Oposicions 2022
Cos: 590 SECUNDÀRIA
Especialitat: 006 MATEMÀTIQUES
Tribunal núm: COMISSIÓ DE SELECCIÓ DELS TRIBUNALS DE MALLORCA

PART B DE LA PRIMERA PROVA: PROVA PRÀCTICA

(Tria l'opció A o l'opció B. Cada problema té una puntuació màxima de 2 punts.)

OPCIÓ A

1. Demostrau que la següent expressió és divisible per 4 per tot *n* natural.

$$(2n+1)^{2n-1}+(2n-1)^{2n+1}$$

2. Donats dos vectors $\vec{u}=(x_1,x_2)$ i $\vec{v}=(y_1,y_2)$ de $\mathbb{R}^2$, es defineix

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+4x_2y_2$$

   Comprovau que és un producte escalar.

3. Sigui *A* la regió del pla delimitada per les corbes $y=x^2$ i $x^2+y^2=2$. Calculau:

   a) Àrea de *A*.

   b) Volum de revolució en girar *A* al voltant de l'eix *OY*.

   c) Perímetre de *A*.

4. ABCD és un quadrat de costat 1. Traçam una semicircumferència de diàmetre 1 al costat $\overline{AD}$ continguda en el quadrat. Sigui E un punt del costat $\overline{AB}$ tal que el segment $\overline{CE}$ és tangent a la semicircumferència.

   Calculau l'àrea del triangle CBE.

5. Un joc consisteix en tirar dos daus i es sumen les puntuacions obtingudes. Si la suma és 4 el jugador guanya, però si la suma és 7 perd. Si la suma no és ni 4 ni 7 continua tirant i així fins que guanyi o perdi.

   Calculau la probabilitat que té un jugador de guanyar.

OPCIÓ B

1. Considerem l'equació al cos $\mathbb{C}$ dels nombres complexos:

$$z^3 + (-1-2i)z^2 + (-1+9i)z - 2(1+5i)=0$$

a) Demostrau que té solució real i calculau-la.

b) Trobau les altres solucions de l'equació.

c) Demostrau que el triangle que determinen els afixos de les 3 solucions de l'equació és isòsceles.

2. Trobau el valor del determinant d'ordre n

$$A_n=\begin{vmatrix} 1+x^4 & x^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x^2 & 1+x^4 & x^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 1+x^4 & x^2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & 1+x^4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^4 & x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x^2 & 1+x^4 \end{vmatrix}$$

3. Trobau el primer terme no nul del desenvolupament en sèrie de Taylor a l'origen, de la funció real següent:

$$f(x) = 2\ln(1+x)-\cos^2 x +1 -2x$$

i calculau el següent límit:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\ln(1+x)-\cos^2 x +1 -2x}{\sin^3 x}$$

4. S'inscriu un cercle en un triangle equilàter de costat *a.* A continuació s'inscriuen tres cercles més que siguin tangents al primer cercle i als costats del triangle. Es repeteix el procés i s'inscriuen tres cercles més que són tangents als tres anteriors i als costats del triangle. I així successivament. Trobau l'àrea total de tots els cercles inscrits.

5. La durada en minuts d'una trucada telefònica de llarga distància s'assimila a una variable aleatòria X amb una funció de distribució:

$$F_x(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x\le 0 \\ 1-\frac{2}{3}e^{\frac{-2}{3}x}-\frac{1}{3}e^{\frac{-1}{3}x} & si \quad x>0 \end{cases}$$

a) Calculau l'esperança matemàtica o duració mitjana de les trucades.

b) Probabilitat de que una trucada estigui compresa entre els 3 i 6 minuts.

c) Probabilitat de que una trucada que duu 3 minuts no passi de 6.