UNIVERSIDAD NACIONAL
DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

NOMBRE . . . .
APELLIDOS . . . .
CALLE . . . .
POBLACIÓN . . . .
PROVINCIA . . . . C.P. . . . .

PROCESOS ESTOCÁSTICOS

PRUEBA DE EVALUACIÓN A DISTANCIA / 1
UNIDAD DIDÁCTICA / 1

Número de Expediente

08513PE01A13

Problema 1. El número de partículas en una región del espacio evoluciona de la siguiente manera: en cada unidad de tiempo, cada partícula contenida en ella tiene una probabilidad q de salir del recinto; por otra parte el número de partículas que ingresan en la región, por unidad de tiempo, tiene distribución de Poisson de parámetro λ.

a) Expresar las probabilidades de transición que rigen la evolución del número de partículas contenidas en la región en cada unidad de tiempo. Comprobar que verifican las condiciones adecuadas.

b) Obtener la distribución límite del número de partículas contenidas en la región.

c) Determinar la probabilidad de que la región llegue a estar vacía y el tiempo medio entre dos ocasiones consecutivas en que la región esté vacía.

Problema 2. K moléculas están repartidas al azar entre dos recipientes A y B conectados por un tubo. En cada etapa una de las K moléculas, elegida al azar, cambia de recipiente.

a) Hallar la distribución límite del número de moléculas en A. Deducir la probabilidad de que el recipiente A llegue a estar vacío y el tiempo medio de recurrencia de tal situación.

b) Supuesto que inicialmente la recipiente A está vacía, hallar el número esperado de moléculas en A después de n cambios. Para ello deducir que $E_n = (1 - \frac{2}{K})E_{n-1} + 1$.

Problema 3. Dos urnas A y B contienen 2 bolas blancas y 2 negras respectivamente. En cada etapa se saca al azar una bola de cada urna y se intercambian. Hallar

a) la distribución del número de bolas blancas en A después de n cambios.

b) la distribución del número de cambios necesarios para que vuelva a haber dos bolas blancas A.

c) la distribución del número de veces que la urna A contiene dos bolas negras antes de que vuelva a haber dos bolas blancas en A.

Problema 4. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas, con distribución

$$P\{X_n = -1\} = p \ , \ P\{X_n = 2\} = 1 - p$$

a) Probar que $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ es una cadena de Markov.

b) Determinar la distribución de S_n.

c) Clasificar, en función de p, los estados de la cadena.

d) Si $S_n = i$, obtener la probabilidad de que sea $S_{n+k} = 0$ para algún k.

Problema 5. Una moneda se lanza sucesivamente hasta que aparecen dos caras consecutivas o tres cruces consecutivas.

a) Plantear la cadena de Markov que permite determinar la probabilidad de que se produzca cada uno de los finales posibles. Determinar la matriz $(f_{i,j})$ de probabilidades totales de pasar de un estado a otro y la matriz $(P_{i,j}(1))$ de números medios de veces que se pasa por cada estado.

b) Supuesto que los lanzamientos acaban en dos caras, hallar el número medio de lanzamientos efectuados.

c) Supongamos ahora que el jugador paga 5 ó 10 según cual sea el final y que, hasta entonces, recibe 3 por cada cara y 5 por cada par de cruces consecutivas. Calcular el beneficio esperado del jugador.

Problema 6. Dos urnas A y B contiene inicialmente 4 bolas y ninguna respectivamente. En cada etapa se escogen dos bolas al azar entre las cuatro y se introducen una en cada urna. Calcular:

a) La distribución del número de bolas que hay en A después de la etapa n.

b) El tiempo medio que se tarda en tener por primera vez tres bolas en B; y el tiempo medio para tener por segunda vez tres bolas en B.

c) El número medio de etapas que se tarda en que las cuatro bolas hayan pasado alguna vez por la urna B.

Problema 7. Una urna contiene 4 bolas blancas y 4 negras. Se extraen parejas de bolas y si ambas son del mismo color se dejan fuera, mientras que si son distintas se devuelven a la urna. Determinar

a) la distribución del número de extracciones necesarias para que la urna quede vacía y su media.

b) la distribución del número de bolas en la urna después de n extracciones.

c) la distribución del número de veces que la urna contiene 4 bolas y su media.

Problema 8. Inicialmente una empresa tiene dos máquinas iguales con una de las cuales ha de atender a ciertas circunstancias ocasionales que pueden presentarse una única vez a lo largo de cada jornada, con probabilidad $1/3$. Cada vez que una máquina es utilizada es necesario enviarla, al final de la jornada, a un taller de ajuste en el que hay un único operario que tarda dos jornadas completas en devolver la máquina en estado de funcionamiento. Las tareas de las máquinas que no pueden ser atendidas en el momento en que se producen son perdidas por la empresa.

a) Determinar la distribución del número de máquinas que tiene disponibles la empresa al cabo de n días.

b) Hallar la proporción de tiempo que trabaja el operario del taller de ajuste.

c) Calcular el tiempo medio que transcurre hasta que no hay ninguna máquina disponible.

d) Si cada día en el que no hay máquinas disponibles supone un coste C, analizar si es conveniente contratar un segundo operario para el taller, con un jornal k, sabiendo que en el ajuste de una máquina sólo puede trabajar una persona.

Problema 9. Tres personas sentadas en torno a una mesa juegan de la siguiente forma: el que le toca jugar lanza tres monedas y gana si obtiene tres caras; si obtiene una cruz continua jugando; si obtiene dos cruces pasa el turno al jugador de su derecha y si obtiene tres cruces pasa el turno al jugador de su izquierda. Calcular:

a) la probabilidad de que gane la persona que está a la derecha del que inicia el juego.

b) la distribución del número de lanzamientos que realiza la persona que está a la izquierda del que inicia el juego.

c) la distribución de la duración de la partida.

d) la duración media de las partidas que gana el jugador de la derecha del que inicia el juego.

e) Si cada tirada hay que poner una peseta en el plato, que se lleva el que gane el juego, determinar el beneficio esperado de cada jugador.

Problema 10. Dos jugadores A y B juegan partidas sucesivas en las que A gana con probabilidad p y B con probabilidad $q = 1-p$. Gana la competición quien consiga k victorias consecutivas. Hallar

a) la probabilidad de que cada uno gane el torneo.

b) la duración esperada de la competición.

Problema 11. Dos jugadores A y B juegan partidas sucesivas en las que A gana con probabilidad p y B con probabilidad $q = 1-p$. Gana la competición quien consiga 2 victorias consecutivas. Hallar

a) la probabilidad de que A gane el torneo como resultado de la partida n.

b la distribución de la duración del torneo.

Problema 12. Dos jugadores A y B juegan partidas sucesivas en las que A gana con probabilidad 3/5 y B con probabilidad 2/5. Gana la competición quien consiga 2 victorias consecutivas. En cada partida el perdedor pone una peseta en el plato y el ganador del torneo se lleva el contenido del plato. Determinar el beneficio esperado de cada jugador.

CONSULTAS
REFERENTES AL CONTENIDO DE LOS TEMAS Y METODOLOGÍA DE SU ESTUDIO

RESPUESTAS DEL PROFESOR

EVALUACIÓN	PRUEBA OBJETIVA	PRUEBA DE ENSAYO
	Aciertos	
	Errores	
	Omisiones	
	TOTAL	TOTAL

CONSULTAS
REFERENTES AL CONTENIDO DE LOS TEMAS Y METODOLOGÍA DE SU ESTUDIO

RESPUESTAS DEL PROFESOR

EVALUACIÓN	PRUEBA OBJETIVA	PRUEBA DE ENSAYO
	Aciertos	
	Errores	
	Omisiones	
	TOTAL	TOTAL

UNIVERSIDAD NACIONAL
DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

NOMBRE . . . .
APELLIDOS . . . .
CALLE . . . .
POBLACIÓN . . . .
PROVINCIA . . . . C.P. . . . .

PROCESOS ESTOCÁSTICOS

PRUEBA DE EVALUACIÓN A DISTANCIA / 2
UNIDAD DIDÁCTICA / 2

Número de Expediente

08513PE01A13

Problema 1. Se eligen al azar e independientemente n puntos en $[0, 1]$. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son sus abscisas dispuestas en orden creciente, probar que $\{X_n\}$ tiene carácter Markoviano y determinar su probabilidad de transición.

Problema 2. Una sucesión de números no negativos X_n se construye por el procedimiento siguiente:

$$\text{Si } X_n = x, \quad X_{n+1} \text{ se elige al azar en } [0, 2x]$$

Calcular la probabilidad de transición en n etapas del proceso X_n.
Determinar la distribución límite de X_n (precisando el sentido en el que converge). Razonar que el coeficiente de ergodicidad de cualquier P_n es cero.

Problema 3. Un proceso de Markov en $[0,1]$ tiene densidad de transición

$$p(x,y) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } y < x \\ (2-x)/2(1-x) & \text{si } x < y \end{cases}$$

Determinar el coeficiente de ergodicidad y calcular su distribución estacionaria.

Problema 4. Cierto mecanismo produce señales telegráficas (punto y raya), de manera que la probabilidad de que se emita una señal entre los instantes t y $t + h$ es $\lambda h + o(h)$, mientras que la probabilidad de emitir más de dos señales en ese intervalo de tiempo es $o(h)$. Cada señal producida, independientemente de las demás, puede ser un punto o raya con igual probabilidad.

a) Hallar la distribución del tiempo que tardan en emitirse dos puntos consecutivos.

b) Hallar la distribución del tiempo que tardan en emitirse n puntos.

c) Calcular la distribución del número de puntos emitidos entre dos rayas.

Problema 5. Una urna contiene 4 tarjetas con el número 1, 3 con el número 2, 2 con el 3 y 1 con el 4. Se extraen tarjetas con reemplazamiento y se considera

$$X_n = \text{ máximo número aparecido en las } n \text{ primeras extracciones}$$

a) Plantear la cadena de Markov X_n

b) Hallar la distribución del número de veces que la cadena pasa por el estado 2 y su media.

c) Si cuando se alcanza el estado 4 se vuelve a empezar como inicialmente, hallar el número medio de extracciones realizadas entre dos visitas consecutivas al estado 2.

d) Supongamos que cada extracción tarda en realizarse un tiempo exponencial de parámetro λ y sea

$$X_t = \text{ máximo número aparecido hasta el instante } t$$

Hallar la distribución del tiempo que el proceso tarda en alcanzar el estado 4.

e) Supuesto que cuando es $X_t = 4$ se vuelve a empezar en las condiciones iniciales, determinar la proporción límite de tiempo que el proceso permanece en el estado 3.

Problema 6. Inicialmente una empresa tiene dos máquinas iguales con una de las cuales ha de atender a ciertas circunstancias ocasionales se presentan con intervalos independientes y exponenciales de media 4 días. Cada vez que una máquina es utilizada es necesario enviarla a un taller de ajuste en el que hay un único operario que tarda un tiempo exponencial de media 3 días en devolver la máquina en estado de funcionamiento. Las tareas de las máquinas que no pueden ser atendidas en el momento en que se producen son perdidas por la empresa.

a) Determinar la distribución del tiempo que tardará la empresa en no tener ninguna máquina disponible.

b) Hallar la proporción de tiempo que trabaja el operario del taller de ajuste.

c) Si en un instante no hay ninguna máquina disponible, calcular los tiempos medios durante los cuales la empresa dispondrá de una y dos máquinas, antes de volverse a quedar sin ninguna disponible. ¿Puede deducirse la distribución estacionaria de estos resultados?

d) Si cada vez que no puede atenderse una tarea se produce un coste C, analizar si es conveniente contratar un segundo operario para el taller, con un jornal k, sabiendo que en el ajuste de una máquina sólo puede trabajar una persona.

Problema 7. A un taller, en el que trabajan cuatro mecánicos, llegan automóviles para reparar según un proceso de Poisson de parámetro λ. Cada reparación es efectuada por un mecánico y dura un tiempo exponencial de parámetro μ. En régimen estacionario, calcular

a) La distribución del número de automóviles que hay en el taller.

b) El tiempo medio que pasa cada automóvil en el taller.

c) La probabilidad de que haya que esperar turno, por estar ocupados todos los mecánicos.

Problema 8. Sea X_t el número de sucesos ocurridos entre 0 y t en un proceso de Poisson de parámetro λ y sean τ_i los instantes en que se producen dichos sucesos. Probar que, condicionado por $X_t = n$, la distribución de $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ es la distribución de n instantes elegidos al azar en $(0, t)$ y ordenados en orden creciente.

Problema 9. Un objeto está sometido a desgastes que ocurren según un proceso de Poisson de parámetro λ. Las intensidades de los desgastes son variables aleatorias D_n, independientes, igualmente distribuidas e independientes del proceso de Poisson que rige los instantes en que se producen. El efecto de cada desgaste decrece exponencialmente con el tiempo: si en t_0 ocurre un desgaste de intensidad d , su efecto en el instante t es $de^{-\alpha(t-t_0)}$. Hallar el desgaste medio en el instante t.

Problema 10.
Si un núcleo de gran energía entra en la atmósfera, da lugar a núcleos libres por colisión con átomos de la atmósfera; y estos a su vez generan nuevos núcleos libres. Si la probabilidad de que cada núcleo sufra una colisión en cada intervalo de longitud Δt es $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$, determinar la distribución del número de núcleos generados por el inicial al cabo de un tiempo t. Calcular la esperanza de la suma de los tiempos que lleva cada núcleo en la atmósfera, en el instante t.

Problema 11. En una población de N individuos hay inicialmente uno que sufre una enfermedad infecciosa incurable. La probabilidad de que se produzca un nuevo contagio entre t y $t + \Delta t$ es proporcional al número de enfermos que hay en la población. Determinar la distribución del tiempo que tardan en contagiarse todos y su media.

Problema 12. En una cierta región del espacio ingresan partículas según un proceso de Poisson de parámetro λ; el tiempo de permanencia de cada una en la región es exponencial de parámetro μ. Supuesto que inicialmente la región está vacía, determinar la distribución del número de partículas que contiene, en el instante t. Estudiar la distribución límite.

CONSULTAS
REFERENTES AL CONTENIDO DE LOS TEMAS Y METODOLOGÍA DE SU ESTUDIO

RESPUESTAS DEL PROFESOR

EVALUACIÓN	PRUEBA OBJETIVA	PRUEBA DE ENSAYO
	Aciertos	
	Errores	
	Omisiones	
	TOTAL	TOTAL