INTERNASIONALE SEKONDÊRE SERTIFIKAAT-EKSAMEN
NOVEMBER 2022

VERDERE STUDIES WISKUNDE (UITGEBREID): VRAESTEL II

Tyd: 1 uur | 100 punte

LEES ASSEBLIEF DIE VOLGENDE INSTRUKSIES NOUKEURIG DEUR

1. Hierdie vraestel bestaan uit 12 bladsye en 'n Inligtingsboekie van 4 bladsye (i–iv). Maak asseblief seker dat jou vraestel volledig is.

2. Hierdie vraestel bestaan uit DRIE modules.

   Kies **EEN** van die **DRIE** modules:

   MODULE 2: STATISTIEK (100 punte) OF
   MODULE 3: FINANSIES EN MODELLERING (100 punte) OF
   MODULE 4: MATRIKSE EN GRAFIEKTEORIE (100 punte)

3. Nieprogrammeerbare en niegrafiese sakrekenaars mag gebruik word, tensy anders aangedui.

4. Al die nodige berekeninge moet duidelik getoon word en handskrif moet leesbaar wees.

5. Diagramme is nie op skaal geteken nie.

6. **Afronding van finale antwoorde.**

   MODULE 2: Vier desimale plekke, tensy anders aangedui.

   MODULE 3: Twee desimale plekke, tensy anders aangedui.

   MODULE 4: Twee desimale plekke, tensy anders aangedui.

MODULE 2 STATISTIEK

VRAAG 1

1.1 In 'n bepaalde gebied is 75% van die mense teen Covid-19 ingeënt. Dit is verder bekend dat 40% van die ingeëntes 'n vorige infeksie van Covid-19 gehad het en 60% van die oningeëntes het 'n vorige infeksie van Covid-19 gehad.

'n Persoon word ewekansig gekies. Indien hierdie persoon 'n Covid-19-infeksie gehad het, bepaal die waarskynlikheid dat hierdie persoon ingeënt is …

(a) deur 'n boomdiagram te gebruik. (6)

(b) deur 'n tweerigting- (gebeurlikheids-) tabel te gebruik. (4)

1.2 Die tabel hieronder som 'n opname op oor die getal troeteldiere per huishouding in 'n bepaalde dorp.

Getal troeteldiere (x)	0	1	2	3 of meer
Persentasie huishoudings	18	33	36	13

(a) Skryf die waarskynlikheid neer dat 'n huishouding minstens twee troeteldiere het. (1)

(b) 'n Ewekansige steekproef van tien huishoudings word uit hierdie dorp gekies. Bepaal die waarskynlikheid dat die steekproef meer as agt huishoudings met minstens twee troeteldiere sal bevat. (6)

(c) 'n Nuwe ewekansige steekproef van n huishoudings word uit hierdie dorp gekies. Die waarskynlikheid dat hierdie nuwe steekproef minstens een huishouding met meer as twee troeteldiere sal bevat, is groter as 70%. Bepaal die kleinste waarde van *n.* (7)

1.3 Die diskrete stogastiese veranderlike X het waarskynlikheidsverdeling $X \sim B\left(160\,;\,\frac{1}{8}\right)$.

Gebruik 'n geskikte benadering om $P\left(X < 25\right)$ te bepaal. (8)

[32]

VRAAG 2

Die stogastiese veranderlike X volg 'n normaalverdeling met gemiddelde 45 en standaardafwyking 2.

2.1 Bepaal $P\left(X < 41 \text{ of } X > 47\right)$. (8)

2.2 Bereken die 90^{ste} persentiel van X. (6)

[14]

VRAAG 3

3.1 'n Ewekansige steekproef van 30 onafhanklike waarnemings van 'n normaalverdeelde stogastiese veranderlike X word uit 'n populasie geneem. 'n Toetsstatistiek van $Z = 2,4$ word bereken. Daar word gedink dat die populasiegemiddelde 27 is. Skryf geskikte nul- en alternatiewe hipoteses neer en voer dan 'n tweekantige betekenistoets vir die gemiddelde by die 1%-peil uit. (6)

3.2 'n Ewekansige steekproef van 80 mense uit 'n politieke party, ABC, is gevra of hulle beplan om in die volgende verkiesing te stem; k mense het gesê hulle beplan om te stem. 'n α %-vertrouensinterval vir die populasieproporsie van mense uit ABC wat beplan om vir hierdie party te stem is $(0,468 ; 0,682)$.

(a) Toon dat $k = 46$. (3)

(b) Bepaal vervolgens die waarde van α tot die naaste persentasie. (7)

Dit is bekend dat 59,3% van die populasie van ABC in die laaste verkiesing gestem het.

(c) Indien ons aanneem dat elkeen wat beplan het om te stem wel gestem het, is daar bewyse om te sê dat die proporsie mense uit ABC wat gestem het, verander het? Gee 'n rede vir jou antwoord. (2)

[18]

VRAAG 4

4.1 Die waarskynlikheidsverdeling van 'n diskrete stogastiese veranderlike X word gegee deur:

x	1	2	3
$P(X = x)$	0,3 – m	2 m	0,7 – m

(a) Bepaal $E[X]$. (3)

(b) Bepaal die variasiewydte van moontlike waardes van die konstante m. (3)

(c) Indien gegee word dat $\text{var}(X) = 0,72$, bepaal die waarde van m. (4)

4.2 Die lewensduur van 'n sekere tipe battery, in eenhede van **tien uur**, het 'n waarskynlikheiddigtheidsfunksie:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{32}x & 0\le x\le 4\\ \frac{1}{8} & 4<x\le 10\\ 0 & \text{andersins}\end{cases}$$

(a) Skets $f(x)$. (6)

(b) Gebruik die skets en toon vervolgens dat $P(X>3)=\frac{55}{64}$. (5)

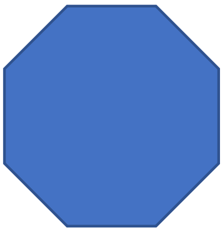
Twee batterye is nodig om 'n flits te laat werk. Die flits sal net werk indien albei batterye nog energie het.

(c) Vince pas twee nuwe batterye in die flits. Bepaal die waarskynlikheid dat die flits binne die volgende 30 uur sal ophou werk. (5)

[26]

VRAAG 5

5.1 Die voorsitter en ondervoorsitter van 'n komitee bied 'n raadsvergadering aan met ses ander raadslede. Hulle sit almal om 'n oktagonale tafel.



Bepaal die getal maniere waarop hulle kan sit indien die voorsitter en ondervoorsitter langs mekaar sit. (4)

5.2 Twee gebeurtenisse X en Y is sodanig dat $P(X|Y)=P(X)=P(Y)=P(X'\cap Y')$.
Bepaal $P(X)$. (6)

[10]

Totaal vir Module 2: 100 punte

MODULE 3 FINANSIES EN MODELLERING

VRAAG 1

Tesh verkry nou 'n lening van R550 000, met rente wat bereken word teen 8% per jaar, maandeliks saamgestel. Die lening word terugbetaal deur middel van gelyke maandelikse betalings van R6 000 met die eerste betaling wat na 6 maande gemaak word.

1.1 Bepaal die getal betalings wat gedoen sal word. (7)

1.2 Bereken die waarde van die finale betaling. (7)

1.3 Bereken die uitstaande saldo oor 2 jaar en oor 3 jaar onderskeidelik. (6)

1.4 Bereken vervolgens die rente wat in die derde jaar betaal is. (5)

[25]

VRAAG 2

'n Maatskappy wil sy IT-netwerk oor **7 jaar** opgradeer.

- Die finansiële direkteur bereken dat 'n maandelikse betaling van R30 000 in 'n delgingsfonds met 'n rentekoers van 10% per jaar, maandeliks saamgestel, inbetaal sal moet word wat onmiddellik begin en oor 4 jaar eindig.
- 'n Onlangse kwotasie vir die netwerk is R1 750 000 wat met inflasie teen 6% per jaar sal styg.
- Die waarde van die huidige toerusting word op Rx geraam en die waardevermindering daarop is 20% per jaar op 'n verminderende saldo.
- Die huidige toerusting sal oor 7 jaar verkoop word om die koste van die nuwe toerusting te verminder.

2.1 Bepaal die waarde van die delgingsfonds na 7 jaar. (7)

2.2 Toon vervolgens dat die waarde van x R934 874,69 is. (5)

2.3 Die maatskappy besluit om sy maandelikse betalings te herstruktureer. Hulle sal eerder gelyke maandelikse betalings van Ry doen wat onmiddellik begin en oor 7 jaar eindig. Hierbenewens sal 'n belegger 'n halfjaarlikse betaling van R50 000 byvoeg wat oor 6 maande begin en oor 7 jaar eindig. Veronderstel 'n teikenbedrag van R2 450 000 oor 7 jaar.

(a) Herlei 10% per jaar, maandeliks saamgestel, tot 'n ekwivalente halfjaarlikse koers. (4)

(b) y kan bereken word deur die volgende formule te gebruik:

$$A=\frac{y\left[(1+i)^{n}-1\right]}{i}+\frac{q\left[(1+j)^{m}-1\right]}{j}$$

Skryf die waardes van A, m, n, q, i en j neer of bereken dit. (6)

(c) Bepaal vervolgens of andersins die waarde van y. (2)

[24]

VRAAG 3

'n Muisbevolking word toegelaat om toe te neem in 'n gebied waar daar geen natuurlike roofdiere is nie. Die gemiddelde leeftyd van 'n muis is een jaar. Daar is 6 werpsels van 4 muisies wat per jaar gebore word waarvan 55% vroulik is. Ongeveer 80% van die muisies oorleef tot volwassenheid. Party muise word deur muisvalletjies en muisafweermiddels doodgemaak.

3.1 Verduidelik waarom die voortplantingsiklus as 2 maande beskou moet word. (2)

3.2 Skryf die sterftesyfer per tweemaandesiklus neer. (1)

3.3 Bereken die intrinsieke groeikoers per siklus as 'n persentasie korrek tot vier desimale plekke. (5)

3.4 Indien daar aanvanklik 30 muise is, bepaal die minimum getal muise wat per siklus uitgedun moet word om te keer dat die bevolking toeneem. (5)

[13]

VRAAG 4

Data oor die logistiese toename van 'n virus oor 'n tydperk van 10 maande word in die tabel hieronder gegee:

Datum	Totale infeksies (P) in 1000'e	$\frac{\Delta P}{P}$
1 Maart 2020	0	
1 April 2020	1,386	2,299
1 Mei 2020	6,372	2,471
1 Junie 2020	32,878	2,474
1 Julie 2020	169,075	x
1 Augustus 2020	496,163	0,467
1 September 2020	632,054	0,144
1 Oktober 2020	y	0,072
1 November 2020	729,835	0,072
1 Desember 2020	783,270	

4.1 Toon deur berekening dat $x = 1{,}370$ korrek tot drie desimale plekke. (3)

4.2 Bereken y korrek tot drie desimale plekke. (3)

4.3 Verduidelik hoe om te toets of die data logisties gemodelleer kan word. Gee 'n ruwe skets van die funksie wat betrokke is. (Daar word nie van jou verwag om die wiskunde van die toets te onderneem nie.) (4)

4.4 Gegee: $\frac{\Delta P}{P} = -0{,}00339P + 2{,}335$, bepaal die dravermoë en die intrinsieke groeikoers van die virus. (4)

[14]

VRAAG 5

HIERDIE VRAAG IS MEERVOUDIGE KEUSE. JY KAN OOK BEREKENINGE TOON OM GEDEELTELIK PUNTE TE VERDIEN.

Verwys na die Lotka-Volterra- (roofdier-prooi-) model op die formuleblad en kies die korrekte opsie vir elkeen van die volgende:

5.1 Watter van die volgende beskryf die term $aR_n\left(1-\frac{R_n}{K}\right)$ die beste?

A		Die groei in die prooibevolking in elke siklus
B		Die sterftesyfer van die roofdiere
C		Die intrinsieke groeikoers van die prooi
D		Die hoeveelheid prooi in elke werpsel
E		Die ewewigsgetal roofdiere

(3)

5.2 Die aanvalskoers van jakkalse op konyne is 0,04. Daar word in elke maandelikse siklus 10 klein jakkalsies by die bevolking bygevoeg. Die parameter f = 0,0312. Die aanvanklike getal jakkalse is 40. 'n Beraming van die aanvanklike getal konyne is:

A		1 000
B		1 600
C		200
D		150
E		100

(3)

5.3 Vir 'n bepaalde roofdier-prooi-stelsel met 'n lewensiklus in maande word gegee dat $F_{n+1} = 0{,}98F_n + 0{,}00296R_nF_n$.

Ons kan aflei die leeftyd van die roofdier is:

A		24 maande
B		30 maande
C		36 maande
D		48 maande
E		50 maande

(3)

5.4 Watter van die volgende is beslis waar van die roofdier-prooi-model?

A ☐ Die aanvanklike aantal prooi is altyd dieselfde as die dravermoë.

B ☐ Hoe hoër die dravermoë, hoe hoër is die ewewigshoeveelheid van prooi.

C ☐ Die ewewigshoeveelheid roofdier word nie beïnvloed deur die intrinsieke groeikoers van die prooi nie.

D ☐ Wanneer die roofdiergetalle teen die vinnigste tempo afneem, begin die aantal prooi toeneem.

E ☐ Die voortplantingskoers van die roofdierbevolking hang af van die lewensverwagting van die bevolking.

(3)
[12]

VRAAG 6

'n Lening van *x* rand moet deur maandelikse paaiemente van *m* rand terugbetaal word wat een maand na die toestaan van die lening begin, met rente wat teen 12% per jaar, maandeliks saamgestel, bereken word. Na die eerste maand is die uitstaande saldo R1 197 000. Na die derde maand is die uitstaande saldo R1 190 909,70.

6.1 Skryf 'n rekursieformule vir die maandelikse uitstaande saldo P_{n+1} neer. (4)

6.2 Gebruik hierdie formule en bereken *m*. (8)
[12]

Totaal vir Module 3: 100 punte

MODULE 4 MATRIKSE EN GRAFIEKTEORIE

VRAAG 1

1.1 $2x+3y-5z=7$, $-2x+3z=3$ en $-2y+3z=20$ is vergelykings in 'n 3-dimensionele vlak. 'n Leerder plaas die vergelykings in 'n aangevulde matriks:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -5 & 7 \\ -2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 20 \end{array}\right)$$

(a) Pas $R_2 + R_1$ toe op ry 2. (2)

(b) Sit die proses voort om op te los vir *x*, *y* en *z* deur matriksalgebra te gebruik. (7)

1.2 'n Punt B (–1, 4) word deur die matriks $\begin{pmatrix} x & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ getransformeer, gevolg deur 'n verdere transformasie van $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Werk die enkele matriks van die gekombineerde transformasie uit in terme van *x*. (4)

(b) Indien *x* = 1 gegee word, bepaal die koördinate van B′, die getransformeerde punt. (3)

[16]

VRAAG 2

2.1 $A=\begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & x \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 28 & -x-1 \\ 0 & -x & 1 \\ -1 & -2y & x \end{pmatrix}$. Indien $B=A^{-1}$, gebruik matriksalgebra om die volgende te bepaal:

(a) Die determinant van matriks *A* in terme van *x*. (4)

(b) Die oplossings van *x* en *y*. (8)

2.2 Gegee: $i^2 = -1$. Los op vir *x* en *y* indien:

$$\begin{vmatrix} 6i & -3i & 1 \\ 4 & 3i & -1 \\ 20 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2x+3yi$$ (5)

[17]

VRAAG 3

3.1 (a) 'n Driehoek met koördinate, A(1; 1), B(1; 3) en C(2; 1) word getransformeer om die matriks: $A'(-1; 1)$, $B'(-3; 1)$ en $C'(-1; 2)$ te vorm. Bepaal die transformasiematriks. (6)

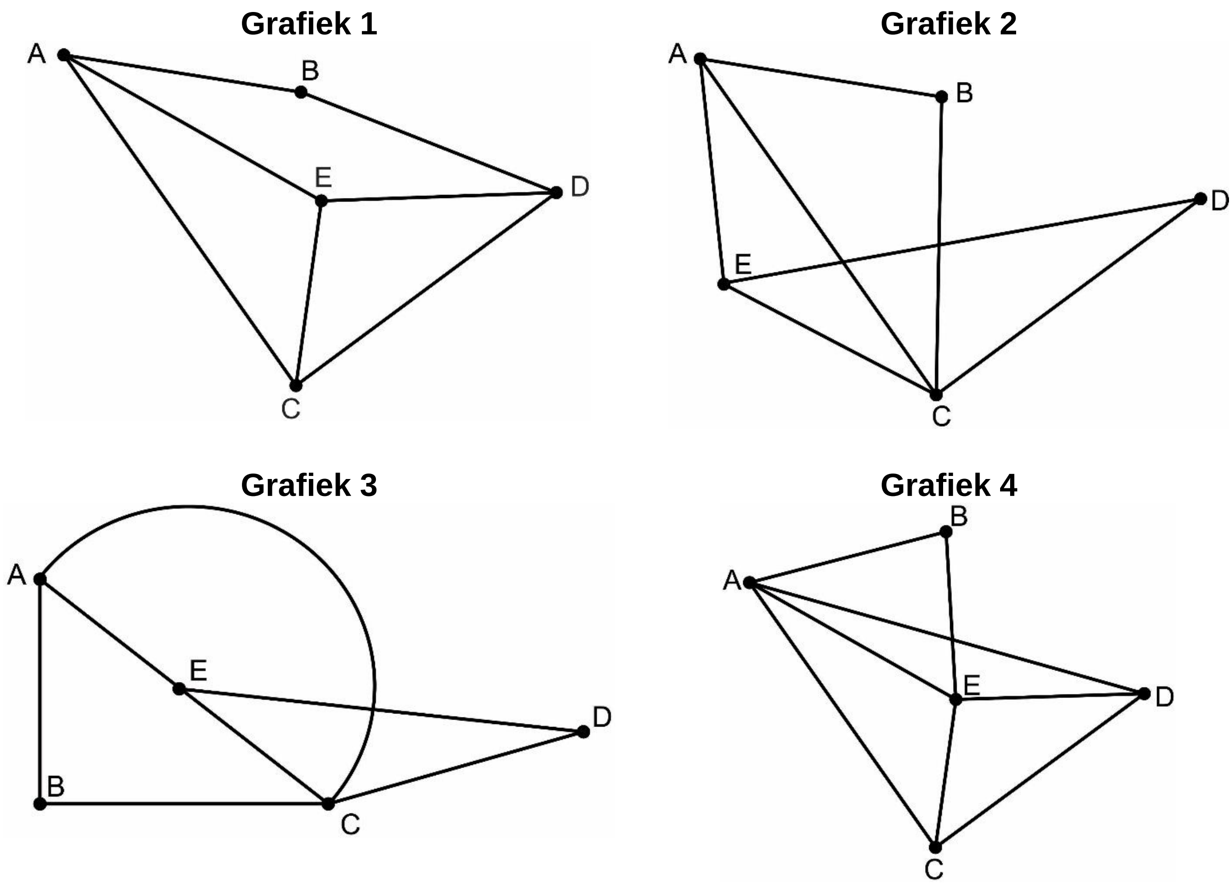
(b) Beskryf die transformasie in woorde. (3)

3.2 Laat $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. M word met 'n faktor van 4 vergroot en dan links om geroteer deur 'n hoek van 30°. Bereken die koördinate van M', die beeld van M. (7)

[16]

VRAAG 4

4.1

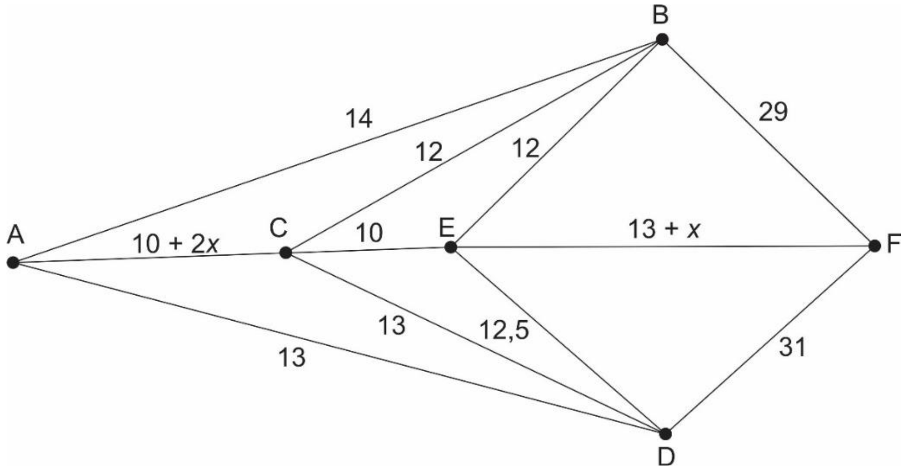


(a) Watter van die grafieke hierbo is isomorfies? (4)

(b) Teken die komplement van Grafiek 1 en van Grafiek 3. (6)

(c) Is die grafieke wat jy in Vraag 4.1 (b) geteken het isomorfies? (2)

4.2 Die diagram hieronder toon die 6 liggings in 'n koerierontvangnaaf. Die gewigte van die skakels verteenwoordig die tyd wat dit neem om die pakkie wat ontvang is, te vervoer waar $x > 0$. 'n Pakkie moet by A begin en elke skakel deurkruis om aan die burokratiese vereistes van die ontvangnaaf te voldoen voordat dit na A terugkeer.



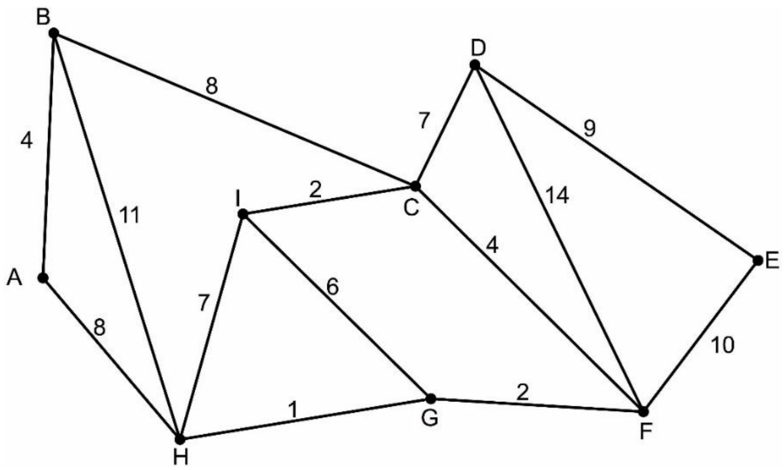
(a) Verduidelik waarom die pad A tot F herhaal moet word. (2)

(b) Die roete A-C-E is die **tweede** kortste roete wat A tot E verbind. Bepaal die reeks moontlike waardes vir x. (6)

(c) Skryf 'n vereenvoudigde uitdrukking, in terme van x, vir die minimum tyd vir die pakkie om elke skakel te deurkruis deur by A te begin en daarheen terug te keer. Skryf 'n moontlike roete neer. (8)

[28]

VRAAG 5



5.1 Gebruik Dijkstra se algoritme om die kortste pad van A na E te bepaal. Toon duidelike bewyse van jou berekening. Maak seker dat jy jou finale roete sowel as die lengte daarvan gee. (10)

5.2 Gebruik Prim se algoritme om die minimum spanboom te bepaal deur by nodus A te begin. Gee die volgorde waarin jy die skakels kies sowel as die gewig van die boom duidelik. (7)

[17]

VRAAG 6

'n Vorige Verdere Studies Wiskunde-leerder probeer om 'n wiskundige bewering deur volledige induksie te bewys. Die leerder het egter nog nooit induksie met matrikse gebruik nie.

Bewys deur volledige induksie dat $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1-2^n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$.

Die leerder se poging is soos volg:

Vir $n = 1$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,
$\therefore$ waar vir $n = 1$.
Neem aan waar vir $n = k$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & 1-2^k \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$.

Voltooi die proses vir die leerder deur waar te bewys vir $n = k + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

[6]

Totaal vir Module 4: 100 punte