PRIMERA PRUEBA. PARTE A. PRÁCTICA.

El aspirante realizará, íntegro, el EJERCICIO 1 o el EJERCICIO 2.

EJERCICIO 1.

1.1.- Sea V un K-espacio vectorial, con K cuerpo de característica distinta de 2. Sea $f:V\to V$ una aplicación lineal tal que $f^2=Id$ y sean $V_1=\{a\in V, f(a)=a\}$, $V_2=\{a\in V, f(a)=-a\}$. Demostrar que $V=V_1\oplus V_2$. ¿Significa esto que para todo a en V se cumple $f(a)=a$ ó $f(a)=-a$? (Nota: $f^2=f\circ f$, $Id:V\to V$ tal que $Id(x)=x$).

1.2.- Sea la sucesión $u_1=\sqrt{a}$, $u_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}$, $u_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}$, ..., con a número real positivo. Probar si tiene límite y, en caso de que exista, hallarlo.

1.3.- Se dan dos circunferencias de centros O y O' y radios R y r, tangentes exteriores en el punto A. Se traza la tangente común en el punto de intersección de las dos circunferencias. Por un punto B de dicha tangente, se trazan dos tangentes BC y BC', siendo C y C' los puntos de contacto con cada una de las circunferencias.

a) Calcular el límite del cociente de las áreas de los triángulos ABC y ABC', cuando el punto B tiende hacia el punto A.

b) Calcular el límite anterior en el caso de que el punto B se aleje indefinidamente del punto A.

1.4.- En una circunferencia se seleccionan al azar tres puntos A, B y C, y se unen con tres segmentos, formando un triángulo inscrito en la circunferencia. Calcular la probabilidad de que ese triángulo no sea obtusángulo.

GOBIERNO DE ARAGON

Departamento de Educación, Cultura y Deporte

PRIMERA PRUEBA. PARTE A. PRÁCTICA.

EJERCICIO 2.

2.1.- Sea k un número natural no nulo y sea f la función real de variable real dada por:

$$f(x)=\begin{vmatrix} \binom{1}{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & 0 & \cdots & 0 & x^2 \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \cdots & 0 & x^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{k}{0} & \binom{k}{1} & \binom{k}{2} & \cdots & \binom{k}{k-1} & x^k \\ \binom{k+1}{0} & \binom{k+1}{1} & \binom{k+1}{2} & \cdots & \binom{k+1}{k-1} & x^{k+1} \end{vmatrix}$$

a) Calcular $f(x + 1) - f(x)$.

b) Expresar la suma $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$ mediante esta función.

2.2.- Demostrar que si una función f real de variable real cumple que

$$f(x) - f(y) \leq (x-y)^2$$

para cualesquiera x, y números reales, entonces f es una función constante.

2.3.- Dadas dos circunferencias, Σ, de centro O y radio R y Γ, de centro C y radio R/4. Γ rueda sin deslizar por la parte interior de Σ (siendo tangentes interiores). Hallar el lugar geométrico de un punto fijo de Γ. Escribir la ecuación de la curva resultante en coordenadas cartesianas.

2.4.- Un aficionado clasifica cada día como seco o mojado y supone que la probabilidad de que el tiempo atmosférico de cualquier día sea igual al precedente está dada por p, siendo $0 < p < 1$. Sea P_1 la probabilidad de que el tiempo sea seco el primer día y P_n la probabilidad de que sea seco el n – ésimo día.

a) Expresar P_n en función de p y P_1.

b) Calcular $\lim_{n\to+\infty} P_n$.