XI Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria

Noviembre de 2008

**Problema 1** (5 puntos) Sea $n$ un número entero positivo no divisible ni por 2 ni por 5. En la escritura decimal infinita del numero $\frac{1}{n} = 0.a_1a_2a_3\ldots$ se eligen arbitrariamente un número finito de dígitos después del punto decimal y luego se borran. Claramente el número decimal obtenido es racional también y por lo tanto tiene la forma $\frac{a}{b}$ con $a$ y $b$ enteros. Demostrar que $b$ es divisible por $n$.

**Problema 2** (5 puntos) Demostrar que para cada número natural $n$ existe un polinomio $f\left(x\right)$ con coeficientes reales, de grado $n$, tal que el polinomio $p\left(x\right) = f\left(x^2 - 1\right)$ es divisible por $f\left(x\right)$ en el anillo $R\left[x\right]$.

**Problema 3** (5 puntos) Demostrar la desigualdad $x + \frac{1}{x^x} < 2$ para $0 < x < 1$.

**Problema 4** (6 puntos) Dos vértices $A$ y $B$ de un triángulo $ABC$ están ubicados en una parábola $y = ax^2 + bx + c$ con $a > 0$ de tal forma que los lados $AC$ y $BC$ son tangentes a la parábola. Sean $m_c$ la longitud de la mediana $CC_1$ del triángulo $ABC$ y $S$ el área del triángulo $ABC$. Encontrar

$$\frac{S^2}{m_c^3}.$$

**Problema 5** (6 puntos) Hallar todos los números enteros postivos $n$ para los cuales existen números enteros positivos $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ tales que

$$\left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + \ldots + b_n^2\right) - \left(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n\right)^2 = n.$$

**Problema 6** (6 puntos)

a) (2 puntos) Determinar si existen o no matrices $A, B, C \in SL_2(Z)$ las cuales satisfacen la condición $A^2 + B^2 = C^2$.

b) ( 4 puntos) Determinar si existen o no matrices $A, B, C \in SL_2(Z)$ las cuales satisfacen la condición $A^4 + B^4 = C^4$.

La notación $A \in SL_2(Z)$ significa que $A$ es una matriz de dimensión $2 \times 2$ con entradas enteras y $\det A = 1$.

**Problema 7** (7 puntos) Sea $A$ un grupo aditivo abeliano sin elementos periódicos no nulos y tal que para cada número primo $p$ se cumple la desigualdad $|A/pA| \leq p$, donde $pA = \{pa \,|a \in A\}$, $pa = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{p \text{ veces}}$ y $|A/pA|$ es la cardinalidad del grupo cociente $A/pA$ (el índice del subgrupo $pA$).

Demostrar que cada subgrupo del grupo $A$ de índice finito es isomorfo al grupo $A$ mismo.