OPOSICIONES PES MATEMÁTICAS 2019
PRIMERA PRUEBA. PARTE A.

**OPCIÓN A**

1. El número de vehículos que atraviesan diariamente una zona de velocidad controlada por radar sigue una distribución de Poissón de parámetro λ. Si la probabilidad de que un vehículo no respete el límite fijado es $p$, se pide:
   a. Encontrar la distribución del número de infracciones diarias detectadas por el radar.
   b. Si el radar detectó $r$ infracciones, ¿cuál es la distribución del número de vehículos que han atravesado la zona controlada? ¿Cuál es la media de esta distribución?

2.- Hállense los criterios de divisibilidad por 4 y 13. Aplíquense estos criterios para determinar el mayor número de seis cifras divisible por 4 y por 13.

3.- Sea $f : C \to C$ dada por $f(z) = \dfrac{z}{1-i}$

Definimos: $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f^2$, .........., $f^{(n+1} = f \circ f^{(n}$ y llamamos $f^{(n}(z) = w_n$

a) Siendo $z = i$, hallar el menor $n \in N$ posible para que $w_1 + w_2 + ....... + w_n$ sea real y calcular el valor correspondiente.

b) Hallar $z^{\frac{1}{6}}$ sabiendo que $w_{200} = i$

4.- Sea $E$ un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales, y $f$ una aplicación lineal de $E$ en $E$ tal que $f^2 = -I$.

a) Demostrar que $f$ es biyectiva.

b) Demostrar que si $A = \{x_1, x_2, ....., x_n, f(x_1), f(x_2), ..... f(x_{n-1})\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes, también $B = \{x_1, x_2, ....., x_n, f(x_1), f(x_2), ..... f(x_{n-1}), f(x_n)\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes.

5.- Tomando sobre el eje OX el punto $P(a,0)$, construimos sobre la circunferencia:
$x^2 + y^2 = r^2 \quad (0 \le a < r)$ el triángulo de vértices: $P(a,0)$, $R(r,0)$, $Q\left(a, \sqrt{r^2 - a^2}\right)$

Consideramos ahora el triángulo curvilíneo cuyos lados son: el segmento $\overline{PQ}$, el segmento $\overline{PR}$ y el arco de circunferencia $QR$.

Calcular el límite del cociente de las áreas de los triángulos mencionados si hacemos tender $"a"$ hacia $"r"$

OPOSICIÓNS PES MATEMÁTICAS 2019
PRIMEIRA PROBA. PARTE A.

**OPCIÓN A**

1. - O número de vehículos que atravesan diariamente unha zona de velocidade controlada por radar segue unha distribución de Poissón de parámetro λ. Se a probabilidade de que un vehículo non respecte o límite fixado é $p$, pídese:

a) Atopar a distribución do número de infraccións diarias detectadas polo radar.

b) Se o radar detectou $r$ infraccións, ¿cal é distribución do número de vehículos que atravesaron a zona controlada? ¿Cal é a media desta distribución?

2.- Áchense os criterios de divisibilidade por 4 e 13. Aplíquense estes criterios para determinar o maior número de seis cifras divisible por 4 e por 13.

3.- Sexa $f : C \to C$ dada por $f(z) = \dfrac{z}{1-i}$

Definimos: $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f^2$, ..........., $f^{(n+1} = f \circ f^{(n}$ e chamamos $f^{(n}(z) = w_n$

a) Sendo $z = i$, achar o menor $n \in N$ posible para que $w_1 + w_2 + ....... + w_n$ sexa real e calcular o valor correspondente.

b) Achar $z^{\frac{1}{6}}$ sabendo que $w_{200} = i$

4.- Sexa $E$ un espazo vectorial sobre o corpo dos números reais, e $f$ unha aplicación lineal de $E$ en $E$ tal que $f^2 = -I$.

a) Demostrar que $f$ é bixectiva.

b) Demostrar que se $A = \{x_1, x_2, ....., x_n, f(x_1), f(x_2), ..... f(x_{n-1})\}$ é un conxunto de vectores linealmente independentes, tamén $B = \{x_1, x_2, ....., x_n, f(x_1), f(x_2), ..... f(x_{n-1}), f(x_n)\}$ é un conxunto de vectores linealmente independentes.

5.- Tomando sobre o eixo OX o punto $P(a,0)$, construimos sobre a circunferencia: $x^2 + y^2 = r^2 \quad (0 \le a < r)$ o triángulo de vértices: $P(a,0)$, $R(r,0)$, $Q\left(a, \sqrt{r^2 - a^2}\right)$

Consideramos agora o triángulo curvilíneo cuxos lados son: o segmento $\overline{PQ}$, o segmento $\overline{PR}$ e o arco de circunferencia $QR$.

Calcular o límite do cociente das áreas dos triángulos mencionados se facemos tender "$a$" cara "$r$".

OPOSICIONES PES MATEMÁTICAS 2019
PRIMERA PRUEBA. PARTE A.

**OPCIÓN B**

1.- Los dos lados de un triángulo isósceles tienen una longitud $L$ cada uno, y el ángulo $x$ entre ellos es el valor de una variable aleatoria $X$ con función de densidad proporcional a $x(\pi - x)$ en cada punto $x \in \left(0, \pi/2\right)$. Calcular la función de densidad del área del triángulo y su esperanza.

2.- Consideramos los polinomios $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C,\ \ Q(x) = 3x^2 + 2Ax + B$ ( $x$ es la variable, $A$, $B$, $C$ son parámetros reales). Supongamos que si $a$, $b$, $c$ son las tres raíces de $P$, las de $Q$ son $\dfrac{a+b}{2}$, $\dfrac{b+c}{2}$. Determinar todos los posibles polinomios $P$ y $Q$.

3.- Un cartel, situado en una pared, tiene sus bordes superior e inferior a las alturas $m$ y $n$ respectivamente, con referencia a la visual horizontal de un lector. ¿A qué distancia de la pared debe colocarse el lector del cartel para que el ángulo visual determinado por la pupila y los bordes sea máximo?

4.- Un cuadrado $ABCD$ de centro $O$ y lado 1, gira un ángulo $\alpha$ en torno a $O$. Hallar el área común a ambos cuadrados.

5.- Hallar la envolvente de los círculos que tienen sus centros en la parábola $y^2 = 2px$, y que pasan por el vértice de esta parábola.

OPOSICIÓNS PES MATEMÁTICAS 2019
PRIMEIRA PROBA. PARTE A.

**OPCIÓN B**

1.- Os dous lados dun triángulo isósceles teñen unha lonxitude $L$ cada un, e o ángulo $x$ entre eles é o valor dunha variable aleatoria $X$ con función de densidade proporcional a $x(\pi - x)$ en cada punto $x \in \left(0, \pi/2\right)$. Calcular a función de densidade da área do triángulo e a súa esperanza.

2.- Consideramos os polinomios $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C,\ \ Q(x) = 3x^2 + 2Ax + B$ ( $x$ é a variable, $A$, $B$, $C$ son parámetros reais). Supoñamos que se $a$, $b$, $c$ son as tres raíces de $P$, as de $Q$ son $\frac{a+b}{2}$, $\frac{b+c}{2}$. Determinar todos os posibles polinomios $P$ e $Q$.

3.- Un cartel, situado nunha parede, ten os seus bordos superior e inferior ás alturas $m$ e $n$ respectivamente, con referencia á visual horizontal dun lector. A qué distancia da parede debe colocarse o lector do cartel para que o ángulo visual determinado pola pupila e os bordos sexa máximo?

4.- Un cadrado $ABCD$ de centro $O$ e lado 1, xira un ángulo $\alpha$ ao redor de $O$. Achar a área común a ambos cadrados.

5.- Achar a envolvente dos círculos que teñen os seus centros na parábola $y^2 = 2px$, e que pasan polo vértice desta parábola.