

OPCIÓ B

1. Un punt A es troba a distància d del centre O d'un semicercle de radi r. Escriu el radi r d'aquest semicercle en funció de d, per a que, al girar tota la figura al voltant de AO, el volum engendrat pel triangle AOC sigui igual al de l'esfera, sent AC tangent al semicercle i C un punt de la semicircumferència.
2. Calcula el següent límit:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x (1 + \sin 2t)^{\frac{1}{t}} dt$$

3. Sigui $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(K)$, definim traça de la matriu A: $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.
Demuestra que:
 - a. $tr(AB) = tr(BA)$ on $A, B \in M_{n \times n}(K)$
 - b. Si A i B són semblants, aleshores $tr(A) = tr(B)$
 - c. La definició de traça d'un endomorfisme f d'E ($\dim E = n$) és $tr(f) = tr(A)$ on A és una matriu associada a f, és correcta?
 - d. Si P és una matriu real 2×2 i consideram l'endomorfisme f de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ definit per $f(A) = AP$, aleshores $tr(f) = 2 \cdot tr(P)$
4. El número de quilòmetres diaris que recorre un enginyer per inspeccionar empreses és una variable aleatòria amb funció de densitat:

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x} & \text{si } x \in [0, 2] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 2] \end{cases}$$

on x representa el número de quilòmetres expressats en centenes.

- a) Calcula k
 - b) Obté la mitjana de kilòmetres que recorre en un dia
 - c) Si els desplaçaments els efectua durant 150 dies a l'any, quants dies s'haurà de desplaçar més de 150 km?
 - d) Quina és la probabilitat de què, tenint un averia a 50 km, tinguis assignat aquell dia una ruta de menys de 100km?
5. Per qualsevol nombre enter positiu n sigui $\tau(n)$ el nombre de divisors positius de n. Direm que un nombre positiu és amable si $\frac{\tau(10n)}{\tau(n)} < \frac{5}{2}$. Determina quants nombres positius menors o iguals que 2021 són amables.