II Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria

2 de octubre de 1999

Duración: 5 horas

Problemas Propuestos

Problema 1 (4 puntos)

Encontar el valor de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-1})^{-k}}{k}$$

Problema 2 (5 puntos)

Los vertices de un triángulo *ABC* pertenecen a la hipérbola $xy=1$. Demostrar que su ortocentro también pertenece a esta hipérbola.

Problema 3 (6 puntos)

Sean $0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$ todas las raíces del polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, con $n>1$. Si $y_1, y_2 ..., y_n$ son todas las raíces del polinomio $g(x) = f(x) - x f'(x)$ y $z_1, z_2, ..., z_n$ todas las raíces del polinomio $h(x) = f(x) + x f'(x)$, demostrar que estas raíces son reales y satisfacen

$$y_1 < 0 < z_1 < x_1 < y_2 < z_2 < x_2 < ... < y_n <, z_n < x_n .$$

Problema 4 (6 puntos)

La suma de dos cuadrados perfectos consecutivos puede ser un cuadrado perfecto, por ejemplo $3^2 + 4^2 = 5^2$. Encontrar el menor entero n mayor que 2 para el cual existen n números enteros consecutivos tales que la suma de sus cuadrados es un cuadrado perfecto.

Problema 5 (7 puntos)

En el juego *tetris-5* se utilizan cuatro tipos de fichas que tienen una de sus caras pintadas de negro y otra de blanco tal como se muestran en la siguiente figura.

Las fichas pueden ser colocadas en un tablero cuadriculado de *m x n* en cualquier posición siempre y cuando no se superpongan y tengan la cara negra hacia arriba.

(a) **2 puntos**

Demostrar que se puede recubrir un tablero de 8 x 8 que no contiene sus cuatro esquinas.

(b) **4 puntos**

Demostrar que no se puede recubrir un tablero de 1999 x 2001 que no contiene a sus cuatro esquinas.

Problema 6 (7 puntos)

Sea $N = \{1,2,3,...\}$ el conjunto de los números naturales y sea $N_m = \{0,1,2, ..., m - 1\}$ para cualquier número natural m. Demostrar que para cualquier función f , si f: $N\ N_m$ existe un número real α tal que $[\alpha^n] \equiv f(n)$ (mod m).

Nota: $[x]$ denota el mayor entero que no es mayor que x.

Problema 7 (8 puntos)

En R^3 se define un producto "o" de la siguiente manera:

$$(x,y,z) \text{ o } (u,v,t) = (xu + yt + zv, xv + yu + zt, xt + yu + zt, xt + yu + zu).$$

Demostrar que en cualquier $k \in N$ si $(x,y,z)^k = (0,0,0)$ entonces $x = y = z = 0$.

Nota: Se define $(x,y,z)^k = (x, y, z)^{k-1}$ o (x,y,z) para cualquier entero $k > 1$.

Retornar a Olimpiada Iberoamericana Universitaria

Página Principal