Estadística

Examen Parcial 3

19 de Diciembre de 2018 (Curso 2018-2019/1)

Resuelve los 2 problemas en las hojas de los enunciados.
Anota en cada hoja tu nombre completo en mayúsculas, DNI y grupo.

APELLIDOS:.. **NOMBRE:**.......................

Puedes utilizar una calculadora no programable. **DNI:** .... **GRUPO:**........
Duración total: 1 hora.

Problema 1

1. El peso de los adultos del género masculino en una población se distribuye normalmente con una media de 78 kg y una varianza de 169 kg^2.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un grupo seleccionado de forma aleatoria de 36 hombres tenga un peso promedio de menos de 75.7 kg?

(b) Si se toma una muestra de n hombres, ¿cuál debería ser como máximo el tamaño de la muestra n para que la suma de sus pesos sea superior a 3200 kg con una probabilidad menor a 1.5%?

Solución

(a) Como el tamaño de la muestra es suficientemente grande ($n > 30$), de acuerdo con el teorema del límite central, $\overline{X}_{36}$ sigue una función de distribución NORMAL con valor esperado y desviación típica dados por:

$$\mu_{\overline{X}_{36}} = \mu = E\left(X\right) = 78, \qquad \sigma_{\overline{X}_{36}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{36}} = 2.167.$$

Por lo tanto,

$$P(\overline{X}_{36} < 75.7) = P\left(\frac{\overline{X}_{36} - \mu_{\overline{X}_{36}}}{\sigma_{\overline{X}_{36}}} < \frac{75.7 - 78}{2.167}\right) = P\left(Z < -1.06\right) = 1 - \Phi(1.06) = 1 - 0.85543 = 0.14457$$

$$\boxed{P(\overline{X}_{36} < 75.7) = 0.14457}$$

(b) De acuerdo con el teorema del límite central, la suma de los pesos de n personas $R_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ sigue una función de distribución NORMAL con valor esperado y desviación típica dados por:

$$\mu_{R_n} = n\mu = nE\left(X\right) = 78n, \qquad \sigma_{R_n} = \sqrt{n}\sigma = \sqrt{n}\sqrt{169} = 13\sqrt{n}.$$

Por lo tanto, $P(R_n > 3200) < 0.015$ implica que:

$$P(R_n > 3200) = P\left(\frac{R_n - \mu_{R_n}}{\sigma_{R_n}} > \frac{3200 - 78n}{13\sqrt{n}}\right) = P\left(Z > \frac{3200 - 78n}{13\sqrt{n}}\right) < 0.015.$$

Como $P(Z > 2.17) = 0.015$, entonces:

$$\frac{3200 - 78n}{13\sqrt{n}} = 2.17, \qquad \Rightarrow \qquad 78n + 28.21\sqrt{n} - 3200 = 0.$$

Si $N = \sqrt{n}$, $\qquad \Rightarrow \qquad 78N^2 + 28.21N - 3200 = 0, \qquad \Rightarrow \qquad N_1 = -6.58851, \qquad N_2 = 6.22685$

Se escoge la positiva, entonces $n = 38.77$. Por lo tanto, el tamaño de la muestra ha de ser de un número entero. Si se redondea a $n = 39$, la probabilidad será mayor de 0.015, por tanto el tamaño máximo de la muestra es de 38 hombres.

$$\boxed{\text{n} = 38}$$

Estadística

Examen Parcial 3

19 de Diciembre de 2018 (Curso 2018-2019/1)

Resuelve los 2 problemas en las hojas de los enunciados.
Anota en cada hoja tu nombre completo en mayúsculas, DNI y grupo.

APELLIDOS:... **NOMBRE:**........................

Puedes utilizar una calculadora no programable. **DNI:** .... **GRUPO:**........
Duración total: 1 hora.

Problema 2

2. Sea X una variable aleatoria que tiene por función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{otros} \end{cases}$$

donde $\theta > 0$.

(a) Encuentra un estimador $\hat{\theta}$ del parámetro θ por el método de los momentos.

(b) Una muestra aleatoria produce los datos:

$$x_1 = 0.92;\ x_2 = 0.79;\ x_3 = 0.90;\ x_4 = 0.65;\ x_5 = 0.86.$$

¿Cuál es la estimación del parámetro θ correspondiente a la muestra?

Solución

(a) Para encontrar un estimador $\hat{\theta}$ del parámetro θ por el método de los momentos igualamos la esperanza de la variable y la media muestral, y aislamos $\hat{\theta}$.

Para el cálculo de la esperanza de la variable X, calculamos la correspondiente integral:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x\theta x^{\theta-1} dx = \int_0^1 \theta x^{\theta} dx = \theta \int_0^1 x^{\theta} dx =$$
$$= \left[\theta \frac{x^{\theta+1}}{\theta+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \theta \frac{1^{\theta+1}}{\theta+1} - \theta \frac{0^{\theta+1}}{\theta+1} = \frac{\theta}{\theta+1}$$

Igualamos la esperanza y la media muestral:

$$E(X) = \bar{X} \Leftrightarrow \frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}+1} = \bar{X} \Leftrightarrow \hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$$

Entonces,

$$\boxed{\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}}$$

(b) Con los datos recogidos, la observación de la media muestral es

$$\bar{x} = \frac{0.92 + 0.79 + 0.90 + 0.65 + 0.86}{5} = 0.824.$$

Entonces, la estimación del parámetro será

$$\theta_{\text{obs}} = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}} = \frac{0.824}{1-0.824} = 4.6\widehat{81}$$

$$\boxed{\theta_{\text{obs}} = 4.6\widehat{81}}$$