A continuación, se muestran dos opciones, cada una de ellas con 5 ejercicios para resolver. Cada ejercicio tiene un valor de 2 puntos. Además de la resolución de los mismos, se tendrán en cuenta las justificaciones y/o explicaciones detalladas de los pasos realizados, las definiciones de los conceptos relacionados, los enunciados de los teoremas o propiedades utilizados y también la estructura de la resolución (comenzando por una pequeña introducción y terminando con las conclusiones obtenidas).

OPCIÓN I

1. Determine dos fracciones irreducibles $\frac{a}{c}$ y $\frac{b}{d}$, sabiendo que su diferencia es $\frac{5}{6}$, que el máximo común divisor de a y b es a – b y que el mínimo común múltiplo de a y b es 1050.

(2 puntos)

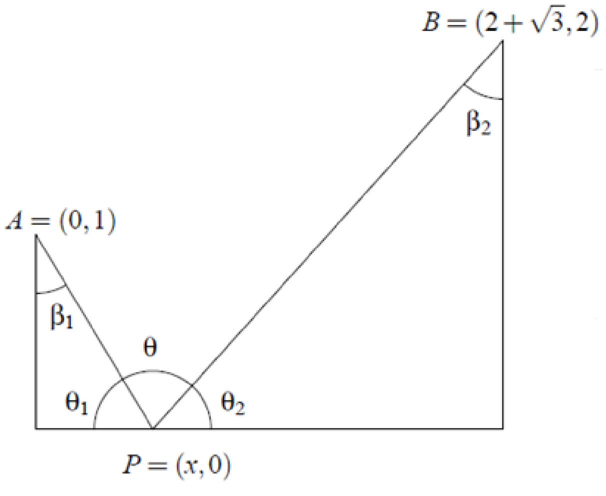
2. En un espacio vectorial real E de dimensión 4 se consideran dos subespacios vectoriales V y W que, con respecto a determinada base de E, vienen descritos por las ecuaciones:

$$V : \begin{cases} x - ay + z + bt = 0 \\ y - t = 0 \end{cases} \qquad W : \begin{cases} ax - y - bz + t = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \qquad \text{donde } a, b \in \mathbb{R}.$$

En función de a y b, calcule las dimensiones de los subespacios V , W ,$V \cap W$ y $V + W$.

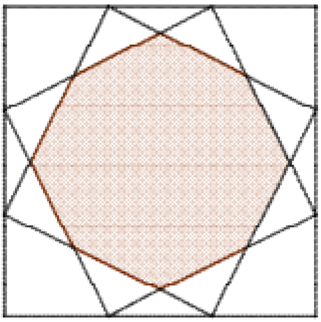
(2 puntos)

3. Halle las coordenadas del punto P en la figura para que el ángulo θ sea máximo y calcule ese valor máximo.



(2 puntos)

4. El área sombreada de la figura mide 100 cm^2. Los dos cuadrados menores que se superponen son iguales. El lado del cuadrado mayor queda dividido en tres segmentos de igual longitud por los vértices de los cuadrados menores. Calcule el área del cuadrado más grande.



(2 puntos)

5. Este ejercicio tiene dos apartados:
   a) Una urna contiene a bolas blancas y b bolas negras. Dos jugadores A y B, extraen sucesivamente y con reemplazamiento una bola de la urna. El juego se detiene cuando A extrae una bola blanca (siendo A el ganador del juego) o cuando B extrae una bola negra (siendo B el ganador del juego). Se supone que el primer jugador en extraer bola es A. Calcular la probabilidad de que A gane la partida y la probabilidad de que B gane la partida.

   (1,5 puntos)

   b) La función de densidad de una variable aleatoria es

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & 0 < x < 2 \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$

   Sabiendo que $P\left(\frac{1}{2} < x < 1\right) = 0{,}16666$, determinar a y b. *(0,5 puntos)*

OPCIÓN II

1. Este ejercicio tiene dos apartados:

a) Demuestre que $x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $x + y$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(1 punto)

b) Calcule:

$$S = \sum_{k=1}^{n} \log \left(\frac{k+1}{k} \right)^{k}$$

(1 punto)

2. En el espacio vectorial $M_{2x2}(\mathbb{R})$, siendo

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

una base de $M_{2x2}(\mathbb{R})$se consideran los conjuntos:

$$S_2 = \{A \epsilon M_{2x2}(\mathbb{R}) : A = A^t\}$$

$$U = \left\{ A \epsilon M_{2x2}(\mathbb{R}) : A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

V es el sistema generado por las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Probar que U es un subespacio vectorial de $M_{2x2}(\mathbb{R})$.

(0,3 puntos)

b) Calcular las ecuaciones paramétricas e implícitas de $V \cap S_2$ respecto de la base canónica.

(0,75 puntos)

c) Dar las ecuaciones paramétricas e implícitas de U respecto de la base *B.*

(0,75 puntos)

d) Razonar si son o no ciertas las siguientes afirmaciones, sabiendo que W es un espacio vectorial de dimensión 2021.

i) En W pueden existir 2022 vectores formando un sistema generador.
ii) 2020 vectores distintos de W siempre son linealmente independientes.

(0,2 puntos)

3.- Este ejercicio tiene dos apartados:

a) Tenemos dos urnas que contienen un 60% de bolas rojas y un 40% de bolas azules la primera y 20% de rojas y 80% de azules la segunda. Seleccionamos una de las urnas al azar y se extraen 10 bolas con reemplazamiento resultando B= { r, a, a, r, r, r, a, r, a, a} siendo r bola roja y a bola azul. Averigüe cuál es la probabilidad de que la extracción haya sido realizada de la primera urna.

(1punto)

b) Tomamos al azar las letras de la palabra oposición y con ellas formamos una palabra. Calcule la probabilidad de que la primera letra de esa palabra sea una vocal y la última una consonante.

(1 punto)

4. Los puntos $A\,(-3,-1,3)$, $B\,(2,-1,0)$, $C\,(0,0,-2)$ $D\,(1,-2,-1)$ son los vértices de un tetraedro.

a) Calcule las ecuaciones implícitas de la recta r que pasa por el baricentro de la base BCD y por el punto A. *(0,5 puntos)*

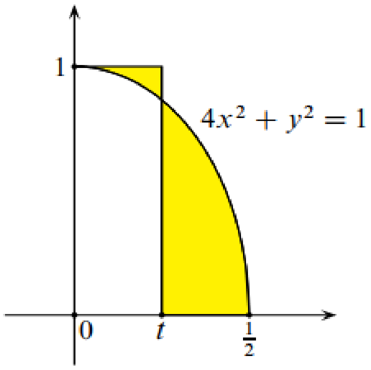
b) Halle la ecuación del plano π que contiene la base del tetraedro que forman los vértices *B*, *C* y *D*. *(0,25 puntos)*

c) Calcule la ecuación del plano π' paralelo a π que pasa por los puntos medios de los segmentos *AB*, *AC* y *AD*. *(0,5 puntos)*

d) Halle el punto *P* del plano π' que pertenece a r. Calcule la distancia de P a la base BCD. ¿Qué relación hay entre la distancia de *P* al vértice *A* y la distancia de *P* a la base *BCD?*

(0,75 puntos)

5. Calcular los valores máximo y mínimo absolutos de la función $S(t)$ en el intervalo $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Dicha función nos permite calcular el área sombreada en la figura, que está comprendida entre la elipse de ecuación $4x^2+y^2=1$, la recta horizontal $y=1$ y la recta vertical $x=t$ donde $0\le t\le\frac{1}{2}$.



(2 puntos)