

Oposicions de Matemàtiques, Eivissa i Formentera - 2018.
Part B) de la primera prova:
PROVA PRÀCTICA.

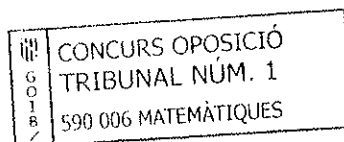
La prova pràctica consta de dues opcions, A i B, de les quals s'ha de resoldre únicament una. Cada exercici té una puntuació màxima de 10 punts, i la qualificació final d'aquesta part s'obtindrà dividint el resultat obtingut entre 4.

Es disposa de 4 hores de temps per a la seva realització. Es pot fer servir una calculadora, sempre i quan no tingui informació emmagatzemada, i no pugui rebre ni transmetre informació. Les taules estadístiques que poden fer falta es trobaran en els fulls d'enunciats.

S'ha de contestar de manera clara i ordenada a cada un dels exercicis, justificant els resultats teòrics que s'apliquen en cada cas.

Cal recordar que els fulls que s'entreguin no poden tenir cap marca identificativa, tret del codi de barres aferrat al primer full i el número identificatiu que s'ha de copiar a tots els altres. Al primer full simplement cal aferrar el codi de barres i indicar l'opció triada, A o B. Als següents fulls s'entregaran, en ordre, les solucions dels diferents exercicis. Cada problema s'ha de començar en un full separat.

Una vegada ordenats els fulls cal numerar-los indicant el número de cada full sobre el total de fulls presentats (1 de 7, 2 de 7, ...), sense comptar el primer full on s'ha aferrat el codi de barres i s'ha indicat l'opció resolta. Tots els fulls d'enunciats han de ser entregats juntament amb la solució. I qualsevol full que no s'entregui haurà de ser destruït abans d'abandonar la sala.



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 1: Taula de la distribució normal $N(0, 1)$.

CONCURS OPOSICIÓ
TRIBUNAL NÚM. 1
590 006 MATEMÀTIQUES

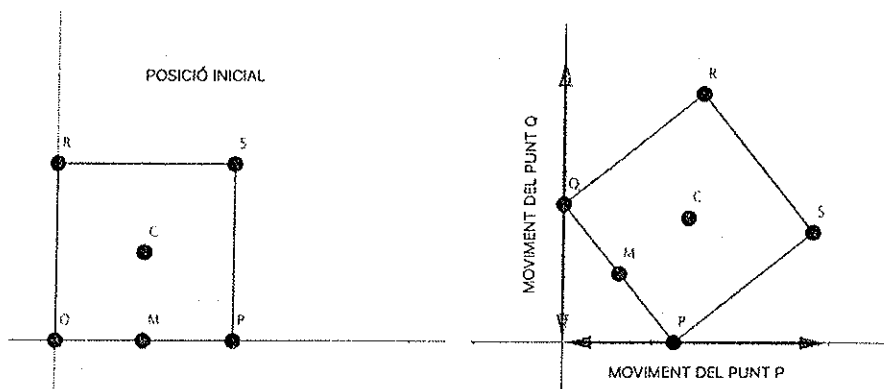
OPCIÓ A

Exercici 1 Tres màquines A, B i C produeixen una barra metàl·lica. La màquina A les produeix amb una longitud que es distribueix seguint una normal de paràmetres $\mu = 165$ i $\sigma = 5$. La màquina B les produeix amb una longitud que es distribueix seguint una normal de paràmetres $\mu = 175$ i $\sigma = 5$. I la màquina C les produeix amb una longitud que es distribueix seguint una normal de paràmetres $\mu = 170$ i $\sigma = 5$ (totes les unitats són mm).

- (6 punts) El 50 % de la producció la fa la màquina A, el 20 % la produeix la màquina B i la resta la màquina C. Triant tres peces a l'atzar d'una de les màquines, i sabent que mesuren més de 173 mm cadascuna, calcular la probabilitat de que totes les peces siguin de la màquina C.
- (4 punts) Triant 100 peces a l'atzar de la màquina B, de forma independent unes de les altres, calcular la probabilitat de que al menys 60 mesurin més de 173 mm.

Exercici 2 Fem lliscar un quadrat de 10 cm de costat sobre el pla OXY (només al primer quadrant) de manera que els vèrtexs d'un dels seus costats estiguin sempre en contacte amb els eixos de coordenades, un amb l'eix OX i un altre amb l'eix OY. Determinar el lloc geomètric que seguint aquest moviment descriuen:

- (2 punts) El punt mitjà del costat de contacte amb els eixos M.
- (3 punts) El centre C.
- (1 punts) El vèrtex P.
- (4 punts) El vèrtex R.



Exercici 3 Donada l'aplicació $f : P_3 \rightarrow P_2$, on P_3 és l'espai vectorial dels polinomis en x de grau menor o igual a tres, i P_2 l'espai vectorial dels polinomis en x de grau menor o igual a dos, definida per:

$$f : ax^3 + bx^2 + cx + d \rightarrow 3ax^2 + 2bx + c.$$

- (4 punts) Comprovar que és un homomorfisme.
- (6 punts) Classificar l'homomorfisme.

Exercici 4 (10 punts) Calcular la següent integral: $\int \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^4 + x^2 + 1} dx$.

OPCIÓ B

Exercici 1 Una urna conté N boles blanques, dues boles vermelles i una bola negra. S'extreuen totes les boles d'una en una sense reemplaçament. Sigui X la variable aleatòria que indica el número d'extracció en que ha sortit, per primera vegada, una bola vermella. Sigui A l'esdeveniment "la bola negra és extreta abans de ser extreta alguna de les boles vermelles".

1. (2 punts) Determinar la funció de probabilitat de X .
2. (3 punts) Determinar el valor esperat de X , $E[X]$.
3. (2 punts) Determinar la funció de probabilitat de X condicionada per A .
4. (3 punts) Determinar el valor esperat de $X|A$, $E[X|A]$.

Recordeu les següents igualtats:

$$\begin{aligned}1 + 2 + \dots + n &= \frac{n(n+1)}{2}. \\1^2 + 2^2 + \dots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \\1^3 + 2^3 + \dots + n^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.\end{aligned}$$

Exercici 2 (10 punts) Calcular tots els $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tals que la suma de qualsevol dels seus components amb el producte dels altres tres dóna com a resultat 2.

Exercici 3

1. (7 punts) Calcular el límit de la successió: $a_n = \frac{\frac{n}{1} + \frac{n-1}{2} + \frac{n-2}{3} + \dots + \frac{3}{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{1}{n}}{\log_7 n!}$, per a $n \geq 2$.
2. (3 punts) Estudiar la convergència de la sèrie: $\sum_{n \geq 1} \left(\sqrt[n]{e} - 1 - \frac{1}{n} \right)$.

Exercici 4 La corba intersecció de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 4 = 0$ amb el pla $x + y - z - 1 = 0$ es projecta ortogonalment sobre el pla OXY .

1. (4 punts) Determinar i identificar quina és la cònica projecció.
2. (6 punts) Trobar la seva equació reduïda.