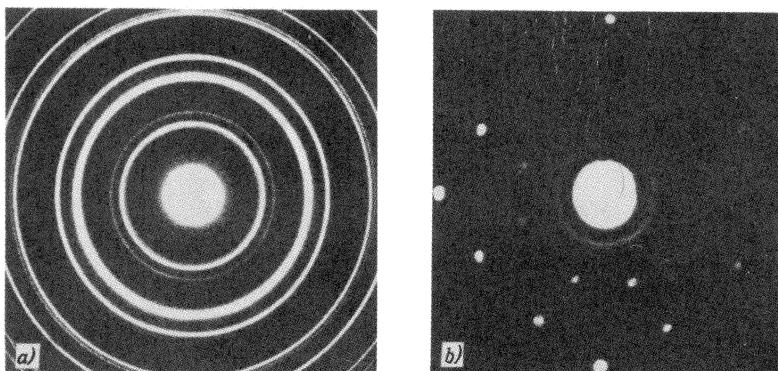
Długość fali obliczona ze wzoru de Broglie'a  $\lambda = h/p$  dla elektronów o energii 54 eV (patrz przykład 1) wynosi 0,165 nm. Ta doskonała zgodność, razem z innymi dowodami\*, stanowi przekonywający argument za tym, że w pewnych okolicznościach elektrony wykazują naturę falową.

Nie tylko elektrony, lecz wszystkie inne cząstki, naładowane i nienalażowane, wykazują cechy charakterystyczne dla fal. Wiązki powolnych neutronów z reaktorów jądrowych już rutynowo używane są do badania struktury atomowej ciał stałych\*\*. Patrz rys. 50-4, który potwierdza falowe właściwości (a) elektronów i (b) neutronów.

\* Został skonstruowany interferometr działający z wiązkami elektronowymi. Przy jego użyciu otrzymano obrazy dyfrakcyjne dla wiązki elektronowej przechodzącej przez układ wieloszczelinowy. Patrz: O. Donati, G. F. Missiroli and G. Possi, An Experiment on Electron Interference, *American Journal of Physics*, May 1973, oraz Claus Jönsson, Electron Diffraction at Multiple Slits, *American Journal of Physics*, January 1974.

\*\* Aparatura, w której demonstruje się interferencję fal neutronowych, została również zbudowana. Patrz: Dietrick E. Thomsen, Neutrons as Waves, *Science News*, April 24, 1976.

Dowody na istnienie fal materii o długości fali danej równaniem (50-1) są rzeczywiście bardzo silne. Mimo wszystko dowody, że materia składa się z cząstek, pozostają równie silne; patrz rys. 10-12. Tak więc, zarówno dla materii, jak i dla światła, musimy przyjąć istnienie dwoistego charakteru; materia w pewnych okolicznościach zachowuje się podobnie jak cząstka, w innych podobnie jak fala.



Rys. 50-4. Na rysunku 50-4a przedstawiamy pierścienie Debyego-Scherrera dla dyfrakcji elektronu na kryształkach złota (porównaj z rozkładem dyfrakcyjnym dla promieni  $X$  z rys. 47-17), natomiast na rys. 50-4b przedstawiamy obraz Lauego dyfrakcji neutronów z reaktora jądrowego na pojedynczym krysztale chlorku sodu (porównaj z rozkładem dyfrakcyjnym promieni  $X$  z rys. 47-12). (Rysunek 50-4a pochodzi z książki: U. Fano, L. Fano, *Basic Physics of Atoms and Molecules*, John Wiley and Sons, 1959, natomiast rys. 50-4b pochodzi z książki: Blackwood i in. *Outline of Atomic Physics*, John Wiley and Sons, 1955)

## 50-2. Struktura atomu i fale stojące

Na ruch elektronów w wiązkach nie są nałożone żadne ograniczenia. Możemy posłużyć się analogią do fali dźwiękowej w długiej, napełnionej gazem rurze, do fali rozchodzącej się w długiej strunie albo do fali elektromagnetycznej w długim falowodzie. Wszystkie cztery przypadki mogą być opisane przez odpowiednio rozchodzące się fale, które mogą mieć dowolną długość (wewnętrz pewnego zakresu długości).

Niech ruch trzech ostatnich rodzajów fal będzie ograniczony przez nałożenie pewnych fizycznych warunków. Dla fali dźwiękowej odpowiada to umieszczeniu ścianek na końcach długiej, napełnionej gazem rury, i utworzeniu akustycznej rury rezonansowej (rys. 38-5). Dla fal w strunie odpowiada to wyodrębnieniu skońzonego odcinka struny i umocowaniu go na obu końcach tak, jak w przypadku struny w skrzypcach (rys. 20-4). Dla fali elektromagnetycznej odpowiada to wstawieniu na końcach falowodu o skończonej długości pokrywek i utworzeniu rezonatora elektromagnetycznego (rys. 38-6).

Występują wówczas dwie ważne różnice: (a) ruch jest teraz opisywany przez falę stojącą, a nie rozchodzącą się i (b) mogą występować tylko pewne określone długości fali (albo częstotliwości). Ta *kwantyzacja* długości fali wynika bezpośrednio z ograniczeń nałożonych na fale. Spodziewamy się, że jeżeli ruch elektronów jest ograniczony przez związanie ich z atomami, to (a) ruch ten może być opisany przez stojące fale materii i (b) ruch ten zostaje skwantowany, tzn. energia elektronów może przybierać tylko pewne dyskretnie wartości.

De Broglie potrafił wyprowadzić warunek kwantyzacji Bohra dla momentu pędu

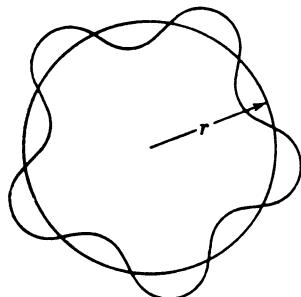
stosując odpowiednie warunki brzegowe do fal materii w atomie wodoru. Rysunek 50-5 przedstawia stojącą falę materii związaną z orbitą o promieniu  $r$ . Długość fali de Broglie'a ( $\lambda = h/p$ ) została tak dobrana, aby orbita o promieniu  $r$  zawierała całkowitą liczbę  $n$  fal materii, tak więc

$$\frac{2\pi r}{\lambda} = \frac{2\pi r}{h/p} = n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

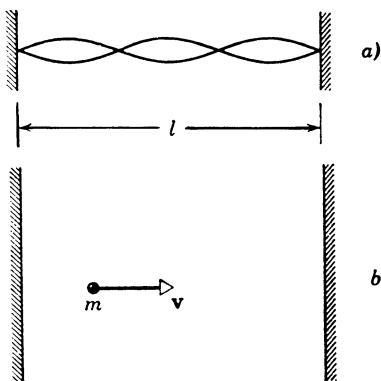
Prowadzi to natychmiast do

$$L = pr = n \frac{h}{2\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ostatnie równanie (patrz paragraf 49-8) przedstawia warunek kwantyzacji Bohra dla momentu pędu  $L$ .



Rys. 50-5. Obraz całkowitej liczby fal elektronicznych na orbicie Bohra o promieniu  $r$ . Model ten, podobnie jak pojęcie orbity Bohra, uważany jest obecnie za zbyt uproszczony



Rys. 50-6. (a) Napięta struna o długości  $l$  przy mocowana do dwóch sztywnych ścian. (b) Cząstka o masie  $m$  i prędkością  $v$  porusza się między dwiema ścianami odległymi o  $l$

### 50-3. Mechanika falowa

Przekonanie, że stany stacjonarne w atomach odpowiadają stojącym falom materii, powięte zostało przez Erwina Schrödingera w 1926 roku i wykorzystane przez niego jako podstawa *mechaniki falowej*, jednego z kilku równoważnych sformułowań fizyki kwantowej.

Ważną wielkością w mechanice falowej jest *funkcja falowa*  $\Psi$ , która jest miarą „zaburzenia falowego” fal materii. Dla fal w strunie „zaburzenie falowe” może być opisane za pomocą poprzecznego przesunięcia  $y$ ; dla fal dźwiękowych może być ono opisane przez zmianę ciśnienia  $p$ ; dla fal elektromagnetycznych — przez wektor pola elektrycznego  $E$ .

Fizyczne znaczenie funkcji falowej  $\Psi$  podajemy w paragrafie 50-4. Obecnie rozpatrzmy funkcję falową  $\Psi(x, t)$  dla prostego, jednowymiarowego zagadnienia ruchu cząstki o masie  $m$  między sztywnymi ścianami, odległymi od siebie o wielkość  $l$ , jak to pokazano na rys. 50-6b. Funkcję falową można otrzymać przez analogię do znanego zagadnienia mechaniki, jakim jest swobodne drganie struny o długości  $l$ , umocowanej na obu końcach, jak przedstawia rysunek 50-6a.

Z warunków brzegowych dla drgającej struny wynika, że na obu końcach muszą występować węzły. Oznacza to, że długość fali musi być tak dobrana, aby

$$l = n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

znaczy to, że długość fali jest „skwantowana” przez żądanie, aby

$$\lambda = \frac{2l}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (50-3)$$

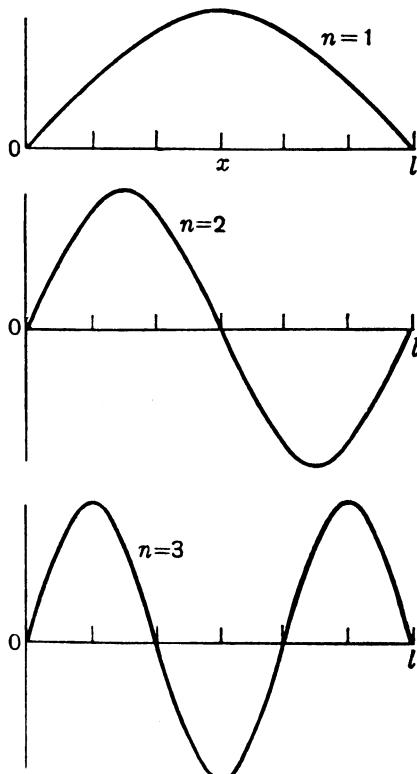
Zaburzenie falowe dla struny przedstawione jest przez falę stojącą, której rozkład przestrzenny opisuje funkcja  $A \sin kx$  (patrz paragraf 19-9), gdzie  $A$  jest stałą, a  $k (= 2\pi/\lambda)$  – liczbą falową. Ponieważ  $\lambda$  jest skwantowane, więc  $k$  również musi być skwantowane, tzn.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

co prowadzi do

$$y = A \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (50-4)$$

Z równania (50-4) widzimy, że niezależnie od tego, jaką wartość  $n$  wybierzemy, dla  $x = 0$  i  $x = l$  zawsze występują węzły, tak jak tego wymagają warunki brzegowe. Na rysunku 50-7 przedstawiono wykres tej funkcji (rozkład przestrzenny fali stojącej) dla drgań odpowiadających  $n = 1, 2, 3$ .



Rys. 50-7. Trzy stany kwantowe dla drgającej struny z rys. 50-6a. Rysunek przedstawia także trzy kwantowe funkcje falowe dla cząstki z rys. 50-6b. Na osi  $y$  mamy amplitudę przemieszczenia w pierwszym przypadku i amplitudę funkcji falowej w drugim przypadku

Rozważmy teraz cząstkę poruszającą się między sztwnymi ściankami. Ponieważ założyliśmy, że ścianki są doskonale sztywne, cząstka nie może przeniknąć przez nie, tak więc  $\Psi$ , które w pewien nie wyjaśniony jeszcze sposób przedstawia ruch cząstki (patrz paragraf 50-4), musi zniknąć dla  $x = 0$  i  $x = l$ . Dopuszczalne długości fal materii muszą więc być dane równaniem (50-3), tzn.

$$\lambda = \frac{2l}{n}.$$

Zastąpienie  $\lambda$  przez  $h/p$  (patrz równ. (50-1)) prowadzi do

$$p = \frac{nh}{2l}. \quad (50-5)$$

Stąd widzimy, że pęd cząstki jest skwantowany. Pęd  $p$  ( $= mv$ ) jest związany z energią  $E$  (która jest tu tylko kinetyczna i wynosi  $\frac{1}{2}mv^2$ ) równaniem

$$p = \sqrt{2mE}. \quad (50-6)$$

Zestawienie równań (50-5) i (50-6) prowadzi do warunku kwantyzacji dla  $E$ :

$$E = n^2 \frac{h^2}{8ml^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (50-7)$$

Cząstka nie może mieć dowolnej energii, jak moglibyśmy spodziewać się, używając pojęć klasycznych, lecz tylko energie dane równaniem (50-7).

Fala materii jest opisana, w ścisłej analogii z równaniem (50-4), przez

$$\Psi = A \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (50-8)$$

Rysunek 50-7 może służyć do pokazania, jak zmienia się amplituda stojących fal materii dla stanów ruchu cząstki między ściankami odpowiadających  $n = 1, 2$  i  $3$ . Rozważając to zagadnienie widzimy, w jaki sposób zlokalizowanie albo ograniczenie ruchu cząstki prowadzi do kwantyzacji energii.

**Przykład 2.** Rozważyć elektron ( $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg), poruszający się pod wpływem sił elektrycznych między dwiema sztwnymi „ściankami” odległymi od siebie o  $1,0 \cdot 10^{-9}$  m, co stanowi w przybliżeniu pięciokrotną średnicę atomu. Znaleźć skwantowane wartości energii dla trzech najniższych stanów stacjonarnych.

Z równania (50-7) dla  $n = 1$  mamy

$$E = n^2 \frac{h^2}{8ml^2} = 1^2 \frac{(6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{8(9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg})(1,0 \cdot 10^{-9} \text{ m})^2} = 6,0 \cdot 10^{-20} \text{ J} = 0,38 \text{ eV}.$$

Energia dla następnych dwóch stanów ( $n = 2$  i  $n = 3$ ) wynoszą  $2^2 \cdot 0,38 \text{ eV} = 1,5 \text{ eV}$  i  $3^2 \cdot 0,38 \text{ eV} = 3,4 \text{ eV}$ .

**Przykład 3.** Rozważyć pyłek ( $m = 1,0 \mu\text{g} = 1,0 \cdot 10^{-9}$  kg) poruszający się między dwiema sztwnymi ściankami odległymi od siebie o  $0,1$  mm ( $= 10^{-4}$  m). Jego prędkość wynosi zaledwie  $10^{-6}$  m/s, tak więc do przebycia odległości między ściankami potrzebny jest czas równy  $100$  s. Jaka liczba kwantowa opisuje ten ruch?

Energia rozważanego pyłku wynosi

$$E (= K) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(10^{-9} \text{ kg})(10^{-6} \text{ m/s})^2 = 5 \cdot 10^{-22} \text{ J}.$$

Rozwiązuje równanie (50-7) względem  $n$  otrzymujemy

$$n = \sqrt{\frac{l}{8mE}} = \sqrt{\frac{1}{8 \cdot 10^{-9} \text{ kg} \cdot 5 \cdot 10^{-22} \text{ J}}} \frac{10^{-4} \text{ m}}{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}} = 3 \cdot 10^{14}.$$

Nawet w tak krańcowych warunkach nie mogłyby być ujawniona kwantowa natura ruchu; nie możemy doświadczalnie zauważyc różnicy między  $n = 3 \cdot 10^{14}$  i  $n = 3 \cdot 10^{14} + 1$ . Fizyka klasyczna, która zawodzi całkowicie dla zagadnienia z przykładu 2, stosuje się doskonale w obecnym zagadnieniu.

#### 50-4. Znaczenie funkcji $\Psi$

Max Born po raz pierwszy zasugerował, że wielkość  $\Psi^2$  w dowolnym ustalonym punkcie przedstawia miarę prawdopodobieństwa, że cząstka znajduje się w pobliżu tego punktu. Dokładniej, jeżeli wokół tego punktu utworzony jest element objętości  $dV$ , prawdopodobieństwo, że w danej chwili cząstka znajdzie się w tym elemencie objętości, wynosi  $\Psi^2 dV$ . Z takiej interpretacji funkcji  $\Psi$  wynika statystyczny związek między falą i związaną z nią cząstką; mówimy, gdzie prawdopodobnie cząstka się znajdzie, a nie — gdzie się znajduje.

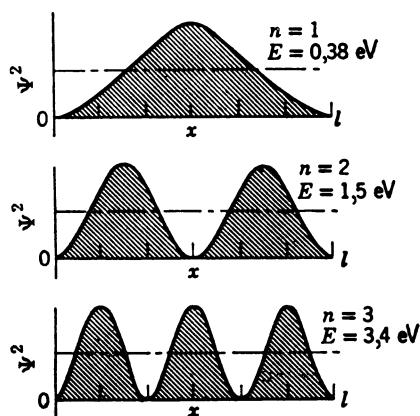
Dla cząstki poruszającej się między sztywnymi ściankami prawdopodobieństwo, że leży ona między dwiema płaszczyznami odległymi o  $x$  i  $x+dx$  od jednej ze ścianek (rys. 50-8), dane jest równaniem

$$\Psi^2 dx = A^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Tak więc gęstością prawdopodobieństwa jest

$$\Psi^2 = A^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (50-9)$$

Rysunek 50-8 przedstawia  $\Psi^2$  dla trzech stanów stacjonarnych odpowiadających  $n = 1, 2$  i  $3$ . Zauważmy, że dla  $n = 1$  cząstka ma większą tendencję do przebywania w pobliżu środka niż na końcach. Jest to w ostrej sprzeczności z wynikami fizyki klasycznej, zgodnie z którą cząstka ma jednakowe prawdopodobieństwo przebywania gdziekolwiek między ściankami, co wyraża pozioma linia na rys. 50-8.



Rys. 50-8. „Gęstości prawdopodobieństwa” dla trzech stanów ruchu cząstki z rys. 50-6b oraz odpowiadające im skwantowane wartości energii dla warunków wymienionych w przykładzie 2. Linie poziome ilustrują przewidywanie mechaniki klasycznej, według której funkcja prawdopodobieństwa jest stała dla wszystkich położen cząstki

Zagadnienie cząstki poruszającej się między sztywnymi ściankami ma mało realne zastosowanie w fizyce. Wolelibyśmy zilustrować mechanikę falową Schrödingera, stosując ją do realniejszej doświadczalnie sytuacji, takiej jak np. zagadnienie atomu wodoru. Nie możemy jednak tego uczynić, gdyż jest to zbyt skomplikowane matematycznie. Podajemy wobec tego bez dowodu, że gdybyśmy rozwiązały ten problem metodami mechaniki falo-

wej, ruch elektronu w stanie podstawowym atomu, określonym przez przyjęcie w równaniu (49-28)  $n = 1$ , byłby opisany przez następującą funkcję falową:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}, \quad (50-10)$$

gdzie  $a = h^2 \epsilon_0 / \pi m e^2$ . Podstawiając w równaniu (49-27)  $n = 1$  widzimy, że  $a$  jest równe promieniowi orbity stanu podstawowego w teorii Bohra. Ta interpretacja ma małe znaczenie w mechanice falowej i  $a$  jest tu przyjęte jedynie jako wygodna jednostka długości w zagadnieniach atomowych; ma ona wartość  $0,529 \text{ \AA} = 0,0529 \text{ nm}$ .

**Przykład 4.** Rozważmy dwie hipotetyczne kuliste powłoki, których środek stanowi atom wodoru a promienie wynoszą  $r$  i  $r + dr$ . Jakie jest prawdopodobieństwo  $P(r)$ , zależne od  $r$ , że elektron znajdzie się między tymi powłokami?

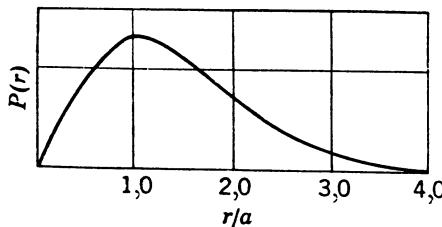
Prawdopodobieństwo to wynosi  $\Psi^2 dV$ , gdzie  $dV$  oznacza objętość zawartą między powłokami, równą  $4\pi r^2 dr$ . Tak więc

$$\Psi^2 dV = \left( \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} \right)^2 (4\pi r^2 dr) = P(r) dr,$$

czyli

$$P(r) = \frac{4r^2}{a^3} e^{-2r/a}.$$

Na rysunku 50-9 podano wykres tej funkcji. Zauważmy, że najbardziej prawdopodobne położenie dla elektronu odpowiada pierwszej orbicie Bohra. Tak więc w mechanice falowej nie mówimy, że w stanie atomu wodoru odpowiadającym  $n = 1$  elektron obiega jądro po kołowej orbicie o promieniu  $0,529 \text{ \AA}$ , lecz tylko, że łatwiej znaleźć elektron w tej odległości od jądra, niż w jakiejkolwiek innej odległości, większej lub mniejszej.



Rys. 50-9. Funkcja prawdopodobieństwa dla stanu podstawowego atomu wodoru, wyliczona na podstawie mechaniki falowej. Odległość między jądrem i elektronem wynosi  $r$ ;  $a$  jest promieniem pierwszej orbity Bohra ( $0,529 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ ) używanej tu jako dogodna jednostka długości

## 50-5. Zasada nieoznaczoności

Niektórzy fizycy wierzą, że realne znaczenie mają tylko te wielkości, które można mierzyć. Gdybyśmy mogli widzieć w „super” mikroskopie elektron i widzielibyśmy, że porusza się na orbicie, moglibyśmy oznajmić, że takie orbity mają sens. Jednakże pokażemy, że dokonanie takiej obserwacji jest z zasady niemożliwe, nawet za pomocą najbardziej idealnych przyrządów, które mogłyby być zbudowane. Dlatego też można powiedzieć, że takie orbity nie mają sensu fizycznego.

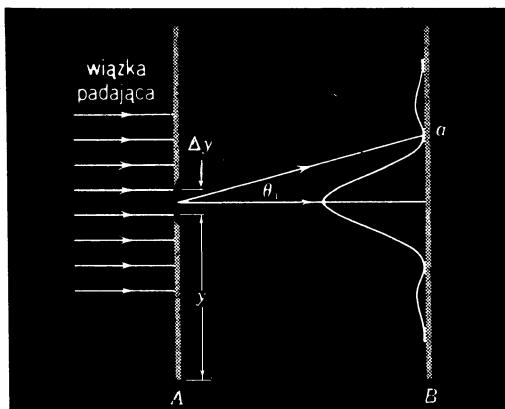
Książyc poruszający się dookoła Ziemi obserwujemy przy pomocy światła słonecznego, które odbija on w naszym kierunku. Światło przekazuje pewien pęd przedmiotowi, od którego zostaje odbite. W zasadzie to odbite światło zaburza ruch Księżyca na jego orbicie, chociaż oczywiście ten zaburzający efekt jest w tym przypadku niezmiernie mały.

Całkiem inną sytuację mamy w przypadku elektronów. Tutaj również możemy spodziewać się, że zobaczymy elektron tylko wtedy, jeżeli odbijemy od niego światło albo inną cząstkę. W tym wypadku odrzut, którego doświadczy elektron, gdy światło (foton)

odbije się od niego, całkowicie zmieni ruch elektronu. Zmiany tej nie można uniknąć ani nawet dokładnie ocenić.

Nie dziwi nas wobec tego, że krzywa prawdopodobieństwa, przedstawiona na rys. 50-9, jest najbardziej szczegółową informacją o rozkładzie ujemnego ładunku w atomie wodoru, jaką możemy otrzymać przy pomocy pomiaru. Gdyby istniały takie orbity, jakie przedstawił Bohr, byłyby one całkowicie zniszczone przy próbach potwierdzenia ich istnienia. W tych warunkach wolimy mówić, że to funkcja prawdopodobieństwa, a nie orbity reprezentują fizyczną rzeczywistość.

Fakt, że nie możemy opisać ruchów elektronów w sposób klasyczny znajduje wyraz w *zasadzie nieoznaczoności*, podanej przez Wernera Heisenberga w 1927 roku\*. Aby sformułować tę zasadę, rozważmy wiązkę monoenergetycznych elektronów o prędkości  $v_0$ , poruszających się z lewej ku prawej, jak to pokazano na rys. 50-10. Spróbujmy zmierzyć położenie pewnego szczególnego elektronu w kierunku pionowym ( $y$ ) oraz składową jego prędkości w tym kierunku. Jeżeli uda się nam wykonać takie pomiary z nieograniczoną dokładnością, możemy rościć prawo do tego, że dokładnie określiliśmy położenie i ruch elektronu (albo co najmniej jedną ich składową). Jednakże zobaczymy, że niemożliwe jest dokonanie tych pomiarów jednocześnie z nieograniczoną dokładnością.



Rys. 50-10. Padająca wiązka elektronów ujęta na szczelinie w ekranie  $A$  tworzy typowy obraz dyfrakcyjny na ekranie  $B$ . Przy węższej szczelinie obraz będzie szerszy

W celu zmierzenia  $y$ , na drodze wiązki ustawiamy absorbujący ekran  $A$  ze szczeliną o szerokości  $\Delta y$ . Jeżeli elektron przechodzi przez otwór, położenie jego w kierunku pionowym musi być znane z dokładnością  $\Delta y$ . Zwężając otwór możemy zwiększać dokładność tego pomiaru położenia w kierunku pionowym w takim stopniu, w jakim chcemy.

Ponieważ elektron ma własności falowe, ulegnie on dyfrakcji na szczelinie. Na płycie fotograficznej, oznaczonej na rys. 50-10 literą  $B$ , powstanie widmo dyfrakcyjne. Istnienie widma dyfrakcyjnego oznacza, że istnieje niepewność w określeniu wartości  $v_y$ , pionowej składowej prędkości elektronów opuszczających szczelinę. Niech  $v_{ya}$  oznacza wartość  $v_y$ , która odpowiada elektronowi padającemu na ekran w miejscu pierwszego minimum, oznaczonym przez  $a$  i opisany przez charakterystyczny kąt  $\theta_a$ .  $V_{ya}$  przyjmujemy za przybliżoną miarę niepewności  $\Delta V$ , składowej prędkości  $V_y$  dla elektronów przechodzących przez szczelinę.

\* Patrz: G. Gamow, The Uncertainty Principle, *Scientific American*, January 1958.

Pierwsze minimum w widmie dyfrakcyjnym dane jest równaniem (46-2):

$$\sin \theta_a = \frac{\lambda}{\Delta y}.$$

Jeżeli założymy, że  $\theta_a$  jest dostatecznie małe, powyższe równanie możemy napisać w postaci

$$\theta_a \approx \frac{\lambda}{\Delta y}. \quad (50-11)$$

Aby został osiągnięty punkt  $a$ ,  $V_{ya}$  ( $= \Delta V_y$ ) musi być takie, aby

$$\theta_a \approx \frac{\Delta v_y}{v_0}. \quad (50-12)$$

Korzystając z równań (50-11) i (50-12) otrzymujemy

$$\frac{\Delta v_y}{v_0} = \frac{\lambda}{\Delta y}.$$

Równanie to możemy również zapisać w następującej postaci

$$\Delta v_y \Delta y \approx \lambda v_0. \quad (50-13)$$

Długość fali  $\lambda$  wiązki elektronowej dana jest przez  $h/p$  albo  $h/mv_0$ ; podstawiając to wyrażenie do równania (50-13) otrzymujemy

$$\Delta v_y \Delta y \approx \frac{hv_0}{mv_0},$$

co możemy zapisać w postaci

$$\Delta p_y \Delta y \approx h. \quad (50-14)$$

W równaniu (50-14)  $\Delta p_y$  ( $= m\Delta v_y$ ) oznacza niepewność naszej znajomości pionowej składowej pędu;  $\Delta y$  — niepewność pionowej składowej położenia. Równanie (50-14) głosi, że iloczyn tych niepewności jest wielkością stałą, tzn. nie możemy mierzyć jednocześnie  $p_y$  i  $y$  z nieograniczoną dokładnością.

Jeżeli chcemy poprawić pomiar  $y$  (to jest, jeżeli chcemy zmniejszyć  $\Delta y$ ), to używamy węższej szczeliny. Jednakże (patrz rów. (50-11)) spowoduje to rozszerzenie się widma dyfrakcji. Szersze widmo oznacza, że została pogorszona nasza znajomość pionowej składowej pędu elektronu albo innymi słowa, zostało zwiększone  $\Delta p_y$ ; jest to zgodne z tym, co przewiduje równanie (50-14).

Ograniczenia nałożone przez równanie (50-14) na pomiar nie mają nic wspólnego z wadami aparatury pomiarowej. Możemy założyć, że mamy możliwie najdokładniejsze urządzenia pomiarowe. Równanie (50-14) przedstawia zasadnicze ograniczenie, nałożone na dokładność pomiarów przez przyrodę.

Równanie (50-14) stanowi szczególny przypadek ogólnej zasady znanej jako *zasada nieoznaczoności*; w zastosowaniu do pomiarów położenia i pędu głosi ona, że

$$\begin{aligned} \Delta p_x \Delta x &\geq h, \\ \Delta p_y \Delta y &\geq h, \\ \Delta p_z \Delta z &\geq h. \end{aligned} \quad (50-15)$$

Tak więc żadna składowa ruchu elektronu swobodnego czy też związanego nie może być określona z nieograniczoną dokładnością.

Prawdopodobnie głęboki sens stałej Plancka nigdzie nie ujawnia się lepiej niż w równaniu (50-15). Gdyby wyżej przytoczone iloczyny były równe zeru, a nie  $h$ , byłoby słuszne klasyczne pojęcia dotyczące cząstek i orbit. Byłby wtedy możliwy pomiar pędu i położenia z nieograniczoną dokładnością. Występowanie  $h$  oznacza, że pojęcia klasyczne są błędne; wielkość  $h$  określa, przy jakich warunkach te pojęcia klasyczne muszą być zastąpione pojęciami kwantowymi. W interesującej i godnej przeczytania powieści fantastycznej Gamow\* opisał, jak wyglądałby nasz świat, gdyby stała  $h$  była dużo większa, niż jest w rzeczywistości, tak że nieklasyczne pojęcia byłyby dostępne dla naszego zmysłowego postrzegania.

**Przykład 5.** Elektron ma prędkość 300 m/s, zmierzoną z dokładnością do 0,010%. Z jaką największą dokładnością możemy określić położenie tego elektronu?

$$p = mv = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 300 \text{ m/s} = 2,7 \cdot 10^{-28} \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

Niepewność pędu wynosi 0,01%, więc

$$\Delta p = 0,00010 \cdot 2,7 \cdot 10^{-28} \text{ kg} \cdot \text{m/s} = 2,7 \cdot 10^{-32} \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

Minimalna niepewność położenia, na podstawie równania (50-15), wynosi

$$\Delta x = \frac{h}{\Delta p} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{2,7 \cdot 10^{-32} \text{ kg} \cdot \text{m/s}} = 2,4 \text{ cm}.$$

Jeżeliby pęd elektronu został rzeczywiście określony przez pomiar z podaną dokładnością, to nie możemy oczekwać, aby jego położenie mogło być znane z lepszą dokładnością niż obliczona, a mianowicie 2,4 cm. Traktowanie elektronu jako punktu nie jest w tych warunkach słuszne.

**Przykład 6.** Kula ma prędkość 300 m/s określona z dokładnością do 0,010%. Z jaką największą dokładnością można określić jej położenie? Masa kuli wynosi 50 g (= 0,05 kg). Przykład ten jest identyczny z przykładem 5 pod każdym względem, z wyjątkiem masy opisywanej cząstki. Pęd kuli wynosi

$$p = mv = 0,05 \text{ kg} \cdot 300 \text{ m/s} = 15 \text{ kg} \cdot \text{m/s},$$

$$\Delta p = 0,0001 \cdot 15 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

Z równania (50-15) wynika, że

$$\Delta x = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{1,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m/s}} = 4,4 \cdot 10^{-31} \text{ m}.$$

Wielkość ta jest o tyle mniejsza od wielkości, jakie jesteśmy w stanie mierzyć (średnica jądra jest równa około  $10^{-15}$  m), że możemy twierdzić, iż dla ciężkich obiektów, takich jak kula, zasada nieoznaczoności nie narzuca żadnych ograniczeń na pomiary. Znowu na podstawie zasady odpowiedniości widzimy, jak w pewnych warunkach fizyka kwantowa redukuje się do fizyki klasycznej.

Zasada nieoznaczoności wyjaśnia nam, jak jest możliwe to, że zarówno światło, jak materia mają dwoistą, falowo-cząstkową naturę. Pochodzi to stąd, że te dwa aspekty, tak jawnie przeciwnie sobie, nie mogą nigdy jednocześnie ujawnić się w tych samych warunkach doświadczalnych. Jeżeli przygotujemy doświadczenie tak, aby elektron silnie ujawnił charakter falowy, wtedy jego charakter cząstkowy jest utajony. Jeżeli zmienimy doświadczenie tak, aby ujawnił się silniej charakter cząstkowy, wtedy charakter falowy staje się niejasny. Materia i światło przypominają monety, które można oglądać z jednej dowolnej strony, lecz nie z obu jednocześnie. Niels Bohr pierwszy wykazał w swojej za-

\* G. Gamow, *Mister Tompkins w krainie czarów*, PWN, Warszawa 1962.

sadzie odpowiedniości, że pojęcia falowe i cząstkowe uzupełniają się, a nie przeciwsłaniają sobie.

### **Pytania**

1. Dlaczego długość fali może być dana wzorem  $\lambda = h/p$ , skoro występowanie pędu  $p$  w tym wzorze świadczy o tym, że elektron jest cząstką?
2. Dlaczego Davisson i Germer mogli być pewni, że na rys. 50-2 maksimum występujące przy 54 V jest maksimum dyfrakcyjnym pierwszego rzędu, to jest że w równaniu (50-2)  $m = 1$ ?
3. W powtóreniu doświadczenia Thomsona dla pomiaru  $e/m$  elektronu (patrz rozdział 33-8) wiązka elektronów była skolimowana przez przepuszczenie jej przez szczelinę. Dlaczego wiązka wychodzących ze szczeliny elektronów nie została zakłócona przez dyfrakcję fali elektronowej na tej szczelinie? (Patrz zadanie 9.)
4. Dlaczego falowa natura materii nie ujawnia się wyraźniej w naszych codziennych obserwacjach?
5. Biorąc pod uwagę falowe zachowanie się elektronów powinniśmy oczekiwać, że uda nam się zbudować mikroskop elektronowy. Zostało to, istotnie, zrobione. (a) Porównaj układ soczewek mikroskopu optycznego z odpowiednim układem mikroskopu elektronowego. (b) Jakie przewagi mógłby mieć mikroskop elektronowy nad mikroskopem optycznym? (Nowe rozwiązania dotyczące tych spraw znajdziemy w artykule: T. E. Everhart, T. L. Hayes, *The Scanning Electron Microscope*, *Scientific American*, January 1972; Albert V. Crewe, *A High-Resolution Scanning Electron Microscope*, *Scientific American*, April 1971.)
6. W jaki sposób można posłużyć się dyfrakcją elektronów do badania własności powierzchni ciał stałych? (Patrz, w związku z tym: John M. Cowley, Sumio Tijama, *Electron Microscopy of Atoms in Crystals*, *Physics Today*, March 1977.)
7. Jak mógłby działać interferometr elektronowy? interferometr neutronowy? (Patrz przypis, s. 617).
8. Czy elektron jest cząstką? Czy jest falą? Omów to.
9. Czym różnią się od siebie elektryny i fotony, traktowane jako cząstki?
10. Czy długość fali de Broglie'a cząstki może być mniejsza niż rozmiary liniowe tej cząstki?... Większa? Czy musi zachodzić jakiś związek między tymi wielkościami?
11. Czy dla cząstek materii uzyskamy wynik klasyczny, gdy we wzorze de Broglie'a  $\lambda = h/mv$  dokonamy przejścia granicznego  $m \rightarrow \infty$ ?
12. Zastosować zasadę odpowiedniości do zagadnienia cząstki znajdującej się między sztywnymi ściankami, pokazując, że te własności, które wydają się „dziwne”, to jest kwantyzacja energii i niejednorodność funkcji prawdopodobieństwa przedstawionej na rys. 50-8, stają się niewykrywalne doświadczalnie przy dużych liczbach kwantowych.
13. Cząstka porusza się między sztywnymi ściankami. Jaki jest prawdopodobieństwo, że cząstka znajdzie się w małym elemencie objętości w pobliżu powierzchni jednej ze ścian, jeżeli  $n = 1$ ?
14. Falę stojącą można rozpatrywać jako superpozycję dwóch fal rozchodzących się. Czy można podobnie interpretować ruch elektronu znajdującego się między sztywnymi ściankami?
15. Przedyskutuj podobieństwa i różnice pomiędzy falą materii i falą elektromagnetyczną.
16. Jakie jest fizyczne znaczenie funkcji  $\Psi$ ?
17. Dlaczego przewidywania mechaniki falowej mogą być tak dokładne, jeżeli jedyna informacja jaką mamy o położeniu elektronów, ma charakter statystyczny?
18. (a) Podaj przykłady tego jak proces pomiaru zakłoca układ podlegający pomiarowi. (b) Czy zakłócenie może być brane pod uwagę na drodze odpowiednich obliczeń?
19. Dlaczego koncepcja orbit Bohra jest niezgodna z zasadą nieoznaczoności?
20. Podać pewne liczbowe przykłady w celu wykazania trudności w ujawnianiu się zasady nieoznaczoności w doświadczeniach, w których bierze udział ciało o masie równej około 1 g.
21. Na rysunku 50-8 widać, że dla  $n = 3$  funkcja prawdopodobieństwa znalezienia cząstki poruszającej się między sztywnymi ściankami równa się zeru w dwóch punktach leżących między tymi ściankami. W jaki sposób cząstka może przejść poprzez te punkty? (Wskazówka: Rozważyć wnioski wypływające z zasady nieoznaczoności.)

22. Zasadę nieoznaczoności można napisać również dla wielkości kątowych (porównaj równ. (50-15)):

$$\Delta L \Delta \varphi \geq h,$$

gdzie  $\Delta L$  oznacza niepewność momentu pędu, a  $\Delta \varphi$  — niepewność położenia kątowego. Dla elektronów w atomach moment pędu ma skwantowane wartości, określone bez jakiegokolwiek niepewności. Jaki wniosek możemy stąd wyciągnąć odnośnie niepewności położenia kątowego oraz odnośnie sensowności pojęcia orbity?

## Zadania

### Paragraf 50-1

1. Kula o masie 40 g porusza się z prędkością 1000 m/s. (a) Jaką długość fali możemy z nią związać? (b) Dlaczego falowa natura kuli nie ujawnia się poprzez efekty dyfrakcyjne?

Odp.: (a)  $\lambda = 1,7 \cdot 10^{-35}$  m.

2. Jeśli długość fali de Broglie'a protonu jest równa  $1,0 \cdot 10^{-13}$  m, to (a) jaka jest prędkość tego protonu oraz (b) jakie napięcie byłoby potrzebne do nadania mu takiej prędkości?

3. Jony sodu są przyspieszane przez różnicę potencjałów 300 V. (a) Jaki pęd uzyskują te jony? (b) Jaka jest ich długość fali de Broglie'a?

Odp.: (a)  $1,9 \cdot 10^{-21}$  kg · m/s. (b)  $3,5 \cdot 10^{-13}$  m.

4. Jaką długość fali przypisujemy wiązce neutronów, których energia wynosi 0,025 eV?

5. Elektron i foton mają długość fali równą 0,20 nm. Jakie są ich (a) pędy i (b) energie?

Odp.: (a)  $3,3 \cdot 10^{-24}$  kg · m/s w obydwu przypadkach. (b) 38 eV dla elektronu i 6200 eV dla fotonu.

6. Akcelerator elektronowy w Stanford dostarcza elektrony o energii 50 GeV ( $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$ ). Wiązki elektronów o tej energii mają długość fali, odpowiednią do badania poprzez doświadczenie rozproszeniowe subtelnych szczegółów struktury jąder. Jaka to jest długość fali i jaki jest jej stosunek do wielkości średniego jądra? (Przy tych energiach wystarczy użyć skrajnie relatywistycznego związku między pędem a energią, mianowicie  $p = E/c$ . Tego samego związku używa się dla światła (równanie (42-2a)). Stosuje się on zawsze wtedy, kiedy energia kinetyczna cząstki jest dużo większa niż jej energia spoczynkowa  $m_0 c^2$ , jak to ma miejsce w naszym przypadku.)

7. Największa, osiągalna zdolność rozdzielcza mikroskopu ograniczona jest tylko przez używaną do obserwacji długość fali. Oznacza to, że najmniejsze obiekty, które mogą być rozróżnione, mają w przybliżeniu wielkość równą długości fali. Założymy, że chcemy „zobaczyć” wnętrze atomu. Przyjmując, że atom ma średnicę równą 0,10 nm, oznacza to, że pragniemy rozróżnić szczegóły wielkości około 0,10 nm. Wyjaśnić (a) Jaka minimalna energia elektronów potrzebna jest do tego celu, jeżeli używamy mikroskopu elektronowego? (b) Jaka minimalna energia fotonów jest potrzebna, jeżeli używamy mikroskopu światelnego? (c) Jaki mikroskop jest praktyczniejszy do tego rodzaju pomiarów?

Odp.: (a)  $1,5 \cdot 10^4$  eV. (b)  $1,2 \cdot 10^5$  eV.

8. Jaki napięcie przyspieszające elektrony w mikroskopie elektronowym byłoby potrzebne żeby uzyskać tę samą zdolność rozdzielczą, którą można by uzyskać w mikroskopie z promieniami  $\gamma$  o energii 0,20 MeV?

9. W powtóreniu doświadczenia Thomsona mającym na celu pomiar  $e/m$  elektronu wiązka elektronów o energiach  $1,0 \cdot 10^4$  eV była kolimowana przez szczelinę o szerokości 0,50 nm. Dlaczego dyfrakcja fali elektronowej na tej szczelinie nie zakłóca kształtu wiązki z niej wychodzącej?

Odp.: Długość fali de Broglie'a (0,012 nm) jest dużo mniejsza od szerokości szczelin.

10. Rozpatrujemy doświadczenie Davissona i Germera. (a) Przy jakich kątach wystąpiłyby (jeśliby w ogóle wystąpiły) wiązki dyfrakcyjne drugiego i trzeciego rzędu, odpowiadające silnym maksymom z rys. 50-2, (b) przy jakich kątach wystąpiłyby wiązka dyfrakcyjna pierwszego rzędu, gdyby potencjał przyspieszający zmieniono z 54 V na 60 V? W doświadczeniu nie obraca się kryształu.

11. W krystalicznym spektrometrze neutronów wykorzystuje się płaszczyzny krystaliczne kryształu berylu o odstępie  $d = 0,07323$  nm. Jaki musi być kąt Bragga  $\theta$ , żeby zostały odbite neutrony o energii wyłącznie  $K = 4,0 \text{ eV}$ ? Rozważyć tylko odbicie pierwszego rzędu.

Odp.:  $5,6^\circ$ .

12. Sporządzić wykres długości fali de Broglie'a w zależności od energii kinetycznej dla (a) elektronów i (b) protonów. Ograniczyć się do wartości energii, do których dobrze się stosuje mechanika klasyczna.

Wygodnie jest przyjąć, że maksymalna energia kinetyczna na każdym wykresie ma być równa około 5% energii spoczynkowej  $m_0 c^2$  dla poszczególnej cząstki.

13. Jaka jest długość fali atomu wodoru poruszającego się z prędkością odpowiadającą średniej energii kinetycznej w stanie równowagi cieplnej przy 20°C?

Odp.: 0,15 nm.

#### Paragraf 50-2

14. Zgodnie z zasadą odpowiedniości oczekujemy klasycznych wyników dla atomu Bohra, gdy  $n \rightarrow \infty$ . A więc gdy  $n$  rośnie, długość fali de Broglie'a związana z elektronem (wielkość kwantowa) powinna w końcu stać się mniejsza niż promień orbity. Istotnie, oczekujemy że dla  $n \rightarrow \infty$  będzie  $\lambda/r \rightarrow 0$ . Czy tak właśnie będzie?

#### Paragraf 50-3

15. (a) Jaka jest przerwa pomiędzy energiami dwóch najniższych poziomów energetycznych w atomach argonu zawartych w pojedynczu o boku 20 cm? (b) Jak to się ma w porównaniu z energią cieplną atomów argonu w temperaturze 300 K? (c) W jakiej temperaturze energia cieplna będzie równa przerwie pomiędzy tymi dwoma poziomami energetycznymi?

Odp.: (a)  $3,9 \cdot 10^{-22}$  eV. (b) Energia cieplna jest  $10^{20}$  razy większa. (c)  $3,0 \cdot 10^{-18}$  K.

16. (a) Oblicz w przybliżeniu najmniejszą energię elektronu jeśli miałby się on mieścić w obszarze jądra atomowego. (Średnica około  $1,4 \cdot 10^{-14}$  m?) (b) Porównaj to z kilku MeV energii wiążącej protony i neutrony w jądrze; czy na podstawie tych wyników możemy oczekwać znalezienia elektronów wewnątrz jądra?

#### Paragraf 50-3

17. Elektron przechodzi ze stanu określonego na rys. 50-8 przez  $n = 3$  do stanu określonego na tym rysunku przez  $n = 2$ . Przejściu temu towarzyszy emisja promieniowania elektromagnetycznego. Jakie są: (a) energia emitowanego pojedynczego fotonu, (b) odpowiadająca jej długość fali?

Odp.: (a) 1,9 eV. (b) 660 nm.

18. Cząstka porusza się między sztywnymi ściankami, znajdującymi się w odległości wzajemnej  $l$ . Jakie jest prawdopodobieństwo, że znajdzie się ona w odległości mniejszej niż  $\frac{1}{3}l$  od jednej ze ścianek: (a) dla  $n = 1$ , (b) dla  $n = 2$ , (c) dla  $n = 3$  i (d) przy założeniach mechaniki klasycznej.

19. Pokazać, że w stanie podstawowym atomu wodoru prawdopodobieństwo  $P_r$ , że elektron znajduje się wewnątrz kuli o promieniu  $r$ , jest dane wzorem

$$P_r = 1 - e^{-2r/a} \left( \frac{2r^2}{a^2} + \frac{2r}{a} + 1 \right).$$

Czy wzór ten daje wartości przewidywane dla (a)  $r = 0$  i (b)  $r = \infty$ ? (c) Wyraźnie określić różnicę między znaczeniem tego wyrażenia a znaczeniem wzoru podanego w paragrafie 50-4.

Odp.: (a) Zero. (b) 1; w obu wypadkach zgodnie z oczekiwaniemi.

20. Jakie jest prawdopodobieństwo, że elektron w stanie podstawowym atomu wodoru znajdzie się wewnątrz kuli, której promień jest równy promieniowi pierwszej orbity Bohra?

#### Paragraf 50-5

21. Używając mikroskopu fotonowego określić położenie elektronu w atomie z dokładnością do 0,010 nm. Jaka jest niepewność pędu elektronu, którego położenie zostało określone w ten sposób?

Odp.:  $6,6 \cdot 10^{-23}$  kg · m/s.

22. Niepewność położenia elektronu wynosi około 0,050 nm, co odpowiada promieniowi pierwszej orbity Bohra w atomie wodoru. Jaka jest niepewność określenia pędu elektronu?

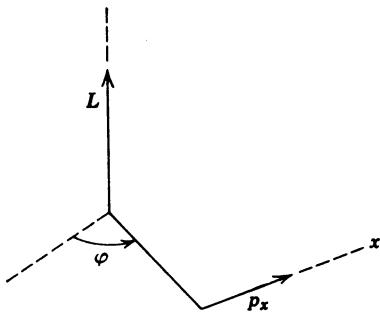
23. Pokazać, że jeżeli niepewność położenia cząstki równa się jej długości fali de Broglie'a, to niepewność dla jej prędkości równa się tej prędkości.

24. W przykładzie 2 energia elektronu była dokładnie zadana rozmiarami pudełka. Jak można to pogodzić z faktem, że jeśli obowiązuje zasada nieoznaczoności, niepewność lokalizacji elektronu nie może tu przewyższać  $1,0 \cdot 10^{-9}$  m?

25. Korzystając z zasady nieoznaczoności  $\Delta p_x \Delta x \geq h$  pokazać, że jeśli  $L$  jest składową momentu pędu wzdłuż linii prostopadłej do kierunku  $x$ , a  $\varphi$  jest kątem azymutalnym „wokół” tej linii (patrz rys. 50-11), to

$$\Delta L \Delta \varphi \geq h;$$

(patrz pytanie 22).



Rys. 50-11. Zadanie 25

## *Uzupełnienie VI*

# *Różniczkowa postać równań Maxwella oraz elektromagnetyczne równanie falowe*

### *VI-1. Wstęp*

W rozdziale 41 staraliśmy się udowodnić istnienie fal elektromagnetycznych, pokazując, że są one zgodne z równaniami Maxwella przedstawionymi w postaci podanej w tablicy 40-2. Obecnie postaramy się, wychodząc z równań Maxwella, wyprowadzić odpowiadające im równanie różniczkowe, którego rozwiązania będą opisywały fale elektromagnetyczne. Wykażemy bezpośrednio, że prędkość  $c$  rozchodzenia się takich fal dana jest równaniem (40-1), czyli że  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ .

W podobny sposób postępowaliśmy w uzupełnieniu III, poświęconym falom mechanicznym w rozciąganej sprężynie. Wychodząc z równań ruchu Newtona wyprowadziliśmy równanie różniczkowe (równ. III-1), którego rozwiązanie (równ. (III-2)) opisywało takie fale. Następnie wykazaliśmy, że prędkość  $v$  rozchodzenia się tych fal jest dana równaniem (III-3), czyli wynosi  $v = \sqrt{F/\mu}$ .

W tablicy 40-2 przedstawiliśmy równania Maxwella w postaci

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = q, \quad (\text{VI-1})$$

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0, \quad (\text{VI-2})$$

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \left( i + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right), \quad (\text{VI-3})$$

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (\text{VI-4})$$

Mówimy, że równania te są podane w postaci całkowej. Zmienne polowe  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$ , które zazwyczaj są wielkościami nieznanymi, pojawiają się pod całkami. Jedyne w kilku symetrycznych przypadkach (patrz na przykład paragraf 28-8 oraz 34-2) możemy wynieść je przed znak całki. W bardziej złożonych problemach nie możemy tego uczynić.

Sytuacja ta jest nieco podobna do znajdowania gęstości  $\rho$  ciała o znanej masie  $m$  i objętości  $\tau$ . Wielkości te są związane zależnością całkową

$$m = \int \rho d\tau.$$

Jedynie wówczas, gdy  $\rho$  jest stałe w całej objętości ciała, możemy wynieść je przed całkę i napisać  $\rho = m/\tau$ .

Dla naszych celów pożąданie jest przekształcenie równań Maxwella do takiej postaci, w której stosowaliby się one do każdego punktu przestrzeni, a nie, jak w przypadku postaci całkowej, do różnych obszarów przestrzeni. Innymi słowy, chcemy przekształcić równania Maxwella z postaci całkowej, danej równaniami od (VI-1) do (VI-4), do postaci różniczkowej. Wówczas będziemy mogli powiązać  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$  w dowolnym punkcie z gęstością ładunku oraz gęstością prądu w tym punkcie.

## VI-2. Operator $\nabla$

Aby móc doprowadzić równania Maxwell'a do postaci różniczkowej, musimy pogłębić naszą znajomość metod wektorowych, a w szczególności zapoznać się z wektorowym operatorem  $\nabla$ .

W paragrafie 29-7 widzieliśmy, w jaki sposób przy pomocy obliczania pochodnych cząstkowych, z (skalarnego) potencjału  $V(x, y, z)$  można otrzymać składowe (wektorowego) elektrostatycznego pola  $E$ , w dowolnym punkcie przestrzeni. Znajdując

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

pole elektrostatyczne

$$\mathbf{E} = iE_x + jE_y + kE_z$$

można zapisać w postaci

$$\mathbf{E} = -\left(i\frac{\partial V}{\partial x} + j\frac{\partial V}{\partial y} + k\frac{\partial V}{\partial z}\right). \quad (\text{VI-5})$$

W zwartej postaci wektorowej równanie (VI-5) możemy zapisać jako

$$\mathbf{E} = -\nabla V,$$

gdzie  $\nabla$  („nabla”) jest operatorem wektorowym, zdefiniowanym w następujący sposób

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}. \quad (\text{VI-6})$$

Operator ten jest bardzo użyteczny wówczas, gdy mamy do czynienia z polami skalarnymi i wektorowymi (przykłady takich pól mieliśmy w paragrafach 16-8 i 18-7). Mając dowolne pole skalarne  $\psi$  możemy utworzyć pole wektorowe, nazywane gradientem  $\psi$  i oznaczane jako  $\text{grad } \psi$  lub  $\nabla\psi$ , działając po prostu operatorem  $\nabla$  na  $\psi$ . Natomiast w przypadku pola wektorowego  $\mathbf{U} = U_x i + U_y j + U_z k$  operator  $\nabla$  możemy zastosować na dwa różne sposoby. Jeden sposób polega na znalezieniu iloczynu skalarnego wektorów  $\nabla$  i  $\mathbf{U}$ , przy czym otrzymujemy pole skalarne, nazywane dywergencją  $\mathbf{U}$ , i zapisujemy je jako  $\text{div } \mathbf{U}$  lub  $\nabla \cdot \mathbf{U}$ . Drugi sposób, to obliczenie iloczynu wektorowego  $\nabla$  i  $\mathbf{U}$ , w wyniku czego otrzymujemy pole wektorowe, nazywane rotacją  $\mathbf{U}$ , i zapisujemy je jako  $\text{rot } \mathbf{U}$  lub  $\nabla \times \mathbf{U}$ . Operacje te można zapisać następująco

$$\text{grad } \psi \equiv \nabla\psi = i\frac{\partial \psi}{\partial x} + j\frac{\partial \psi}{\partial y} + k\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (\text{VI-7})$$

$$\text{div } \mathbf{U} \equiv \nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}, \quad (\text{VI-8})$$

$$\text{rot } \mathbf{U} \equiv \nabla \times \mathbf{U} = i\left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y}\right). \quad (\text{VI-9})$$

Należy zauważyć, że  $\text{grad } \psi$  i  $\text{rot } \mathbf{U}$  są wektorami, podczas gdy  $\text{div } \mathbf{U}$  jest skalarem. Aby oswoić się z tymi operatorami, można wykonać następujące ćwiczenia: (1) pokazać, że  $\text{rot}(\text{grad } \psi) = 0$  i (2) pokazać, że  $\text{div}(\text{rot } \mathbf{U}) = 0$ .

Innym często spotykanym operatorem jest  $\nabla^2$  („nabla kwadrat”)\*. Jest to po prostu iloczyn skalarny  $\nabla \cdot \nabla$ , a więc, jak wynika z równania (VI-6)

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Jeżeli operatorem  $\nabla^2$  podziałamy na pole skalarne  $\psi$ , otrzymamy

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \quad (\text{VI-10})$$

---

\* Operator ten nazywany jest również *laplasjanem* i oznaczany symbolem  $\Delta$  (przyp. tłum.).

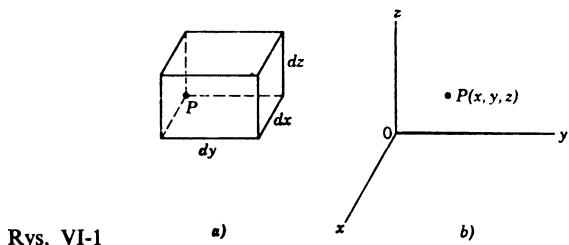
Dla pola wektorowego  $\mathbf{U}$  operacja  $\nabla^2 \mathbf{U}$  jest określona jako

$$\nabla^2 \mathbf{U} = i \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{U}_x + j \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{U}_y + k \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{U}_z. \quad (\text{VI-11})$$

Jako ćwiczenie można pokazać, że  $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{U}) = -\nabla^2 \mathbf{U} + \text{grad}(\text{div } \mathbf{U})$ .

### VI-3. Równania Maxwella w postaci różniczkowej — I

W paragrafie tym pokażemy, w jaki sposób można przekształcić do postaci różniczkowej pierwsze dwa równania Maxwell'a (równ. (VI-1, 2)). Zastosujmy równanie (VI-1) do różniczkowego elementu objętości mającego kształt prostopadłościanu i zawierającego punkt  $P$ , w którym (i w którego pobliżu) istnieje pole elektryczne (patrz rys. VI-1a). Punkt  $P$  w układzie odniesienia przedstawionym na rys. VI-1b ma współrzędne  $x, y, z$ , a długości krawędzi prostopadłościanu wynoszą  $dx, dy$  i  $dz$ .



Rys. VI-1

Wektor  $d\mathbf{S}$  prostopadły do tylnej ściany prostopadłościanu jest równy  $d\mathbf{S} = -idydz$ . Znak minus bierze się stąd, że  $d\mathbf{S}$  musi mieć kierunek normalnej *zewnętrznej*, określony jako  $-i$ . Dla przedniej ściany mamy odpowiednio  $d\mathbf{S} = +idydz$ .

Jeśli pole elektryczne na tylnej ścianie prostopadłościanu ma wartość  $\mathbf{E}$ , jego wartość na ścianie przedniej, odlegiej od ściany tylnej o  $dx$ , wynosi  $\mathbf{E} + (\partial \mathbf{E} / \partial x)dx$ , przy czym ostatni wyraz przedstawia zmianę  $\mathbf{E}$  związaną ze zmianą  $x$  o  $dx$ .

Strumień przechodzący przez całkowitą powierzchnię prostopadłościanu jest równy  $\oint \mathbf{E} d\mathbf{S}$ . Wkład do tego strumienia dawany przez rozważane dwie ściany wynosi

$$(\mathbf{E})(-idydz) + \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} dx \right) (+idydz) = dx dy dz \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} i \right) = dx dy dz \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{E} i) = dx dy dz \frac{\partial E_x}{\partial x}.$$

Podobny wkład dają pozostałe cztery ściany, wobec czego całkowity strumień staje się równy

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = dx dy dz \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right).$$

Korzystając z równania (VI-8) możemy to przepisać w postaci

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = dx dy dz \text{div} \mathbf{E}. \quad (\text{VI-12})$$

Następnie prawą stronę równania (VI-1), która określa wielkość ładunku zawartego wewnątrz powierzchni, można zapisać jako  $q = \int \varrho d\tau$ , a w przypadku szczególnym, dla różniczkowego elementu objętości w pobliżu punktu  $P$ , jako

$$q = \varrho dx dy dz, \quad (\text{VI-13})$$

gdzie  $\varrho$  jest ładunkiem zawartym w jednostce objętości, w pobliżu punktu  $P$ . Podstawiając równania (VI-12) i (VI-13) do równania (VI-1) i skracając przez wspólny czynnik  $dx dy dz$ , otrzymujemy ostatecznie

$$\epsilon_0 \text{div} \mathbf{E} = \varrho. \quad (\text{VI-14})$$

Jest to różniczkowa postać pierwszego równania Maxwell'a (równ. (VI-1)).

Postępując w podobny sposób możemy przedstawić drugie równanie Maxwell'a (równ. (VI-2)) w postaci różniczkowej:

$$\text{div} \mathbf{B} = 0. \quad (\text{VI-15})$$

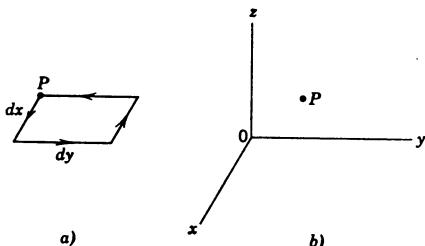
## VI-4. Równania Maxwella w postaci różniczkowej — II

Obecnie postaramy się przekształcić do postaci różniczkowej trzecie i czwarte równanie Maxwell'a (równ. (VI-3) i (VI-4)). Zaczniemy od zastosowania równania (VI-3) do różniczkowego elementu powierzchni, mającego kształt prostopadłościanu i zawierającego punkt  $P$  umieszczony w pewnym obszarze pola magnetycznego (patrz rys. VI-2a). Punkt  $P$ , w układzie odniesienia przedstawionym na rys. VI-2b, ma współrzędne  $x$ ,  $y$  i  $z$ , a długości boków prostokąta równoległego do płaszczyzny  $x$ - $y$  wynoszą  $dx$  i  $dy$ . Obiegając wokół prostokąta, zgodnie z kierunkiem wskazanym przez strzałki, otrzymujemy

$$\oint \mathbf{B} dl = \mathbf{B}(-j dy) + \quad \text{(krawędź tylna)}, \\ + \mathbf{B}(+idx) + \quad \text{(krawędź lewa)}, \\ + \left( \mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} dx \right) (+j dy) + \quad \text{(krawędź przednia)}, \\ + \left( \mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} dy \right) (-idx), \quad \text{(krawędź prawa)}.$$

gdzie  $\mathbf{B}$  jest indukcją magnetyczną w punkcie  $P$ . Łącząc różne wyrazy otrzymujemy

$$\oint \mathbf{B} dl = dx dy \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} j - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} i \right) = dx dy \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{B} j) - \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{B} i) \right] = dx dy \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right). \quad (\text{VI-16})$$



Rys. VI-2

Po prawej stronie równania (VI-3)  $i$  oznacza prąd przepływający przez powierzchnię zawartą wewnątrz drogi całkowania, a  $d\Phi_E/dt$  zmianę strumienia elektrycznego przechodzącego przez tę powierzchnię. Jeśli więc przyjmiemy, że gęstość prądu wynosi  $J$ , a wektor powierzchni  $dS (= k dx dy)$ , będziemy mogli napisać

$$i = \mathbf{J} dS = \mathbf{J} (k dx dy) = dx dy J_z \quad (\text{VI-17})$$

oraz

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} dS = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} (k dx dy),$$

czyli

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{\partial E_z}{\partial t} dx dy. \quad (\text{VI-18})$$

Podstawiając równania (VI-16, 17 i 18) do równania (VI-3) i skracając przez wspólny czynnik  $dx dy$  otrzymujemy

$$\frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = J_z + \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}, \quad (\text{VI-19})$$

Gdybyśmy rozważali prostokąt równoległy do płaszczyzny  $y$ - $z$  lub  $z$ - $x$ , moglibyśmy postępować dokładnie tak samo jak powyżej. Dla każdego prostokąta otrzymalibyśmy inną składową umownie zorientowanego wektora różniczkowej powierzchni. Równanie (VI-19) jest oczywiście składową z równania odpowiadającego równaniu (VI-3). Jeżeli pomnożymy je przez  $k$  i dodamy do niego dwa podobne równania wektorowe, które możemy otrzymać przez cykliczną permutację  $x$ ,  $y$ ,  $z$  oraz  $i$ ,  $j$ ,  $k$ , odpowiadające składowej  $x$  oraz składowej  $y$  równania, otrzymujemy

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \quad (\text{VI-20})$$

Jest to różniczkowa postać trzeciego równania Maxwell'a.

Podobnie, wychodząc z równania (VI-4), możemy pokazać, że

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{VI-21})$$

jest różniczkową postacią czwartego równania Maxwella.

W ten sposób wyprowadziliśmy cztery równania różniczkowe (równania (VI-22) do (VI-25)) wychodząc z czterech równań całkowych (VI-1) do (VI-4). Można również pokazać, że równania całkowe dażą się wyprowadzić z równań różniczkowych, a więc te dwa układy równań są sobie *równoważne*.

## VI-5. Równanie falowe

Wychodząc z postaci całkowej podstawowych równań elektromagnetyzmu, równań Maxwella, otrzymaliśmy te same równania w postaci różniczkowej. Zamiast równań (VI-1, 2, 3 i 4) mamy więc teraz odpowiednio

$$\epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \varrho, \quad (\text{VI-22})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (\text{VI-23})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right), \quad (\text{VI-24})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (\text{VI-25})$$

Są to cztery sprzężone równania różniczkowe cząstkowe. Stosują się one do każdego punktu przestrzeni pola elektromagnetycznego.

Obecnie chcemy wyprowadzić równanie falowe dla fali elektromagnetycznej w próżni. W próżni gęstość ładunku  $\varrho$  oraz gęstość prądu  $\mathbf{J}$  są równe zeru, a więc równania Maxwella przyjmują postać

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Obliczymy rotację równania na  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ ; otrzymamy

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{B},$$

ale, z równań powyżej,  $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 (\partial \mathbf{E} / \partial t)$ , tak że

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (\text{VI-26})$$

Z przykładu podanego w paragrafie VI-2 wiemy, że  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E}$ , a z równań podanych powyżej  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ . Wobec tego

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}. \quad (\text{VI-27})$$

Łącząc równania (VI-26) i (VI-27) ostatecznie otrzymujemy

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (\text{VI-28a})$$

Postępując w sposób podany powyżej można pokazać, że  $\mathbf{B}$  spełnia takie samo równanie, czyli że

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (\text{VI-28b})$$

Równania (VI-28) są równaniami ruchu fali elektromagnetycznej. Są to równania wektorowe, a więc są one równoważne sześciu równaniom skalarnym, po jednym dla każdej składowej  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$ .

Istnieje wiele rozwiązań równań (VI-28) odpowiadających różnym rodzajom fal elektromagnetycznych; jako przykłady można tu podać falę płaską, kulistą i cylindryczną. Rozważmy rozwiązanie, w którym dwie składowe  $E$  i dwie składowe  $B$  znikają, czyli

$$E_x = E_z = 0, \quad B_x = B_y = 0.$$

Równania (VI-28) są przy tych założeniach spełnione. Dla nieznanekających składowych  $E$ , i  $B$ , równania te redukują się do (patrz równ. (VI-11))

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad (\text{VI-29a})$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}. \quad (\text{VI-29b})$$

Jeśli zrobimy dodatkowe założenie, że  $E_y$ , i  $B_z$  są jedynie funkcjami  $x$  i  $t$ , otrzymamy uproszczone równanie falowe, mianowicie

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \quad (\text{VI-29c})$$

podobne do równania (III-1) dla drgającej struny.

Rozwiązaniem tych równań, co łatwo można sprawdzić przez podstawienie, jest

$$E_y = E_m \sin(kx - \omega t) \quad (\text{VI-30a})$$

oraz

$$B_z = B_m \sin(kx - \omega t). \quad (\text{VI-30b})$$

Równania (VI-30) interpretujemy jako równania fal elektromagnetycznych rozchodzących się w dodatnim kierunku osi  $x$ , jak na rys. 41-13, z prędkością  $c = \omega/k$ . Podstawiając równanie (VI-30a) do równania (VI-29a) lub równanie (VI-30b) do równania (VI-29b) można pokazać, że

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}},$$

co stanowi prędkość rozchodzenia się fal elektromagnetycznych w próżni (patrz równ. (40-1)).

## Nagrody Nobla w dziedzinie fizyki\*

1901	Wilhelm Konrad Roentgen	1845-1923	za odkrycie niezwykłych promieni, później nazwanych jego imieniem (promieni Roentgena)
1902	Hendrik Antoon Lorentz Pieter Zeeman	1853-1928 1865-1934	za badania wpływu pola magnetycznego na zjawiska promieniowania
1903	Antoine Henri Becquerel  Pierre Curie  Maria Skłodowska-Curie	1852-1908	za odkrycie promieniotwórczości naturalnej
1904	Lord Rayleigh (John William Strutt)	1859-1906 1867-1934	za wspólne badania zjawiska promieniotwórczości odkrytego przez profesora Henri Becquerela
1905	Philipp Eduard Anton von Lenard	1842-1919	za badanie gęstości większości znanych gazów i odkrycie argonu
1906	Joseph John Thomson	1862-1947	za pracę dotyczącą promieni katodowych
1907	Albert Abraham Michelson	1856-1940	za teoretyczne i doświadczalne badania przewodnictwa elektrycznego w gazach
1908	Gabriel Lippmann	1852-1931	za zbudowanie niezwykle precyzyjnych przyrządów optycznych i pomiary metrologiczne przeprowadzone przy ich użyciu
1909	Guglielmo Marconi Carl Ferdinand Braun	1845-1921	za metodę fotograficznego odwrzania kolorów opartą na zjawisku interferencji
1910	Johannes Diderik van der Waals	1874-1937 1850-1918	za wkład w rozwój telegrafii bezprzewodowej
1911	Wilhelm Wien	1837-1923	za pracę nad równaniem stanu gazów rzeczywistych i cieczy
1912	Nils Gustaf Dalén	1864-1928 1869-1937	za odkrycia dotyczące praw rządzących promieniowaniem cieplnym za wymyślenie automatycznych regulatorów przeznaczonych, w połączeniu z zasobnikami gazu, do zasilania światłem latarni morskich i pław światlnych

\* Patrz: *Nobel Lectures*, 1901-1970, Elsevier Publishing Company; znajdziesz tam informacje o noblistach, ich wykładach i biografiach. Uwagi są prawie we wszystkich przypadkach cytatami z oficjalnych werdyktów o przyznaniu Nagrody Nobla.

1913	Heike Kamerlingh-Onnes	1853-1926	za badanie własności materii w niskich temperaturach, które to badania doprowadziły, <i>inter alia</i> , do wytworzenia ciekłego helu
1914	Max von Laue	1879-1960	za odkrycie dyfrakcji promieni Roentgena na kryształach
1915	William Henry Bragg William Lawrence Bragg	1862-1942 1890-1971	za zasługi w badaniu struktury krystalicznej za pomocą promieni Roentgena
1917	Charles Glover Barkla	1877-1944	za odkrycie charakterystycznego promieniowania rentgenowskiego pierwiastków
1918	Max Planck	1858-1947	za odkrycie kwantów energii
1919	Johannes Stark	1874-1957	za odkrycie efektu Dopplera w promieniach kanałowych i za odkrycie rozszczepienia linii widmowych w polu elektrycznym
1920	Charles-Édouard Guillaume	1861-1938	za wkład jaki wniosł w precyzyjne pomiary w fizyce dzięki odkryciu anomalii w stopach niklowo-stalowych
1921	Albert Einstein	1879-1955	za zasługi dla fizyki teoretycznej, szczególnie za odkrycie praw rządzących zjawiskiem fotoelektrycznym
1922	Niels Bohr	1885-1962	za badanie budowy atomów i promieniowania przez nie wysyłanego
1923	Robert Andrews Millikan	1868-1953	za prace dotyczące elementarnego ładunku elektrycznego i zjawiska fotoelektrycznego
1924	Karl Manne Georg Siegbahn	1886-1954	za odkrycia i badania w dziedzinie spektroskopii promieni X
1925	James Franck Gustaw Hertz	1882-1964 1887-1975	za odkrycie praw rządzących zderzeniem elektronu z atomem
1926	Jean Baptiste Perrin	1870-1942	za prace dotyczące nieciągłej budowy materii, a szczególnie za odkrycie równowagi w procesach osadzania
1927	Arthur Holly Compton Charles Thomson Rees Wilson	1892-1962 1869-1959	za odkrycie zjawiska nazwanego jego imieniem za wynalezienie metody czynienia widzialnymi torów cząstek naładowanych elektrycznie, z wykorzystaniem kondensacji pary
1928	Owen Williams Richardson	1879-1959	za prace dotyczące termoemisji elektronów, a w szczególności za odkrycie prawa nazwanego jego imieniem
1929	Prince Louis-Victor de Broglie	1892-1987	za odkrycie falowej natury elektronów
1930	Sir Chandrasekhara Venkata Raman	1888-1970	za prace dotyczące rozpraszanego światła i za odkrycie zjawiska nazwanego jego imieniem
1932	Werner Heisenberg	1901-1976	za stworzenie mechaniki kwantowej, której zastosowanie doprowadziło, między innymi, do odkrycia alotropowych postaci wodoru
1933	Paul Adrien Maurice Dirac Erwin Schrödinger	1902-1984 1887-1961	za odkrycie nowych płodnych form teorii atomowej

1935	James Chadwick	1891-1974	za odkrycie neutronu
1936	Victor Franz Hess	1883-1964	za odkrycie promieniowania kosmicznego
	Carl David Anderson	1905-1991	za odkrycie pozitonu
1937	Clinton Joseph Davisson George Paget Thomson	1881-1958 1892-1975	za doświadczalne odkrycie dyfrakcji elektronów na kryształach
1938	Enrico Fermi	1901-1954	za pokazanie istnienia nowych pierwiastków promieniotwórczych wytworzonych przez napromieniowanie neutronami i za odkrycie reakcji jądrowych wywołanych przez powolne neutryny
1939	Ernest Orlando Lawrence	1901-1958	za wynalezienie i udoskonalenie cyklotronu i za wyniki uzyskane przy jego użyciu, w szczególności odnoszące się do pierwiastków sztucznie promieniotwórczych
1943	Otto Stern	1888-1969	za wkład w rozwój metody promieni molekularnych i za odkrycie momentu magnetycznego protonu
1944	Isidor Isaac Rabi	1898-1988	za metodę rezonansową obserwacji własności magnetycznych jąder atomowych
1945	Wolfgang Pauli	1900-1958	za odkrycie zasady wykluczania, nazwanej również zakazem Pauliego
1946	Percy Williams Bridgman	1882-1961	za wymyślenie aparatury do wytwarzania skrajnie wysokich ciśnień i za odkrycia, których dzięki temu dokonał w dziedzinie fizyki wysokich ciśnień
1947	Sir Edward Victor Appleton	1892-1965	za badanie fizyki górnych warstw atmosfery, a szczególnie za odkrycie tak zwanej warstwy Appletona
1948	Patrick Maynard Stuart Blackett	1897-1974	za rozwinięcie metody komory Wilsona i za odkrycia, przy jej użyciu, w dziedzinach fizyki jądrowej i promieniowania kosmicznego
1949	Hideki Yukawa	1907-1981	za przewidzenie istnienia mezonów na podstawie teoretycznej pracy dotyczącej sił jądrowych
1950	Cecil Frank Powell	1903-1969	za rozwinięcie metody (kliszy) fotograficznej badania procesów jądrowych i za odkrycia związane z mezonami, dokonane przy zastosowaniu tej metody
1951	Sir John Douglas Cockcroft Ernest Thomas Sinton Walton	1897-1967 1903-1995	za ich pionierskie prace związane z przekształceniem jąder atomowych za pomocą sztucznie przyspieszanych cząstek
1952	Felix Bloch Edward Mills Purcell	1905-1983 1912-1997	za rozwinięcie nowych metod w obszarze precyzyjnych magnetycznych metod jądrowych i za odkrycia dokonane przy ich zastosowaniu
1953	Frits Zernike	1888-1966	za przedstawienie metody kontrastu fazowego, szczególnie za wymyślenie mikroskopu fazowo-kontrastowego
1954	Max Born	1882-1970	za fundamentalne badania w dziedzinie mechaniki kwantowej, szczególnie za statystyczną interpretację funkcji falowej

	Walther Bothe	1891-1957	za metodę koincydencji i odkrycia dokonane tą metodą
1955	Willis Eugene Lamb	1913	za odkrycia związane ze strukturą subtelną widma wodoru
	Polykarp Kusch	1911-1993	za precyzyjne określenie momentu magnetycznego elektronu
1956	John Bardeen Walter Houser Brattain William Shockley	1908-1991 1902-1987 1910-1989	za badania półprzewodników i wynalezienie transzystora
1957	Chen Ning Yang Tsung Dao Lee	1922 1926	za wnikiowe zbadanie tak zwanego prawa zachowania parzystości, co doprowadziło do ważnych odkryć w związku z częstotliwościami elementarnymi
1958	Paweł Aleksiejewicz Czerenkow Ilja Michajłowicz Frank Igor Jewgieniewicz Tamm	1904-1990 1908-1990 1895-1971	za odkrycie i wyjaśnienie efektu Czerenkowa
1959	Owen Chamberlain Emilio Gino Segrè	1920 1905-1989	za odkrycie antyprotonu
1960	Donald Arthur Glaser	1926	za wymyślenie komory pęcherzykowej
1961	Robert Hofstadter	1915-1990	za pionierskie badania rozpraszania elektronu w jądrach atomowych i dokonane na tej drodze odkrycia związane ze strukturą nukleonów
	Rudolf Ludwig Mössbauer	1929	za badania rezonansowej absorpcji promieniowania $\gamma$ i odkrycie w związku z tym efektu, który nosi jego imię
1962	Lew Davidowicz Landau	1908-1968	za pionierskie teorie skondensowanej materii, w szczególności ciekłego helu
1963	Eugene P. Wigner	1902-1995	za wkład w teorię jądra atomowego i cząstek elementarnych, a szczególnie za odkrycie i zastosowanie w tych teoriach podstawowych zasad symetrii
	Maria Goeppert Mayer J. Hans D. Jensen	1906-1972 1907-1973	za odkrycia związane z powłokowym modelem jąder atomowych
1964	Charles H. Townes Nikołaj G. Basow Aleksander M. Prochorow	1915 1922 1916	za fundamentalne prace w dziedzinie elektroniki kwantowej, które doprowadziły do skonstruowania oscylatorów i wzmacniaczy bazujących na zasadzie działania masera i lasera
1965	Julian Schwinger Richard P. Feynman Sin-Itiro Tomonaga	1918-1994 1918-1988 1906-1979	za ich fundamentalne prace w dziedzinie elektrodynamiki kwantowej, o głębokich konsekwencjach dla fizyki cząstek elementarnych
1966	Alfred Kastler	1902-1984	za odkrycie i rozwinięcie metod optycznych badania rezonansu HERTZA w atomach
1967	Hans Albrecht Bethe	1906	za wkład do teorii reakcji jądrowych, a szczególnie za odkrycia związane z wytwarzaniem energii w gwiazdach
1968	Luis W. Alvarez	1911-1988	za decydujący wkład w fizykę cząstek elementarnych, w szczególności za odkrycie wielkiej liczby stanów rezonansowych, co było możliwe dzięki rozwinięciu techniki korzystania z pęcherzykowej komory wodorowej i analizy danych

1969	Murray Gell-Mann	1929	za wkład i odkrycia związane z klasyfikacją cząstek elementarnych i ich oddziaływań
1970	Hannes Alfvén	1908-1995	za fundamentalne prace i odkrycia w dziedzinie magnetohydrodynamiczki i ich owocne zastosowania do różnych działów fizyki plazmy
	Louis Néel	1904	za fundamentalne prace i odkrycia związane z antyferromagnetyzmem i ferrimagnetyzmem, które doprowadziły do ważnych zastosowań w fizyce ciała stałego
1971	Dennis Gabor	1900-1979	za odkrycie zasad holografii
1972	John Bardeen Leon N. Cooper J. Robert Schrieffer	1908-1991	za odkrycie teorii nadprzewodnictwa
1973	Leo Esaki  Ivar Giaever  Brian D. Josephson	1930 1931 1925 1929 1940	
1974	Antony Hewish  Sir Martin Ryle	1924	za odkrycie tunelowania w półprzewodnikach za odkrycie tunelowania w nadprzewodnikach za teoretyczne przewidzenie własności przepływu prądu nadprzewodnictwa przez barierę za odkrycie pulsarów
1975	Aage Bohr Ben Mottelson James Rainwater	1918-1984 1922 1926 1917-1986	za pionierskie prace w dziedzinie radioastronomii za odkrycie związku między ruchem kolektywnym i ruchem jednocząstkowym i rozwinięcie teorii budowy jąder atomowych oparte na tym związku
1976	Burton Richter Samuel Chao Chung Ting	1931 1936	za ich (niezależne) odkrycie ważnej podstawowej cząstki elementarnej
1977	Philip Warren Anderson Nevill Francis Mott John Hasbrouck Van Vleck	1923 1905-1996 1899-1980	za fundamentalne badania teoretyczne struktury elektronowej układów magnetycznych i nieuporządkowanych
1978	Piotr Leonidowicz Kapica  Arno A. Penzias Robert W. Wilson	1894-1984 1933 1936	za odkrycia w fizyce niskich temperatur za odkrycie promieniowania reliktowego
1979	Sheldon L. Glashow Steven Weinberg Abdus Salam	1932 1933 1926-1996	za prace nad jednolitą teorią wzajemnego słabego i elektromagnetycznego oddziaływania cząstek elementarnych
1980	James Watson Cronin Val Logsdon Fitch	1931 1923	za odkrycie naruszania jednej z fundamentalnych zasad symetrii w rozpadach neutralnych mezonów $K$
1981	Nicolaas Bloembergen Arthur Leonard Schawlow Kai M. Siegbahn	1920 1921 1918	za ich wkład do rozwoju mikroskopii laserowej i elektronowej wysokiej rozdzielczości
1982	Kenneth Geddes Wilson	1936	za jego teorię zjawisk krytycznych w przejściach fazowych
1983	Subrahmanyan Chandrasekhar  William Alfred Fowler	1910-1995 1911-1997	za jego badania teoretyczne procesów fizycznych istotnych dla struktury i ewolucji gwiazd za jego badania teoretyczne i doświadczalne reakcji jądrowych ważnych dla powstania pierwiastków we Wszechświecie

1984	Carlo Rubbia Simon van der Meer	1934 1925	za ich decydujący wkład do wielkiego projektu prowadzącego do odkrycia cząstek W i Z
1985	Klaus von Klitzing	1943	za odkrycie kwantowego efektu Halla
1986	Ernest Ruska	1906-1988	za jego podstawowe prace z optyki elektronowej i projekt pierwszego mikroskopu elektronowego
	Gerd Binning Heinrich Rohrer	1947 1933	za ich projekt skaningowego mikroskopu tune-lowego
1987	Johannes Georg Bednorz Karl Alex Müller	1950 1927	za postęp w odkryciu nadprzewodnictwa materiałów ceramicznych
1988	Leon M. Lederman Melvin Schwartz Jack Steinberger	1922 1932 1921	za metodę wiązki neutrinoowej i przedstawienie dubletowej struktury leptonów poprzez odkrycie neutrina mionowego
1989	Norman Foster Ramsay	1915	za jego wynalezienie metody oscylacyjnych pól i ich użycie w maserach wodorowych i zegarach atomowych
	Hans Dehmelt Wolfgang Paul	1922 1913-1993	za rozwój techniki pułapek jonowych
1990	Jerome I. Friedman Henry W. Kendall Richard E. Taylor	1930 1926 1929	za ich pionierskie badania dotyczące głęboko nieelastycznego rozpraszań elektronów na protonach i związanych neutronach, co miało istotny wpływ na rozwój modelu kwarkowego w fizyce cząstek
1991	Pierre Gilles de Gennes	1932	za odkrycie, że metody rozwinięte przy badaniu zjawisk uporządkowania w prostych układach mogą być uogólnione do bardziej złożonych form materii, na przykład ciekłych kryształów i polimerów
1992	Georges Charpak	1924	za jego wynalezienie i rozwój detektorów cząstek a zwłaszcza wielodrużowej komowy proporcjonalnej
1993	Joseph H. Taylor Jr. Russell A. Hulse	1941 1950	za odkrycie nowego typu pulsarów, które otworzyło nowe możliwości badania grawitacji
1994	Bertram N. Brockhouse Clifford G. Shull	1918 1915	za pionierski wkład do rozwoju technik rozpraszań neutronów dla badań materii skondensowanej
1995	Martin L. Perl Frederick Reines	1927 1918	za pionierski wkład do fizyki leptonów
1996	David M. Lee Douglas D. Osheroof Robert C. Richardson	1931 1945 1937	za odkrycie nadciekłości helu
1997	Steven Chu Claude Cohen-Tannoudji William D. Phillips	1948 1933 1948	za rozwój metod chłodzenia i pułapkowania atomów laserem

# Odpowiedzi do zadań o parzystych numerach

## Rozdział 26

2. a) W odległości 14 cm od ładunku dodatniego i 24 cm od ujemnego. b) Dla ładunku dodatniego trwała, a dla ujemnego nietrwała, względem ruchu wzdłuż linii łączącej ładunki.

4. a)  $a\sqrt{2}$ . b) Prostopadły do linii łączącej rozważane ładunki i zwrócony na zewnątrz tej linii.

6. 12 cm.

8.  $-\frac{4}{9}q$ , w odległości  $l/3$  od  $q$ .

10. 4,2 mm/min, w chwili początkowej.

12. a) 3,0 N,  $-10^\circ$  od osi  $x$ . b)  $x = -8,3$  cm;  $y = +2,7$  cm.

14.  $1,1 \cdot 10^{18}$  N.

16. a)  $6,3 \cdot 10^{11}$ . b)  $7,3 \cdot 10^{-13}\%$ .

18.  $1,3 \cdot 10^7$  C.

20.  $q_1 = -4q_2$ .

22. 25 N, skierowana na zewnątrz trójkąta, wzdłuż dwusiecznej.

24.  $F_{\text{poz}} = 0,17$  N;  $F_{\text{pion}} = -0,046$  N.

26. a)  $l/3$ . b)  $\sqrt{3qQ/4\pi\epsilon_0}W$ .

28. a) 510 N. b)  $7,7 \cdot 10^{28}$  m/s<sup>2</sup>.

## Rozdział 27

2. a)  $5,6 \cdot 10^{-11}$  N/C, w dół. b)  $2,0 \cdot 10^{-7}$  N/C, do góry.

4. a)  $-(2,1 \cdot 10^{15}$  m/s<sup>2</sup>)j. b)  $(1,5 \cdot 10^5$  m/s)i  $-(2,8 \cdot 10^8$  m/s)j.

6. a)  $2\pi\sqrt{\frac{l}{g-qE/m}}$ . b)  $2\pi\sqrt{\frac{l}{g+qE/m}}$ .

10. b) Równowaga jest nietrwała.

12. Równoległy do linii łączącej  $+Q$  z  $-Q$ .

14. Większy ładunek wytwarza w miejscu, gdzie znajduje się mniejszy, pole o natężeniu  $13 \cdot 10^4$  N/C; mniejszy w miejscu, gdzie znajduje się większy, pole  $5,3 \cdot 10^4$  N/C. b)  $1,1 \cdot 10^{-2}$  N, odpychająca.

16. a) 8,6 cm na prawo od  $+2q$ .

18.  $1,0 \cdot 10^5$  N, skierowana do góry.

20. a)  $q/(8\pi\epsilon_0 d^2)$ , na lewo;  $3q/(\pi\epsilon_0 d^2)$ , na prawo;  $7q/(16\pi\epsilon_0 d^2)$ , na lewo.

22.  $Q/(\pi^2\epsilon_0 R^2)$ , pionowo w dół.

30.  $q/(8\pi\epsilon_0 a^2)$ , skierowane wzdłuż osi symetrii, na zewnątrz półkuli.

32.  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{r}{\sqrt{a^2+r^2}}\right)$ .

36. a) 7,1 cm. b)  $2,9 \cdot 10^{-8}$  s. c) 11%.

38. Uderzy w górną płytę, 2,7 cm od lewej krawędzi.

40.  $1,64 \cdot 10^{-19}$  C.

42.  $2\pi\sqrt{pE/I}$ .

### Rozdział 28

2.  $\pi a^2 E$ , znak zależny od wyboru zwrotu wersora normalnego.

4.  $1,1 \cdot 10^5$  N · m<sup>2</sup>/C.

6.  $2,8 \cdot 10^{12}$  N · m<sup>2</sup>/C.

8. Dla każdej z trzech powierzchni stykających się z ładunkiem,  $\Phi_E = 0$ ; dla każdej z pozostałych trzech powierzchni  $\Phi_E = q/(24\epsilon_0)$ .

10. a) 1,0 N · m<sup>2</sup>/C. b)  $9,3 \cdot 10^{-12}$  C.

12. a)  $-3,0 \cdot 10^{-6}$  C. b)  $+13 \cdot 10^{-6}$  C.

16. a) Zero. b)  $q_a/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ . c)  $(q_a + q_b)/4\pi\epsilon_0 r^2$ .

20.  $Q/(2\pi a^2)$ .

22. a)  $\lambda/(2\pi\epsilon_0 r)$ . b) Zero.

24. a)  $2,3 \cdot 10^6$  N/C, wzdłuż promienia, na zewnątrz. (b)  $4,5 \cdot 10^5$  N/C, wzdłuż promienia, do środka.

26.  $4,3 \cdot 10^{-17}$  J.

28. a)  $5,3 \cdot 10^7$  N/C. b)  $6,0 \cdot 10^3$  N/C.

30.  $4,9 \cdot 10^{-10}$  C.

32. a)  $\rho x/\epsilon_0$ ; x jest mierzone od płaszczyzny środkowej między płytami. b)  $\rho d/(2\epsilon_0)$ .

34.  $5,0 \cdot 10^{-9}$  C/m<sup>2</sup>.

36. a)  $2,6 \cdot 10^{-6}$ . b)  $8,1 \cdot 10^{-14}$ .

### Rozdział 29

2. Tak; żeby doprowadzić ładunek próbny z nieskończoności do środka kuli trzeba wykonać pracę.

4. a)  $2,6 \cdot 10^5$  V. b) 0,75 C.

6. 1000 V.

8. a) 4,5 m. b) Nie.

10. a) Pomiędzy ładunkami w odległości 25 cm od  $+q$ , oraz na zewnątrz ładunków, z lewej strony, w odległości 50 cm od  $+q$ . b) Na zewnątrz ładunków, z lewej strony, 140 cm od  $+q$ .

12. a)  $\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{d}{a(a+d)}$ . b) Tak.

14.  $1,9 \cdot 10^{-29}$  C · m; wartość tablicowa ( $0,61 \cdot 10^{-29}$  C · m) jest poprawna; Przyjęte w zadaniu założenie, że elektryny krążą symetrycznie, nie jest realistyczne.

16. a)  $-6,8 \cdot 10^5$  V. b)  $-1,9$  J.

18.  $2,5 \cdot 10^3$  m/s.

20. a)  $V_B = -7,8 \cdot 10^5$  V;  $V_A = +0,6 \cdot 10^5$  V. b) 2,5 J. c) Praca jest zamieniona na energię potencjalną.

22. 2,1 dnia.

24. a) +27 V. b)  $-27$  eV. c) 13,6 eV. d) 13,6 eV.

26. Jedna z możliwości: ładunki  $+2q$ ,  $+2q$ ,  $-q$  w wierzchołkach trójkąta równobocznego. Istnieje nieskończona ilość możliwości.

28. a, b),  $-6,0$  V/m; b, c),  $0,0$  V/m; c, e),  $3,0$  V/m; e, f),  $15,0$  V/m; f, g),  $0,0$  V/m; g, h),  $-3,0$  V/m.

30.  $4,6 \cdot 10^{21}$  V/m.

32. a)  $\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p\cos\theta}{r^3}$ . b)  $90^\circ$ .

34. a)  $\frac{k}{4\pi\epsilon_0} (\sqrt{L^2+y^2} - y)$ . b)  $-\frac{k}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{y}{\sqrt{L^2+y^2}} - 1 \right)$ . c)  $V$  był obliczony jako funkcja wyłącznie zmiennej  $y$ .

36. a)  $1,2 \cdot 10^4$  V/m. b)  $1,8 \cdot 10^4$  V. c) 60 cm.

38. a)  $-0,12$  V. b)  $1,8 \cdot 10^{-8}$  N/C, radialnie do wewnętrz.

40.  $E_1/E_2 = R_2/R_1$ .

42.  $\sqrt{2 \text{ eV/m}}$ .

44.  $r < R_1$ :  $E = 0$ ,  $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2} \right)$ .  $R_1 < r < R_2$ :  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2}$ ,  $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{R_2} \right)$ .  
 $r > R_2$ :  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{r^2}$ ,  $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{r}$ .

46. a) -180 V. b) +2900 V; -9000 V.

48. a)  $1,0 \cdot 10^{-8}$  C, od mniejszej kuli do większej, b) Mniejsza kula:  $2,0 \cdot 10^{-8}$  C, 3000 V; większa kula:  $4,0 \cdot 10^{-8}$  C, 3000 V.

50. a) 0,54 mm. b) 790 V.

52. a)  $3,2 \cdot 10^{-13}$  J lub  $2 \cdot 10^6$  eV. b)  $1,6 \cdot 10^{-13}$  J lub  $1 \cdot 10^6$  eV. c) Proton.

54. a)  $r > 9,0$  cm. b) 2,7 kW. c)  $2,0 \cdot 10^{-5}$  C/m<sup>2</sup>.

### Rozdział 30

2. a)  $q_2 = q_8 = 4,8 \cdot 10^{-4}$  C;  $V_2 = 240$  V;  $V_8 = 60$  V. b)  $q_2 = 1,9 \cdot 10^{-4}$  C;  $q_8 = 7,7 \cdot 10^{-4}$  C;  $V_2 = V_8 = 96$  V. c)  $q_2 = q_8 = 0$ ;  $V_2 = V_8 = 0$ .

4.  $1,8 \cdot 10^{-8}$  C.

8. a)  $q_4 = 8,0 \cdot 10^{-4}$  C;  $q_6 = 1,2 \cdot 10^{-3}$  C. b) 200 V.

10. 7,3  $\mu\text{F}$ .

12. a)  $+7,9 \cdot 10^{-4}$  C. b) +79 V.

14.  $q_1 = \frac{C_1 C_2 + C_1 C_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} C_1 V_0$ ;  $q_2 = q_3 = \frac{C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} C_1 V_0$ .

16. a) Pojemność nie zależy od podziału. b)  $\frac{1}{2}A$  na każdy.

18. 4,0  $\mu\text{F}$ .

20. a) Pięć szeregowo. b) Trzy układy z punktu (a) połączone równolegle. Istnieją również inne możliwości.

22. b) Tak.

24. a)  $Q_a = \frac{a}{a+b} Q$ ;  $Q_b = \frac{b}{a+b} Q$ .

26. a)  $3,5 \cdot 10^{-11}$  F. b)  $2,1 \cdot 10^{-8}$  C. c)  $6,3 \cdot 10^{-6}$  J. d)  $6,0 \cdot 10^5$  V/m. e)  $1,6 \text{ J/m}^3$ .

28. 0,27 J.

30. a)  $1,3 \cdot 10^{-7}$  J. b) Nie.

32. a)  $U_2 = 5,8 \cdot 10^{-2}$  J;  $U_8 = 1,4 \cdot 10^{-2}$  J, b)  $U_2 = 9,2 \cdot 10^{-3}$  J;  $U_8 = 37 \cdot 10^{-3}$  J, c)  $U_2 = U_8 = 0$ .

34. a)  $\frac{1}{2}CV^2$ , b)  $-\frac{1}{4}CV^2$ .

36. a) Wzrośnie cztery razy. b) Nie zmieni się.

40.  $7,1 \cdot 10^{-6}$  C.

44.  $C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \left( \frac{k_1}{2} + \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3} \right)$ .

46. a)  $1,0 \cdot 10^4$  V/m. b)  $5,0 \cdot 10^{-9}$  C. c)  $4,1 \cdot 10^{-9}$  C.

48. a)  $8,9 \cdot 10^{-10}$  C (przed);  $1,6 \cdot 10^{-9}$  C (po), b)  $1,0 \cdot 10^4$  V/m (przed);  $1,8 \cdot 10^4$  V/m (po), c)  $2,5 \times 10^3$  V/m, d) 8,9 pF (przed); 16 pF (po).

50. a) 88%. b) 12%.

52.  $u = \frac{1}{\kappa} u_0$ .

### Rozdział 31

2. 0,67 A, w kierunku ujemnej elektrody.

4. a) 6,4 A/m<sup>2</sup>. b) Nie, ponieważ nie podano grubości wiązki.

6.  $6,7 \cdot 10^{-6}$  C/m<sup>2</sup>.

8.  $5,6 \cdot 10^{-3}$  s.

10. a)  $1,1 \cdot 10^{-3}$   $\Omega$ . b) 4,4 mm.

12. 54  $\Omega$ .

14. a)  $2,2 \cdot 10^{-7}$   $\Omega$ . b) Nikiel ( $\rho = 6,8 \cdot 10^{-8}$   $\Omega \cdot \text{m}$ ).

16. 3d.  
 18. 0,29 cm.  
 20. a)  $\rho_A = 0,10 \Omega \cdot \text{m}$ ;  $\rho_B = 0,050 \Omega \cdot \text{m}$ . b)  $E_A = 1,0 \text{ V/m}$ ;  $E_B = 0,050 \text{ V/m}$ . c)  $j_A = j_B = 10 \text{ A/m}^2$ .  
 d)  $V_A = 40 \text{ V}$ ;  $V_B = 20 \text{ V}$ .  
 22. a) 260°C. b) Tak.  
 24. a) 0,39% dla  $R$ ; 0,0017% dla  $l$ ; 0,0034% dla  $A$ . b) Zmiany wymiarów geometrycznych są bardzo małe.  
 28. 11  $\Omega$ .  
 30. a) 1,6 A. b)  $1,9 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$ . c)  $3,3 \cdot 10^{-2} \text{ V/m}$ . d) 1,6 W.  
 32. a)  $9,4 \cdot 10^{13} \text{ deuterony/s}$ . b) 240 W.  
 34. a) 8,6%. b) Mniejsza.  
 36. 620 W.  
 38. a)  $2,9 \cdot 10^{-2}$ . b) 10.

### Rozdział 32

2. 14 h.  
 4. a) 1,0 A. b) 1,0 V.  
 6. a) 80 J. b) 67 J. c) 13 J wydziela się w baterii w formie ciepła.  
 8. a) 990. b)  $9,4 \cdot 10^{-4} \text{ W}$ .  
 10. Dziewięć.  
 12. -0,6%.  
 14.  $r_1 - r_2$ .  
 16. a)  $\frac{1}{2}r$ . b)  $\epsilon^2/(2r)$ .  
 18. 38  $\Omega$  albo 260  $\Omega$ .  
 20. a)  $i_{Cu} = 1,14 \text{ A}$ ;  $i_{Al} = 0,86 \text{ A}$ . b) 130 m.  
 22. 400, 250, 133, 100, 75, 60, 40, 25 W.  
 24. a)  $i = 2\mathcal{E}/(2r+R)$ , szeregowie;  $i = 2\mathcal{E}/(r+2R)$ , równolegle. b) Szeregowe, gdy  $R > r$ ; równolegle, gdy  $R < r$ .  
 26. a) 10  $\Omega$ . b) 14  $\Omega$ . c) 10  $\Omega$ ; zauważmy, że obwody (a) i (b) są identyczne.  
 28.  $\mathcal{E}/7R$ .  
 34. a) 0,45 A.  
 36.  $R_1 = R_2 = 85$ .  
 40. 2,7%.  
 42.  $1,4 \cdot 10^{-10} \text{ F}$ .  
 44. a) 0,010 V b) 2,2 s.  
 46. a)  $1,0 \cdot 10^{-3} \text{ C}$ . b)  $1,0 \cdot 10^{-3} \text{ A}$ . c)  $V_C = 10^3 e^{-t}$ ,  $V_R = -10^3 e^{-t}$  (w voltach i sekundach). d)  $P_J = e^{-2t}$  (w watach i sekundach).

### Rozdział 33

2. a) Na wschód. b)  $6,3 \cdot 10^{14} \text{ m/s}^2$ . c) 3,0 mm.  
 6.  $v = Bitd/m$ , w kierunku od generatora.  
 8.  $(-2,5\mathbf{j} + 0,75\mathbf{k}) \cdot 10^{-3} \text{ N}$ .  
 10.  $\mathbf{B} = 2,3 \mathbf{k}$ , w T.  
 12. 3,8 C.  
 14.  $2\pi a B \sin \theta$ ; F skierowana do góry.  
 16. 2,5 A.  
 18. a)  $0,014 (-\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{5}{9}\mathbf{k})$ , w  $\text{N} \cdot \text{m}$ . b)  $6,0 \cdot 10^{-4} \text{ J}$ .  
 22. a) 0,067 cm/s. b)  $2,8 \cdot 10^{23}/\text{cm}^3$ .  
 24. b) 90°. c) 0,0066.  
 26.  $R_d = \sqrt{2} R_p$ ;  $R_\alpha = R_p$ .  
 28. a) 1,0 MeV. b) 0,50 MeV.  
 30. a)  $2,99980 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ; zauważmy, że problem jest skrajnie relatywistyczny. Należy posługiwać się masą relatywistyczną (równ. 8-20) w równ. (33-15).  
 32. a)  $2,6 \cdot 10^7 \text{ m/s}$ , b)  $1,1 \cdot 10^{-7} \text{ s}$ , c) 14 MeV, d)  $7,0 \cdot 10^6 \text{ V}$ .

34. 1,7 cm.  
 38. b)  $3,6 \cdot 10^{-10}$  s. c) 0,17 mm. d) 1,5 mm.  
 40. a) Wzrasta. b) Maleje.  
 42. a) 2,8 MHz. b) 0,34 m.  
 44. a) 8,5 MeV. b) 0,80 T. c) 34 MeV. d) 24 MHz. e) 34 MeV; 1,6 T; 34 MeV; 12 MHz.  
 46. a)  $1,8 \cdot 10^7$  Hz. b) 17 MeV.  
 48. a) 3,8 km/s.  
 50. a)  $1,7 \cdot 10^{-4}$  T, poziomo, na lewo gdy patrzy się w kierunku v.

### Rozdział 34

4. Tak.

6. a)  $3,2 \cdot 10^{-16}$  N, równolegle do prądu. b)  $3,2 \cdot 10^{-16}$  N, radialnie na zewnątrz, jeśli v jest równolegle do prądu. c) Zero.

8.  $8,0 \cdot 10^{-5}$  T; do góry.

10. b) Na prawo.

12. a)  $4,0 \cdot 10^{-4}$  T, na lewo. b)  $4,0 \cdot 10^{-4}$  T, do góry.

14.  $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left( \frac{b}{R^2 - a^2} \right)$ , pole jednorodne [prostopadłe do płaszczyzny zawierającej osie cylindrów (przyp. tłum.)].

16.  $F_x = -6,0 \cdot 10^{-4}$  N/m;  $F_y = +2,0 \cdot 10^{-4}$  N/m.

18.  $\frac{\mu_0 i^2}{4\pi a} 3\sqrt{2}$ , skierowane ku środkowi kwadratu.

20. a)  $3,0 \cdot 10^{-4}$  T. b)  $1,4 \cdot 10^{-6}$  Wb.

22. a)  $4,6 \cdot 10^{-4}$  T. b)  $1,2 \cdot 10^{-6}$  Wb.

26. a)  $13 \cdot 10^{-6}$  Wb/m. b) 22%. c) Zero.

28.  $B = \frac{\mu_0 i}{4} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$ , w kierunku kartki.

30. a) Zero. b)  $\mu_0 i / 4R$ , w kierunku kartki. c) Taka sama jak w (b).

32. a)  $9,4 \cdot 10^{-5}$  T. b)  $1,5 \cdot 10^{-6}$  N · m.

34. a)  $\frac{\mu_0 i}{2R} \left( 1 + \frac{1}{\pi} \right)$ , na zewnątrz kartki. b)  $\frac{\mu_0 i}{2\pi R} \sqrt{1+\pi^2}$ ; B jest skierowane na zewnątrz kartki

i tworzy z nią kąt  $18^\circ$ .

38. Drut będzie usiłował utworzyć pętlę kołową.

42. b)  $B = 2\mu_0 i / \pi d$ . Tak, taki jak dla dwóch równoległych przewodów.

44.  $1,95 \cdot 10^{-4}$  T, w kierunku kartki.

46. a)  $B_S = B_P = 0$ ;  $B_Q = B_R = \mu_0 i \sqrt{2} / (8\pi L)$ , w kierunku kartki. b)  $B_T = \mu_0 i \sqrt{2} / (8\pi a)$  w kierunku kartki.

### Rozdział 35

2.  $3,8 \cdot 10^{-6}$  W.

4. b)  $3,6 \cdot 10^{-2}$  A.

6. b)  $NA = (5/2\pi)$  zwoje · m<sup>2</sup>.

8.  $3,0 \cdot 10^{-4}$  V.

10.  $\pi^2 R^2 \nu B$ ;  $\nu$ ;  $\pi^2 R^2 \nu B / R_M$ ;  $\nu$ .

18. a)  $3,1 \cdot 10^{-2}$  V. b) Od lewej strony na prawo.

20. a) 4,0 V, przeciwne do ruchu wskazówek zegara. b) 5,0 N. c) 40 W, w obu wypadkach.

22. c) Prąd indukowany zmieni kierunek, natomiast ruch drutu będzie taki jak przedtem.

24. a) 3,2 T/s. b)  $1,0 \cdot 10^{-3}$  W.

28. a)  $\Phi_B = B\pi R^2 = \mu_0 \pi i r^2 R^2 / (2x^3)$ . b)  $\mathcal{E} = 3\mu_0 \pi i r^2 \nu / (2N^4 R^2)$ . c) Taki sam jak i.

30. a)  $4,4 \cdot 10^7$  m/s<sup>2</sup>, na prawo. b) Zero. c)  $4,4 \cdot 10^7$  m/s<sup>2</sup>, na lewo.

34. a) 0,004 rad.

### Rozdział 36

2. a) metr. b) weber. c) wat. d) kulomb. e) om.

4.  $2,5 \cdot 10^{-4}$  H/m.

10.  $\frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ .
12. 12 s.
14. 27 A/s.
16. 2,3 s.
18. 46  $\Omega$ .
20. a)  $i_1 = i_2 = 3,3$  A. b)  $i_1 = 4,5$  A;  $i_2 = 2,8$  A. c)  $i_1 = 0$ ;  $i_2 = 1,8$  A. d)  $i_1 = i_2 = 0$ .
24. a) 240 W. b) 150 W. c) 390 W.
30. 0,63 J/m<sup>3</sup>.
32. a)  $1,0 \cdot 10^{-3}$  J/m<sup>3</sup>. b)  $8,4 \cdot 10^{15}$  J.
34.  $1,5 \cdot 10^8$  V/m.

#### Rozdział 37

6.  $\frac{1}{2}q\omega r^2$ , w kierunku  $\omega$ .
10. a)  $6 \cdot 10^8$  A. b) Tak. c) Nie.
12. 0,48 K.
16. a)  $7,6$  A · m<sup>2</sup>. b)  $11$  N · m.
18. a) 1,8 T. b)  $6,5 \cdot 10^{-23}$  J.
22. 29 A.

#### Rozdział 38

2. 0,12 A.
4. a)  $3,0 \cdot 10^{-9}$  C = 3,0 nC. b) 1,7 mA. c)  $4,5 \cdot 10^{-9}$  J = 4,5 nJ.
6. a)  $\frac{1}{2}q_m$ . b)  $0,87i_m$ .
8. a) 600, 710, 1100, 1300 Hz. b) Nie.
10.  $1,3 \cdot 10^{-13}$  s.
12. a) 6:1. b) 36 pF; 0,22 mH.
14. a) 40 F. b) Nie:  $C$  jest grubo za duże.
16. 2,8  $\Omega$ .
18.  $(L/R)\ln 2$ .

#### Rozdział 39

2. a) 0,015 A. b) 0,15 A.
4. a)  $8,8 \cdot 10^3$  Hz. b)  $5,6 \cdot 10^4$  rad/s. c) 25 A.
8.  $\frac{1}{2}$ .
10. Wartość średnia =  $(2/\pi)\mathcal{E}_m = (2\sqrt{2}/\pi)\mathcal{E}_{\text{sr,kw}}$ .
12. a) 224 rad/s. b) 207, 241 rad/s.
16. a)  $\cos\varphi$ . b) Pojemnościowy. c) Opóźnia się. d) (4500 W) $\cos\varphi$ . e) Moc jest uśredniana w czasie drogi. f) Trzeba dodać element indukcyjny. g)  $\varphi = 0$ ;  $P_{\text{sr}} = 4500$  W.
18. a)  $\mathcal{E}_m/\sqrt{2}$ ;  $\mathcal{E}_m/2$ ;  $\mathcal{E}_m/\sqrt{2}$ , dla kolejnych rysункów, licząc od góry. b)  $\mathcal{E}_m^2/2R$ ;  $\mathcal{E}_m^2/4R$ ;  $\mathcal{E}_m^2/2R$ .
20. 120 Hz.
26. a) 2,4 V. b)  $3,2 \cdot 10^{-3}$  A; 0,16 A.

#### Rozdział 40

2. Wywołując zmianę napięcia z szybkością  $10^6$  V/s.
4. a) 5,5 mA.
8. a)  $8,9 \cdot 10^{-6}$  A. b)  $1,0 \cdot 10^6$  V · m/s. c) 2,0 mm. d)  $5,6 \cdot 10^{-6}$  T.
10. a)  $6,3 \cdot 10^{-7}$  T. b)  $2,3 \cdot 10^{12}$  V/(m · s).
14.  $\epsilon_0 \oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int \rho dV$ ;  $\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$ ;  $\oint \mathbf{B} dl = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} d\mathbf{S} + \mu_0 \int j d\mathbf{S}$ ;  $\oint \mathbf{E} dl = - \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} d\mathbf{S}$ .
18. a)  $1,4 \cdot 10^{14}$  V/(m · s). b)  $1,0 \cdot 10^{-5}$  T.

#### Rozdział 41

2.  $4,6 \cdot 10^{-10}$ .
4.  $I_m/I_\alpha = 6,2 \cdot 10^{14}$ .

8. a) 5,7 cm. b)  $9,0 \cdot 10^8$  m/s ( $= 3c$ ).  
 10. Dla  $\lambda = \sqrt{3}a$ .  
 12. a)  $4,3 \cdot 10^{-4}$  s. b) 8,3 min. c) 380 lat.  
 14. a) Przeciwny do kierunku osi  $y$ . b)  $E_z = -cB\sin(ky + \omega t)$ .  
 16. b) Takie samo jak w punkcie a, z  $B$  podstawionym zamiast  $E$ .  
 20. 10 kV/m; 3,4 T.  
 26. a)  $E = \frac{\mathcal{E}}{r \ln(b/a)}$ ;  $B = \mu_0 \mathcal{E} / 2\pi R r$ . b)  $S = \frac{\mathcal{E}^2}{2\pi R r \ln(b/a)}$ .  
 28. a)  $a^2 EB / \mu_0$ , dla ścian równoległych do płaszczyzny  $x, y$ ; zero, dla pozostałych. b) Zero.

#### Rozdział 42

2.  $F_{\text{prom}} = 6,0 \cdot 10^8$  N;  $F_{\text{grav}} = 3,6 \cdot 10^{22}$  N.  
 8. b) Około  $6 \cdot 10^{-7}$  m, porównywalna z długością fali światła widzialnego. c) Nie.  
 10. 1,9 mm/s.  
 12. a)  $1,0 \cdot 10^8$  Hz. b)  $1,0 \cdot 10^{-6}$  T. c)  $2,1 \text{ m}^{-1}$ ;  $6,3 \cdot 10^{-8}$  rad/s. d)  $120 \text{ W/m}^2$ . e)  $4,0 \cdot 10^{-7}$  Pa.  
 16. Pomiar z 1926 roku.  
 18. a) Powinien stale rosnąć. b) Trzeba zmierzyć sumaryczne odchylenie pomiędzy kolejnymi obserwowanymi okresami, a okresem mierzonym w położeniu  $x$ .  
 22. b)  $4,54 \text{ Hz/(km/h)}$ .

#### Rozdział 43

4.  $2,1 \cdot 10^8$  m/s.  
 6. a) 3 km/s. b) O rzad wielkości lepszą.  
 16. a)  $49^\circ$ . b)  $28^\circ$ .  
 18. a)  $\sqrt{1 + \sin^2 \theta_1}$ . b)  $\sqrt{2}$ .  
 20. 180 cm.  
 22. b) 0,17.  
 24. a) Tak;  $43^\circ$ . b) Nie.  
 28. a)  $2,4 \cdot 10^{-4}$  cm. b) 4000 A. c)  $\frac{4}{3}\pi$  rad.

#### Rozdział 44

2.  $\sqrt{(2D-1)^2 + 25}$ , w metrach, gdzie  $D$  jest odlegością od obiektywu do zwierciadła.  
 4. Trzy.  
 6. Sześć.  
 12. Dla co drugiej pionowej kolumny; b) płaskie,  $\infty$ ,  $\infty$ ,  $-10$ , tak; d) wklęsłe,  $+20$ ,  $+40$ ,  $+30$ , tak, nie; f) wypukłe,  $-$ ,  $-40$ ,  $-18$ ,  $+180$ , nie, tak; h) wklęsłe,  $+8$ ,  $+16$ ,  $+12$ ,  $-$ , tak.  
 18. 2,25 m.  
 19. Dla co drugiej kolumny: b)  $-32,5$ , nie; d) możliwe jest dowolne  $n_2$ , przedmiot w środku krzywizny, nie; f)  $+10$ , nie; h)  $1,1$ , tak.  
 20. 4,2 cm.  
 22.  $f_1 = \frac{1}{n-1}r$ ;  $f_2 = \frac{n}{n-1}r$ .  
 24. 4,5 cm; 9,0 cm.  
 26. a) oraz c) są skupiające; b) oraz d) są rozpraszające.  
 30. Dla co drugiej kolumny (symbol  $\times$  oznacza, że tej wielkości nie można wyznaczyć na podstawie zamieszczonych danych): b) skupiająca,  $\times$ ,  $\times$ ,  $-10$ ,  $\times$ ,  $+2$ , nie, tak; d) rozpraszająca,  $-$ ,  $\times$ ,  $\times$ ,  $-3,3$ ,  $\times$ , nie, tak; f) rozpraszająca,  $-30$ ,  $-7,5$ ,  $+0,75$ , nie, tak; h) rozpraszająca,  $-10$ ,  $\times$ ,  $\times$ ,  $-5$ ,  $\times$ ,  $+$ , nie.  
 32. Prosty, urojony, 30 cm na lewo od drugiej soczewki.  
 36. a) Położenie ostatecznego obrazu pokrywa się z położeniem przedmiotu. Obraz ten jest rzeczywisty i odwrócony, a powiększenie  $m = -1,0$ .  
 38. b) Nie. c) Promień przechodzący przez układ bez zmiany kierunku.  
 40. a) Leży w tym samym miejscu co pierwotny przedmiot i jest powiększony 5,0 razy. c) Urojony i odwrócony.

44. a) 2,35 cm. b) Mniejszy.

46. a) 5,3 cm. b) 3,0 mm.

#### Rozdział 45

2. 0,072 mm.

4. a)  $0,57^\circ$ . b) 5,0 mm.

6. 3,0 mm.

8. 23 Hz.

10. 8,0  $\mu\text{m}$ .

18. a) 1,2; 3,0; 7,5 m. b) Nie.

20.  $y = 27\sin(\omega t + 8,5^\circ)$ .

22. Warstwa musi mieć grubość  $120 (2m+1)$ , licząc w nm, gdzie  $m$  jest dodatnią liczbą całkowitą.

24. 340 nm.

28. 338 nm.

30. a) 552 nm. b) 736 nm.

32. 141.

34. 1,21.

38. 588 nm.

40. b) 0,58 mm.

42.  $I = I_m \cos^2(2\pi x/\lambda)$ .

#### Rozdział 46

2. 2,5 mm.

4.  $a/\lambda = 1$ .

6. a) 1,03 mm. b) 2,06 mm.

8. a)  $\lambda_a = 2\lambda_b$ . b) Koincydencje zdarzają się, gdy  $m_b = 2m_a$ .

10. b)  $\alpha = 257^\circ$ , itd. c)  $m = 0,93$ , itd.

14. 22 m.

16. a)  $0,16''$ . b)  $7,4 \cdot 10^7$  km. c)  $2,2 \cdot 10^{-4}$  mm.

18. 51 m.

20. 0,58 m.

22. b) 0,07 mm. c) W odległości trzech średnic księżycowych; gdy krople wody mają różne rozmiary, powstaje kilka pierścieni o różnych kolorach, dając w efekcie wrażenie bieli. d) Te zjawiska, typu halo, są pochodzenia dyfrakcyjnego, podczas gdy tęcza tworzy się w wyniku załamania.

24. Trzy.

28. a) Będzie tak, gdy  $d = 4a$ . b) Każdy co czwarty prążek jest opuszczony.

#### Rozdział 47

8. b) W połowie odległości między głównymi maksimami.

12.  $0^\circ$ ;  $\pm 10^\circ$ ;  $\pm 21^\circ$ ;  $\pm 32^\circ$ ;  $\pm 45^\circ$ ;  $\pm 62^\circ$ .

14. a) 635 nm; 508 nm; 423 nm. b) Pomarańczowy; niebiesko-zielony; fioletowy.

16. Trzy.

18. a) 6000 nm. b) 1500 nm. c)  $m = 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9$ ; dziesiąty rzząd ugęcia występuje dla  $\theta = 90^\circ$ .

20. a) 2400 nm. b) 800 nm. c)  $m = 0, 1, 2$  ( $m = 4$  jest dla  $\theta = 90^\circ$ ).

22. Natężenie byłoby skoncentrowane w obszarze dwudziestego rzędu dla koloru niebieskiego, a w obszarze jedenastego rzędu dla czerwonego. Różne rzędy nakładałyby się tak, że widmo wydawałoby się prawie białe.

24. 520 do 620 nm.

26.  $\sqrt{\frac{1}{6000} + \frac{1}{4}\gamma^2}$ .

28. a)  $0,032^\circ/\text{nm}$ ;  $0,076^\circ/\text{nm}$ ;  $0,241^\circ/\text{nm}$ . b) 40 000; 80 000; 120 000.

30. a)  $1,0 \cdot 10^4$  nm. b) 3,3 mm.

32. Szerokość kątowa =  $(2\tg\theta)/R$ .

34.  $6,8^\circ$ .

36. 0,168 nm.

38. Tak;  $m = 3$  dla  $\lambda = 0,124$  nm;  $m = 4$  dla  $\lambda = 0,097$  nm.

### Rozdział 48

2. a)  $55^\circ$ ;  $125^\circ$ . b)  $35^\circ$ ;  $145^\circ$ .  
4.  $27/128$ .  
8. a)  $53^\circ$ . b) Tak.  
10.  $1,19 \cdot 10^{-3}$  cm.  
14. a) Skręca płaszczyznę polaryzacji o  $90^\circ$ . b) Zmienia skrętność polaryzacji kołowej. c) Światło pozostaje niespolaryzowane.  
16. a) Płytką polaryzującą. b)  $45^\circ$ .  
18. a)  $2,7 \cdot 10^{-14}$  kg · m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>. b) 2,1 h.

### Rozdział 49

2. 331 W.  
4. b) 277 K.  
6. 1,5 W.  
10. a) 58,6 W. b) 21%.  
14. a) 88 m. b)  $2,0 \cdot 10^4$ .  
16. a)  $1,2 \cdot 10^{20}$  Hz. b) 0,025 Å. c)  $2,7 \cdot 10^{-22}$  J · s/m.  
18. Bar i lit.  
20.  $1,8 \cdot 10^{-18}$  J.  
22. a) 2,0 eV. b) Zero. c) 2,0 V. d) 3000 Å.  
26. 0,68 MeV.  
28. a)  $7,4^\circ$ . b) 0,62 eV.  
32.  $-80,7$  keV.  
34.  $n = 2$  do  $n = 1$ .  
36. a) 6560 Å; 4860 Å; 4340 Å; b) 6560 Å do 3650 Å.  
38. b)  $n^2$ . c)  $n$ . d)  $1/n$ . e)  $1/n^3$ . f)  $1/n$ . g)  $1/n^4$ . h)  $1/n^4$ . i)  $1/n^2$ . j)  $1/n^2$ . k)  $1/n^2$ .  
40. a) 12,7 eV. b) 12,7 eV (4 do 1); 2,55 eV (4 do 2); 0,66 eV (4 do 3); 12,1 eV (3 do 1); 1,89 eV (3 do 2); 10,2 eV (2 do 1). c) 4,1 m/s.  
44. Odpowiednie długości fal dla helu są czterokrotnie mniejsze niż dla wodoru.  
46. a)  $2,6 \cdot 10^{-13}$  m. b) 2800 eV. c) 4,4 Å.  
48.  $1,2 \cdot 10^{29}$  m ( $1,3 \cdot 10^{13}$  lat świetlnych, to jest około 1300 razy więcej niż rozmiary dostrzegalnego Wszechświata).

50.  $n = 3 \cdot 10^{74}$ .

### Rozdział 50

2. a)  $4,0 \cdot 10^6$  m/s. b)  $8,2 \cdot 10^4$  V.  
4. 0,18 nm.  
6.  $2,5 \cdot 10^{-17}$  m; promienie jąder są rzędu  $7 \cdot 10^{-15}$  m.  
8.  $3,9 \cdot 10^4$  V.  
10. a) Dla takiego napięcia przyspieszającego i dla tych płaszczyzn wyższe rzędy nie mogą wystąpić.  
b)  $59^\circ$ ; żeby spełnić warunek Bragga dla tej nowej długości fali, należy obrócić kryształ względem padającej wiązki.  
14. Tak.  
16. a) 1900 MeV. b) Nie.  
18. a) 0,20. b) 0,40. c) 0,33. d) 0,33.  
20. 0,32.  
22.  $1,3 \cdot 10^{-23}$  kg · m/s.  
24. Energia kinetyczna i pęd nie są bezpośrednio powiązane poprzez zasadę nieoznaczoneści.

# *Skorowidz nazwisk*

(przygotował *Włodzimierz Zuzga*)

- Airy G. 523  
Alfvén H. 641  
Allen A. J. 195  
Alvarez L. W. 640  
Ampère A. 209, 217, 360, 364  
Anderson C. D. 639  
Anderson P. W. 406, 641  
Andrade E. N. 64  
Appleton E. V. 639  
Arago D. F. 561, 562  
Arrington W. 548  
Ashkin A. 399  
Aslakson C. 406
- Babinet J. 532  
Bacon F. 485  
Balmer J. 607, 609  
Banas C. M. 488  
Bardeen J. 641  
Barkla C. G. 581, 638  
Barthold L. O. 349  
Basow N. G. 640  
Baumeister P. 497  
Becquerel A. H. 637  
Bergstrand A. 406  
Beth R. 579  
Bethe H. A. 640  
Biot J. 223 i n.  
Blackett P. M. S. 639  
Blackwood 618  
Blaymey 406  
Bloch F. 302, 639  
Bloembergen N. 305
- Bohr A. 641  
Bohr N. 206, 227, 602 i n., 626, 638  
Bol W. H. 405, 406  
Boltzmann L. 362, 588  
Bork A. M. 362  
Born M. 622, 639  
Bothe W. 639  
Botley C. M. 199  
Boyle W. S. 429, 488  
Bradley J. 404, 406, 416  
Bragg W. L. 552, 597, 617, 638  
Branscomb L. M. 414  
Braun C. F. 637  
Breinan E. N. 488  
Brewster D. 568, 582  
Bridgman P. W. 639  
Bright A. W. 10  
Brocklebank R. W. 398  
de Broglie L. 615 i n., 638  
Bullock T. H. 152
- Carleton W. P. 467  
Carragan G. H. 529  
Cavendish H. 12, 59, 108  
Chadwick J. 638  
Chalmers B. 152  
Chamberlain O. 640  
Coblentz H. 590  
Cockcroft D. J. 639  
Collins R. J. 488  
Compton A. H. 596 i n., 638  
Cook J. S. 429  
Cooper L. N. 641

- Cornu M. 406  
 Coulomb C. A. 12, 13, 59 i n.  
 Cowley J. M. 627  
 Cox A. 291  
 Crewe A. V. 627  
 Cronin J. W. 641  
 Curie P. 284, 298, 637  
 Curry S. M. 532  
 Cuvaj C. 113  
 Cerenkov P. A. 640  
  
 Dalén N. G. 637  
 Dalrymple G. B. 291  
 Danielson 406  
 Darsey 406  
 Davies R. D. 373  
 Davisson C. J. 616, 627, 639  
 Day P. A. 406  
 Debye P. W. 555, 597, 618  
 Dicke R. 375  
 Dirac P. A. M. 638  
 Doel R. R. 291  
 Donati O. 617  
 Doppler J. 374, 410, 414  
 Douglas J. H. 429  
 Driscoll 185  
  
 Edison T. 349  
 Edwards S. J. 413  
 Einstein A. 255, 264, 389, 408, 414, 502, 511, 592,  
     594, 609, 637, 641  
 Elsasser 616  
 Elżbieta I, królowa bryt. 289  
 Enge H. 197  
 Esaki L. 641  
 Essen 405–407  
 Euklides 420  
 Evenson 405–406  
 Everhart T. E. 627  
  
 Fano L. 556, 618  
 Fano U. 556, 618  
 Faraday M. 9, 28, 58, 106, 113, 114, 215, 216,  
     237 i n., 267, 295, 364, 399, 405, 420, 495, 511,  
     531, 568, 631  
 Fermat P. 432 i n., 573  
 Fermi E. 639  
 Feynman R. P. 640  
 Fitch V. L. 641  
 Fizeau H. L. 404, 406, 414  
 Florman 406  
 Foner S. 140  
 Foucault J. 405, 406, 428, 434  
  
 Fowler C. M. 181, 299  
 Franck J. 638  
 Frank I. M. 640  
 Franklin B. 11, 16, 58, 59  
 Fraser A. B. 434  
 Fraunhofer J. 512 i n., 543  
 Fresnel J. A. 511 i n., 531  
 Froome 406  
  
 Gabor D. 530, 641  
 Galileusz 372, 403, 405, 406, 414  
 Gamow G. 608, 624, 626  
 Gauss K. 49 i n., 54, 289, 476  
 Geiger H. 64, 602  
 Gell-Mann M. 641  
 George S. 530  
 Germer L. H. 616, 627  
 Giaever I. 641  
 Gilbert W. 289  
 Glaser D. A. 640  
 Glashow S. L. 641  
 Goethe J. W. 362  
 Goldhaber A. S. 58  
 Goudsmit S. A. 206  
 Greenwood T. 534  
 Grimaldi F. M. 511  
 Grosse E. 406  
 Guillaume C. E. 638  
  
 Hall E. H. 11, 190  
 Halley E. 415  
 Hansen W. 405, 406  
 Harrison E. R. 393  
 Hayes T. L. 627  
 Heaviside O. 9, 362  
 Hege E. K. 169, 272  
 Heirtzler J. R. 372  
 Heisenberg W. 624, 638  
 Helmholz G. 234  
 Henry G. E. 399  
 Henry J. 237, 267  
 Henry W. W. 295  
 Hertz H. 9, 10, 389, 638  
 Hess V. F. 639  
 Hewish A. 375, 641  
 Hill H. A. 59  
 Hipple R. 185  
 Hoddeson L. H. 375  
 Hoffman T. E. 467  
 Hofstadter R. 640  
 Holmes S. 467  
 Horridge G. A. 464  
 Hull 399, 400, 413  
 Huygens C. 423 i n., 511, 569, 615

- Ingoll A. G. 541  
 Ioannisiani B. K. 373  
 Irwin J. B. 374  
 Ives H. E. 411, 412, 417  
 James H. W. 174  
 Jansky K. G. 373, 375  
 Jensen J. H. D. 640  
 Johansson G. 470  
 Jonsons C. 617  
 Josephson B. D. 641  
 Joule J. P. 146  
 Joyce J. 434  
 Kapany U. S. 429, 430  
 Kapica P. L. 641  
 Karolus W. 406  
 Kartezjusz 420, 428  
 Kastler A. 640  
 Katz J. L. 548  
 Kear B. H. 488  
 lord Kelvin 94  
 Kirchoff G. R. 156, 161  
 Kohn H. H. 363  
 Kolibayew W. 406  
 Kopernik M. 372  
 Kusch P. 640  
 Lafranc P. 152  
 Lamb W. E. 640  
 Land E. H. 398  
 Landau L. D. 640  
 von Laue M. 547 i n., 638  
 Lawrence E. O. 182, 194, 639  
 Lawton W. E. 59  
 Lebiediew S. W. 399  
 Lee T. D. 640  
 von Lenard P. E. A. 637  
 Lenis E. A. S. 317  
 Lenz H. H. 240, 267  
 Lewis G. N. 594  
 Lightman A. P. 373  
 Lippmann G. 637  
 Lorentz H. A. 9, 182, 364, 637  
 Lyman T. 607, 609  
 Mach W. B. 434  
 Madsen E. L. 170  
 Malus E. L. 565 i n.  
 Marconi G. 10, 637  
 Marsden E. 64, 602  
 Matthias B. T. 140  
 Maxwell J. C. 9, 10, 59, 211, 255, 360 i n., 389  
 Mayer M. G. 640  
 Melissinos A. C. 596  
 Mercier P. 406  
 Michelson A. A. 405, 406, 408, 416, 500, 604, 637  
 Miller J. D. 179  
 Millikan R. A. 47–48, 99, 593 i n., 638  
 Missiroli G. F. 617  
 Mittelstaedt J. 406  
 Moore A. D. 10  
 Morley E. W. 408, 500, 504  
 Morrison P. 444  
 Mössbauer R. L. 640  
 Mott N. F. 641  
 Mottelson B. 641  
 Mulligan J. F. 406  
 Néel L. 641  
 Nelson D. F. 488  
 Newcomb A. 406  
 Newton I. 364, 371, 419, 420, 476, 479, 485, 497,  
     504, 511, 604  
 Nichols H. 399, 400, 413  
 Nieto M. M. 58  
 Nobel A. 287, 302, 501, 530, 593, 594, 596, 637  
 Norton O. R. 543  
 Nussenzveig H. M. 418, 434  
 O'Brien B. J. 292  
 Oersted H. C. 9, 178, 209, 210, 217  
 Ohm G. S. 140 i n.  
 Olbers H. 392  
 Onnes H. K. 140, 638  
 Ostriker J. P. 375  
 Palmer E. W. 541  
 Parker E. N. 291  
 Paschen F. 607  
 Pauli W. 639  
 Pearson J. 406  
 Pease C. J. 406  
 Peebles P. I. E. 375  
 Penzias A. A. 375, 641  
 Perrin J. B. 638  
 Peterson W. 406  
 Pfeiffer H. G. 349  
 Pieńkowski S. 466  
 Pierce J. R. 362  
 Pineus G. 497  
 Planck M. 589, 594, 638  
 Plimpton S. J. 59  
 Poisson S. 531  
 Porter A. G. 530  
 Possi G. 617  
 Powell C. F. 639  
 Poynting J. 390 i n.

- Price W. H. 457  
 Priestley J. 58, 59  
 Prochorow A. M. 640  
 Prout L. 602  
 Ptolemeusz 435  
 Purcell E. M. 302, 639
- Rabi I. I. 639  
 Rainwater J. 641  
 Raman C. V. 596, 638  
 Rank J. 406  
 lord Rayleigh 524–525, 545, 637  
 Resnick R. 182, 256  
 Richardson O. W. 638  
 Richter B. 641  
 Ritz 613  
 Robinson J. 59  
 Roemer O. 403, 406, 415  
 Roentgen W. K. 21, 25, 27, 250, 272, 373, 536,  
     547, 552, 559, 581, 637  
 Rosa 406  
 Rowland H. A. 179, 299, 306  
 Rumcorn S. K. 290  
 Rush J. H. 403  
 Ruth A. 406  
 Rutherford E. 62, 64, 66, 98, 602  
 Ryle M. 641
- Salam A. 641  
 Sandage A. R. 412  
 Savart F. 223  
 Schawlow A. L. 487, 532  
 Scherrer 555, 618  
 Schrieffe J. R. 641  
 Schrödinger E. 619, 638  
 Schwartz B. B. 140  
 Schwinger J. 640  
 Segré E. G. 640  
 Shamos M. H. 481  
 Shankland R. S. 500  
 Shapiro G. 581  
 Shockley W. 640  
 Siegbahn K. M. G. 638  
 Skłodowska-Curie M. 637  
 Smitson J. 237  
 Snell W. 420, 435, 568, 569, 584  
 Stark J. 638  
 Stefan J. 588  
 Stern O. 539  
 Stewart J. 54  
 Stilwell G. R. 411–412, 417
- Stokes G. G. 498  
 Strutt J. W. 637
- Tales z Miletu 9  
 Tamm I. J. 640  
 Tesla N. 349  
 Thomas 185  
 Thompson B. (hrabia Rumford) 237  
 Thomsen D. E. 617  
 Thomsen E. 525  
 Thomson G. P. 616, 639  
 Thomson J. J. 61, 65, 198, 201, 602, 616, 637  
 Thornton R. D. 363  
 Tijama S. 627  
 Tilley D. E. 144  
 Ting S. C. C. 641  
 Tomonaga S. I. 640  
 Townes C. H. 640  
 Tricker R. A. 223  
 Trump J. G. 97
- Van Allen J. A. 292  
 Van Cauwenerghe M. R. 368  
 Van de Graaff R. J. 94, 95  
 Van der Sluis J. 406  
 Van der Waals J. D. 637  
 Van Vleck J. H. 641  
 Verrill J. F. 541
- Walker J. 563  
 Wallingford J. S. 174  
 Walton E. T. S. 639  
 Waterman T. H. 580  
 Wehner R. 580  
 Weinberg S. 641  
 Wheatstone C. 174  
 Wiegand C. E. 605  
 Wien W. 589 i n., 637  
 Wigner E. P. 640  
 Wilkinson D. T. 375  
 Williams H. J. 301  
 Williams R. E. 59  
 Wilson C. T. R. 638  
 Wilson M. H. 398  
 Wilson J. D. 310  
 Wilson R. R. 197, 375  
 Wilson R. W. 641
- Young T. 480 i n., 504, 513, 526, 561, 562, 615  
 Yukawa H. 639
- Zeeman P. 206, 637

# **Skorowidz rzeczowy**

(przygotował *Włodzimierz Zuzga*)

- Aberracja chromatyczna 464, 468  
— sferyczna 468  
— światła 416  
akcelerator liniowy 151, 198, 628  
akomodacja oka 466  
aktynowce 292  
akumulator 171  
amper (A) 14, 133, 218–219  
amperomierz 163 i n.  
amplantacja 12  
analizator 564 i n.  
angstrom ( $\text{\AA}$ ) 398  
anihilacja par elektron-pozyton 21  
anizotropia optyczna 568 i n.  
antena 83, 383, 392, 486, 504, 531, 562  
antyferromagnetyzm 301, 641  
antyproton 287, 640  
aparat fotograficzny 478 i n.  
archeomagnetyzm 291  
atom 17, 101, 227, 601 i n., 612 i n., 618  
i n.  
atomy egzotyczne 605  
— mezonowe 613
- Bańka mydlana 130–131  
barwy cienkich błonek 493–496, 504–509  
betatron 250–252, 259, 265  
biegun geomagnetyczny inklinacji 199–200  
biegury magnetyczne 284 i n.  
błękit nieba 580–581  
bursztyn 9  
burze magnetyczne 291–292, 310  
busola słoneczna 580
- Całka krzywoliniowa 53, 78, 212  
— powierzchniowa 53 i n.  
całkowanie funkcji wektorowych 33–36  
całkowite wewnętrzne odbicie 428 i n.  
cewka indukcyjna 266 i n.  
cewki, łączenie równolegle 281  
—, — szeregowe 281  
— (pierścień) Helmholtza 234  
chmura elektronów 17, 18, 83  
ciała bezpostaciowe (amorficzne) 568  
ciało doskonale czarne 587 i n.  
— próbne 26 i n., 180  
— stałe (budowa) 12, 617  
ciąg falowy 486 i n.  
ciekły hel 640  
ciepło Joule'a 146 i n.  
ciśnienie (pęd) promieniowania 399, 414–415  
cyklotron 9, 21, 107, 151, 182, 193, 194 i n., 201,  
207, 259, 639  
„czarna skrzynka” 145, 354  
części elementarne 19, 615 i n.  
częstość cyklotronowa 193, 196  
— odcięcia 381  
czułość oka 399, 413–414  
czynnik dyfrakcyjny 528, 536  
— interferencyjny 528
- Ćwierćfalówka (pływka ćwierćfalowa) 576, 582–584
- Daltoniści 413  
defekty sieci krystalicznej 143  
deklinacja magnetyczna 291  
deuteron 194–197

- diagram strzałkowy 333 i n.  
 diamagnetyzm 295 i n.  
 dielektryk (izolator) 11–12, 113 i n.  
 dielektryki polarne 116  
 dipol elektryczny 33, 45, 82–84, 90, 226, 383–384  
     — w polu elektrycznym 39–41  
     — — — niejednorodnym 48  
     — magnetyczny 189 i n., 211 i n., 226–227,  
         284 i n.  
 domeny 300–301  
 domieszki 143  
 doświadczenie Barkli 581  
     — Beta 579  
     — Comptona 596–599  
     — Davissona i Germera 616–617, 627, 628  
     — Faradaya 237 i n.  
     — Fizeau 404  
     — Ivesa i Stilwella 411–412, 417  
     — Michelsona–Morleya 502–504  
     — Millikana 47–48, 99  
     — Nicholsa i Hulla 400–401  
     — Oersteda 210  
     — Thomsona (wyznaczanie  $e/m$ ) 198 i n., 627–628  
     — Younga 480 i n., 504, 513, 526  
 drgania elektromagnetyczne 318 i n.  
     — harmoniczne dipola 44  
     — — elektronu 48, 579 i n.  
*Droga Mleczna (Galaktyka)* 290, 373 i n.  
 droga optyczna 433–434, 461, 484  
 duanty 194–195  
 dwójlomność 568 i n.  
 dyfrakcja (ugiecie) 421, 439, 452, 464, 511 i n.  
     — a interferencja 530  
     — elektronów 616 i n., 624, 639  
     — Fraunhofera 512 i n.  
     — Fresnela 511 i n.  
     — promieni rentgenowskich 536, 547 i n., 559, 616  
 dyfuzja 12  
 dyspersja 544
- Ebonit 11  
 efekt Czerenkowa 640  
     — radiometryczny 401  
     — (zjawisko) Zeemana 206–207  
 elektrety 123, 308  
 elektrodynamika kwantowa 640  
 elektrolit 11, 12, 134  
 elektromagnes 178  
 elektrometr 60  
 elektron 11, 16, 17, 46, 143, 183 i n.  
     — walencyjny 143  
     — w ciele stałym 12  
     — w polu elektrostatycznym 46–47  
 elektronowolt (eV) 94–95
- elektrony przewodnictwa 143 i n., 183  
 elektrostatyczna jednostka ładunku 14  
 element skierowany powierzchni 52  
 energia fotonu 594 i n.  
     — Joule'a 146, 148  
     — kinetyczna relatywistyczna 98  
     — pola elektrycznego 85, 111 i n., 274  
     — — magnetycznego 189–190, 274  
 eter 408, 502, 511
- Fale elektromagnetyczne 371 i n.  
     — — kuliste (Huygensa) 423 i n., 439 i n., 446  
         i n., 572  
     — — płaskie 385 i n., 415, 418, 423 i n., 442 i n.  
     — materii 615 i n.  
     — stojące 618 i n., 627  
 falowodowa długość fali 382  
 falowody 381 i n.  
 farad (F) 106, 237  
 ferrimagnetyzm 301–302, 641  
 ferroelektryki 123, 308  
 ferromagnetyzm 292, 298 i n.  
 filtr 347  
     — prędkości 201  
 fotoelektrony 592 i n.  
 foton 58, 594 i n., 611–612  
 funkcja falowa 619 i n., 639
- Galwanometr 60, 188, 189, 200, 204, 237, 592  
     — balistyczny 300  
 gaus (Gs) 181  
 gaz paramagnetyczny 293  
 generator elektrostatyczny Van de Graffa 94–96,  
     104, 149  
 generatory elektrostatyczne współczesne 96–97  
     — prądu zmennego 259–260, 332, 354  
 gęstość energii pola elektrycznego 132  
     — — — magnetycznego 275 i n.  
     — prawdopodobieństwa 622 i n.  
     — prądu (wektor  $\mathbf{j}$ ) 135 i n.  
     — — — przesunięcia 368  
 główne współczynniki załamania kryształu 570 i n.  
 gradient potencjału 90  
 gwiazdy neutronowe 375–376
- Hamulec elektromagnetyczny 261  
 henr (H) 237, 267  
 histereza magnetyczna 300 i n.  
 holografia 530, 641
- Igła inklinacyjna 291  
     — magnetyczna 9, 178, 189, 199, 210, 211  
 indukcja elektromagnetyczna 237 i n.  
     — — a ruch względny 252 i n.

- elektrostatyczna 117 i n.
- elektryczna (wektor **D**) 123, 125 i n.
- magnetyczna (wektor **B**) 179 i n.
- wzajemna 277 i n.
- indukcyjność 266 i n.
- inklinacja magnetyczna 291
- interferencja fal na wodzie 482
  - neutronowych 617
  - światła 480 i n.
- interferometr Michelsona 500 i n., 509–510
- neutronowy 627
- z wiązkami elektronowymi 617, 627
- izotopy 19–20
- Jasna plamka Fresnela 531
- jądro atomowe 17, 603, 639
- jądrowy model atomu 602
  - rezonans magnetyczny 302 i n.
- jednolita teoria oddziaływań słabych i elektromagnetycznych 641
- Kabel koncentryczny 276–277, 283, 376 i n., 486
- kalcyt 561–562, 570–575, 582, 584
- kąt całkowitej polaryzacji 566 i n.
  - poślizgu 552
  - kina trójwymiarowe 582
  - koherencja (spójność) światła 485 i n.
  - koincydencje 639
  - kometa Halleya 415
  - komora pęcherzykowa 182, 640
  - Wilsona 639
  - komórka elementarna 549 i n.
  - kompas 290–291, 310
  - kondensator 105 i n.
    - cylindryczny 108–109
    - o zmiennej pojemności 127
    - płaski 107 i n.
  - kondensatory, łączenie równolegle 109–110
    - , — szeregowe 110–111
  - Korona Północy* 413
  - krótkowidz 478
  - kryształ jednoosiowy 574
  - kryterium Rayleigha 524–525, 545
  - krzywa namagnesowania 298 i n.
  - kulomb (C) 14, 133
  - kwadrupol elektryczny 46, 84, 85
  - kwanty energii 591 i n.
    - ładunku 16 i n.
  - kwarc 11, 420, 434, 435, 439, 570, 576, 582, 608
  - kwazar 375
  - Lampa próżniowa 142, 150
    - rentgenowska 151
    - telewizyjna 201
  - laplasjan  $\Delta$  632
  - laser 487, 488, 506, 640
  - liczba atomowa 19
    - kwantowa 590, 605 i n., 618 i n.
    - masowa 19
    - neutronowa 19
  - linie Fraunhofera 543
    - indukcji magnetycznej 179, 215 i n.
    - przepływu 50
    - przesyłowe 348 i n.
    - sił pola elektrycznego 28 i n.
    - transmisyjne fal akustycznych 376 i n.
      - — — elektromagnetycznych 381
  - „lisia czapa” 534
  - lornetka 471
  - luneta 467–468, 534
  - lupa 465 i n., 471
  - Ładunek elektryczny 10 i n.
    - — próbny 13, 23, 26 i n.
    - elementarny 16, 94
    - w polu elektrycznym 37 i n.
    - — magnetycznym 193 i n.
  - Magnesy naturalne 178
  - magnetohydrodynamika 641
  - magnetyczny efekt zwierciadlany 310
  - magnety 9
  - magnetyzm jądrowy 302 i n.
    - szczątkowy 300
    - ziemski 289 i n.
  - masa relatywistyczna 197
  - maser 487
  - maszyny matematyczne 9, 49, 332
  - materiały izotropowe 137
  - metoda Debye'a-Scherrera 555–556, 618
    - równoważenia prądów 137, 218
    - „siły uderzeniowej” 299
    - wnęki mikrofalowej 405–406
  - mezon *K* (rozpad) 21
  - mikrofale 141, 377, 421, 434, 486, 530, 562
  - mikroskop 9, 457, 467, 477, 523, 525, 628
    - elektronowy 526, 627
    - fazowo-kontrastowy 639
    - fotonowy 629
  - mion 16
  - miraż 434
  - moc prądu zmiennego 340 i n.
  - model atomu Bohra 227, 601 i n., 618 i n.
    - — Rutherforda 62, 64 i n.
    - — Thomsona („ciasto z rodzynkami”) 61, 65, 602
  - moment dipolowy elektryczny 34, 116 i n., 640
    - — — cząsteczki wody 100

- — — indukowany 83, 116
- — — magnetyczny 189 i n., 211 i n., 226
- — — orbitalny 286–287
- kwadrupolowy elektryczny 46, 85
- pęd światła 579
- skrącający obwód z prądem w polu magnetycznym 186 i n.
- spinowy 286
- monopol magnetyczny 284–289, 310
- mostek Wheatstone'a 174
  
- Nadprzewodnictwo 140, 641
- namagnesowanie (wektor magnetyzacji  $\mathbf{M}$ ) 293 i n., 305 i n.
- naruszanie symetrii w rozpadach mezonów  $K$  641
- nasycenie namagnesowania 279
- natężenie fali elektromagnetycznej 489
- pola elektrycznego (wektor  $\mathbf{E}$ ) 28 i n., 125 i n.
- — grawitacyjnego 26
- — magnetycznego (wektor  $\mathbf{H}$ ) 305 i n.
- prądu elektrycznego 133 i n.
- neutron 17 i n., 639
- nośniki prądu 134
  
- Obraz 442 i n.
- Lauego 547–549
- rzeczywisty 442 i n.
- urojony (pozorny) 442 i n.
- obserwator standardowy 398
- obwody prądu zmiennego 332 i n.
- obwód  $LC$  314 i n.
- $LR$  269 i n.
- $RC$  165 i n.
- $RLC$  337
- oczy pszczoły 550
- odbicie (refleksja) światła 418 i n., 442 i n.
- odległość wyraźnego widzenia 466
- odwracalność procesów 155
- ognisko soczewki cienkiej 454 i n.
- zwierciadła 449 i n.
- ogniskowa soczewki cienkiej 459 i n.
- zwierciadła 449 i n.
- oko 443, 447, 464, 470, 477–478, 533, 534
- okulary 471, 478, 505
- słoneczne 582
- trójogniskowe 478
- om ( $\Omega$ ) 136
- operator nabla  $\nabla$  632 i n.
- oporniki 136 i n.
- , łączenie równolegle 162
- , szeregowie 157
- opór elektryczny 136 i n., 175 i n.
- — właściwy 137 i n.
  
- wewnętrzny źródła 156 i n.
- optyczna grubość siatki 541
- oscyloskop katodowy 38, 39, 168, 345, 552
- osłona elektromagnetyczna 257
- oś magnetyczna Ziemi (błędzenie) 291
- optyczna kryształu 571 i n.
  
- Paradoks Olbersa (ciemnego nieba) 392–393
- paramagnetyzm 292 i n.
- pasy radiacyjne Van Allena 292, 310
- peryskop 434
- ped fotonu 615 i n., 629
- pierścienie Debye'a-Scherrera 618
- Newtona 497–498, 504, 509
- Saturna 566
- pierścień Rowlanda 298–300, 306, 311
- pierwiastki przejściowe 292
- ziem rzadkich 292
- piorunochron 93
- plazma 107
- plaszczyzna drgań 561
- ogniskowa 459 i n.
- pochodna cząstkowa 90
- pojemność elektryczna kondensatora 106 i n., 115
- Ziemi 129
- polaroid 563 i n., 573
- polaryzacja elektryczna (wektor  $\mathbf{P}$ ) 122 i n.
- ośrodką 83, 116 i n.
- światła 561 i n.
- — eliptyczna 582
- — kołowa 575 i n.
- — lewoskrętna 579
- — liniowa 561 i n.
- — poprzeczna 571 i n.
- — prawoskrętna 578
- pole elektryczne 26 i n.
- — Halla 191 i n.
- — różnych źródeł 29 i n.
- jednorodne 26 i n.
- magnetyczne 26, 178 i n.
- — międzygwiezdne 566, 583
- — zmienne 247 i n.
- przepływu cieczy nieściśliwej 26, 49–50
- stacjonarne 26
- wektorowe 26 i n.
- wewnątrz dielektryka 117 i n.
- potencjał elektryczny 73 i n.
- — dipola 82 i n.
- — ładunku punktowego 79 i n.
- —, punkt odniesienia 74
- — układu ładunków punktowych 81 i n.
- grawitacyjny 76
- hamujący 593
- na powierzchni przewodnika 56

- powierzchnia ekwipotencjalna 75, 87 i n.
- falowa 385 i n.
- Gaussa 54 i n.
- załamująca 452
- — wypukła 453 i n.
- zamknięta 50 i n.
- powierzchniowa gęstość ładunku 93
- powiększenie kątowe 466–467
- podłużne 473
- poprzeczne (liniowe) soczewki 462, 466
- — zwierciadła 452
- pozyton 21, 287, 639
- pozytonium 613
- półfalówka (płytką półfalową) 585
- półprzewodnik 11, 12, 141, 640
- praca w polu elektrycznym 75
- wyjścia 595 i n.
- prawo Ampère'a 210 i n.
- Biota–Savarta 223 i n.
- Bragga 552 i n., 617
- Brewstera 568, 582
- Coulomba 12 i n., 55, 58, 604
- Curie 294–295
- Faradaya 237 i n.
- Gaussa 49, 54 i n., 119
- — dla grawitacji 68
- — dla pola magnetycznego 289
- — w obecności dielektryków 124–125
- Joule'a 146
- Kirchoffa drugie 156
- — pierwsze 161
- Malusa 565 i n.
- Ohma 140 i n.
- — w postaci mikroskopowej 137, 142
- Plancka 589 i n., 610
- powszechnej grawitacji 9, 12, 68
- przesunięć Wiena 610
- składania prędkości klasyczne 408
- — — relatywistyczne 409 i n.
- Snella 420, 435, 568, 569, 584
- Stefana–Boltzmannia 589, 610
- zachowania parzystości 640
- prąd elektryczny 9, 14, 133 i n.
- indukowany 237 i n.
- magnesujący 350
- przesunięcia 350
- przewodzenia 350 i n.
- zmienny (przemienny) 331 i n.
- prądy wirowe 256–257
- prędkość dźwięku 324, 407, 410, 502
- fazowa 382
- grupowa 382
- rozchodzenia się oddziaływań 27
- światła 27, 98, 136, 197, 324, 326, 357, 371, 389, 403 i n., 407 i n., 415, 416, 435, 502
- unoszenia elektronów w metalu 134, 144
- program *Seafarer* 392
- promienie przyosowe 447
- promieniotwórczość 19–20, 410, 414, 639
- promieniowanie akustyczne 383
- dipola 383
- kosmiczne 94, 639
- reliktywe 641
- rentgenowskie (*X*) 21, 250, 272, 373, 530, 536, 547 i n., 559, 581, 597, 637
- prostownik 344 i n.
- dwupołówkowy 346
- jednopołówkowy 346
- proton 16, 17
- pryzmat 422–423, 429, 431, 435, 436
- o stałym odchyleniu 438
- przebiecie 114 i n.
- przenikalność elektryczna próżni 15
- — dielektryków 114 i n.
- magnetyczna 211 i n.
- przepływ ciepła 142
- przerwa energetyczna 12
- przesunięcie Comptona 612
- elektrostatyczne 123 i n.
- ku czerwieni 375, 412–413, 417
- przewodnictwo właściwe 137 i n.
- przewodnik 11, 63–64, 134 i n.
- izolowany 91 i n.
- z prądem w polu magnetycznym 183 i n.
- pulsar 375, 641
- punkt najbliższy 466
  
- Radar 9, 363, 377, 504, 531, 582
- radio 9, 107, 332, 371, 396, 531
- radioastronomia 373, 641
- reakcje jądrowe 21, 640
- reguła Lenza 240 i n., 267
- prawej ręki 211
- rezonans jądrowy 302 i n.
- w obwodach prądu zmiennego 342 i n.
- rogówka 470, 477
- rozszerzanie się Wszechświata 417
- równania falowe 635 i n.
- Maxwella 9, 10, 56, 357 i n., 384 i n., 420, 431, 531, 568, 631 i n.
- — w postaci różniczkowej 633 i n.
- równanie Gaussa dla cienkich soczewek 476

— Newtona dla układu soczewek 476  
— soczewki 459 i n.  
— zwierciadła 447  
ruch kolektywny 641  
ryba elektryczna 152  
rząd widma 536 i n.

Samoindukcja 266 i n.  
serce 152  
serie widmowe 603 i n.  
siatka dyfrakcyjna 536 i n.  
— — amplitudowa (szczelinowa) 541  
— — fazowa 541  
— — odbijająca 541  
sieć jonowa 134, 143  
silnik elektryczny 9  
— napędzany polem magnetycznym Ziemi 202  
siła elektromotoryczna (SEM) 152 i n.  
— — indukcji 238 i n.  
— — samoindukcji 266 i n.  
— elektrostatyczna 10–17  
— elektryczna 77 i n.  
— grawitacyjna 11–16  
— Lorentza 182 i n.  
siły jądrowe 18–19  
— zachowawcze 74

siodłowy punkt równowagi 39  
składowa  $\pi$  566 i n.  
—  $\sigma$  566 i n.  
soczewki cienkie 457 i n.  
solenoid (zwojnicą) 219 i n.  
spektrograf dyfrakcyjny 542 i n.  
— pryzmatyczny 543 i n.  
spektrometr krystaliczny neutronów 628  
— masowy 206  
spektroskop dyfrakcyjny 541 i n.  
spinowy moment pędu 286  
spójność świata 485 i n.  
sprzężenie wymienne 298, 301, 313  
stała czasowa obwodu 166  
— — — indukcyjna 271  
— — — pojemnościowa 269  
— Plancka 590 i n., 626  
— siatki 540 i n.  
— słoneczna 610  
— Stefana–Boltzmanna 588  
stany kwantowe stacjonarne 591  
strumień indukcji magnetycznej 179, 239  
— masy 49–50  
— pola elektrycznego 51 i n.  
— — wektorowego 49–50  
synchrocyclotron 197  
synchrotron 107, 197, 363

system wstrzymujący protony 197–198  
szerokość maksimum dyfrakcyjnego 511 i n.  
— połówkowa 344  
szkło nieodbijające 497

Ścinanie skażeń 593  
średnia droga swobodna elektronów w metalu 143, 145

Tarcza Airy 523  
teleskop 9, 372 i n., 457, 467–468, 472, 479, 523, 534  
telewizja 9, 332, 363, 371, 394, 562  
temperatura Curie 298  
temperaturowy współczynnik oporu właściwego 138  
— — — średni 140  
teodolit 534  
teoria wielkiego wybuchu 375  
termistor 141, 150  
termoemisja 638  
termoogniwo 152  
tesla (T) 181  
tęcza 434  
tęczówka 470  
tętnienia napięcia 347  
tłumienie magnetyczne 258  
toroid 222, 268  
transformator 198, 348 i n.  
tranzystor 11, 142, 640  
tunelowanie 641

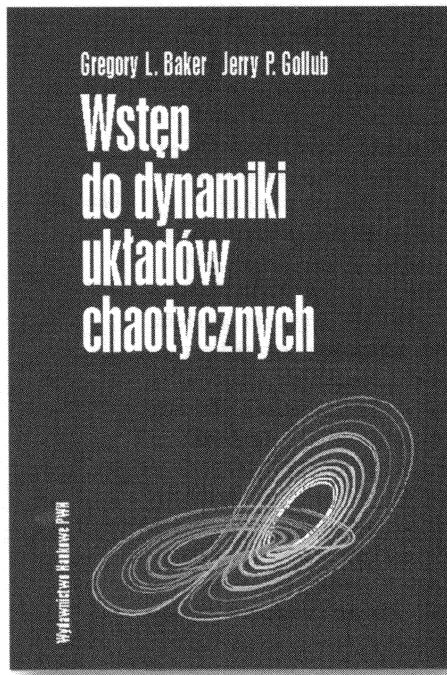
Ugięcie światła 421 i n., 511 i n.  
układ Graetza 346  
— jednostek CGSE 14  
— — SI 14, 73, 133, 137, 213, 267, 280–281  
— kompensacyjny 164  
— ładunków punktowych 81  
Układ Słoneczny 372–373, 415  
— — — magnetyzm 290  
układy o elementach rozłożonych i skupionych 322 i n., 377 i n.

Waga prądu 213, 218–219  
— skręćeń 12–14, 56  
wahadło torsyjne 400–401  
warstwa Appletona 639  
wartość skuteczna 341 i n.  
warunek rezonansowy 196  
warunki brzegowe dla **H** i **B** 313  
— — dla linii transmisyjnej 378  
wat (W) 146  
weber (Wb) 181  
wektor Poyntinga 390 i n.  
wektory elektryczne 111  
— magnetyczne 309

- wiatr słoneczny 291–292
  - wiązka elektronów 38
  - widmo absorbacyjne 601
    - charakterystyczne promieni  $X$  601
    - ciała doskonale czarnego 588 i n.
    - ciągłe 600
    - dyfrakcyjne 616 i n.
    - fal elektromagnetycznych 371 i n., 536 i n.
    - liniowe 600 i n.
    - wodoru 607, 640
  - widmowa zdolność emisyjna 580 i n.
  - Wielka Mgławica Andromedy* 416
  - wielkości makroskopowe 138–139
    - mikroskopowe 138–139
  - włókna optyczne 429–431, 434
  - wnęka rezonansowa 323 i n., 364 i n., 394, 486
  - wolt (V) 73
  - woltomierz 163 i n.
    - elektrynowy 164
    - prądu stałego 345
  - współczynnik dobroci obwodu 330
    - lepkości 144
    - odbicia 499
    - przepięcia 373
    - przepuszczania 499
    - załamania 419 i n., 437
      - — w atmosferze Ziemi 436
    - wyładowanie atmosferyczne 94, 98
      - koronowe 94
      - w gazach 93, 104, 148, 586
    - wytrzymałość na przebijanie 114
  - wzorzec metra 501
    - oporu elektrycznego 137
  - wzór Lorentza 182
    - Newtona 476
    - Wiena 589 i n., 610
- Zaburzenie pola 28
  - zachowawczość sił elektrostatycznych 74–75
  - zakaz Pauliego 639
  - załamanie (refrakcja) światła 418 i n., 452 i n.
    - podwójne 566
  - zasada ciągłości prądu 350
    - Babineta 532
    - Fermata 432 i n., 438, 573
    - Huygensa 423 i n., 434, 436, 439
    - nieoznaczone 623 i n., 628
    - odpowiedniości 606 i n., 629
    - odwracalności promieni 498–500
    - Ritta 613
    - superpozycji pól 31 i n.
    - zachowania energii 275
      - — ładunku 19 i n.
  - zasady (prawa) Newtona 13, 151, 193, 218, 296, 402, 604
  - zasilacz 107
  - zdolność emisyjna 588 i n.
    - rozdzielcza przyrządu optycznego 468, 628
      - — siatki dyfrakcyjnej 544 i n.
  - zjawisko Comptona 596 i n., 611 i n., 638
    - Dopplera 374, 410 i n., 414, 417
    - fotoelektryczne 592 i n., 611
    - Halla 11, 135, 190 i n., 200
  - zorza polarna 292, 310
  - zwierciadło kuliste 446 i n.
    - płaskie 442 i n.
    - półprzepuszczalne 486, 500
- Żaglowiec (kliper) kosmiczny 415
- Žrenica 469, 533, 534
- źródło wzorcowe 164

Wydawnictwo Naukowe PWN SA  
Wydanie jedenaste  
Arkuszy drukarskich 41,5  
Druk ukończono w sierpniu 1999 r.  
Druk i oprawa Prasowe Zakłady Graficzne Sp. z o.o.  
Wrocław, ul. Piotra Skargi 3/5

*poleca*



Książka Bakera i Golluba stanowi systematyczne wprowadzenie w zagadnienia chaosu deterministycznego. Autorzy w jasny i zwięzły sposób wprowadzają podstawowe pojęcia dotyczące dynamiki chaotycznej, a następnie ilustrują je na wybranych prostych przykładach. Integralną częścią podręcznika jest dyskietka z programami komputerowymi, które umożliwiają Czytelnikowi samodzielne eksperymenty numeryczne. Zastosowany w książce aparat matematyczny został ograniczony do minimum, dlatego jest ona dostępna dla studentów pierwszych lat uniwersyteckich wydziałów fizyki, matematyki i chemii, studentów politechnik i uczelni ekonomicznych, a także uczniów i nauczycieli szkół średnich o profilu matematyczno-fizycznym.

Cena 19,00 zł

Do nabycia w księgarniach:

H. Haken, H. Ch. Wolf

**Fizyka molekularna  
z elementami chemii kwantowej**

Ch. Kittel

**Wstęp do fizyki ciała stałego**

I. W. Sawieliw

**Wykłady z fizyki, t. 1–3**

K. Stefański

**Wstęp do mechaniki klasycznej**

P. Suppan

**Chemia i światło**

H. Szydłowski

**Pracownia fizyczna**

S. Weinberg

**Teoria pól kwantowych, t. 1**

Książki PWN są do nabycia w księgarniach własnych PWN: **Warszawa**, ul. Miodowa 10; **Gdańsk**, ul. Korzenna 33/35; **Katowice**, ul. Dworcowa 9; **Kraków**, ul. Św. Tomasza 30; **Łódź**, ul. Więckowskiego 13; **Poznań**, ul. Wodna 8/9; **Wrocław**, ul. Kuźnicza 56. Zamówienia telefoniczne i pisemne przyjmuje: **Dział Dystrybucji Wysyłkowej i Prenumerat** ul. Miodowa 10, 00-251 Warszawa, infolinia 0-800-120 145 (połączenie bezpłatne), fax 69 54 179. Zapraszamy do księgarni PWN w Internecie **www.pwn.com.pl**