Resolución

1. Según los datos del problema tenemos que, denotando

   - `PrH` $=$ la prueba da resultado positivo de hepatitis
   - `PrNH` $=$ la prueba da resultado negativo de hepatitis
   - `PeH` $=$ la persona tiene hepatitis
   - `PeNH` $=$ la persona no tiene hepatitis,

$$\begin{aligned} P(\texttt{PeH}) &= 0.005, \\ P\left(\texttt{PrH}|\,\texttt{PeH}\right) &= P\left(\texttt{PrNH}|\,\texttt{PeNH}\right) = 0.95, \\ P\left(\texttt{PrNH}|\,\texttt{PeH}\right) &= P\left(\texttt{PrH}|\,\texttt{PeNH}\right) = 0.05. \end{aligned}$$

   Por otra parte sabemos que en virtud del Teorema de Bayes

$$\begin{aligned} P\left(\texttt{PeH}|\,\texttt{PrH}\right) &= \frac{P\left(\texttt{PeH}\cap\texttt{PrH}\right)}{P\left(\texttt{PrH}\right)} \\ &= \frac{P\left(\texttt{PrH}|\,\texttt{PeH}\right)P(\texttt{PeH})}{P\left(\texttt{PrH}|\,\texttt{PeH}\right)P(\texttt{PeH})+P\left(\texttt{PrH}|\,\texttt{PeNH}\right)P(\texttt{PeNH})}. \end{aligned}$$

   Sustituimos ahora los datos de arriba y obtenemos la solución:

$$\boxed{P\left(\texttt{PeH}|\,\texttt{PrH}\right) = \frac{0.95\ 0.005}{0.95\ 0.005 + 0.05\ 0.995} \approx 0.0871}$$

2.
$$P\left\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i \geq 145\right\} = P\left\{\eta = \frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i - n\,(0.88)}{\sqrt{n\,(0.88)\,(0.12)}} > \frac{145 - n\,(0.88)}{\sqrt{n\,(0.88)\,(0.12)}}\right\} = 0.99.$$

   Empleando el TCL tendremos la aporximación

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i \geq 151\right\} \approx P\left\{N(0,1) > c\right\} = 0.99$$

   con $c = \frac{145-n(0.88)}{\sqrt{n(0.88)(0.12)}}$. Pero esta estimación implica (mirar tablas de la normal)

$$c = \frac{145 - n\,(0.88)}{\sqrt{n\,(0.88)\,(0.12)}} = -2.325,$$

cuya solución aproximada es $n = 177$. Basta que el número de reservas sea mayor o igual que 177 para cubrir 145 de las plazas.
La segunda cuestión se resuelve de forma parecida:

$$\begin{aligned} P\left\{\sum_{i=1}^{160} \xi_i \geq 151\right\} &= P\left\{\eta \geq \frac{151 - (0.88)(160)}{\sqrt{0.1056\,(160)}} = 2.481\,5\right\} \\ &\approx 1 - P\{\eta < 2.481\,5\} = 1 - 0.9934 \\ &= 0.0066 \end{aligned}$$

3. Sea la función de verosimilitud

$$\begin{aligned} L &= f_\xi(x_1)\ldots f_\xi(x_n) = 2\theta x_1 \exp\left(-\theta x_1^2\right)\ldots 2\theta x_n \exp\left(-\theta x_n^2\right) \\ &= \begin{cases} (2\theta)^n \exp\left(-\theta \sum_{i=1}^n x_i^2\right) & \text{si } x_i \geq 0, \text{ para todo } i \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases} \end{aligned}$$

Obviamente esta función alcanza el máximo cuando L toma cuando todos los x_i son positivos. Esto es equivalente a maximizar la función

$$l = \log L = n \log(2\theta) - \theta \sum_{i=1}^n x_i^2, \ (\theta > 0).$$

$$l' = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$$

equivale a

$$\theta = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^2};$$

como $l'' = \frac{-n}{\theta^2} < 0$ entonces la función es estrictamente cóncava. Esto implica que para $\theta = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ se alcanza el máximo y por tanto

$$\theta^* = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \xi_i^2}$$

es el estimador de máxima verosimilitud. La estimación con las datos dados es

$$\theta^* = \frac{10}{\sum_{i=1}^{10} (x_i)^2} = 0.208\,908\,3$$

4. Según este método debemos resolver

$$\alpha_1 = \overline{\xi}$$

i.e.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1+\theta x}{2} x dx = \frac{1}{3}\theta = \overline{\xi};$$

por tanto el estimador pedido es

$$\theta^* = 3\overline{\xi}.$$

5. Para estimar la varianza se emplea la cantidad pivotal

$$Q = \frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \varkappa^2_{n-1}.$$

Al buscar puntos $q_1 < q_2$ tales que

$$P\left(q_1 \leq Q \leq q_2\right) = 1 - \alpha$$

se toman

$$q_1 = \varkappa^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} < q_2 = \varkappa^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}.$$

Llevamos esta información a la doble desigualdad $q_1 \leq Q \leq q_2$. Operando en esta desigualdad se llega a

$$1 - \alpha = P\left(q_1 \leq Q \leq q_2\right) = P\left(\frac{n-1}{\varkappa^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}} S^2 \leq Q \leq \frac{n-1}{\varkappa^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}} S^2\right);$$

esto significa que el intervalo pedido es

$$I = \left[\frac{n-1}{\varkappa^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}} S^2, \frac{n-1}{\varkappa^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}} S^2\right].$$

Aplicamos esto al ejemplo expuesto: realizamos el estadístico S^2 con ayuda de la muestra dada

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{4} \left(\xi_i - \overline{\xi}\right)^2 \\ &= \frac{1}{3}\left[2^2 + 4^2 + (-4)^2 + (-2)^2\right] \\ &= \frac{40}{3} \end{aligned}$$

(nótese que $\overline{\xi} = 1267$).

$$\begin{aligned} q_1 &= \chi^2_{3,0.025} = 9.35, \\ q_2 &= \chi^2_{3,0.975} = 0.216. \end{aligned}$$

Por tanto el intervalo para este ejemplo es

$$I = \left[\frac{40}{9.35}, \frac{40}{0.216}\right] = [4.278, 181.18]\,.$$

Como $1{,}2 \notin I$ entonces no podremos afirmar que σ^2 es 1 ó 2 a un nivel de confianza 0'95.