

PROCEDIMIENTO SELECTIVO PARA EL INGRESO AL CUERPO DE
PROFESORES DE ENSEÑANZA SECUNDARIA. CEUTA. CONVOCATORIA 2018

MATEMÁTICAS

Problema 1: Dada la cónica $y^2 = px$ y el haz de rectas $y - a = t \cdot (x - b)$, hallar el lugar geométrico de los puntos en que las rectas de este haz cortan a las tangentes a la cónica en los puntos de intersección de esta con el haz de rectas $y = tx$.

Problema 2: Demostrar que para todo número natural $n \geq 1$ se cumple que: $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ es múltiplo de 21.

Problema 3: Sea $g(x)$ una función continua en \mathbb{R} . Se define la función

$$f(x) = \int_0^x \sin t \cdot g(x-t) dt$$

Prueba que la función $f(x)$ es derivable dos veces y que cumple la igualdad

$$f'' + f = g$$

Problema 4: Se considera la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$\begin{cases} f(e_1) = e_2 + e_3 \\ f(e_2) = e_1 + e_3 \\ f(e_3) = e_1 + e_2 \end{cases}$$

siendo $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de \mathbb{R}^3 :

- a) Calcular la matriz asociada respecto de la base canónica y analizar si esta aplicación lineal es o no inyectiva.
- b) Probar que:

$$\forall n \in \mathbb{N}: f^n = a_n f + b_n I$$

siendo, para cada $n \in \mathbb{N}$, a_n y b_n números reales a determinar.

Problema 5:

- a) Demostrar que entre todos los triángulos con la misma base y mismo ángulo opuesto, el isósceles tiene área máxima.
- b) Probar que entre todos los triángulos inscritos en una circunferencia dada, el equilátero tiene área máxima.

Problema 6: Una línea de autobuses tiene longitud l . La probabilidad de que un pasajero suba al autobús en las proximidades del punto x es proporcional a $x \cdot (l - x)^2$, y la probabilidad de que un pasajero que subió en el punto x baje en el punto y es proporcional a $(y - x)^r$, siendo $r > 0$. Calcular:

- a) Las constantes de proporcionalidad de ambas probabilidades.
- b) La probabilidad de que un pasajero no suba al autobús antes del punto z del recorrido.
- c) La probabilidad de que un pasajero que subió en el punto x descienda después del punto z del recorrido del autobús.