



1. En el conjunto de los números naturales  $\mathbb{N}$ :

(a) Demuestre que para cualquier sucesión  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , la sucesión

$$a_1, a_1^{a_2}, a_1^{a_2^{a_3}}, \dots$$

se hace constante módulo  $m$  para cualquier número natural  $m$ .

(b) Utilice el apartado anterior para demostrar que en la sucesión

$$7, 7^7, 7^{7^7}, \dots$$

la cifra de las unidades se hace constante y calcule dicha cifra.

**Observación:** no confundir las expresiones de la forma  $a_1^{a_2^{a_3}}$  con  $(a_1^{a_2})^{a_3}$ .

2. Sean  $a$  y  $b$  números reales y sea  $A_n$  la matriz de  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$  definida como

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a^2 & ab & b & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{n-1} & a^{n-2}b & a^{n-3}b & a^{n-4}b & \cdots & b \end{pmatrix}$$

para  $n \in \mathbb{N}$  con  $n > 2$ . Determine:

- (a) El determinante de  $A_n$ .
- (b) Las ecuaciones implícitas del subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^n$  generado por los vectores columna de  $A_n$ .
- (c) La dimensión del espacio cociente  $\mathbb{R}^n / \ker f$  con  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la aplicación lineal con matriz asociada  $A_n$ .

3. Sea  $b$  un número real positivo no nulo.

- (a) Pruebe que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua tal que  $f(0) = 0$  y  $f'(x) = \frac{1}{1 + b \cdot e^{f(x)}}$ , entonces  $f(x) \leq \frac{x}{b}$  para cada  $x > 0$ .
- (b) Para  $a$  un número real positivo, calcule:

$$\int_0^a \int_0^b e^{\max\{(a^2/b^2)x^2, y^2\}} dx dy$$

4. Sean  $ABCD$  cuatro puntos en una esfera de radio  $r$  tales que los puntos  $ABC$  forman un triángulo rectángulo en el plano que los contiene.

- (a) Determine el volumen del tetraedro  $ABCD$  y estudie si  $\frac{2}{3}r^3$  es una cota superior para este volumen. En su caso, determine, si existe, un tetraedro con volumen  $\frac{2}{3}r^3$ .
- (b) Determine el volumen del tetraedro  $A_1B_1C_1D$  donde  $A_1$  es el punto medio del lado  $AB$ ,  $B_1$  es el punto medio del lado  $BC$  y  $C_1$  es el punto medio del lado  $CA$ , y su relación con el volumen del tetraedro  $ABCD$ .



5. Una prueba de selección en una empresa de análisis de datos consiste en realizar una jornada laboral de 8 horas, donde el aspirante debe emitir los análisis que le solicitan igual que el resto de trabajadores. La empresa sabe que el tiempo empleado por los aspirantes para realizar un análisis sigue una distribución normal con media  $\mu$  y desviación típica  $\frac{\mu}{10}$ .
- (a) Si la empresa fija como objetivo realizar al menos 100 análisis en una jornada laboral, determine el valor de  $\mu$  que debería alcanzar un aspirante en su preparación para que no cumpla el objetivo con una probabilidad de 0.025.
- (b) Si se sabe que un aspirante con  $\mu = \frac{2}{25}$  horas ha alcanzado el objetivo, determine el número máximo de análisis que ha realizado en la jornada laboral con una probabilidad de, al menos,  $\frac{0.1587}{0.5}$ .

Anexo: tabla de la normal  $Z = N(0, 1)$ .

$$P(Z < z)$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,504	0,508	0,512	0,516	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,591	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,648	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,67	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,695	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,719	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,758	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,791	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,834	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,898	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,937	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,975	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,983	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,985	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,989
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,992	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,994	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,996	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,997	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,998	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,999	0,999
3,1	0,999	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995