IV OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICA UNIVERSITARIA

6 de octubre de 2001

1. [**4 puntos**] Las raíces de un polinomio de grado cuatro con coeficientes complejos están ubicadas en los vértices de un rectángulo con lados de longitud a y b en el plano complejo. Encontrar la distancia entre las raíces de la segunda derivada de este polinomio.

   Respuesta: $\sqrt{\frac{|a^2-b^2|}{3}}$.

   Solución.
   Supongamos que $a > b$ y consideremos la isometría $x \mapsto \alpha x + \beta, |\alpha| = 1$, que lleva el rectángulo cuyos vértices son las raíces de $f(x)$ en el rectángulo con centro en el origen de modo que el lado de longitud a sea paralelo al eje real.

   1 punto por reducir el problema al caso cuando los lados del rectángulo son paralelos a los ejes coordenados.

   Definimos un nuevo polinomio $g(x)$ mediante la igualdad

   $$g(\alpha x + \beta) = f(x).$$

   Las raíces de g son $\pm\frac{a}{2} \pm \frac{b}{2}i$. Por lo tanto

   $$g(x) = c\left(x - \frac{a}{2} + \frac{b}{2}i\right)\left(x - \frac{a}{2} - \frac{b}{2}i\right)\left(x + \frac{a}{2} + \frac{b}{2}i\right)\left(x + \frac{a}{2} - \frac{b}{2}i\right)$$

   $$g(x) = c\left(x^2 - ax + \frac{1}{4}(a^2+b^2)\right)\left(x^2 + ax + \frac{1}{4}(a^2+b^2)\right)$$

   donde $0 \neq c \in \mathbb{C}$.

   2 puntos por expresar la función en términos de sus raíces.

   La segunda derivada
   $$g''(x) = c(12x^2 - (a^2 - b^2))$$
   tiene dos raíces $\pm\sqrt{\frac{a^2-b^2}{12}}$ y la distancia entre ellas es de $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{3}}$.

   Por otra parte $f''(x) = \alpha^2 g''(\alpha x + \beta)$ y las raíces de $f''(x)$ son $\alpha^{-1}x_1 - \beta$ y $\alpha^{-1}x_2 - \beta$ donde x_1 y x_2 son las raíces de $g''(x)$. La transformación $x \mapsto \alpha^{-1}x - \beta$ también es una isometría. Por lo tanto la distancia entre las raíces de $f''(x)$ es de $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{3}}$.

   1 punto por concluir

2. [**5 puntos**] Una función derivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface la desigualdad $|f(x)| \geq |f'(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y al menos para un real x_0 esta desigualdad es estricta, es decir, $|f(x_0)| > |f'(x_0)|$.

   Demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ no tiene raíces.

   Solución
   Vamos a probar que el conjunto de raíces de la función f es abierto, es decir, dado $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$

existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) = 0$ para todo $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, Para esto, notemos que como f es derivable, y por lo tanto continua, existe $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ tal que $|f(y)| \leq \frac{1}{2}$, para todo $y \in [x-\delta, x+\delta]$. Vamos a probar por inducción sobre k que $|f(y)| \leq \frac{1}{2^k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, para todo $y \in [x-\delta, x+\delta]$, lo que implica $f(y) = 0$, para todo $y \in [x-\delta, x+\delta]$. De hecho, por el teorema del valor medio, dado $y \in [x-\delta, x+\delta]$ tenemos $|f(y)| = |f(y) - f(x)| = |y-x||f'(z)|$ para un cierto $z \in [x, y]$. Como $|f'(z)| \leq |f(z)|$ tenemos $|f(y)| \leq |f(z)||y-x| \leq \frac{\delta}{2^k} \leq \frac{1}{2 \cdot 2^k} = \frac{1}{2^{k+1}}$. Luego $f(y) = 0$.

3 puntos por mostrar que el conjunto de raíces es abierto.

De otro lado el conjunto de raíces de toda función continua es cerrado. Sólo dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ son cerrados y abiertos simultáneamente, que son el conjunto vacío y el conjunto de todos los números reales. Por lo tanto si $f(x) = 0$ tiene una solución, $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pero en este caso $f'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Esto contradice que $|f(x_0)| > |f'(x_0)|$.

La conclusión vale 2 puntos.

Si no se han obtenido puntos según los criterios anteriores, 1 punto por mostar que tales funciones existen, por ejemplo $x^2+1, 1+e^x, e^{\frac{x}{2}}$.

3. **[5 puntos]** La suma (o diferencia simétrica) de dos conjuntos A y B se define como

$$A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Inicialmente los 1024 subconjuntos de un conjunto de 10 elementos están escritos cíclicamente en una circunferencia. Simultáneamente entre cada dos subconjuntos vecinos se escribe su suma. Después todos los conjuntos anteriores se borran. ¿Cuáles conjuntos estarán escritos en la circunferencia después de repetir esta operación 2001 veces?

Respuesta: Todos los conjuntos serán vacíos.

Solución.

Consideremos una sucesión de elementos de un grupo abeliano que está indexada por números enteros. Abajo escribimos la sucesión de la suma de elementos vecinos como en el triángulo de Pascal. Esta sucesión está marcada con el número 1, y la sucesión original con el 0, del siguiente modo:

$$\begin{array}{cccccccccccccl} a_{-3} & & a_{-2} & & a_{-1} & & a_0 & & a_1 & & a_2 & & a_3 & \text{fila 0} \\ & a_{-3}+a_{-2} & & a_{-2}+a_{-1} & & a_{-1}+a_0 & & a_0+a_1 & & a_1+a_2 & & a_2+a_3 & & \text{fila 1} \end{array}$$

Repetimos el proceso. Es fácil ver y demostrar que en la k-ésima sucesión los términos son de la forma:

$$\binom{k}{0}a_n + \binom{k}{1}a_{n+1} + \cdots + \binom{k}{k-1}a_{n+k-1} + \binom{k}{k}a_{n+k}.$$

donde $\binom{k}{i}$ son coeficientes binomiales y n recorre los números enteros.

2 puntos por notar la forma general de los términos.

El conjunto de subconjuntos con la adición es un grupo abeliano que satisface la igualdad $A + A = 0$, donde 0 es el conjunto vacío. En nuestro caso, la sucesión inicial es periódica

$$\cdots A_{1023}\ A_{1024}\ A_1\ A_2 \cdots A_{1023}\ A_{1024}\ A_1\ A_2 \cdots$$

Es conocido y fácil de demostrar que los números $\binom{2^m}{i}$ son pares para $0 < i < 2^m$.

2 puntos por obtener que $\binom{2^m}{i}$ es par para $0 < i < 2^m$

Por lo tanto en la fila 1024 obtenemos

$$\sum_{i=0}^{1024} \binom{1024}{i} A_{n+i} = A_n + A_{n+1024} = A_n + A_n = 0.$$

Entonces después de 1024 pasos en el círculo hay sólo conjuntos vacíos y lo mismo pasa con todas las filas siguientes.

1 punto por concluir

4. **[5 puntos]** Sea $\alpha > 0$ un número real y consideramos $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$ las soluciones reales de la ecuación $x\text{sen}x^\alpha = \ln x$. Hallar los valores de α para los cuales la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n}$ converge.

Solución

Sean $f(x) = x\text{sen}\, x^\alpha$ y $g(x) = \ln x$. La función $g(x)$ es positiva para todo $x > 1$, y la función $f(x)$ es negativa en cada intervalo de la forma $\left(((2k+1)\pi)^{\frac{1}{\alpha}}, ((2k+2)\pi)^{\frac{1}{\alpha}}\right), 0 \leq k \in \mathbb{Z}$, entonces, si $x > 1$ todas las soluciones de $f(x) = g(x)$ se encuentran en los intervalos de la forma $\left((2k\pi)^{\frac{1}{\alpha}}, ((2k+1)\pi)^{\frac{1}{\alpha}}\right)$.

1 punto por separar las raíces mediante intervalos.

Como $f'(x) = \text{sen}\, x^\alpha + \alpha x^\alpha \cos x^\alpha$, la derivada de f tiene exactamente un cero en $\left((2k\pi)^{\frac{1}{\alpha}}, ((2k+1)\pi)^{\frac{1}{\alpha}}\right)$. Entonces, en dicho intervalo f cambia de signo sólo una vez (de positivo a negativo) y f tiene un máximo relativo.

Dado que $f\left((2k\pi)^{\frac{1}{\alpha}}\right) = 0 < g\left((2k\pi)^{\frac{1}{\alpha}}\right)$ y $g\left((2k\pi + \frac{\pi}{2})^{\frac{1}{\alpha}}\right) < f\left((2k\pi + \frac{\pi}{2})^{\frac{1}{\alpha}}\right) = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, hay una raíz de $f(x) - g(x)$ en $\left((2k\pi)^{\frac{1}{\alpha}}, (2k\pi + \frac{\pi}{2})^{\frac{1}{\alpha}}\right)$. Además, como $f\left(((2k+1)\pi)^{\frac{1}{\alpha}}\right) = 0$, hay otra raíz en $\left((2k\pi + \frac{\pi}{2})^{\frac{1}{\alpha}}, ((2k+1)\pi)^{\frac{1}{\alpha}}\right)$ y éstas son las únicas dos raíces de $f(x) = g(x)$ en $\left((2k\pi)^{\frac{1}{\alpha}}, ((2k+1)\pi)^{\frac{1}{\alpha}}\right)$.

Luego,

$$\left(\left(j - \frac{1}{2}\right)\pi\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq x_j \leq \left(\left(j + \frac{1}{2}\right)\pi\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

3 puntos por acotar las raíces.

Entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n}$ está mayorada por $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\right)^{\frac{1}{\alpha}}}$ que converge si $\frac{1}{\alpha} > 1 \Rightarrow 0 < \alpha < 1$.

Por otro lado, está minorada por $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right)^{\frac{1}{\alpha}}}$ que divirge si $\frac{1}{\alpha} \leq 1 \Rightarrow \alpha \geq 1$.

1 punto por concluir.

5. **[6 puntos]** Sea f una función del intervalo $[0, 1]$ en el conjunto de números reales tal que para cualesquiera $x, y \in [0, 1]$ se cumplen las siguientes condiciones:

   (a) Si $x \leq y$ entonces $f(x) \leq f(y)$.

   (b) $f(0) = 0$.

   (c) $f(1 - x) = 1 - f(x)$.

   (d) $f(\frac{x}{3}) = \frac{f(x)}{2}$.

Demostrar que si x es racional entonces $f(x)$ es racional.

Solución.

Se tiene $f(1) = 1 - f(0) = 1, f(\frac{1}{3}) = \frac{f(1)}{2} = \frac{1}{2}$ y $f(\frac{2}{3}) = 1 - f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{2}$. Así, $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}$.

Sea $x = \frac{r}{q} \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Se define una sucesión del siguiente modo: $x_0 = x$ y, para cada $k \geq 0$

$$x_{k+1} = \begin{cases} 3x_k & \text{si } x_k < \frac{1}{3} \\ 3(1 - x_k) & \text{si } x_k > \frac{2}{3} \end{cases}$$

Si algún $x_k \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ se tendrá que $f(x_k) = \frac{1}{2}$. Por otro lado, x_{k+1} es un racional cuyo denominador es un divisor del denominador de x_k, y por lo tanto para todo k, x_k pertenece al conjunto finito $\{\frac{m}{q}, 0 \leq m \leq q\}$. Además,

$$f(x_{k+1}) = \begin{cases} 2f(x_k) & \text{si } x_k < \frac{1}{3} \\ 2(1 - f(x_k)) & \text{si } x_k > \frac{2}{3} \end{cases}$$

Por tanto, $f(x_k)$ puede ser escrito como $e_k \cdot 2^k f(x) + a_k$, donde e_k es igual a 1 o a -1 y $a_k \in \mathbb{Z}$ para todo k.

Como sólo hay un número finito de posibilidades para los x_k, tenemos dos casos posibles:

(a) $x_k \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ para algún $k \in \mathbb{N}$. En este caso,

$$f(x_k) = e_k \cdot 2^k f(x) + a_k = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{e_k \cdot 2^k}\left(\frac{1}{2} - a_k\right) \in \mathbb{Q}.$$

(b) $x_k = x_j$ para ciertos $k > j \geq 0$, tenemos entonces $e_k \cdot 2^k f(x) + a_k = f(x_j) = e_j \cdot 2^j f(x) + a_j \Rightarrow (e_k 2^k - e_j 2^j) f(x) = (a_j - a_k) \Rightarrow f(x) = \frac{a_j - a_k}{e_k 2^k - e_j 2^j} \in \mathbb{Q}$.

6. **[7 puntos]** Calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi}{n} \cos\frac{2\pi}{n} \cos\frac{3\pi}{n} \cdots \cos\frac{n\pi}{n}.$$

Solución.
Respuesta: $-\frac{4}{5}$.

Para un número par k el producto $\cos\frac{\pi}{k}\cos\frac{2\pi}{k}\cos\frac{3\pi}{k}\cdots\cos\frac{k\pi}{k}$ contiene un factor $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Por lo tanto la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi}{n} \cos\frac{2\pi}{n} \cos\frac{3\pi}{n} \cdots \cos\frac{n\pi}{n} = \sum_{s=0}^{\infty} \cos\frac{\pi}{2s+1} \cos\frac{2\pi}{2s+1} \cos\frac{3\pi}{2s+1} \cdots \cos\frac{(2s+1)\pi}{2s+1}$.

1 punto por eliminar los sumandos pares.

Sea $k = 2s + 1$. Definimos $z = \cos\frac{\pi}{k} + i\text{sen}\,\frac{\pi}{k}$, entonces $z^{-1} = \cos\frac{\pi}{k} - i\text{sen}\,\frac{\pi}{k}$. Obtenemos

$$\begin{aligned} z + z^{-1} &= 2\cos\frac{\pi}{k} \\ z^2 + z^{-2} &= 2\cos\frac{2\pi}{k} \\ &\cdots \\ z^k + z^{-k} &= 2\cos\frac{k\pi}{k} \end{aligned}$$

1 punto por utilizar de manera significativa números complejos.

De allí se sigue que

$$\begin{aligned} 2^k \cos\frac{\pi}{k}\cos\frac{2\pi}{k}\cos\frac{3\pi}{k}\ldots\cos\frac{k\pi}{k} &= \left(z + z^{-1}\right)\left(z^2 + z^{-2}\right)\ldots\left(z^k + z^{-k}\right) = \\ &= \frac{\left(z^2+1\right)\left(z^4+1\right)\ldots\left(z^{2k}+1\right)}{zz^2\ldots z^k} = \\ &= (-1)^k \frac{\left(-1-z^2\right)\left(-1-z^4\right)\ldots\left(-1-z^{2k}\right)}{z^{\frac{k(k+1)}{2}}}. \end{aligned}$$

2 puntos por expresar el término de la serie en función de z.

Puesto que los números complejos $z^2, z^4, \ldots, z^{2k}$ son todas las raíces del polinomio $f(x) = x^k - 1$, se tiene que $\left(-1-z^2\right)\left(-1-z^4\right)\ldots\left(-1-z^{2k}\right) = f(-1) = -2$. Puesto que $z^{\frac{k(k+1)}{2}} = \left(z^k\right)^{\frac{k+1}{2}} = (-1)^{s+1}$, se obtiene finalmente

$$\cos\frac{\pi}{2s+1}\cos\frac{2\pi}{2s+1}\cos\frac{3\pi}{2s+1}\ldots\cos\frac{(2s+1)\pi}{2s+1} = (-1)\frac{-2}{(-1)^{s+1}2^{2s+1}} = \frac{(-1)^{s+1}}{2^{2s}},$$

Si se llega a este valor, se da un puntaje de 6 puntos.

De donde

$$A = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} - \ldots = -\frac{1}{1+\frac{1}{4}} = -\frac{4}{5}$$

1 punto por concluir.

7. **[8 puntos]** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y periódica tal que la desigualdad $f(x) > 0$ tiene por lo menos una solución.

   (a) Demostrar que existe un entero $a \geq 2$ tal que el sistema infinito de desigualdades

   $$f(a^k x) > 0, k = 0, 1, 2, \ldots$$

   tiene por lo menos una solución.

   (b) Demostrar que existe un entero $b \geq 2$ tal que la cardinalidad del conjunto de soluciones del siguiente sistema infinito de desigualdades

   $$f(b^k x) > 0, k = 0, 1, 2, \ldots$$

   es igual al contínuo, i.e. la cardinalidad del segmento $[0, 1]$.

Solución.

(a) **[3 puntos]** Sea $T > 0$ el período de la función f y $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) > 0$. Como la función f es continua, existe un número racional $\frac{m}{n}$ tal que el número real $x_1 = \frac{m}{n}T$ es suficientemente cercano a x_0 y por lo tanto, $f(x_1) > 0$.

1 punto por considerar un real de la forma $\frac{m}{n}T$ cercano a x_0.

Sea $a = n + 1$. Entonces $a^k \equiv 1 \pmod{n}$ para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$ Se sigue que $a^k x_1 = x_1 + s_k T$, donde $s_k \in \mathbb{Z}$. Luego $f(a^k x_1) = f(x_1) > 0$ para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$ y x_1 es una solución al sistema infinito de desigualdades.

2 puntos por terminar.

(b) **[5 puntos]** Como la función f es continua, existe un número real $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todos los puntos x del segmento $[x_1, x_1 + \varepsilon]$, donde $x_1 = \frac{m}{n}T$.

1 punto por considerar un intervalo donde hay una solución.

Escogemos un entero positivo k tal que $\frac{1}{a^k - 1} < \frac{\varepsilon}{T}$. Sea $b = a^k$. Para toda secuencia infinita de 0's y 1's

$$(\gamma) \qquad \gamma_1, \gamma_2, \ldots$$

definimos un número real

$$x_\gamma = x_1 + T\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\gamma_i}{b^i}.$$

3 puntos por encontrar un conjunto de soluciones del tamaño del continuo, sin justificación.

Como
$$0 \leq T \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma_i}{b^i} \leq T \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{b^i} = T \frac{1}{b-1} < \varepsilon,$$
todos los números x_γ están incluidos en el segmento $[x_1, x_1 + \varepsilon]$. Por otro lado,
$$b^l x_\gamma = x_1 + t_l T + T \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma_{i+l}}{b^i}, \text{ donde } t_l \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } l = 0, 1, 2, \ldots$$
Luego, $b^l x_\gamma \in [x_1 + t_l T, x_1 + t_l T + \varepsilon]$ y $f(b^l x_\gamma) > 0$, para todo $l = 0, 1, 2, \ldots$

Finalmente notamos que diferentes secuencias (γ) determinan diferentes soluciones x_γ del sistema infinito de desigualdades $f(b^k x) > 0, k = 0, 1, 2, \ldots$ Como la cardinalidad del conjunto de secuencias (γ) es el continuo, la cardinalidad del conjunto de soluciones es por lo menos (y claramente a lo más) el continuo.

1 punto por justificar.