OPOSICIÓNS PES MATEMÁTICAS 2018.

PRIMEIRA PROBA. PARTE A.

OPCIÓN A

1. Determine o número máximo de puntos de intersección das diagonais dun polígono convexo de n lados.
   a. Contidos no interior do polígono.
   b. Situados no exterior do polígono.

2. Nunha división coñecese o dividendo 258728 e os restos sucesivos que se obtiveron ao ir efectuando a división, que son 379, 480 e 392. Achar o divisor e o cociente.Existe máis dunha división?. Xustifique a relación deste problema co currículo dunha materia desta especialidade.

3. As circunferencias C_0, C_1, ..., C_n, ...son tanxentes ás rectas ***a*** e ***b*** que se cortan en **P**, e cada C_n é tanxente á seguinte de menor radio C_{n+1}. Chamaremos O_n ao centro da circunferencia C_n, r_n ao seu radio, A_n o punto de tanxencia coa recta ***a***, T_n ao seu punto de tanxencia con C_{n+1} e d_n á distancia de P a O_n. Sexa $r_0=3$ e $d_0=12$.
   a. Exprese r_n e d_n en función de n.
   b. Calcule o límite da suma das áreas de todos os círculos.
   c. Demostre que os triángulos de vértices A_n, T_n, A_{n+1} son semellantes e rectángulos no vértice T_n.

4. Considere o espazo de funcións $F[0,1] = \{f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \ tal \ que \ f \ é \ unha \ función\}$. Coas operacións suma definida por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ e o produto definido por $(f.g)(x) = f(x).g(x)$ temos que $F[0,1]$ é un anel conmutativo e unitario. Consideremos o subanel A de $F[0,1]$ tal que A conteña ás funcións constantes. Para cada $x \in [0,1]$ considere a función avaliación

$$av_x: A \longrightarrow \mathbb{R} \quad dada \ por \quad f \longrightarrow f(x)$$

   a. Demostre que o núcleo $Ker(av_x)$ é un ideal maximal de A para todo $x \in [0,1]$.
   b. É certo que para cada ideal maximal **M** de A existe un $x \in [0,1]$ tal que $M = Ker(av_x)$? En caso afirmativo demóstreo e en caso contrario busque un exemplo que o avale.

5. Denomínase Cicloide á curva que describe un punto dunha circunferencia cando esta "roda" sobre unha recta.
   a. Ache unhas ecuacións paramétricas da cicloide, utilizando como parámetro o ángulo que describe o xiro efectuado pola circunferencia ao rodar.
   b. Utilice o resultado do apartado anterior para determinar a lonxitude dun arco de cicloide.

OPOSICIONES PES MATEMÁTICAS 2018.

PRIMERA PRUEBA. PARTE A.

OPCIÓN A

1. Determine el número máximo de puntos de intersección de las diagonales de un polígono convexo de n lados.
    a. Contenidos no interior do polígono.
    b. Situados no exterior do polígono.

2. En una división se conoce el dividendo 258728 y los restos sucesivos que se obtuvieron al ir efectuando la división, que son 379, 480 e 392. Halle el divisor y el cociente. ¿Existe más de una división? Justifique la relación de este problema con el currículo de una materia de esta especialidad.

3. Las circunferencias C_0, C_1, ..., C_n, ...son tangentes a las rectas ***a*** y ***b*** que se cortan en **P**, y cada C_n es tangente a la siguiente de menor radio C_{n+1}. Llamaremos O_n al centro de la circunferencia C_n, r_n a su radio, A_n al punto de tangencia con la recta ***a***, T_n a su punto de tangencia con C_{n+1} e d_n a la distancia de P a O_n. Sea $r_0=3$ e $d_0=12$.
    a. Exprese r_n y d_n en función de n.
    b. Calcule el límite de la suma de las áreas de todos los círculos.
    c. Demuestre que los triángulos de vértices A_n, T_n, A_{n+1} son semejantes y rectángulos en el vértice T_n.

4. Considere el espacio de funciones $F[0,1] = \{f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \ tal\ que\ f\ es\ una\ función\}$. Con las operaciones suma definida por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ y el producto definido por $(f.g)(x) = f(x).g(x)$ tenemos que $F[0,1]$ es un anillo conmutativo y unitario. Consideremos el subanillo A de $F[0,1]$ tal que A contenga a las funciones constantes. Para cada $x \in [0,1]$ considere la función evaluación

$$av_x: A \longrightarrow \mathbb{R} \quad dada\ por \quad f \longrightarrow f(x)$$

    a. Demuestre que el núcleo $Ker(av_x)$ es un ideal maximal de A para todo $x \in [0,1]$.
    b. ¿Es cierto que para cada ideal maximal **M** de A existe un $x \in [0,1]$ tal que $\boldsymbol{M} = Ker(av_x)$? En caso afirmativo demuéstrelo y en caso contrario busque un ejemplo que lo avale.

5. Se denomina Cicloide a la curva que describe un punto de una circunferencia cuando esta "ruede" sobre una recta.
    a. Halle unas ecuaciones paramétricas de la cicloide, utilizando como parámetro el ángulo que describe el giro efectuado por la circunferencia al rodar.
    b. Utilice e resultado del apartado anterior para determinar la longitud de un arco de cicloide.

OPOSICIONES PES MATEMÁTICAS 2018.

PRIMERA PRUEBA. PARTE A.

OPCIÓN B

1. Sea $f:[3,5] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua que es derivable en $(3,5)$ y tal que $f(3)=6$ y $f(5)=10$

(a) Considere la función $g:[3,5] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x)=\frac{f(x)}{x}$. Demuestre que existe $x_0 \in (3,5)$ tal que $g'(x_0)=0$.

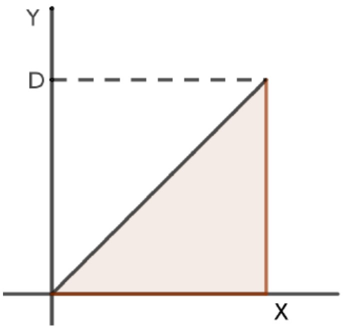
(b) Demuestre que entre todas las rectas tangentes a la gráfica de f, al menos una de ellas pasa por el origen de coordenadas.

(c) Sea $[a,b]$ un intervalo que no contiene al 0. Sea $h:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua que es derivable en (a,b) y tal que $\frac{h(a)}{a}=\frac{h(b)}{b}$. Demuestre que existe $x_0 \in (a,b)$ tal que la tangente a la gráfica de h en el punto $(x_0, h(x_0))$ pasa por $(0,0)$.

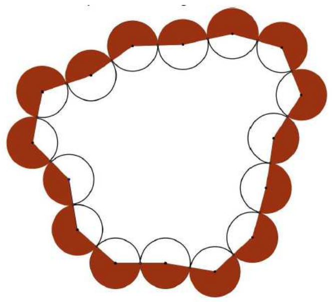
2. El precio de la entrada a un cine es de 640 unidades monetarias (u.m.) para una persona adulta es de 330 u.m. para una persona menor de edad. Si una persona compró entradas por valor de 7140 u.m., ¿cuántas entradas de cada tipo compró, sabiendo que compró menos entradas de persona adulta que de menor de edad?

3. Dadas dos circunferencias que no tienen puntos en común, calcule el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que son tangentes a ambas.

4.
La función de densidad de probabilidad (fdp) conjunta de una variable aleatoria bidimensional (X,Y) es uniforme en la región sombreada en el gráfico donde D es unha constante.
(a) Escriba la expresión correspondiente de la fdp conjunta de X e Y. Compruebe que es fdp.
(b) Calcule $P(X<D/2, Y<D/4)$.
(c) Calcule las fdp marginales de X y la de Y. Compruebe en ambos casos que realmente son fdp.



5.
a) Disponemos de una cadena de 16 círculos de igual radio, tangentes entre si dos a dos tal como se muestra en la figura. Demuestre que, se ponga como se ponga la cadena, la diferencia entre las superficies oscura y clara siempre es la misma y exprese esa diferencia en función del área de uno de los círculos.



b) Justifique la relación de este problema con el currículo de una materia de esta especialidad.

OPOSICIÓNS PES MATEMÁTICAS 2018.

PRIMEIRA PROBA. PARTE A.

OPCIÓN B

1. Sexa $f:[3,5]\to\mathbb{R}$ unha función continua que é derivable en $(3,5)$ e tal que $f(3)=6$ e $f(5)=10$.

(a) Considere a función $g:[3,5]\to\mathbb{R}$ definida por $g(x)=\frac{f(x)}{x}$. Demostre que existe $x_0\in(3,5)$ tal que $g'(x_0)=0$.

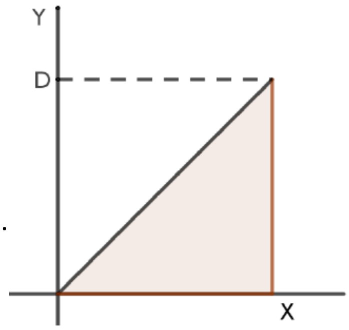
(b) Demostre que entre todas as rectas tanxentes á gráfica de f alomenos unha delas pasa pola orixe de coordenadas.

(c) Sexa $[a,b]$ un intervalo que non contén ao 0. Sexa $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ unha función continua que é derivable en (a,b) e tal que $\frac{h(a)}{a}=\frac{h(b)}{b}$. Demostre que existe $x_0\in(a,b)$ tal que a tanxente á gráfica de h no punto $(x_0,h(x_0))$ pasa por $(0,0)$.

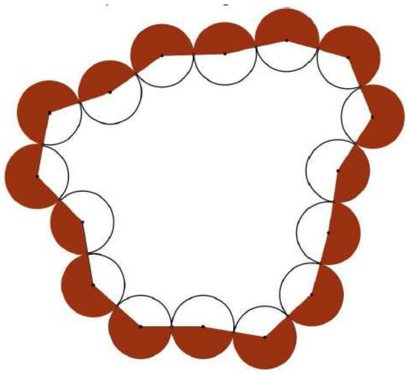
2. O prezo da entrada a un cine é de 640 unidades monetarias (u.m.) para unha persoa adulta e de 330 u.m. para unha persoa menor de idade. Se unha persoa mercou entradas por valor de 7140 u.m., cantas entradas de cada tipo mercou, sabendo que mercou menos entradas de persoa adulta que de menor de idade?

3. Dadas dúas circunferencias que non teñen puntos en común, calcule o lugar xeométrico dos centros das circunferencias que son tanxentes a ambas.

4. A función de densidade de probabilidade (fdp) conxunta dunha variable aleatoria bidimensional (X,Y) é uniforme na rexión sombreada no gráfico onde D é unha constante.
(a) Escriba a expresión correspondente da fdp conxunta de X e Y. Comprobe que é fdp.
(b) Calcule $P(X<D/2, Y<D/4)$.
(c) Calcule as fdp marxinais de X e ade Y. Comprobe en ambos casos que realmente son fdp.



5. a) Dispoñemos dunha cadea de 16 círculos de igual radio, tanxentes entre si dous a dous tal como se mostra na figura. Demostre que, poñas como poñas a cadea, a diferenza entre as superficies oscura e clara é sempre a mesma e exprese esa diferenza en función da área dun círculo.



b) Xustifique a relación deste problema co currículo dunha materia desta especialidade.