

NOMBRE
APELLIDOS
CALLE
POBLACIÓN
PROVINCIA C.P.

CÁLCULO DE PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA

PRUEBA DE EVALUACIÓN A DISTANCIA / 1

UNIDAD DIDÁCTICA / 1

Número de Expediente

Problema 1. Un cubo de madera, con sus caras pintadas de negro, se divide en 27 cubos iguales, cortando cada arista en 3 trozos. Después de mezclar los 27 cubitos, se recompone el cubo a ciegas. Hallar la probabilidad de que el cubo quede recompuesto con todas las caras negras.

Problema 2. Se fijan $r \geq 6$ números entre 1 y 49, como apuesta (múltiple) a la lotería primitiva. Después se sortean 6 números principales, más el complementario, entre 1 y 49. Determinar la probabilidad de que

- a) se acierten $k \leq 6$ de los 6 números principales.
- b) se acierten $k \leq 6$ más el complementario.
- c) se acierten $k \leq 6$ y no el complementario.

Marcar r números corresponde a hacer $\binom{r}{6}$ apuestas. ¿en qué sentido es equivalente es equivalente marcar r números y hacer $\binom{r}{6}$ apuestas?

Problema 3. En la cola de la ventanilla de un teatro hay $2n$ personas que deben comprar una entrada de 500 pesetas. n de entre ellas tienen monedas de 500 pesetas, mientras que las n restantes tienen billetes de 1000 pesetas. Si el vendedor no dispone inicialmente de cambio, determinar la probabilidad de que ningún cliente tenga que esperar para recibir la vuelta.

Problema 4. Se lanzan n monedas con probabilidades de cara p_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Probar que la probabilidad de obtener un número par de caras es $1/2$ si y sólo si algún $p_i = 1/2$.

Problema 5. Se lanza una moneda, con probabilidad p de cara, hasta que aparecen dos veces consecutivas el mismo resultado. Determinar la distribución del número de lanzamientos realizados y su media.

Problema 6. Se lanza una moneda hasta que aparecen dos caras consecutivas. Determinar la distribución del número de lanzamientos realizados y su media.

Problema 7. En el juego de dados más típico en E.E.U.U., el jugador lanza dos dados; si la suma es 7 u 11, gana y si es 2,3 o 12, pierde. Si obtiene otro resultado, debe seguir lanzando hasta que obtenga 7 o el resultado que obtuvo en el primer lanzamiento; en el primer caso pierde y en el segundo gana. Calcular

- a) La probabilidad de ganar que tiene el jugador.
- b) La probabilidad de que obtuviese un 5 en el primer lanzamiento, si se sabe que el jugador ha ganado; y también si se sabe que ha ganado después de varios lanzamientos.
- c) La probabilidad de ganar del jugador, si se han efectuado k lanzamientos, sin que el juego haya concluido. ¿Con qué probabilidad gana el jugador las partidas muy largas?

Problema 8. Se lanza k veces una moneda con probabilidad p de cara y se introducen en una urna tantas bolas blancas como caras se hayan obtenido y tantas bolas negras como cruces. Después, se extraen r ($r < k$) bolas de la urna sin reemplazamiento. Calcular:

- a) La probabilidad de que se obtengan i bolas blancas.
- b) Si se han obtenido i bolas blancas, la probabilidad de que en la urna queden j bolas blancas.

(Febrero 1991)

Problema 9. Se lanza k veces una moneda; la primera vez que aparece una cara se introduce una bola blanca en una urna y, a partir de entonces, se introduce una bola blanca por cada cara y una bola negra por cada cruz. Calcular el número esperado de bolas de cada color que contendrá la urna. Si es posible, se extrae una bola de la urna. Determinar la probabilidad de que sea negra.

(Febrero 1991)

Problema 10. Una urna A contiene n bolas rojas y m blancas, mientras que otra urna B contiene m rojas y n blancas. Se lanza una moneda y se efectúan extracciones con reemplazamiento de la urna A , si sale cara, y de la urna B , si sale cruz.

- a) Obtener la probabilidad de que obtener bola roja en cualquier extracción.
- b) Si en las N primeras extracciones se han obtenido k bolas rojas, hallar la probabilidad de obtener bola roja en la siguiente extracción.

Problema 11. Una persona sujeta en su puño $2n$ hilos, de manera que sobresalgan por ambos lados. Otra persona anuda los extremos inferiores por parejas y después los extremos superiores por parejas hasta tenerlos todos anudados. Determinar:

- a) La probabilidad de que todos los hilos formen un sólo anillo. Estimar el valor de dicha probabilidad para n grande.
- b) Un método recurrente para obtener la distribución del número de anillos formados. Calcular su media y su varianza.

Problema 12. Se escojen al azar n números distintos, entre 1 y N ($N > n$). Determinar la probabilidad de que entre ellos haya dos números consecutivos. Hallarla, en particular, para $N = 49$ y $n = 6$. Si N es grande, ¿cómo debe ser n para que la probabilidad sea aproximadamente p ?

Problema 13. De una urna que contiene a bolas blancas y b negras, dos jugadores hacen extracciones con reemplazamiento alternativamente. Gana aquel jugador que consiga extraer el primero bola blanca.

- a) Calcular la probabilidad de que gane cada uno de los jugadores.
- b) Determinar el número medio de extracciones que se realizan.

Problema 14. Una sucesión de urnas contienen, cada una, a bolas blancas y b negras. Una bola extraída al azar de la primera urna se introduce en la segunda; luego, una de ésta en la tercera y así sucesivamente.

- a) Hallar la probabilidad de que la n -ésima bola extraída sea blanca.
- b) Determinar la distribución del número de la extracción en que se obtiene por primera vez bola negra; así como su media.
- c) Hallar la probabilidad de que entre las n primeras extracciones aparezca exactamente una bola blanca.

Problema 15. n parejas de bolas, compuestas por una blanca y otra negra, se introducen en una urna. Después se extraen parejas de bolas, sin reemplazamiento, hasta que la urna queda vacía. Determinar:

- a) La probabilidad de que las bolas salgan emparejadas de la misma manera que fueron introducidas.
- b) La probabilidad de que todas las parejas que se obtengan estén formadas por una bola de cada color.
- c) La distribución del número de parejas formadas por una bola de cada color. Hallar la distribución límite cuando n crece.

CONSULTAS

REFERENTES AL CONTENIDO DE LOS TEMAS Y METODOLOGÍA DE SU ESTUDIO

RESPUESTAS DEL PROFESOR

EVALUACIÓN	PRUEBA OBJETIVA	PRUEBA DE ENSAYO
	Aciertos	
	Errores	
	Omisiones	
	TOTAL <div></div>	TOTAL <div></div>

NOMBRE
APELLIDOS
CALLE
POBLACIÓN
PROVINCIA C.P.

CÁLCULO DE PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA

PRUEBA DE EVALUACIÓN A DISTANCIA / 2

UNIDAD DIDÁCTICA / 2

Número de Expediente

Problema 1. Se eligen tres puntos A , B y C , al azar e independientemente, sobre una circunferencia. Determinar la distribución del valor absoluto del ángulo ABC . Hallar su media.

Problema 2. A través de un punto elgido al azar sobre un radio fijo de una circunferencia de radio R , se traza la cuerda perpendicular al radio. Hallar la distribución de la longitud de la cuerda, su esperanza y su varianza.

Problema 3. Si X es una variable con distribución $N(\mu, \sigma)$, la distribución de la variable aleatoria $Y = e^X + a$ se denomina distribución logarítmico-normal de parámetros a , μ y σ .

- a) Determinar la función de densidad de Y .
- b) Si α_i son los momentos de Y respecto al origen, μ_i los momentos centrales y γ_1 el coeficiente de asimetría, probar que se verifica:

$$a = \alpha_1 - \frac{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1^2}}{\eta}, \quad \mu = \log(\alpha_1 - a) - \frac{\sigma^2}{2} \quad \text{y} \quad \sigma^2 = \log(1 + \eta^2)$$

donde η es la raíz real de la ecuación $\eta^3 + 3\eta - \gamma_1 = 0$.

- c) Obtener, si existe, α_i .

Problema 4. Una variable X tiene distribución de Cauchy, $\mathcal{C}(\mu, \sigma)$ si su densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{\sigma^2 + (x - \mu)^2} \quad \text{para } x \in \mathbb{R}$$

- a) Comprobar que f es efectivamente una densidad, calcular su función de distribución y su función característica.
- b) Existe la media de la distribución.
- c) Probar que si X tiene distribución $\mathcal{C}(0, 1)$, $\sigma X + \mu$ tiene distribución $\mathcal{C}(\mu, \sigma)$.
- d) Probar que si X tiene distribución $\mathcal{C}(0, \sigma)$, a/X tiene distribución $\mathcal{C}(0, |a|/\sigma)$ y reciprocamente, cualquiera que sea $a \in \mathbb{R}$.
- e) Determinar para que valores de α existe el momento absoluto $E|X|^\alpha$. Calcularlo en caso de que exista. ¿Existe la función generatriz de momentos de X ?

Problema 5. Sea X una variable aleatoria con densidad $f(x)$. Obtener la función de densidad de las variables: a) X^2 ; b) $|X|$; c) e^{-X^2} ; d) $\cos X$; e) $\arctg x$; f) $1/(1 + X^2)$.

Problema 6. Sean X e Y variables aleatorias independientes, positivas y con distribución geométrica de parámetros a y b respectivamente.

- a) Determinar la distribución de la variable $Z = X/Y$.
- b) Calcular $P\{1 < Z \leq 2\}$ y $P\{1/3 < Z \leq 1/2\}$.
- c) Calcular la esperanza de Z .

Problema 7. Obtener las funciones características asociadas a las siguientes distribuciones:

- a) Triangular, con densidad $f(x) = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right)$ para $|x| < a$, siendo $a > 0$.
- b) Laplace, con densidad $f(x) = \frac{1}{2\beta} e^{-|x-\alpha|/\beta}$ para $x \in \mathbb{R}$ siendo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta > 0$.
- c) Geométrica, con función de probabilidad $p(k) = p^k(1-p)$ para $k = 0, 1, 2, \dots$ siendo $p \in (0, 1)$.
- d) Con densidad $f(x) = \frac{x}{2\sinh\pi x/2}$ para $x > 0$.
- e) Con densidad $f(x) = \frac{2\sin^2 ax/2}{\pi ax^2}$ para $x \in \mathbb{R}$ siendo $a > 0$.
- f) Con función de distribución $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \lambda/2e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Problema 8. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional uniformemente distribuida en el paralelogramo de vértices $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 1)$ y $(0, 1)$.

- a) Hallar las distribuciones marginales y las condicionales.
- b) Determinar las curvas y las rectas de regresión
- c) Determinar la distribución de $X + Y$.
- d) Hallar dos funciones de X e Y que sean variables aleatorias independientes.

Problema 9. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional, tal que X tiene distribución exponencial de parámetro 1 y, condicionado por $X = x$, Y tiene distribución $F(y|x) = 1 - y^{-x}$ para $y \geq 1$.

- a) Hallar la densidad conjunta.
- b) Determinar la distribución de Y y la distribución condicionada de X por Y .
- c) Determinar las curvas de regresión. ¿Existen las rectas de regresión?
- d) Probar que X e Y^X son independientes.

Problema 10. De una urna que contiene a bolas blancas y b negras, se hacen extracciones sin reemplazamiento. Sea X_i el número de la extracción en que aparece la i -ésima bola blanca ($1 \leq i \leq a$) e Y_j el número de la extracción en que aparece la j -ésima bola negra ($1 \leq j \leq b$).

- a) Determinar la distribución conjunta de X_i e Y_j .
- b) Obtener la distribución de Y_j condicionada por X_i .

(Febrero 1991)

Problema 11. Dos jugadores comienzan a hacer lanzamientos de una moneda, con probabilidad p de cara. Si aparece n veces seguidas el primer resultado y, a continuación, m veces seguidas el resultado contrario, el primer jugador recibe $n - m$ pesetas del segundo.

- a) Estudiar la distribución de los valores n y m . Obtener su covarianza.
- b) Determinar la distribución del pago entre ambos jugadores y su media.

(Febrero 1991)

Problema 12. Supongamos que X tiene distribución $\gamma(2, 1)$ de densidad $f(x) = xe^{-x}$ para $x > 0$ y que Y , condicionado por $X = x$, tiene distribución de Poisson de parámetro x .

- a) Determinar la distribución de X condicionada por $Y = k$.
- b) Hallar las líneas de regresión.
- c) Determinar el coeficiente de correlación entre X e Y .

Problema 13. Dada la distribución bidimensional

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ó } y < 0 \\ xy/2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \text{ y } 0 \leq y < 1 \\ 3y/4 & \text{si } x \geq 1 \text{ y } 0 \leq y < 1 \\ 3x/4 & \text{si } y \geq 1 \text{ y } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \text{ y } y \geq 1 \end{cases}$$

- a) Estudiar las distribuciones marginales y condicionales. Deducir como se distribuye la probabilidad sobre el plano.
- b) Determinar las curvas de regresión.
- c) Hallar el coeficiente de correlación entre ambas variables.

Problema 14. Si X e Y son las coordenadas de un punto elegido al azar en el cuadrado $[0, 1]^2$, determinar la distribución conjunta de:

a) $U = X^2, V = X^2 + Y^2$.

b) $U = XY, V = X/Y$.

c) $U = \max(X, Y), V = \min(X, Y)$.

d) $U = Y/X^2, V = \frac{\max(X, Y)}{\min(X, Y)}$.

Problema 15. Un contador geiger registra las llegadas de dos tipos de partículas α y β . Los números de partículas que llegan en intervalos de tiempo disjuntos son independientes entre sí y los de un tipo con los del otro. En cada intervalo de tiempo de longitud t , el número de partículas registradas sigue una distribución de Poisson de parámetros λt y μt respectivamente.

- a) Comprobar la coherencia de los datos.
- b) Determinar la distribución del tiempo transcurrido entre dos llegadas consecutivas de partículas de tipo α . Y la del tiempo transcurrido desde la llegada de una partícula de tipo α hasta que se registran i llegadas más de tales partículas.
- c) Determinar la distribución del número de partículas de tipo β registradas entre dos llegadas consecutivas de tipo α .
- d) Si en un intervalo de tiempo de longitud t se han registrado n llegadas, hallar la distribución del número de registros de tipo α y β respectivamente.
- e) Establecer la relación

$$\sum_{j=0}^k \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} = \int_t^\infty \frac{1}{k!} \lambda^{k+1} s^k e^{-\lambda s} ds$$

e interpretarla en términos de las llegadas de tipo α .

CONSULTAS

REFERENTES AL CONTENIDO DE LOS TEMAS Y METODOLOGÍA DE SU ESTUDIO

RESPUESTAS DEL PROFESOR

EVALUACIÓN	PRUEBA OBJETIVA	PRUEBA DE ENSAYO
	Aciertos	
	Errores	
	Omisiones	
	TOTAL <div></div>	TOTAL <div></div>

NOMBRE
APELLIDOS
CALLE
POBLACIÓN
PROVINCIA C.P.

CÁLCULO DE PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA

PRUEBA DE EVALUACIÓN A DISTANCIA / 4

UNIDAD DIDÁCTICA / 4

Número de Expediente

Problema 1.

Se dispone de una muestra aleatoria simple de tamaño n de la densidad

$$f_{\theta}(x) = \frac{1}{2} \theta^3 x^2 e^{-\theta x} \quad x > 0$$

siendo θ un parámetro positivo desconocido. Se pide:

- a) Determinar el estimador de máxima verosimilitud de $1/\theta$ y estudiar si es suficiente.
- b) Sabiendo que $T = \sum_{i=1}^n X_i$ es un estadístico completo, determinar el estimador centrado uniformemente de mínima varianza de $1/\theta$.
- c) Determinar un contraste de máxima potencia de nivel α para contrastar $H_0 : \theta = \theta_0$ frente a $H_1 : \theta = \theta_1$, siendo $\theta_1 > \theta_0$.
- d) Razonar por qué el contraste obtenido en el apartado anterior es uniformemente de máxima potencia para contrastar $H_0 : \theta = \theta_0$ frente a $H_1 : \theta > \theta_0$. Determinar su función de potencia.
- e) Determinar el test de razón de verosimilitudes para contrastar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ frente a $H_1 : \theta > \theta_0$. ¿Es uniformemente de máxima potencia?

Problema 2.

Se dispone de una muestra aleatoria simple de tamaño n de la densidad

$$f_{\theta}(x) = \theta (1 - x)^{\theta-1} \quad 0 < x < 1$$

siendo θ un parámetro positivo desconocido. Se pide:

- a) Determinar el estimador de máxima verosimilitud de θ y un estadístico suficiente para la familia de densidades dada.
- b) Sabiendo que $T = \sum_{i=1}^n \log(1 - X_i)$ es un estadístico completo, determinar el estimador centrado uniformemente de mínima varianza para $1/\theta$ y el estimador centrado uniformemente de mínima varianza para θ .
- c) Determinar un contraste de máxima potencia de nivel α para contrastar $H_0 : \theta = \theta_0$ frente a $H_1 : \theta = \theta_1$, siendo $\theta_1 > \theta_0$.
- d) Razonar por qué el contraste obtenido en el apartado anterior es uniformemente de máxima potencia para contrastar $H_0 : \theta = \theta_0$ frente a $H_1 : \theta > \theta_0$. Determinar su función de potencia.
- e) Determinar el test de razón de verosimilitudes para contrastar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ frente a $H_1 : \theta > \theta_0$. ¿Es uniformemente de máxima potencia?

Problema 3.

Dada una muestra aleatoria simple de tamaño n de una distribución con función de densidad

$$f_{\theta}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\theta}} x^{-3/2} \quad x \geq \frac{1}{\theta}$$

siendo θ un parámetro positivo desconocido, se pide:

- a) Determinar el estimador de máxima verosimilitud de θ y estudiar si es suficiente.
- b) Determinar, por el método de la cantidad pivotal, el intervalo de confianza para θ de nivel de confianza $1 - \alpha$ que tenga longitud mínima.
- c) Determinar un contraste uniformemente de máxima potencia de nivel α para contrastar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ frente a $H_1 : \theta > \theta_0$.

Problema 4.

Sea X una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad

$$f_{\theta}(x) = \frac{\theta}{e^{\theta^2} - 1} e^{\theta x} \quad \text{si } 0 \leq x \leq \theta$$

siendo $\theta > 0$. Determinar, utilizando una muestra aleatoria simple de tamaño n de X , un estadístico suficiente minimal para la familia de densidades dada.

Problema 5.

Sea X una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad

$$f_{\theta}(x) = \frac{2x}{\theta^2} \quad \text{si } 0 < x < \theta$$

siendo $\theta > 0$. Utilizando una muestra aleatoria simple de tamaño n de X , se pide:

1. Determinar un estadístico suficiente minimal para la familia de densidades dada. ¿Es completo?.
2. Determinar, si existe, el estimador centrado uniformemente de mínima varianza para $g_1(\theta) = \theta$ y para $g_2(\theta) = 1/\theta$.
3. Determinar el estimador de máxima verosimilitud de θ .

Problema 6.

Sea X una variable aleatoria con distribución $N(\theta, \theta)$ (es decir, $E[X] = \sqrt{V(X)} = \theta$). Se pide

1. Determinar un estimador suficiente minimal para la familia anterior.
2. Analizar si el estimador determinado en el apartado anterior es completo.

Problema 7.

Sea X una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad

$$f_{\theta}(x) = e^{-(x-\theta)} \cdot \exp\{-e^{-(x-\theta)}\} \quad -\infty < x < +\infty$$

siendo $\theta \in \mathbb{R}$. Utilizando una muestra aleatoria simple de tamaño n de X , se pide:

1. Determinar la cota de Frechet-Cramer-Rao para los estimadores insesgados de θ .
2. Determinar, si existe, el estimador centrado uniformemente de mínima varianza para $g(\theta) = \theta$.

Problema 8.

Sea X una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad

$$f_{\lambda\mu}(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2\mu^2 x} (x - \mu)^2 \right\} \quad \text{si } x > 0$$

siendo $\lambda > 0$ y $\mu > 0$. Determinar, utilizando una muestra aleatoria simple de tamaño n de X , los estimadores de máxima verosimilitud T_1 de μ y T_2 de $1/\lambda$. Analizar su suficiencia minimal.

Supuesto que T_2 es completo y que $\lambda n T_2$ sigue una distribución χ^2 con $n - 1$ grados de libertad, determinar el estimador centrado uniformemente de mínima varianza de $1/\lambda$, así como un intervalo de confianza de nivel de confianza $1 - \alpha = 0.95$ para $1/\lambda$, supuesto que es $n = 20$.

Problema 9.

Sea X una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad

$$f_{\theta}(x) = \frac{2\theta}{3^{2\theta}} x^{2\theta-1} \quad \text{si } 0 < x < 3$$

siendo $\theta > 0$. Utilizando una muestra aleatoria simple de tamaño n de X , se pide:

- a) Determinar el estimador de máxima verosimilitud para θ y analizar si es suficiente.
- b) Determinar el estimador centrado uniformemente de mínima varianza para $1/\theta$.
- c) Determinar un test uniformemente de máxima potencia de nivel α para contrastar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ frente a $H_1 : \theta > \theta_0$. Aplicarlo al caso de que sea $n = 3$, $\alpha = 0'05$, $\theta_0 = 1/4$ y que se obtengan los valores $X_1 = 1$, $X_2 = 1'2$ y $X_3 = 2$.

Problema 10.

Sea X una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad

$$f_{\theta}(x) = \frac{4}{\theta} x^3 e^{-x^4/\theta} \quad \text{si } x > 0$$

siendo $\theta > 0$. Utilizando una muestra aleatoria simple de tamaño n de X , se pide:

- a) Determinar el estimador de máxima verosimilitud para θ y analizar si es suficiente.
- b) Determinar el estimador centrado uniformemente de mínima varianza para θ . ¿Es este estimador eficiente para θ ?
- c) Determinar un intervalo de confianza para θ de colas iguales, de nivel de confianza $1 - \alpha$.
- d) Determinar un test uniformemente de máxima potencia de nivel α para contrastar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ frente a $H_1 : \theta > \theta_0$.

Problema 11.

Sea X una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad

$$f_{(\theta_1, \theta_2)}(x) = \theta_2 \theta_1^{\theta_2} x^{-(\theta_2+1)} \quad \text{si } x > \theta_1$$

siendo $\theta_1, \theta_2 > 0$. Utilizando una muestra aleatoria simple de tamaño n de X , se pide:

- a) Determinar el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ del parámetro $\theta = (\theta_1, \theta_2)$.
- b) Supuesto θ_2 conocido, determinar el estimador centrado uniformemente de mínima varianza para θ_1 .
- c) Supuesto θ_1 conocido, determinar
 - i) el estimador centrado uniformemente de mínima varianza para $1/\theta_2$.
 - ii) un intervalo de confianza para θ_2 de colas iguales, de nivel de confianza $1 - \alpha$.
 - iii) un test uniformemente de máxima potencia de nivel α para contrastar $H_0 : \theta_2 \leq \theta_0$ frente a $H_1 : \theta_2 > \theta_0$.

Problema 12.

Sea X una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad

$$f_{\theta}(x) = \frac{\theta^2}{2} e^{x-\theta(e^{x/2})} \quad -\infty < x < \infty$$

siendo $\theta > 0$. Utilizando una muestra aleatoria simple de tamaño n de X , se pide:

- a) Determinar el estimador de máxima verosimilitud para θ .
- b) Determinar el estimador centrado uniformemente de mínima varianza para $1/\theta$.
- c) Determinar un intervalo de confianza para θ , de nivel de confianza $1 - \alpha$.
- d) Determinar un test uniformemente de máxima potencia de nivel α para contrastar $H_0 : \theta \geq \theta_0$ frente a $H_1 : \theta < \theta_0$.

Problema 13.

Sea X una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad

$$f_{\theta}(x) = \frac{\log 3}{3^{\theta} - 1} 3^x \quad \text{si } 0 < x < \theta.$$

Utilizando una muestra aleatoria simple de tamaño n de X , se pide:

- a) Determinar el estimador de máxima verosimilitud para θ .
- b) Determinar el estimador centrado uniformemente de mínima varianza para 3^{θ} .
- c) Determinar, por el método de Neyman, un intervalo de confianza para θ , de nivel de confianza $1 - \alpha$. De entre ellos, ¿cuál es el de longitud mínima?

CONSULTAS
REFERENTES AL CONTENIDO DE LOS TEMAS Y METODOLOGÍA DE SU ESTUDIO

RESPUESTAS DEL PROFESOR

EVALUACIÓN	PRUEBA OBJETIVA	PRUEBA DE ENSAYO
	Aciertos	
	Errores	
	Omisiones	
	TOTAL <input type="text"/>	TOTAL <input type="text"/>

NOMBRE
APELLIDOS
CALLE
POBLACIÓN
PROVINCIA C.P.

CÁLCULO DE PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA

PRUEBA DE EVALUACIÓN A DISTANCIA / 5

UNIDAD DIDÁCTICA / 5

Número de Expediente

Problema 1.

Con objeto de averiguar si existe o no diferencia significativa entre los hábitos fumadores de tres comunidades, se seleccionó una muestra aleatoria simple de 100 individuos de cada una de las tres comunidades, obteniéndose los siguientes resultados,

Comunidad	fumadores	no fumadores	Total
A	13	87	100
B	17	83	100
C	18	82	100
	48	252	300

¿Pueden considerarse homogéneas las tres poblaciones en cuanto a sus hábitos fumadores?.

Problema 2.

Supongamos que se toma una muestra aleatoria simple de tamaño uno de la distribución con densidad

$$f_{\theta}(x) = 2\theta x + 2(1 - \theta)(1 - x) \quad \text{si } 0 < x < 1$$

siendo $\theta > 0$. Se pide:

1. Determinar un contraste de máxima potencia de nivel α para contratar $H_0 : \theta = \theta_0$ frente a $H_1 : \theta = \theta_1$, siendo $\theta_1 < \theta_0$.
2. El contraste determinado en el apartado anterior, ¿es uniformemente de máxima potencia para contrastar $H_0 : \theta = \theta_0$ frente a $H_1 : \theta < \theta_0$? ¿Lo es para contrastar $H_0 : \theta \geq \theta_0$ frente a $H_1 : \theta < \theta_0$?

Problema 3.

Sea X una variable aleatoria simple con distribución $N(0, 1)$ bajo la hipótesis nula H_0 y con distribución de Cauchy $C(1, 0)$ —de función de densidad $f(x) = 1/(\pi(1 + x^2))$ — bajo la hipótesis alternativa H_1 . Se pide

1. Determinar un contraste de máxima potencia de nivel α para contrastar H_0 frente a H_1 utilizando una muestra de tamaño uno de X .
2. ¿Qué región crítica obtendría si es $\alpha = 0'05$? ¿Y si fuera $\alpha = 0'15$?

Problema 4.

Determinar un contraste de máxima potencia de nivel α ($0 < \alpha < 0.5$) para contrastar $H_0 : f_0$ frente a $H_1 : f_1$, en donde

$$f_0(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } 0 < x < 1/2 \\ 4 - 4x & \text{si } 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

y

$$f_1(x) = 1 \quad \text{si } 0 < x < 1$$

basado en una muestra aleatoria simple de tamaño uno de X . Determinar su función de potencia.

Problema 5.

Se quiere averiguar si existe independencia entre la semana de exámenes que elige el alumno para realizar las Pruebas Presenciales y la calificación obtenida en una determinada asignatura. Para ello se eligieron al azar 300 alumnos de la UNED que cursaban la asignatura en cuestión, obteniéndose la siguiente tabla de contingencia

	Primera Semana	Segunda Semana
$[0 - 2)$	19	23
$[2 - 5)$	30	30
$[5 - 8)$	68	55
$[8 - 10]$	45	30

¿Qué conclusiones obtendría?

Problema 6.

Se quiere investigar si los votantes a los tres partidos políticos de ámbito nacional están repartidos de igual manera en las cinco regiones de un determinado país. Para ello se seleccionaron al azar votantes de las diferentes regiones, obteniéndose el siguiente número de votantes a cada partido en cada una de las regiones,

Región	Partidos			Votantes
	Derecha	Centro	Izquierda	
R1	40	20	10	70
R2	20	60	20	100
R3	10	10	30	50
R4	10	10	10	30
R5	20	20	10	50

A nivel de significación $\alpha = 0'05$, ¿puede aceptarse la hipótesis de la no existencia de diferencias significativas entre las cinco regiones en cuanto a sus preferencias políticas?.

Problema 7.

Se cree que el número de erratas por página de un determinado libro sigue una distribución de Poisson. Elegida una muestra aleatoria simple de 250 páginas del mencionado libro se obtuvo la siguiente distribución de frecuencias absolutas sobre dicho número de erratas por página

<i>número de erratas</i>	0	1	2	3	4	5	6	7
<i>número de páginas</i>	35	72	68	48	17	6	3	1

¿Se puede afirmar que el número de erratas por página del libro en cuestión sigue una distribución de Poisson?.

Problema 8.

Se quiere averiguar si en una determinada ciudad existe independencia entre la zona geográfica de residencia y el nivel de ingresos . Para ello se seleccionaron al azar 250 habitantes de la ciudad en cuestión, obteniéndose la siguiente tabla de contingencia

	<i>Bajo</i>	<i>Medio</i>	<i>Alto</i>
<i>Sur</i>	30	25	26
<i>Centro</i>	29	29	27
<i>Norte</i>	29	26	29

¿Qué conclusiones obtendría?.

Problema 9.

Sea X una variable aleatoria discreta con valores en los enteros no negativos, cuya función de probabilidad es

$$f_{\theta}(x) = \binom{r+x-1}{x} \theta^r (1-\theta)^x \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

siendo r un número natural conocido y $\theta \in (0, 1)$ un parámetro desconocido. Utilizando una muestra aleatoria simple de tamaño n de X , se pide:

- (a) Estimar θ por el método de la máxima verosimilitud y por el método de los momentos.
- (b) Determinar el estimador centrado uniformemente de mínima varianza para $g_1(\theta) = (1-\theta)/\theta$.
- (c) Determinar el estimador centrado uniformemente de mínima varianza para $g_2(\theta) = \theta^r$.
- (d) Determinar un contraste uniformemente de máxima potencia de nivel α para contrastar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ frente a $H_1 : \theta > \theta_0$.

Problema 10.

La cotización del dólar frente a la peseta sigue una distribución normal de media y varianza desconocidas. Elegidos 9 días al azar, la cotización del dólar en esos días fue: 145'3, 146'2, 145'8, 146, 146'1, 144'5, 145'2, 147, 144'2.

Determinar un intervalo de confianza, de nivel de confianza 0'95, para la cotización media del dólar frente a la peseta.

CONSULTAS

REFERENTES AL CONTENIDO DE LOS TEMAS Y METODOLOGÍA DE SU ESTUDIO

RESPUESTAS DEL PROFESOR

EVALUACIÓN	PRUEBA OBJETIVA	PRUEBA DE ENSAYO
	Aciertos	
	Errores	
	Omisiones	
	TOTAL <input type="text"/>	TOTAL <input type="text"/>