Solución del examen TIPO A:

1. Probabilidad de infección es 0.01, i.e. $P(\text{infec.}) = 0.01$. el resto de la información se escribe

$$P\left(DI|\,\text{infec.}\right) = 0.97,\ P\left(DI|\,\overline{\text{infec.}}\right) = 0.001.$$

Para analizar el éxito del laboratorio en el caso dado hemos de calcular

$$\begin{aligned} P\left(\text{infec.}|\,DI\right) &= \frac{P\left(DI|\,\text{infec.}\right)P\left(\text{infec.}\right)}{P\left(DI\right)} \\ &= \frac{P\left(DI|\,\text{infec.}\right)P\left(\text{infec.}\right)}{P\left(DI|\,\text{infec.}\right)P\left(\text{infec.}\right)+P\left(DI|\,\overline{\text{infec.}}\right)P\left(\overline{\text{infec.}}\right)} \\ &= \frac{(0.97)\,(0.01)}{(0.97)\,(0.01)+(0.001)\,(1-0.01)} \approx 0.907 \end{aligned}$$

lo que se traduce en alta fiabiliada para la situación descrita.

2. Podemos modelizar la v.a. $\xi =$ número de erratas/pág. con un binomial $B(3000, \frac{2}{6000})$. Aproximamos la distribución de esta v.a. por la de una Poisson de parámetro $\lambda = 3000\frac{2}{6000} = 1$.

   (a) La probabilidad de que una página no contenga errores coincide con
   $$P^*_\xi\left(0\right) = e^{-1}\frac{1^0}{0!} = e^{-1}.$$

   (b) Puesto que hay independencia en las erratas entre páginas tnedremos que la probabilidad de que un capítulo de 16 páginas no contenga errores es $\left(e^{-1}\right)^{16}$.

3. Como $X \sim N(3, 0.5)$ entonce $\psi = \frac{X-3}{0.5} \sim N(0,1)$. Así

$$\begin{aligned} P(X &\le 3.32) = P\left(\psi = \frac{X-3}{0.5} \le \frac{3.32-3}{0.5} = 0.64\right) = F_\psi(0.64) \\ &= 1 - F_\psi(-0.64) = 0.7389 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(2.15 &\le X \le 3.35) = \\ P(-1.7 &= \frac{2.15-3}{0.5} \le \frac{X-3}{0.5} \le \frac{3.35-3}{0.5} = 0.7) \\ &= F_\psi(0.7) - F_\psi(-1.7) \\ &= 0.758 - (1 - F_\psi(1.7)) = 0.758 - (1 - 0.9954) \\ &= 0.753\,4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X^2 &\geq 4) = P(X \geq 2) + P(X \leq -2) \\
&= P(\frac{X-3}{0.5} \geq -2) + P(\frac{X-3}{0.5} \leq \frac{-2-3}{0.5} = -10) \\
&= (1 - F_\psi(-2)) + F_\psi(-10) \\
&= (1 - 0.02) + 0 = 0.98
\end{aligned}$$

ya que $F_\psi(-10) \leq F_\psi(-5) = 0. : 2.275\,013 \times 10^{-2}$

4. La vida de un virus tiene una duración modelada por una siguiente variable aleatoria ξ cuya función de densidad es

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{k}{x^4} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

   (a) Las condiciones que ha de cumplir la densidad son $f_\xi(x) \geq 0$ y $\int_{\mathbb{R}} f_\xi(x)\,dx = 1$. La primera condicón establece que $k \geq 0$ y la segunda
   $$1 = \int_{\mathbb{R}} f_\xi(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{k}{x^4}dx = \frac{1}{3}k.$$
   De resultas $k = 3$

   (b) Hallar el valor esperado de vida del virus es la esperanza o primer momento:
   $$\alpha_1 = \int_{\mathbb{R}} x f_\xi(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{3x}{x^4}dx = \frac{3}{2}$$

   (c) La mediana es aquel valor y tal que
   $$0.5 = \int_1^y \frac{3}{x^4}dx,$$
   y así, después de integrar, da como resultado $y = 1.26$.

   (d) La varianza es $\sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$; como
   $$\alpha_2 = \int_1^\infty \frac{3x^2}{x^4}dx = 3,$$
   entonces $\sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$. La desviación típica será $\sigma = \sqrt[2]{\frac{3}{4}} = 0.866\,025\,4$
   La desviación absoluta con respecto a la mediana es
   $$D = \int_1^\infty \frac{3\,|x - Me|}{x^4}dx$$

siendo

$$Me = y = 1.26$$

Así $D = \int_1^{\infty} \frac{3|x-1.26|}{x^4} dx = 0.389\,881\,6$, que como es menor que σ, diremos que la mediana es mejor representante en elsentido de que la dispersión asociada es menor.