SOLUCIÓN DEL EXAMEN SIN PARCIAL APROBADO

1. Los datos son

$$P\left(Act|\, A\right) = 0.3,\ P\left(Act|\, B\right) = 0.5,\ P\left(Act|\, C\right) = 0.8$$

El Teorema de la Probabilidad Total establece que

$$\begin{aligned} P(Act) &= P(Act \cap A) + P(Act \cap B) + P(Act \cap C) \\ &= P\left(Act|\, A\right) P(A) + P\left(Act|\, B\right) P(B) + P\left(Act|\, C\right) P\left(C\right) \\ &= (0.3)\,(0.4) + (0.5)\,(0.4) + (0.8)\,(0.2) = 0.48 \end{aligned}$$

Las probabilidades o frecuencias de las moléculas se calculan como sigue:

$$\begin{aligned} P\left(A|\, Act\right) &= \frac{P(Act \cap A)}{P(Act)} = \frac{P\left(Act|\, A\right) P\left(A\right)}{P(Act)} = \frac{(0.3)\,(0.4)}{0.48} = 0.25 \\ P\left(B|\, Act\right) &= \frac{P(Act \cap B)}{P(Act)} = \frac{P\left(Act|\, B\right) P\left(B\right)}{P(Act)} = \frac{(0.5)\,(0.4)}{0.48} = 0.416 \\ P\left(C|\, Act\right) &= \frac{P(Act \cap C)}{P(Act)} = \frac{P\left(Act|\, C\right) P\left(C\right)}{P(Act)} = \frac{(0.8)\,(0.2)}{0.48} = 0.33 \end{aligned}$$

2. Se sabe que la v.a $X \sim N\left(\mu, \sigma\right)$ y que los datos son $P\left(X \geq 1.4\right) = 0.1056)$ y $P\left(X \geq 1\right) = 0.4013$. Estandarizamos la variable y buscamos en las tablas:

$$\begin{aligned} P\left(X \geq 1.4)\right) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{1.4-\mu}{\sigma}\right) = 0.1056, \\ P\left(X \geq 1\right) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{1-\mu}{\sigma}\right) = 0.4013. \end{aligned}$$

Puesto que la v.a. $\frac{X-\mu}{\sigma}$ es necesariamente una $N(0,1)$, basándonos en las tablas de ésta tendremos que

$$\begin{aligned} \frac{1.4-\mu}{\sigma} &= 1.59 \\ \frac{1-\mu}{\sigma} &= 0.25 \end{aligned}$$

Esto da lugar a que $\sigma = 0.29$ y $\mu = 0.92$.

3. Sea $X_i$ la v.a. definida como cero si el inidividuo $i$ posee la característica y cero en toro caso. $X_i \sim B(1,p)$. Al observarse 4 consideramos una v.a. $Y = \sum_{i=1}^{4} X_i$ la cual se distribuye como una $B(4,p)$. La probabilidad de no detectar la característica es

$$p = P\left(Y=0\right) = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 0 \end{array}\right) p^0(1-p)^4 = \left(1-p\right)^4$$

Si $p = 0.02$ y definimos $Y = \sum_{i=1}^{4} X_i$, entonces $Y \sim B(n, 0.02)$ y la probabilidad establecida es

$$\begin{aligned} 0.95 &\leq P(Y \geq 1) = 1 - P\left(Y=0\right) \\ &= 1 - (1-(0.02))^n \end{aligned}$$

i.e.

$$(1-(0.02))^n \leq 0.05$$

y tomando logaritmos queda

$$n \geq \frac{\ln(0.05)}{\ln(0.98)} \simeq 149$$

4. Calculamos la esperanza y varianza: :

$$\begin{aligned} \mu &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}\left(x\right) dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{4} \exp\left(\frac{-x}{4}\right) dx = 4 \\ \alpha_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\xi}\left(x\right) dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{4} \exp\left(\frac{-x}{4}\right) dx = 32 \\ \sigma^2 &= 32 - 4^2 = 16 \end{aligned}$$

La probabilidad que piden es

$$\begin{aligned} p &= P\left(3 \leq \overline{\xi} \leq 5\right) \\ &= P\left(-0.44 = \frac{3-4}{16/\sqrt{50}} \leq \overline{\xi} \leq \frac{5-4}{16/\sqrt{50}} = 0.44\right) \end{aligned}$$

que por el TCL puede aproximarse por

$$\begin{aligned} p &= P\left(-0.44 \leq N(0,1) \leq 0.44\right) \\ &= F(0.44) - F(-0.44) \\ &= 0.67 - (1 - F(0.44)) \\ &= 2\left(0.67\right) - 1 = 0.34 \end{aligned}$$

5. La varianza poblacional se estima por intervalo del siguiente modo:
$$I=\left[\frac{(n-1)\,S^2}{\mathcal{X}^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}},\frac{(n-1)\,S^2}{\mathcal{X}^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}\right]$$
con un nivel de confianza $1-\alpha$. Para nuestro caso $\alpha=0.05$, $n=10$ y los datos de la muestra son los del vector
$$x=[6.8,6.78,6.77,6.8,6.78,6.8,6.82,6.81,6.8,6.79]\,.$$
Así pues
$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{\sum_{j=1}^{10}x_j}{10}=6.\,795\\ s^2 &= \frac{\sum_{j=1}^{10}(x_j-\overline{x})^2}{9}=\frac{\sum_{j=1}^{10}(x_j-6.795)^2}{9}=2.\,277\,778\times10^{-4}\end{aligned}$$
Además
$$\mathcal{X}^2_{9,0.025}=19.023,\ \mathcal{X}^2_{n-1,0.975}=2.7$$
Sustituimos en el intervalo
$$\begin{aligned}I &= \left[\frac{9\,(2.\,277\,778\times10^{-4})}{19.023},\frac{9\,(2.\,277\,778\times10^{-4})}{2.7}\right]\\ &= [0.000107,0.000759]\end{aligned}$$
resultando que la precisión es de tres decimales.

6. La verosimilitud es
$$L=\begin{cases}\theta e^{-\theta x_1}\theta e^{-\theta x_2}...\theta e^{-\theta x_n} & \text{si todos los } x_i\geq 0\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$
Por consiguiente el máximo se alcanza cuando todos los $x_i$ son mayores o iguales que cero. Maximizamos la expresión
$$L=\theta^n e^{-\theta\sum_{i=1}^n x_i}$$
lo cual equivale a hacerlo con su logaritmo, i.e. con
$$l=\log L=n\log\theta-\theta\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)$$
Al hacer $l'=0$ queda
$$n/\theta-\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)=0$$

por lo que

$$\theta^* = \frac{n}{(\sum_{i=1}^{n} x_i)} = \frac{1}{\overline{x}}$$

es el EMV.