The Petersburg Paradox by Durand

Growth Stocks and the Petersburg Paradox by David Durand
(Source: *The Journal of Finance*, *September 1957)*

Las acciones de crecimiento y la paradoja de Petersburgo por David Durand
(Fuente: *The Journal of Finance,* septiembre ***de 1957)***

The allure of growth stocks is partly in the excitement that is naturally stimulated by highly successful ever booming businesses—and partly in the potential for very large profits to investors. Ah, but what price should you pay? Author, Durand, linked this question to the Petersburg Paradox, a problem in valuation presented by Daniel Bernoulli.

El atractivo de las acciones de crecimiento está en parte en el entusiasmo que es estimulado naturalmente por las empresas altamente exitosas y siempre en auge, y en parte en el potencial de ganancias muy grandes para los inversores. Ah, pero ¿qué precio debes pagar? El autor, Durand, vinculó esta pregunta con la Paradoja de Petersburgo, un problema en la valoración presentado por Daniel Bernoulli.

--

This article will explain why using **high PERPETUAL growth rates** in a discounted cash flow formula result in nonsense. See here: http://thismatter.com/money/stocks/valuation/dividend-discount-model.htm

This is a classic investment article referred to by Benjamin Graham in his chapter, *Newer Methods for Valuing Growth Stocks in 4th Edition of Security Analysis (1962)*. (Stay tuned for that chapter to be posted).

Este artículo explicará por qué el uso de **altas tasas de crecimiento PERPETUO** en una fórmula de flujo de efectivo descontado resulta en tonterías. Ver aquí: http://thismatter.com/money/stocks/valuation/dividend-discount-model.htm

Este es un artículo de inversión clásico al que se refiere Benjamin Graham en su capítulo, Métodos más nuevos para valorar las acciones de crecimiento en la *4ª* edición de Security *Analysis (1962).* (Estad atentos para que ese capítulo sea publicado).

Graham: "It is important for the student to understand why this pleasingly simple method of valuing a common stock or group of stocks had to be replaced by more complicated methods, especially in the growth-stock field. It would work fairly plausibly for assumed growth rates up to, say, 5 percent. The latter figure produces a required dividend return of only 2 percent, or a multiplier of 33 for current earnings, if payout is two-thirds. ***But when the expected growth rate is set progressively higher, the resultant valuation of dividends or earnings increases very rapidly.*** *A 6.5% growth rate produces a multiplier of 200 for the dividend, and a growth rate of 7 percent or more makes the issue worthy of infinity if it pays any dividend. In other words, on the basis of this theory and method, no price would be too much to pay for such a common stock.*[1]

Graham: "Es importante que el estudiante entienda por qué este método agradablemente simple de valorar una acción común o un grupo de acciones tuvo que ser reemplazado por métodos más complicados, especialmente en el campo de las acciones de crecimiento. Funcionaría de manera *bastante plausible para las tasas de crecimiento asumidas hasta, digamos, 5 por ciento. Esta última cifra produce un retorno de dividendo requerido de solo 2 por ciento, o un multiplicador de 33 para las ganancias actuales, si el pago es de dos tercios.* ***Pero cuando la tasa de crecimiento esperada se establece progresivamente más alta, la valoración resultante de dividendos o ganancias aumenta muy rápidamente.*** *Una tasa de crecimiento del 6,5% produce un multiplicador de 200 para el dividendo, y una tasa de crecimiento del 7 por ciento o más hace que la emisión sea digna de infinito si paga algún dividendo. En otras palabras, sobre la base de esta teoría y método, ningún precio sería demasiado para pagar por tales acciones ordinarias.* [1]

--

At a time like the present, when investors are avidly seeking opportunities for appreciation, it is appropriate to consider the **difficulties of appraising growth stocks.** There is little doubt that when other things are equal the forward-looking investor will prefer stocks with growth potential to those without. **But other things rarely are equal—particularly in a sophisticated market that is extremely sensitive to growth.** When the growth potential of a stock becomes widely recognized, its price is expected to react favorably and to advance far ahead of stocks lacking growth appeal, so that its price-earnings ratio and dividend yield fall out of line according to conventional standards. Then the choice between growth and lack of growth is no longer obvious, and the **astute investor must ask whether the market price correctly *discounts* the growth potential. It is possible that the market may, at times, pay too much for growth?**

En un momento como el actual, en el que los inversores buscan ávidamente oportunidades de apreciación, es apropiado considerar las **dificultades de evaluar las acciones de crecimiento.** Hay pocas dudas de que cuando otras cosas son iguales, el inversor con visión de futuro preferirá las acciones con potencial de crecimiento a las que no lo tienen. **Pero otras cosas rara vez son iguales, particularmente en un mercado sofisticado que es extremadamente sensible al crecimiento.** Cuando el potencial de crecimiento de una acción se vuelve ampliamente reconocido, se espera que su precio reaccione favorablemente y avance muy por delante de las acciones que carecen de atractivo para el crecimiento, de modo que su relación precio-ganancias y el rendimiento de los dividendos se desfasan de acuerdo con los estándares convencionales. Entonces la elección entre crecimiento y falta de crecimiento ya no es obvia, y el **inversor astuto debe preguntarse si el precio de mercado *descuenta*** correctamente **el potencial de crecimiento. ¿Es posible que el mercado, a veces, pague demasiado por el crecimiento?**

Most problems encountered in appraising growth stocks seem to fall into two categories. First there are the practical difficulties of *forecasting* sales, earnings, and dividends. Then comes the theoretical difficulties of reducing these forecasts to present values. **For a long time it seems to have been assumed, altogether too casually, that the present value of a forecasted dividend stream could be represented simply as the sum of all expected future payments discounted at a uniform rate.** Doubts, however, are beginning to manifest themselves. As early as 1938, J. B. Williams suggested non-uniform discount rates, varying from payment to payment.[2] More recently, Clendenin and Van Cleave have shown that discounting forecasted dividends at a uniform rate in perpetuity may lead to absurdities or paradoxes, since implied present value of infinity sometime result. "We have not yet seen any growth stocks marketed at the price of infinity dollars per share," they remark, "but we shall hereafter be watching. Of course, many investors are skeptical and would probably wish to discount the large and remote dividends in this perpetually growing series at a high discount rate, thus reducing our computed value per share to a figure somewhat below the intriguing value of infinity."[3] Clendenin and Van Cleave might have made a good point even better had they noticed a remarkable analogy between the appraisal of growth stocks and the famous Petersburg Paradox, which commanded the attention of most of the important writers on probability during the eighteenth and nineteenth centuries.

La mayoría de los problemas encontrados en la apreciación de las acciones de crecimiento parecen dividirse en dos categorías. En primer lugar están las dificultades prácticas de *la previsión* de ventas, ganancias y dividendos. Luego vienen las dificultades teóricas de reducir estas previsiones a valores actuales. **Durante mucho tiempo parece haberse supuesto, de forma demasiado casual, que el valor actual de un flujo de dividendos previsto podría representarse simplemente como la suma de todos los pagos futuros esperados descontado a un tipo uniforme.** Las dudas, sin embargo, comienzan a manifestarse. Ya en 1938, J.B. Williams sugirió tasas de descuento no uniformes, que variaban de un pago a uno. [2] Más recientemente, Clendenin y Van Cleave han demostrado que descontar los dividendos previstos a una tasa uniforme a perpetuidad puede conducir a absurdos o paradojas, ya que el valor presente implícito del infinito en algún momento resulta. "Todavía no hemos visto ningún crecimiento de las acciones comercializado al precio de infinitos dólares por acción", remarcan, "pero en lo sucesivo estaremos atentos. Por supuesto, muchos inversores son escépticos y probablemente desearían descontar los dividendos grandes y remotos en esta serie en constante crecimiento a una alta tasa de descuento, reduciendo así nuestro valor calculado por acción a una cifra algo por debajo del valor intrigante del infinito". [3] Clendenin y Van Cleave podrían haber hecho un buen punto aún mejor si hubieran notado una notable analogía entre la evaluación de las acciones de crecimiento y la famosa Paradoja de Petersburgo, que ateyó la atención de la mayoría de los escritores importantes sobre la probabilidad durante los siglos XVIII y XIX.

1 David Durand has commented on the parallel between this aspect of growth-stock valuation and the famous mathematical anomaly known as the "Petersburg Paradox."
2 John B. Williams, The Theory of Investment Value, 1938), pages 50-60.
3 John C. Clendenin and Maurice Van Cleave, "Growth and Common Stock Values," Journal of Finance 9 (1954), 23-36.

THE PETERBURG PARADOX

In 1738 Daniel Bernoulli presented before the Imperial Academy of Sciences in Petersburg a classic paper on probability, in which he discussed the following problem attributed to his cousin Nicholoas: "Peter tosses a coin and continues to do so until it should land 'heads' on the very first throw, two ducats if he gets it on the second, four if on the third, eight if on the fourth, and so on, so that with each additional throw the number of ducats he must pay is doubled. Suppose we seek to determine the value of Paul's expectation."[4]

En 1738 Daniel Bernoulli presentó ante la Academia Imperial de Ciencias de Petersburgo un artículo clásico sobre probabilidad, en el que discutía el siguiente problema atribuido a su primo Nicholoas: "Pedro lanza una moneda y continúa haciéndolo hasta que aterrice 'caras' en el primer lanzamiento, dos ducados si la consigue en el segundo, cuatro si en el tercero, ocho si en el cuarto, y así sucesivamente, de modo que con cada lanzamiento adicional se duplica el número de ducados que debe pagar. Supongamos que buscamos determinar el valor de la expectativa de Pablo". [4].

Sequence of Tosses	Probability	Payment
H	½	1
TH	¼	2
TTH	1/8	4
TTTH	1/16	8
TTTTH	1/32	16

One may easily obtain a solution according to the principles of mathematical expectation by noting the sequence of payments and probabilities in Figure1: Paul's expectation is the sum of the products of probability by payment or ½ + 2/4 + 4/8 + 8/16 + 16/32 + ...
If the players agree to terminate the game of n tosses, whether a head shows or not, the series will contain n terms and its sum will be n/2; but if they agree to continue without fail until a head shows, as the rules of the game stipulate, then n is infinite and the sum n/2 is infinite as well. **Thus the principles of mathematical expectation imply that Paul should pay an infinite price to enter this game, but this is a conclusion that virtually no one will accept.** A variety of explanations have been given to show that the value of the game to Paul is, in fact, only a finite amount—usually a small finite amount; and all of the explanations are relevant to growth stock appraisal....

Uno puede obtener fácilmente una solución de acuerdo con los principios de la expectativa matemática al notar la secuencia de pagos y probabilidades en la Figura 1: La expectativa de Pablo es la suma de los productos de probabilidad por pago o 1/2 + 2/4 + 4/8 + 8/16 + 16/32 + ...
Si los jugadores acuerdan terminar el juego de n lanzamientos, ya sea que una cabeza se muestre o no, la serie contendrá n términos y su suma será n/2; pero si acuerdan continuar sin falta hasta que aparezca una cara, como estipulan las reglas del juego, entonces n es infinito y la suma n/2 también es infinita. **Por lo tanto, los principios de la expectativa matemática implican que Pablo debe pagar un precio infinito para entrar en este juego, pero esta es una conclusión que prácticamente nadie aceptará.** Se han dado una variedad de explicaciones para mostrar que el valor del juego para Pablo es, de hecho, sólo una cantidad finita, generalmente una pequeña cantidad finita; y todas las explicaciones son relevantes para la evaluación de las acciones de crecimiento...

4 Daniel Bernoulli, "Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk," Econometrica 22 (1954), 23-36

ATTEMPTS TO RESOLVE THE PETERSBURG PARADOX5
INTENTOS DE RESOLVER LA PARADOJA DE PETERSBURGO5

The many attempts to resolve the paradox, summarized very briefly below, fall mostly into two broad groups: those denying the basic assumptions of the game as unrealistic, and those arguing from additional assumptions that the value of the game to Paul is less than its mathematical expectation.

Los muchos intentos de resolver la paradoja, resumidos muy brevemente a continuación, caen principalmente en dos grandes grupos: los que niegan las suposiciones básicas del juego como poco realistas, y los que argumentan a partir de suposiciones adicionales que el valor del juego para Paul es menor que su expectativa matemática.

The basic assumptions of the game are open to all sorts of objections from the practically minded. How, in real life, can the game continue indefinitely? For example, Peter and Paul are mortal; so, after a misspent youth, a dissipated middle age, and a dissolute dotage, one of them will dies, and the game will cease—heads or no heads. Or again, Peter's solvency is open to question, for the stakes advance at an alarming rate. With an initial payment of one dollar, **Peter's liability after only 35 tails exceeds the gold reserve in Fort Knox**, and after only three more, it exceeds the volume of bank deposits in the United States and approximately equals the national debt.
With this progression, the sky is, quite literally, the limit. Even if Peter and Paul agree to cease after 100 tosses, the stakes, though finite, stagger the imagination.

Los supuestos básicos del juego están abiertos a todo tipo de objeciones de los que tienen una mentalidad práctica. ¿Cómo, en la vida real, puede el juego continuar indefinidamente? Por ejemplo, Pedro y Pablo son mortales; así que, después de una juventud malgastada, una edad media disipada y un dotage disoluto, uno de ellos morirá, y el juego cesará: cabezas o ninguna cabeza. O de nuevo, la solvencia de Pedro está abierta a la duda, ya que lo que está en juego avanza a un ritmo alarmante. Con un pago inicial de un dólar, **la responsabilidad de Peter después de sólo 35 colas excede la reserva de oro en Fort Knox,**y después de sólo tres más, supera el volumen de depósitos bancarios en los Estados Unidos y aproximadamente iguala la deuda nacional.

Despite these serious practical objections, a number of writers chose to accept the assumption of an indefinitely prolonged game at face value, and to direct their attention toward ascertaining the value of such a game to Paul. First among these was the Swiss mathematician Gabriel Cramer, who early in the eighteenth century proposed two arbitrary devices for resolving the Petersburg Paradox by assuming that the utility of money is less than proportional to the amount held. First, if the utility of money is less than proportional to the amount held. First, if the utility of money is proportional to the amount up to 2^24 = 166,777,216 ducats and constant for amounts exceeding 2^24, so that the utility of the payments ceases to increase after the 24th toss, Paul's so-called moral expectation is about 13 ducats. Second, if the utility of money is assumed equal to the square root of the amount held, Paul's moral expectation is only about 2.9 ducats. Cramer believed that 2.9 was a more reasonable entrance fee than 13.

Con esta progresión, el cielo es, literalmente, el límite. Incluso si Pedro y Pablo acuerdan cesar después de 100 lanzamientos, las apuestas, aunque finitas, escalonan la imaginación.
A pesar de estas serias objeciones prácticas, varios escritores optaron por aceptar la suposición de un juego indefinidamente prolongado al pie de la letra, y dirigir su atención hacia la determinación del valor de tal juego para Pablo. El primero de ellos fue el matemático suizo Gabriel Cramer, quien a principios del siglo XVIII propuso dos dispositivos arbitrarios para resolver la Paradoja de Petersburgo asumiendo que la utilidad del dinero es menos que proporcional a la cantidad mantenida. En primer lugar, si la utilidad del dinero es menor que proporcional a la cantidad mantenida. En primer lugar, si la utilidad del dinero es proporcional a la cantidad hasta 2^24 = 166.777.216 ducados y constante para cantidades superiores a 2^24, de modo que la utilidad de los pagos deja de aumentar después del 24º tiro, la llamada expectativa moral de Pablo es de unos 13 ducados. En segundo lugar, si se asume que la utilidad del dinero es igual a la raíz cuadrada de la cantidad sostenida, la expectativa moral de Pablo es sólo de unos 2,9 ducados. Cramer creía que 2.9 era una tarifa de entrada más razonable que 13.

A little later and apparently independently, Daniel Bernoulli devised a solution only slightly different from Cramer's **assuming that the marginal utility of money is inversely proportional to the amount held;** he derived a formula that evaluates Paul's expectation in terms of his resources at the beginning of the game. From this formula, which does not lend itself to lightning computation, Bernoulli estimated roughly that the expectation is worth about 3 ducats to Paul when his resources are 10 ducats, about 4 ducats when his resources are 100, and about 6 when his resources are 1000, At this rate, Paul must have infinite resources before he can value his expectation at infinity; but then, even his infinite valuation will constitute only an infinitesimally small fraction of his resources.

Un poco más tarde y aparentemente independientemente, Daniel Bernoulli ideó una solución sólo ligeramente diferente de la de Cramer **asumiendo que la utilidad marginal del dinero es inversamente proporcional a la cantidad mantenida;** derivó una fórmula que evalúa las expectativas de Pablo en términos de sus recursos al comienzo del juego. A partir de esta fórmula, que no se presta a la computación relámpago, Bernoulli estimó aproximadamente que la expectativa vale alrededor de 3 ducados a Pablo cuando sus recursos son 10 ducados, unos 4 ducados cuando sus recursos son 100, y alrededor de 6 cuando sus recursos son 1000, A este ritmo, Pablo debe tener recursos infinitos antes de que pueda valorar su expectativa en el infinito; pero entonces, incluso su valoración infinita constituirá sólo una fracción infinitesimalmente pequeña de sus recursos.

An interesting variant of Bernoulli's approach was proposed about a century later by W.A. Whitworth[6]--at least, some of us would consider it a variant though its author considered it an entirely different argument. Whitworth was, in fact, seeking a solution to the Petersburg problem that would be free of arbitrary assumptions concerning the utility of money; and he derived a solution by considering the risk of gamblers' ruin, which is always present when players have limited resources. Thus, for example, if A with one dollar matches pennies indefinitely against B with $10, it is virtually certain that one of them will eventually be cleaned out; furthermore, A has 10 chances out of 11 of being the victim. Accordingly, a prudent A might demand some concession in the odds as the price of playing against B But how much concession? **Whitworth attacked this and other problems by assuming a prudent gambler will risk a constant proportion of his resources, rather than a constant amount, on each venture; and he devised a system for evaluation ventures that entail risk of ruin.** Applied to the Petersburg game, this system indicates that Paul's entrance fee should depend upon his resources. Thus Whitworth's solution is reminiscent of Bernoulli's – particularly when one realizes that Whitworth's basic assumption implies an equivalences between a dime bet for A with $1 and a dollar bet for B with $10. Bernoulli, of course, would have argued that the utility of a dime to A was equal to the utility of a dollar to B. Finally, the notion of a prudent gambler seeking to avoid ruin has strong utilitarian undertones**; for it implies that the marginal utility of money is high when resources are running out.**

Una variante interesante del enfoque de Bernoulli fue propuesta aproximadamente un siglo más tarde por W.A. Whitworth[6]- al menos, algunos de nosotros lo consideraríamos una variante, aunque su autor lo consideró un argumento completamente diferente. Whitworth, de hecho, estaba buscando una solución al problema de Petersburgo que estuviera libre de suposiciones arbitrarias sobre la utilidad del dinero; y derivó una solución al considerar el riesgo de ruina de los jugadores, que siempre está presente cuando los jugadores tienen recursos limitados. Así, por ejemplo, si A con un dólar coincide indefinidamente con B con 10 dólares, es prácticamente seguro que uno de ellos eventualmente se limpiará; además, A tiene 10 posibilidades de ser la víctima. En consecuencia, una A prudente podría exigir alguna concesión en las probabilidades como el precio de jugar contra B Pero, ¿cuánta concesión? **Whitworth atacó este y otros problemas asumiendo que un jugador prudente arriesgará una proporción constante de sus recursos, en lugar de una cantidad constante, en cada empresa; e ideó un sistema para evaluar las empresas que conllevan el riesgo de ruina.** Aplicado al juego de Petersburgo, este sistema indica que la tarifa de entrada de Pablo debe depender de sus recursos. Por lo tanto, la solución de Whitworth recuerda a la de Bernoulli, particularmente cuando uno se da cuenta de que la suposición básica de Whitworth implica una equivalencia entre una apuesta de diez centavos por A con $1 y una apuesta en dólares por B con $10. Bernoulli, por supuesto, habría argumentado que la utilidad de un centavo a A era igual a la utilidad de un dólar a B. Por último, la noción de un jugador prudente que trata de evitar la ruina tiene fuertes matices utilitarios,**ya que implica que la utilidad marginal del dinero es alta cuando los recursos se están agotando.**

But Whitworth's approach—regardless of its utilitarian subtleties—is interesting because it emphasizes the **need for diversification**. **The evaluation of a hazardous venture—be it dice game, business promotion, or risky security---depends not only on the inherent odds, but also on the proportion of the risk-taker's resources that must be committed.** And just as the prudent gambler may demand odds stacked in his favor as the price for betting more than an infinitesimal proportion of his resources, so may the prudent portfolio manager demand a greater than normal rate of return (after allowing for the inherent probability of default) as the price of investing more than an infinitesimal proportion of his assets in a risky issue….

Pero el enfoque de Whitworth, independientemente de sus sutilezas utilitarias, es interesante porque enfatiza la necesidad de **diversificación. La evaluación de una empresa peligrosa, ya sea juego de dados, promoción de negocios o seguridad riesgosa--- depende no solo de las probabilidades inherentes, sino también de la proporción de recursos del que asume riesgos que se deben comprometer.** Y así como el jugador prudente puede exigir cuotas apiladas a su favor como el precio para apostar más de una proporción infinitesimal de sus recursos, también puede el administrador de cartera prudente exigir una tasa de retorno mayor de lo normal (después de tener en cuenta la probabilidad inherente de incumplimiento) como el precio de invertir más de una proporción infinitesimal de sus activos en un problema de riesgo....

Although the preceding historical account of the Petersburg Paradox has been of the sketchiest, it should serve to illustrate an important point. **The various proposed solutions, of which there are many, all involve changing the problem in one way of another.** Thus some proposals evaluate the cash value of a finite game, even when the problem specifies an infinite game; others evaluate the utility receipts, instead of the cash receipts, of an infinite game; and still others forsake evaluation for gamesmanship and consider what Paul as a prudent man should pay to enter. But although none of these proposals satisfy the theoretical requirements of the problem, they all help to explain why a real live Paul might be loath to pay highly for his infinite mathematical expectation. As Keynes aptly summed it up, "We are unwilling to be Paul, partly because we do not believe Peter will pay us if we have good fortune in the tossing, partly because we do not know what we should do with so much money….if we won it, partly because we do not believe we should ever win it, and partly because3 we do not think it would be an rational act to risk an infinite sum or even a very large sum for an infinitely larger one, whose attainment is infinitely unlikely."

Aunque el relato histórico anterior de la Paradoja de Petersburgo ha sido de los más esquemáticos, debería servir para ilustrar un punto importante. **Las diversas soluciones propuestas, que son muchas, implican cambiar el problema de una manera u otra.** Por lo tanto, algunas propuestas evalúan el valor en efectivo de un juego finito, incluso cuando el problema especifica un juego infinito; otras evalúan los recibos de servicios públicos, en lugar de los recibos en efectivo, de un juego infinito; y otras renuncian a la evaluación del juego y consideran lo que Pablo, como hombre prudente, debe pagar para entrar. Pero aunque ninguna de estas propuestas satisface los requisitos teóricos del problema, todas ayudan a explicar por qué un verdadero Pablo vivo podría ser reacio a pagar altamente por su infinita expectativa matemática. Como keynes acertadamente lo resumió, "No estamos dispuestos a ser Pablo, en parte porque no creemos que Pedro nos pagará si tenemos buena fortuna en el lanzamiento, en parte porque no sabemos lo que debemos hacer con tanto dinero...si lo ganamos, en parte porque no creemos que deberíamos ganarlo nunca, y en parte porque 3 no creemos que sería un acto racional arriesgar una suma infinita o incluso una suma muy grande por una infinitamente mayor, cuyo logro es infinitamente improbable".

5 For a general history of the paradox, see Isaac Todhunter, a History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Lapace
6 W. A. Whitworth, Choice and Change, 4th Edition, enlarged, 1886

IMPLICATIONS OF PETERSBURG SOLUTIONS FOR GROWTH-STOCK APPRAISAL

If instead of tossing coins, Peter organizes a corporation in a growth industry and offers Paul stock, the latter might be deterred from paying the full discounted value by any of the considerations that would deter him from paying the full mathematical expectation to enter the Petersburg game. And again, these considerations fall into two categories: first, those denying the basic assumptions concerning the rate of indefinitely prolonged growth; and second, those arguing that the value of the stock to Paul is less than its theoretical discounted value.

Si en lugar de la venta de monedas, Peter organiza una corporación en una industria en crecimiento y ofrece acciones de Paul, este último podría ser disuadido de pagar el valor total descontado por cualquiera de las consideraciones que lo disuadirían de pagar la expectativa matemática completa para entrar en el juego de Petersburgo. Y de nuevo, estas consideraciones se dividen en dos categorías: en primer lugar, aquellos que niegan los supuestos básicos sobre la tasa de crecimiento prolongado indefinidamente; y en segundo lugar, aquellos que argumentan que el valor de la acción para Paul es menor que su valor descontado teórico.

Underlying J.B. Williams'….. (way at looking at the problem is) the assumption that Peter, Inc., will pay dividends at an increasing rat g for the rest of time….A slightly different assumption…is that Peter will pay steadily increasing dividends until the game terminates with the toss of a head, and that the probability of a head will remain forever constant a i/(1 + i). **Under neither assumption is there any provision for the rate of growth ever to cease or even decline. But astronomers now predict the end of the world within a finite number of years—somewhere in the order of 10,000,000,000**—and realistic security analysts may question Peter, Inc., ability to maintain a steadily increasing dividend rate for anywhere near that long. Williams, in fact regarded indefinitely increasing dividends as strictly hypothetical, and he worked up formulas for evaluating growth

stocks on the assumption that dividends will follow a growth curve (called a logistic by Williams) that increases exponentially for a time and then levels off to an asymptote. This device guarantees that the present value of any dividend stream will be finite, no matter how high the current, and temporary rate of growth. Clendenin and Van Cleave, though not insisting on a definite ceiling, argued that continued rapid growth is possible only under long-run price inflation.
The assumption of indefinitely increasing dividends is most obviously objectionable when the growth rate equals or exceeds the discount rate (g > or = to i) and the growth series… sums to infinity….If Peter, Inc. is to pay a dividend that increases at a constant rate g >= I per year, it is absolutely necessary, though not sufficient, that he earn a rate on capital, r = E/B, that is greater than the rate of discount—more exactly, r >= i/(1-p). **But this situation poses an anomaly, at least for the equilibrium theorist, who argues that the marginal rate of return on capital must equal the rate of interest in the long run.** How, then, can Peter, Inc. continually pour increasing quantities of capital into his business and continue to earn on these accretions a rate higher than the standard rate of discount? This argument points toward the conclusion that growth stocks characterize business situations in which limited, meaning finite though not necessarily small, amounts of capital can be invested at rates higher than the equilibrium rate. If this is so, then the primary problem of the growth-stock appraiser is to estimate how long the departure from equilibrium will continue, perhaps by some device like Williams' growth curve.

Subyacente a J.B. Williams'..... (manera de ver el problema es) la suposición de que Peter, Inc., pagará dividendos en un aumento de rata g para el resto del tiempo....Una suposición ligeramente diferente... es que Peter pagará dividendos cada vez mayores hasta que el juego termine con el lanza de una cabeza, y que la probabilidad de una cabeza permanecerá para siempre constante a i/(1 + i). **Bajo ninguno de los dos supuestos se prevé que la tasa de crecimiento cese o incluso disminuya. Pero los astrónomos ahora predicen el fin del mundo dentro de un número finito de años, en algún lugar del orden de 10,000,000,000,**y los analistas de seguridad realistas pueden cuestionar la capacidad de Peter, Inc., para mantener una tasa de dividendos en constante aumento durante casi ese tiempo. Williams, de hecho, consideró que el aumento indefinido de dividendos era estrictamente hipotético, y elaboró fórmulas para evaluar las acciones de crecimiento en el supuesto de que los dividendos seguirán una curva de crecimiento (llamada logística por Williams) que aumenta exponencialmente durante un tiempo y luego se nivela a una asíntota. Este dispositivo garantiza que el valor actual de cualquier flujo de dividendos será finito, sin importar cuán alta sea la tasa de crecimiento actual y temporal. Clendenin y Van Cleave, aunque no insistieron en un techo definido, argumentaron que el crecimiento rápido y continuo sólo es posible bajo la inflación de precios a largo plazo.
La suposición de aumentar indefinidamente los dividendos es obviamente objetable cuando la tasa de crecimiento es igual o superior a la tasa de descuento (g > o = a i) y la serie de crecimiento... sumas hasta el infinito....Si Peter, Inc. va a pagar un dividendo que aumenta a una tasa constante g >= I por año, es absolutamente necesario, aunque no suficiente, que gane una tasa sobre el capital, r = E/B, que es mayor que la tasa de descuento—más exactamente, r >= i/(1-p). **Pero esta situación plantea una anomalía, al menos para el teórico del equilibrio, que sostiene que la tasa marginal de retorno sobre el capital debe ser igual a la tasa de interés en el largo plazo.** Entonces, ¿cómo puede Peter, Inc. verter continuamente cantidades cada vez mayores de capital en su negocio y continuar ganando con estas acumulaciones una tasa más alta que la tasa estándar de descuento? Este argumento apunta hacia la conclusión de que las acciones de crecimiento caracterizan situaciones de negocios en las que cantidades limitadas, es decir, finitas aunque no necesariamente pequeñas, de capital pueden invertirse a tasas superiores a la tasa de equilibrio. Si esto es así, entonces el principal problema del tasador de acciones de crecimiento es estimar cuánto tiempo

continuará la salida del equilibrio, tal vez por algún dispositivo como la curva de crecimiento de Williams.

If, for the sake of argument, Paul wishes to assume that dividend growth will continue infinitely at a constant rate, he can still find reason s for evaluating Peter's stock at somewhat less than its theoretical value just as he found reasons for evaluating his chances in the Petersburg game at less than the mathematical expectation. The decreasing –marginal-utility approach of Cramer and Bernoulli implies that the present utility value of a growing dividend stream is less than the discounted monetary value, because the monetary value of the large dividends expected in the remote future must be substantially

Si, por el bien de la discusión, Paul desea asumir que el crecimiento de dividendos continuará infinitamente a un ritmo constante, todavía puede encontrar razones para evaluar las acciones de Peter en algo menos que su valor teórico al igual que encontró razones para evaluar sus posibilidades en el juego de Petersburgo en menos de la expectativa matemática. El enfoque de utilidad marginal decreciente de Cramer y Bernoulli implica que el valor actual de utilidad de un flujo de dividendos creciente es menor que el valor monetario descontado, porque el valor monetario de los grandes dividendos esperados en el futuro remoto debe ser sustancialmente sustancial.

scaled-down in making a utility appraisal. Or again, Whitworth's diversification approach implies that a prudent Paul with finite resources can invest only a fraction of his portfolio in Peter's stock; otherwise he risks ruinous loss. And either argument is sufficient to deter Paul from offering an infinite price, unless, of course, his resources should be infinite.

reducido en la realización de una evaluación de servicios públicos. O de nuevo, el enfoque de diversificación de Whitworth implica que un Paul prudente con recursos finitos puede invertir sólo una fracción de su cartera en acciones de Peter; de lo contrario, corre el riesgo de perder de forma ruinosa. Y cualquiera de los dos argumentos es suficiente para disuadir a Pablo de ofrecer un precio infinito, a menos que, por supuesto, sus recursos sean infinitos.

The moral of all this is that conventional discount formulas do not provide completely reliable evaluations. Presumably they provide very satisfactory approximations for high-grade, short-term bonds and notes. But as quality deteriorates or duration lengthens, the approximations become rougher and rougher. **With growth stocks, the uncritical use of conventional discount formulas is particularly likely to be hazardous; for, as we have seen, growth stocks represent the ultimate in investments of long duration.** Likewise, they seem to represent the ultimate in difficulty of evaluation. The very fact that the Petersburg problem has not yielded a unique and generally acceptable solution to more than 200 years of attack by some of the world's great intellects suggest, **indeed, that the growth-stock problem offers no great hope of a satisfactory solution.**

La moraleja de todo esto es que las fórmulas de descuento convencionales no proporcionan evaluaciones completamente confiables. Es de suponer que proporcionan aproximaciones muy satisfactorias para los bonos y notas de alto grado y a corto plazo. Pero a medida que la calidad se deteriora o la duración se alarga, las aproximaciones se vuelven cada vez más ásperas. **En el**

caso de las existencias en crecimiento, es especialmente probable que el uso acrítico de fórmulas de descuento convencionales sea peligroso; ya que, como hemos visto, las existencias de crecimiento representan lo último en inversiones de larga duración. Del mismo modo, parecen representar lo último en dificultad de evaluación. El mero hecho de que el problema de Petersburgo no haya dado una solución única y generalmente aceptable a más de 200 años de ataque por parte de algunos de los grandes intelectos del mundo sugiere, de **hecho, que el problema de las existencias de crecimiento no ofrece grandes esperanzas de una solución satisfactoria.**