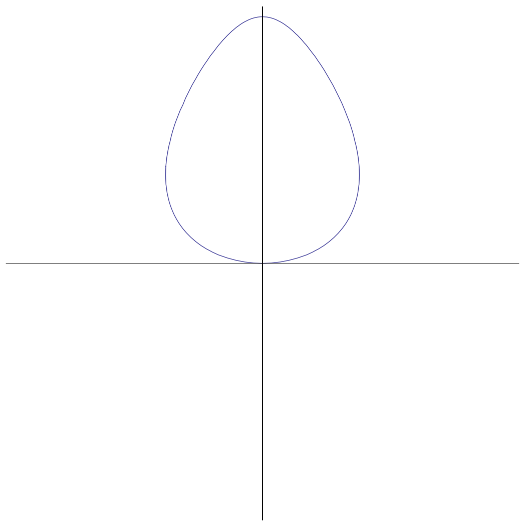
Part A de la primera prova. Torn L/R.
Data: 14 d'abril 2018. Hora: 10:00h Temps: 4 hores

La part A de la primera prova consta de 5 qüestions, 3 problemes i el disseny d'una activitat per implementar a l'aula.

QÜESTIONS

Contesteu 5 de les 7 qüestions següents. Cada qüestió contestada correctament val 0.56 punts. Si és contestada incorrectament descompta 0.28 punts. Cal marcar les respostes al full de l'enunciat i cal lliurar-lo al tribunal juntament amb els fulls amb les respostes.

1. El volum de la figura que s'obté rotant la corba $4x^2 = y(1-y)(2-y)^2$



al voltant de l'eix de les ordenades és:

A. $\pi/4$.
B. $\pi/60$.
C. $23\pi/240$.
D. $15\pi/17$.

2. El nombre π és irracional perquè:

A. No és arrel de cap polinomi $P \in \mathbb{R}[X]$
B. No es pot expressar com a una fracció a/b amb a i b nombres primers.
C. No es pot expressar com a una fracció a/b amb $a, b \in \mathbb{Z}$.
D. Cap de les respostes anteriors és correcta.

3. És fàcil demostrar que

$$3 = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots}}}.$$

Quants nombres $x \in \mathbb{Z}$ tals que $1 \leq x \leq 1000$ compleixen $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots}}} \in \mathbb{Z}$

A. 31.

B. 29.

C. 50.

D. 101.

4. Volem calcular i visualitzar el vector resultat del producte vectorial de dos vectors a l'espai amb GeoGebra. Un cop definits els dos vectors u i v:

A. Haurem de crear una eina nova específica per calcular el producte vectorial.

B. Escriurem `Vec(u,v)` a la finestra de la CAS (calculadora algebraica).

C. Usarem el botó `ProducteExtern` a la barra de botons 3D.

D. Usarem el comandament `ProducteVectorial` a la barra d'entrada.

5. Si U i V són dos espais vectorials sobre un mateix cos, S un subspai vectorial d'U, $f : U \to V$ una aplicació lineal i $g = f|_S$, la restricció d'f a S, aleshores:

A. $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$

B. $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f \cap S$

C. $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f$

D. $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g = \emptyset$

6. Volem calcular l'interval de confiança per a la mitjana quan la població segueix una llei normal de mitjana μ (desconeguda) i desviació estàndard σ (desconeguda). Disposem d'una mostra aleatòria simple de grandària n i de valor de la mitjana de la mostra $\overline{x}$. Haurem de fer servir l'estimador de la variança mostral que segueix una distribució:

A. $N(0, 1)$.

B. $N(\mu, \sigma)$.

C. $N(\overline{x}, s)$ on s és la variança de la mostra.

D. Una t-Student amb $n - 1$ graus de llibertat.

7. L'Alba, en Bernat i la Cristina estan intentant fer el ninot de neu més alt possible. L'Alba diu: "Quantes menys boles de neu fem servir més alt serà el ninot. Jo proposo fer-lo amb dues boles esfèriques d'igual radi." El Bernat diu: "No hi estic d'acord, jo penso que quantes més boles esfèriques fem servir, més alt serà. Jo proposo fer un ninot amb 10 boles esfèriques." La Cristina intervé dient: "No importa quantes esferes feu, jo proposo fer-lo de sis boles esfèriques perquè en tots els casos tindrà la mateixa altura." Qui té raó:

A. L'Alba.

B. El Bernat.

C. La Cristina.

D. Cap de les respostes anteriors és correcta.

NOTA: Suposeu que cada nen té a disposició el mateix volum de neu, que les boles que fan són perfectament esfèriques i que el pes de les boles no les deforma.

PROBLEMES

Resoleu 3 d'aquests 4 problemes. Cada problema val 1,4 punts.

1. (a) D'un conjunt C de N boles ($N \geq 3$), considerem un subconjunt S de k boles ($k \leq N$). Trobeu una expressió matemàtica per a la probabilitat $P(k)$ que en dues extraccions consecutives a l'atzar, sense reposició, de boles del conjunt C almenys una de les boles pertanyi al subconjunt S. Comproveu que en el cas particular que $k = N$, llavors $P = 1$ (esdeveniment segur) i calculeu la probabilitat per a $k = N - 1$.

(b) S'escullen dos punts sobre la circumferència d'un cercle de manera aleatòria. Quina és la probabilitat que la corda dibuixada entre aquests dos punts sigui més gran que el radi del cercle?

2. Sigui $A(t)$ l'àrea de la regió del pla compresa en el primer quadrant entre l'el·lipse d'equació $4x^2 + y^2 = 1$, la recta horitzontal $y = 1$ i la recta vertical $x = t$ on $0 \leq t \leq 1/2$. Calculeu els valors màxim i mínim absoluts d'$A(t)$ a l'interval $[0, 1/2]$.

3. Sigui $R = \mathcal{P}(X)$ el conjunt de les parts d'un conjunt qualsevol X. En R considerem les dues operacions $\Delta, *$, definides per

$$A\Delta B := (A \cup B) - (A \cap B), \quad A * B := A \cap B, \quad A, B \subseteq X.$$

(a) Proveu que, amb Δ com a suma i $*$ com a multiplicació, R té estructura d'anell. Comproveu que aquest anell és commutatiu i doneu explícitament els elements neutres per a la suma i la multiplicació i els elements oposats per a la suma.

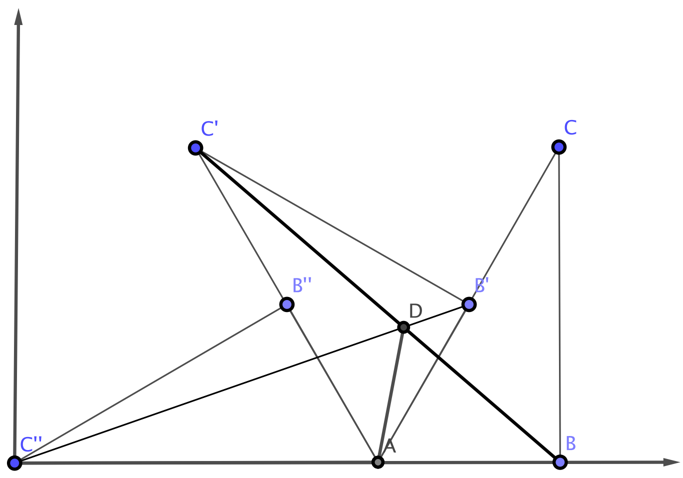
(b) Calculeu tots els elements invertibles de R.

(c) Comproveu que tots els elements de R són idempotents ($A^2 = A$, per a tot $A \in R$).

(d) Comproveu que per a tot $A \in R$ es compleix $2A = 0$.

(e) Demostreu que l'ideal generat per dos elements $A, B \in R$ coincideix amb l'ideal generat per l'element $A \cup B$, i deduïu que tot ideal finitament generat de R és principal.

4. Els tres triangles de la figura, $ABC, AB'C', AB''C''$ són idèntics amb angles de 30, 60 i 90 graus. Quina és la ràtio del segment CB i el segment DA?



Disseny d'una activitat per implementar a l'aula. 3 punts

Trieu un dels quatre problemes o una de les set qüestions proposades anteriorment i dissenyeu una activitat basada totalment o parcialment en aquest problema o qüestió que pugui ser implementada a l'aula en una o més sessions.