XII Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria

Noviembre de 2009

Problema 1 (4 puntos) Una línea recta pasa por un vértice de un triángulo no degenerado y corta este triángulo en dos triángulos semejantes con una razón entre los lados igual a $\sqrt{3}$. Encontrar los ángulos del triángulo dado.

Problema 2 (5 puntos) Sean $x_1, \ldots, x_n$ vectores no nulos de un espacio vectorial V y $\varphi : V \to V$ un operador lineal de este espacio tales que $\varphi x_1 = x_1, \varphi x_k = x_k - x_{k-1}$ para $k = 2, 3, ..., n$. Demostrar que el conjunto de vectores $x_1, \ldots, x_n$ es linealmente independiente.

Problema 3 (5 puntos) Sean $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}^+$ y f definida como: $\{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 | \, c - dx - ey > 0\} \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(x, y) = (ax)(by)(c - dx - ey)$. Encontrar su valor máximo.

Problema 4 (6 puntos) Dados enteros positivos m y n, decimos que una función $f : [0, m] \to \mathbb{R}$ es (m, n)-*resbalosa* si posee las siguientes propiedades:

i) f es contínua;

ii) $f(0) = 0, f(m) = n$;

iii) Si $t_1, t_2 \in [0, m]$ con $t_1 < t_2$ son tales que $t_2 - t_1 \in \mathbb{Z}$ y $f(t_2) - f(t_1) \in \mathbb{Z}$, entonces $t_2 - t_1 \in \{0, m\}$.

Determinar los valores de m, n para los cuales existe una función f que sea (m, n)-resbalosa.

Problema 5 (7 puntos) Sean $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}^*$ los conjuntos de los naturales y de los enteros positivos respectivamente.
Definimos una relación $\acute{\in}$ en $\mathbb{N}$ por $a \acute{\in} b$ si, y solo si, el a-ésimo bit en la representación binaria de b es 1.
Definimos una relación $\tilde{\in}$ en $\mathbb{N}^*$ por $a \tilde{\in} b$ si, y solo si, b es múltiplo del a-ésimo número primo p_a.

i) (2 puntos) Demostrar que no existe una biyección $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ tal que $a \acute{\in} b \Leftrightarrow f(a) \tilde{\in} f(b)$.

ii) (5 puntos) Demostrar que existe una biyección $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ tal que $(a \acute{\in} b$ o $b \acute{\in} a) \Leftrightarrow (f(a) \tilde{\in} f(b)$ o $f(b) \tilde{\in} f(a))$.

Problema 6 (7 puntos) Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_d, \beta_1, \ldots, \beta_e \in \mathbb{C}$ tales que los polinomios

$$f_1(x) = \prod_{i=1}^{d}(x - \alpha_i) \quad \text{y} \quad f_2(x) = \prod_{i=1}^{e}(x - \beta_i)$$

tienen coeficientes enteros. Supongamos que existen polinomios $g_1, g_2 \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $f_1g_1 + f_2g_2 = 1$. Demostrar que

$$\left|\prod_{i=1}^{d}\prod_{j=1}^{e}(\alpha_i - \beta_j)\right| = 1.$$

Problema 7 (8 puntos) Sea G un grupo tal que todo subgrupo de G es subnormal. Supongamos que existe N subgrupo normal de G, tal que $Z(N)$ es diferente de e y G/N es cíclico. Demostrar que $Z(G)$ es diferente de e. ($Z(G)$ denota el centro de G).
Nota: Un subgrupo H de G es subnormal si existen subgrupos $H_1, H_2, ..., H_m = G$ de G con $H \lhd H_1 \lhd H_2 \lhd ... \lhd H_m = G$ ($\lhd$ denota subgrupo normal).