PART B DE LA PRIMERA PROVA: PROVA PRÀCTICA. Model A

Exercici A1

Es considera un nombre natural N que, en el sistema de numeració decimal, es representa amb cinc xifres diferents, totes elles no nul·les. ($N = abcde$)

a) *(0,25 p.)* Sigui C el conjunt de nombres de tres xifres diferents que es poden formar agafant xifres de N. Quin és el cardinal de C?
b) *(0,75 p.)* Expressa la suma S de tots els elements del conjunt C en funció de a, b, c, d, e.
c) *(1 p.)* Determina N si es compleix que $S = N$.

Exercici A2

Es considera $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, i es considera l'aplicació lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida per:

$$v_1 - v_2 \in \ker f \qquad f(v_1 + v_2) = v_3 \qquad f(v_3) = v_1 - v_2$$

a) *(0,5 p.)* Escriu la matriu associada a f en la base B.
b) *(0,5 p.)* Troba bases del seu nucli i de la seva imatge.
c) *(0,25 p.)* Classifica l'endomorfisme. És injectiu? exhaustiu? ...
d) *(0,75 p.)* Prova, sense fer servir el càlcul matricial, que l'endomorfisme f^3 és idènticament nul, això és: $f^3(w) = 0$ per a tot vector w.

Exercici A3

Es disposa de dues urnes A i B amb bolles blanques i bolles negres. A la urna A tenim p bolles blanques i q bolles negres. A la urna B tenim q bolles blanques i p bolles negres.
Agafam aleatòriament una bolla de la urna A i la passam a la urna B. Després passam una bolla de la urna B cap a la urna A.

a) *(0,5 p.)* Calcula la probabilitat que, en fer aquestes operacions, les urnes quedin amb la mateixa composició que tenien inicialment. Expressa el resultat en funció de p i de q.
b) *(1 p.)* Sabent que el nombre de bolles de cada urna és parell, igual a $2k$, calcula quina serà la composició de les urnes per tal que la probabilitat anterior sigui màxima.
c) *(0,5 p.)* Calcula aquesta probabilitat de forma explícita.

Exercici A4

Un segment de longitud L té els seus extrems a cada un dels eixos de coordenades.

a) *(1 p.)* Determina el lloc geomètric dels punts del pla des dels quals es veu el segment amb un angle α quan el segment forma amb els eixos un triangle isòsceles.

b) *(1 p.)* Especifica i descriu l'esmentat lloc geomètric en el cas particular que l'angle sigui $\alpha = \dfrac{\pi}{2}\ rad$.

Exercici A5

Donat el pla d'equació $\pi : x + 2y - z = 0$ i la recta definida per $r : \begin{cases} x + y = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$

Es considera la transformació lineal T projecció sobre el pla π en la direcció de la recta r.

a) *(0,5 p.)* Dedueix que $T^2 = T$.

b) *(1 p.)* Troba la matriu A en la base canònica de la transformació lineal T.

c) *(0,5 p.)* Sigui el subespai $F =< (2, -1, a), (1, a, 3) >$. Calcula, si és possible, els valors del paràmetre a de manera que $T(F)$ tingui dimensió 1.

PART B DE LA PRIMERA PROVA: PROVA PRÀCTICA. Model B

Exercici B1

a) *(1 p.)* Prova que, en el sistema de numeració decimal, per a cada n natural, el nombre $N = 2^{(2^{n+1})} + 1$ sempre té la xifra de les unitats igual a 7.

b) *(1 p.)* En una bossa hi ha monedes de $5{,}10$ i 20 cèntims. Se sap que hi ha en total hi ha 24 monedes i que el seu valor és 2 €. Quines combinacions de monedes són possibles?

Exercici B2

Sigui $M_3(\mathbb{R})$ l'espai vectorial de les matrius reals quadrades d'ordre 3.

a) *(0,5 p.)* Demostra que el conjunt A de les matrius antisimètriques d'ordre 3 és un subespai vectorial de $M_3(\mathbb{R})$, i obteniu raonadament una base B del subespai A.

b) *(0,5 p.)* Sigui $T\colon A \to \mathbf{P_3}(\mathbb{R})$, on $\mathbf{P_3}(\mathbb{R})$ és el conjunt dels polinomis amb coeficients reals de grau 3, definida com:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \to ax + bx^2 + cx^3$$

Trobeu la matriu d'aquesta aplicació lineal associada a la base B de A i la base de l'espai de polinomis donada per $\{1, x, x^2, x^3\}$. Escriu l'equació matricial de l'aplicació.

c) *(0,75 p.)* Determina el nucli i la imatge d'aquesta aplicació T i demostreu que es tracta d'un isomorfisme sobre el conjunt $Im(T)$.

d) *(0,25 p.)* Comprovau que es verifica el teorema de les dimensions.

Exercici B3

Un joc consisteix en llançar un dau no esbiaixat de sis cares fins a obtenir dues vegades consecutives el mateix nombre.

a) *(0,25 p.)* Quina és la probabilitat de finalitzar el joc en el cinquè llançament?

b) *(0,75 p.)* Calcula la probabilitat de finalitzar el joc abans de N llançaments.

c) *(1 p.)* Calcula l'esperança de la variable aleatòria “nombre de llançaments necessaris per finalitzar la partida”.

Exercici B4

Es considera la funció $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua a tota la recta real.

Definim la funció $G(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt$.

a) *(0,5 p.)* Demostrau que $G(x)$ és una funció contínua a tot $\mathbb{R}$.

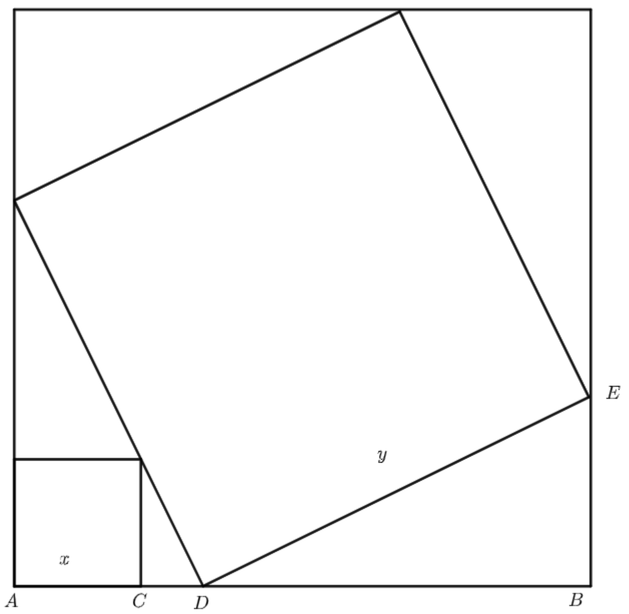
b) *(0,5 p.)* Determina $G'(x)$ en termes de f.

c) *(0,5 p.)* Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$, estudia l'existència del límit $\lim\limits_{x\to\infty} G(x)$ i determina el seu valor si n'és el cas.

d) *(0,5 p.)* En el cas que $f(t) = |t|$, determina l'expressió de $G(x)$ i de $G'(x)$.

Exercici B5

La figura adjunta mostra tres quadrats. El costat del quadrat major mesura 1, els altres costats AC i DE mesuren x i y respectivament.



Determina els valors de x i de y, tals que el valor de l'expressió $x^2 + y^2$ sigui mínim. Quant val aquest mínim?

PART B DE LA PRIMERA PROVA: PROVA PRÀCTICA. Model A

Exercici A1

Es considera un nombre natural N que, en el sistema de numeració decimal, es representa amb cinc xifres diferents, totes elles no nul·les. ($N = abcde$)

a) *(0,25 p.)* Sigui C el conjunt de nombres de tres xifres diferents que es poden formar agafant xifres de N. Quin és el cardinal de C?

b) *(0,75 p.)* Expressa la suma S de tots els elements del conjunt C en funció de a, b, c, d, e.

c) *(1 p.)* Determina N si es compleix que $S = N$.

Exercici A2

Es considera $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, i es considera l'aplicació lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida per:

$$v_1 - v_2 \in \ker f \qquad f(v_1 + v_2) = v_3 \qquad f(v_3) = v_1 - v_2$$

a) *(0,5 p.)* Escriu la matriu associada a f en la base B.

b) *(0,5 p.)* Troba bases del seu nucli i de la seva imatge.

c) *(0,25 p.)* Classifica l'endomorfisme. És injectiu? exhaustiu? ...

d) *(0,75 p.)* Prova, sense fer servir el càlcul matricial, que l'endomorfisme f^3 és idènticament nul, això és: $f^3(w) = 0$ per a tot vector w.

Exercici A3

Es disposa de dues urnes A i B amb bolles blanques i bolles negres. A la urna A tenim p bolles blanques i q bolles negres. A la urna B tenim q bolles blanques i p bolles negres.
Agafam aleatòriament una bolla de la urna A i la passam a la urna B. Després passam una bolla de la urna B cap a la urna A.

a) *(0,5 p.)* Calcula la probabilitat que, en fer aquestes operacions, les urnes quedin amb la mateixa composició que tenien inicialment. Expressa el resultat en funció de p i de q.

b) *(1 p.)* Sabent que el nombre de bolles de cada urna és parell, igual a $2k$, calcula quina serà la composició de les urnes per tal que la probabilitat anterior sigui màxima.

c) *(0,5 p.)* Calcula aquesta probabilitat de forma explícita.

Carrer del Ter, 16, 1r
07009 Palma
971 17 78 00
educacioiuniversitat.caib.es

Exercici A4

Un segment de longitud L té els seus extrems a cada un dels eixos de coordenades.

a) *(1 p.)* Determina el lloc geomètric dels punts del pla des dels quals es veu el segment amb un angle α quan el segment forma amb els eixos un triangle isòsceles.

b) *(1 p.)* Especifica i descriu l'esmentat lloc geomètric en el cas particular que l'angle sigui $\alpha = \dfrac{\pi}{2}\ rad$.

Exercici A5

Donat el pla d'equació $\pi : x + 2y - z = 0$ i la recta definida per $r : \begin{cases} x + y = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$

Es considera la transformació lineal T projecció sobre el pla π en la direcció de la recta r.

a) *(0,5 p.)* Dedueix que $T^2 = T$.

b) *(1 p.)* Troba la matriu A en la base canònica de la transformació lineal T.

c) *(0,5 p.)* Sigui el subespai $F =< (2, -1, a), (1, a, 3) >$. Calcula, si és possible, els valors del paràmetre a de manera que $T(F)$ tingui dimensió 1.

Carrer del Ter, 16, 1r
07009 Palma
971 17 78 00
educacioiuniversitat.caib.es

PART B DE LA PRIMERA PROVA: PROVA PRÀCTICA. Model B

Exercici B1

a) *(1 p.)* Prova que, en el sistema de numeració decimal, per a cada n natural, el nombre $N = 2^{(2^{n+1})} + 1$ sempre té la xifra de les unitats igual a 7.

b) *(1 p.)* En una bossa hi ha monedes de 5,10 i 20 cèntims. Se sap que hi ha en total hi ha 24 monedes i que el seu valor és 2 €. Quines combinacions de monedes són possibles?

Exercici B2

Sigui $M_3(\mathbb{R})$ l'espai vectorial de les matrius reals quadrades d'ordre 3.

a) *(0,5 p.)* Demostra que el conjunt A de les matrius antisimètriques d'ordre 3 és un subespai vectorial de $M_3(\mathbb{R})$, i obteniu raonadament una base B del subespai A.

b) *(0,5 p.)* Sigui $T\colon A \to \mathbf{P_3}(\mathbb{R})$, on $\mathbf{P_3}(\mathbb{R})$ és el conjunt dels polinomis amb coeficients reals de grau 3, definida com:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \to ax + bx^2 + cx^3$$

Trobeu la matriu d'aquesta aplicació lineal associada a la base B de A i la base de l'espai de polinomis donada per $\{1, x, x^2, x^3\}$. Escriu l'equació matricial de l'aplicació.

c) *(0,75 p.)* Determina el nucli i la imatge d'aquesta aplicació T i demostreu que es tracta d'un isomorfisme sobre el conjunt $Im(T)$.

d) *(0,25 p.)* Comprovau que es verifica el teorema de les dimensions.

Exercici B3

Un joc consisteix en llançar un dau no esbiaixat de sis cares fins a obtenir dues vegades consecutives el mateix nombre.

a) *(0,25 p.)* Quina és la probabilitat de finalitzar el joc en el cinquè llançament?

b) *(0,75 p.)* Calcula la probabilitat de finalitzar el joc abans de N llançaments.

c) *(1 p.)* Calcula l'esperança de la variable aleatòria "nombre de llançaments necessaris per finalitzar la partida".

Exercici B4

Es considera la funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua a tota la recta real.

Definim la funció $G(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt$.

a) *(0,5 p.)* Demostrau que $G(x)$ és una funció contínua a tot $\mathbb{R}$.

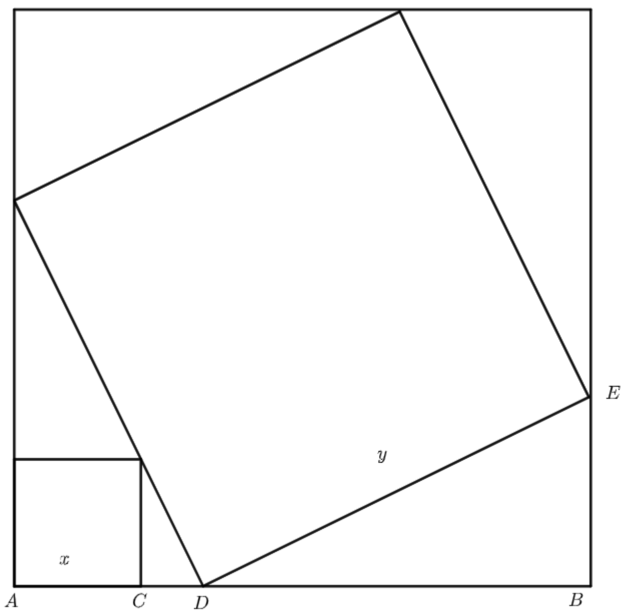
b) *(0,5 p.)* Determina $G'(x)$ en termes de f.

c) *(0,5 p.)* Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$, estudia l'existència del límit $\lim\limits_{x\to\infty} G(x)$ i determina el seu valor si n'és el cas.

d) *(0,5 p.)* En el cas que $f(t) = |t|$, determina l'expressió de $G(x)$ i de $G'(x)$.

Exercici B5

La figura adjunta mostra tres quadrats. El costat del quadrat major mesura 1, els altres costats AC i DE mesuren x i y respectivament.



Determina els valors de x i de y, tals que el valor de l'expressió $x^2 + y^2$ sigui mínim. Quant val aquest mínim?