I Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria

17 de Septiembre de 1998
Duración: 5 horas

Problemas Propuestos

Problema 1 (4 puntos)

Las integrales definidas entre 0 y 1 de los cuadrados de las funciones reales continuas $f(x)$ y $g(x)$ son iguales a 1. Demuestre que existe un número real c tal que

$$f(c) + g(c) \leq 2.$$

Problema 2 (5 puntos)

En un plano se encuentra una elipse E con semiejes a y b. Se consideran los triángulos inscritos en E tales que al menos uno de sus lados es paralelo a uno de los ejes de E. Encuentre el lugar geométrico de los centroides de tales triángulos y calcule su área.

Problema 3 (6 puntos)

Los divisores positivos de un número entero positivo n están inscritos en orden creciente a partir del número 1.

$$1 = d_1 < d_2 < d_3 < \ldots < n$$

Encontrar el número n, si se sabe que

i. $n = d_{13} + d_{14} + d_{15}$ y

ii. $(d_5 + 1)^3 = d_{15} + 1$.

Problema 4 (6 puntos)

Cuatro círculos de radio 1 con centros en los puntos A, B, C, D se encuentran en el plano de forma que cada círculo es tangente a dos de los otros. Un quinto círculo pasa por los centros de dos de los círculos y es tangente a los otros dos. Encuentre los valores que puede tomar el área del cuadrilátero $ABCD$.

Problema 5 (7 puntos)

Una sucesión de polinomios $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = 1+x$, ..., $f_n(x)$, ... se define por recurrencia como sigue

$$(k+1)\, f_{k+1}(x) - (x+1)\, f_k(x) + (x - k)\, f_{k-1}(x) = 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots$$

Demuestre que $f_k(k) = 2^k$ para cualquier $k \geq 0$.

Problema 6 (7 puntos)

Se considera la siguiente ecuación diferencial:

$$3(3+x^2)\,\frac{dx}{dt} = 2\,(1+x^2)^2 e^{-t^2}.$$

Si $x(0) \leq 1$, demuestre que existe $M > 0$ tal que $|x(t)| < M$ para cualquier valor de $t \geq 0$.

Problema 7 (8 puntos)

n líneas rectas que se movían, cada una paralela a sí misma con velocidades constantes (cada una con su propia velocidad). Además las líneas no podían reversar su dirección. Algunos estados originales desaparecieron (un estado desaparece si y sólo si su área se convierte en cero) y en el transcurso del tiempo otros estados pudieron surgir.

En un momento determinado los jefes de los estados existentes acordaron terminar la guerra y crearon una Organización de Naciones Unidas y todas las fronteras cesaron de moverse. La ONU contó el número total de estados que fueron destruidos y los existentes y obtuvo en total k.

Demuestre que $k \leq \dfrac{n^3 + 5n}{6} + 1$. ¿Puede obtenerse la igualdad?

Retornar a Olimpiada Iberoamericana Universitaria

Página Principal

Diseño: Fernando Vega
Para mayor información Olimpiadas Colombianas