SOLUCION EXAMEN CON PARCIAL APROBADO

1.

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i \geq 145\right\} = P\left\{\eta = \frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i - n\,(0.88)}{\sqrt{n\,(0.88)\,(0.12)}} > \frac{145 - n\,(0.88)}{\sqrt{n\,(0.88)\,(0.12)}}\right\} = 0.99.$$

Empleando el TCL tendremos la aporximación

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i \geq 145\right\} \approx P\left\{N(0,1) > c\right\} = 0.99$$

con $c = \frac{145 - n(0.88)}{\sqrt{n(0.88)(0.12)}}$. Pero esta estimación implica (mirar tablas de la normal)

$$c = \frac{145 - n\,(0.88)}{\sqrt{n\,(0.88)\,(0.12)}} = -2.325$$

cuya solución aproximada es $n = 177$. Basta que el número de reservas sea mayor o igual que 177 para cubrir 145 de las plazas.
La segunda cuestión se resuelve de forma parecida:

$$\begin{aligned} P\left\{\sum_{i=1}^{160}\xi_i \geq 151\right\} &= P\left\{\eta \geq \frac{151 - (0.88)\,(160)}{\sqrt{0.1056\,(160)}} = 2.481\,5\right\} \\ &\approx 1 - P\left\{\eta < 2.481\,5\right\} = 1 - 0.9934 \\ &= 0.0066 \end{aligned}$$

2. $\alpha = 0.05$, $n = 300$, $\overline{x} = 8$ $s^2 = (12)^2$. El intervalo para la media poblacional, supuesta la desviación típica desconocida es

$$\begin{aligned} I &= \left[\overline{x} \pm \frac{s}{\sqrt[2]{n}}\mathfrak{t}_{299,0.025}\right] \\ &= \left[8 \pm \frac{12}{\sqrt[2]{300}}\mathfrak{t}_{299,0.025}\right] \end{aligned}$$

que de manera aproximada -usando una $\mathfrak{t}$ de 200 grados de libertad resulta que el intervalo pedido es

$$I == \left[8 \pm \frac{12}{\sqrt[2]{300}}1.972\right] = [6.63,\ 9.36].$$

3. Si $\xi \sim N(\mu, \sigma)$, con $\theta = \sigma$ parámetro desconocido, $\xi_1, ..., \xi_n$ es una m.a.s. y $x_1, ..., x_n$ es una realización de la misma, la función de verosimilitud es

$$\begin{aligned} f_\theta(x_1, ..., x_n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left(\frac{-\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

En lugar de maximizar esta función lo hacemos con $l = \log(f_\theta(x_1, ..., x_n))$ i.e. con

$$l_\theta(x_1, ..., x_n) = \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}.$$

Para calcular el máximo de esta función de la variables $\sigma \in \mathbb{R}^+$ determinamos sus puntos críticos. Los puntos críticos los obtenemos resolviendo $\dfrac{\partial l_\theta}{\partial \sigma} = 0$, es decir

$$-n\frac{\sigma^2}{\sigma^3} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{\sigma^3} = 0.$$

La solución, el EMV es,

$$\sigma^* = \sqrt[2]{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{n}}$$

Con los datos

$$x = [1.8, 1.78, 1.77, 1.8, 1.78, 1.8, 1.82, 1.81, 1.8, 1.79]$$

la estimación pedida es

$$\sigma = \sqrt[2]{\frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - 1.8)^2}{10}} = \sqrt[2]{\frac{0.002\,3}{10}} = 0.015$$

4. $X =$ número de horas que tarda $\sim N(\mu, 99)$. El intervalo de confianza es

$$I = \left[\overline{X} \pm Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt[2]{n}}\right]$$

de manera que el error máxima es

$$e = long(I) = 2Z_{0.025}\frac{99}{\sqrt[2]{n}} \leq 5.$$

Por tanto basta con tomar n tal que

$$2\,(1.96)\,\frac{99}{\sqrt[2]{n}} \leq 5$$

esto es, basta con $n \geq 6025$.