III Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria

7 de octubre de 2000
Duración: 5 horas

Problemas Propuestos

Problema 1 (5 puntos)

Encontrar todas las funciones $f : R \to R$ que sean integrables en cualquier intervalo [0,x] si x>0 y $[x, 0]$ si $x < 0$, que satisfacen la condición

$$xf(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

para cualquier número real $x \neq 0$.

Nota: Para una partición del intervalo $[a, b]$

$$a = x_0 \leq t_1 \leq x_1 \leq t_2 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq t_n \leq x_n = b$$

se define la suma integral de la función *f*(*t*) como $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$. La función *f*(*t*) se denomina integrable en si existe el límite finito de las sumas integrales de *f*(*t*) cuando se procede a refinar la partición de $[a, b]$.

Problema 2 (6 puntos)

Sobre un número natural *n* se permite realizar las siguientes operaciones. El número *n* se escribe en cualquier base distinta de *n* . Después se efectúan cualesquier permutaciones de las cifras de *n* para obtener nuevos números.
Un número primo se llama *superprimo* si como resultado de todas las operaciones permitidas se obtienen números primos. Encontrar todos los números superprimos.

Problema 3 (6 puntos)

Sean *A* y *x* matrices de reales positivos de dimensiones $n \times n$ y $n \times 1$ respectivamente. Demostrar que si $A^2 x = x$ entonces $Ax = x$.

Problema 4 (6 puntos)

Supongamos que un grupo abeliano *(A,+)* se expresa como la unión de dos conjuntos $A = B \cup C$. Para cualquier $X \subset A$ se define $\Delta X = \{x_1 - x_2 | x_1, x_2 \in X\}$. Demostrar que si la intersección entre *B* y *C* es no vacía entonces $\Delta B = A$ ó $\Delta C = A$.

Problema 5 (6 puntos)

Sea $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ un polinomio de grado positivo con coeficientes reales tal que $p(0) \neq 0$. Sean $a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, \ldots, a_n + ib_n$ las raíces de *p*(*x*), donde $i^2 = -1$. Para cada *k=1,2,...,n* se define la función $f_k : R \cup \{\infty\} \to R \cup \{\infty\}$

donde $R \cup \{\infty\}$ es la recta real extendida, $f(\frac{a_k}{b_k}) = \infty$ y $f_k(\infty) = -\frac{a_k}{b_k}$. Encontrar la función $g : R \cup \{\infty\} \to R \cup \{\infty\}$ tal que

$$g(x) = f_1(f_2(\ldots f_n(x) \ldots)).$$

Problema 6 (7 puntos)

Sea $a_1 = 1,\ a_n = 1 + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}}$ para cualquier entero *n>1* . Encontrar

$$\lim_{n \to \infty} (a_n - \sqrt{2n}).$$

Problema 7 (8 puntos)

En el plano se mueve de cualquier manera un punto (un cerdo) con velocidad no superior a 1km/h, describiendo una curva continua $\lambda : [0,1] \to R^2$, donde $[0,1]$ es un intervalo de tiempo de una hora. Se sabe que el cerdo se encuentra inicialmente en un cuadrado de lado 8km. En el centro de este cuadrado se encuentra un demonio de Tasmania ciego que no puede saber la posición del cerdo, pero puede moverse con cualquier velocidad. Encontrar una curva continua $\gamma : [0,1] \to R^2$ (el camino recorrido por el demonio de Tasmania) tal que en algún momento de tiempo $t \in [0,1]$ se obtiene la igualdad $\lambda(t) = \gamma(t)$, es decir, el demonio de Tasmania atrapa al cerdo independientemente del camino que éste último escoja.

Retornar a Olimpiada Iberoamericana Universitaria

Página Principal

Diseño: Fernando Vega
Para mayor información Olimpiadas Colombianas