

EXERCICIO PRÁCTICO. M1

Problema 1

Los números de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... forman una sucesión llamada sucesión de Fibonacci $\{F_n\}$ que se define de forma recurrente como

$$F_1 = 1, F_2 = 1 \text{ y } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ para } n \geq 3$$

- a) Probar que dos números de Fibonacci consecutivos son primos entre sí.
- b) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, demostrar que $A^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$ para $n \geq 2$
- c) Comprueba que la matriz A del apartado anterior es diagonalizable y calcula la matriz $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP = D$ donde $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$ es la matriz diagonal. Utiliza este resultado para obtener el término general de la sucesión $\{F_n\}$ como fórmula no recurrente (llamada fórmula de Binet).
- d) Deduce de los apartados b) y c) la identidad de Cassini: $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$

Problema 2

Estudia la continuidad de la función real de variable real $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ o } x \text{ es irracional} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ (irreducible)} \end{cases}$$

Problema 3

En un triángulo \widehat{ABC} , supongamos que las rectas tangentes a su circunferencia circunscrita en B y en C se cortan en un punto P . Demostrar que la recta AP es la simétrica de la mediana del lado BC respecto de la bisectriz del ángulo \widehat{A} .

Problema 4

El cáncer colorrectal (CCR) constituye un problema de salud pública a nivel mundial. En los países miembros de la Unión Europea como en el resto de los países desarrollados representa, en ambos sexos, el segundo cáncer más frecuente y una de las principales causas de muerte por este. Entre las diversas opciones que existen, las pruebas de sangre oculta en heces (TSOH) han sido las primeras en ser evaluadas en ensayos clínicos controlados y los que han recibido una mayor atención, dado que, desde un punto de vista práctico, su bajo coste y la facilidad de su instauración los convierten en una opción atractiva para la detección del CCR.

En uno de los estudios en el que se utilizó esta prueba diagnóstica, la probabilidad de que un paciente con CCR sea detectado (que la prueba sea positiva) es de un 68 %, y la probabilidad que un paciente que no presente CCR sea detectado (que la prueba sea negativa) es de un 98 %. La Conselleria decide utilizar esta prueba diagnóstica (TSOH) sobre la población perteneciente al departamento de Salud 7 (Valencia-La Fé) en el que la prevalencia de cáncer de colón es del 3 %, calcula:

- a) La probabilidad de que al aplicar la prueba a un paciente con CCR, el resultado sea positivo.
- b) La probabilidad de que, si al aplicar la prueba el resultado es positivo, el paciente presente CCR.
- c) La probabilidad de que, si al aplicar la prueba el resultado es negativo, el paciente no presente CCR.
- d) ¿Cuántas veces es más probable que el paciente presente CCR si el resultado de la prueba es positivo que si no sabemos el resultado?
- e) ¿Cuántas veces es más probable que el paciente presente CCR si el resultado de la prueba es positivo que si es negativo?
- f) La unidad de investigación de estadísticas sanitarias del Hospital Universitario de Alicante ha decidido aplicar esta prueba diagnóstica sobre la población que acude al servicio de Urgencias, en el que la prevalencia de cáncer de colón es del 30 %. Calcula de nuevo los resultados solicitados en los apartados anteriores, e interpreta los resultados.
- g) Eres profesor de un grupo de 2º de Bachillerato de Ciencias Sociales de 30 alumnos/as en un instituto de la Comunidad Valenciana de los cuales: 4 son repetidores de 2º, y dos alumnas de altas capacidades que requiere enriquecimiento curricular. Diseña una intervención didáctica, a través de la metodología o metodologías que estime oportuna, para que todo el alumnado del grupo pueda resolver las cuestiones planteadas en este problema.

NOTA: En epidemiología, se denomina prevalencia a la proporción de individuos de un grupo o una población (en medicina, persona), que presentan una característica o evento determinado (en medicina, enfermedades).

PUNTUACIÓN: Si consideramos que los cuatro problemas se puntúan con 40 puntos, la distribución es la siguiente: los problemas 1,2 y 3 valen 9 puntos y el problema 4, 13 puntos.

EXERCICI PRÀCTIC. M1

Problema 1

Els nombres de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... formen una successió anomenada successió de Fibonacci $\{F_n\}$ que es defineix de manera recurrent com

$$F_1 = 1, F_2 = 1 \text{ y } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ para } n \geq 3$$

.

- a) Proveu que dos números de Fibonacci consecutius són primers entre sí.
- b) Donada la matriu $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, demostreu que $A^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$ per a $n \geq 2$
- c) Comprova que la matriu A de l'apartat anterior és diagonalitzable i calcula la matriu $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP = D$ on $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$ és la matriu diagonal. Utilitza aquest resultat per a obtenir el terme general de la successió $\{F_n\}$ com a fórmula no recurrent (anomenada fórmula de Binet).
- d) Dedueix dels apartats b) i c) la identitat de Cassini:

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

Problema 2 Estudia la continuïtat de la funció real de variable real $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ o } x \text{ es irracional} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ (irreducible)} \end{cases}$$

Problema 3

En un triangle \widehat{ABC} , suposem que les rectes tangents a la seua circumferència circumscrita en B i en C es tallen en un punt P . Demostrar que la recta AP és la simètrica de la mitjana del costat BC respecte de la bisectriu de l'angle \widehat{A} .

Problema 4

El càncer colorectal (CCR) constitueix un problema de salut pública a nivell mundial. Als països membres de la Unió Europea com en la resta dels països desenvolupats representa, en tots dos sexes, el segon càncer més freqüent i una de les principals causes de mort per aquest. Entre les diverses opcions que existeixen, les proves de sang oculta en femta (TSOH) han sigut les primeres a ser avaluades en assajos clínics controlats i els que han rebut una major atenció, atès que, des d'un punt de vista pràctic, el seu baix cost i la facilitat de la seua instauració els converteixen en una opció atractiva per a la detecció del CCR.

En un dels estudis en el qual es va utilitzar aquesta prova diagnòstica, la probabilitat que un pacient amb CCR siga detectat (que la prova siga positiva) és d'un 68 %, i la probabilitat que un pacient que no presente CCR siga detectat (que la prova siga negativa) és d'un 98 %. La Conselleria decideix utilitzar aquesta prova diagnòstica (TSOH) sobre la població pertanyent al departament de Salut 7 (València-La Fé) en el qual la prevalença de càncer de còlon és del 3 %, calcula:

- a) La probabilitat que en aplicar la prova a un pacient amb CCR, el resultat siga positiu.
- b) La probabilitat que, si en aplicar la prova el resultat és positiu, el pacient presente CCR.
- c) La probabilitat que, si en aplicar la prova el resultat és negatiu, el pacient no presente CCR.
- d) Quantes vegades és més probable que el pacient presente CCR si el resultat de la prova és positiu que si no sabem el resultat?
- e) Quantes vegades és més probable que el pacient presente CCR si el resultat de la prova és positiu que si és negatiu?
- f) La unitat d'investigació d'estadístiques sanitàries de l'Hospital Universitari d'Alacant ha decidit aplicar aquesta prova diagnòstica sobre la població que acudeix al servei d'Urgències, en el qual la prevalença de càncer de còlon és del 30 %. Calcula de nou els resultats sol·licitats en els apartats anteriors, i interpreta els resultats.
- g) Eres professor d'un grup de 2n de Batxillerat de Ciències Socials de 30 alumnes/as en un institut de la Comunitat Valenciana dels quals: 4 són repetidors de 2n, i dues alumnes d'altres capacitats que requereix enriquiment curricular. Dissenya una intervenció didàctica, a través de la metodologia o metodologies que estimes oportuna, perquè tot l'alumnat del grup pugua resoldre les qüestions plantejades en aquest problema.

NOTA: En epidemiologia, es denomina prevalença a la proporció d'individus d'un grup o una població (en medicina, persona), que presenten una característica o esdeveniment determinat (en medicina, malalties).

PUNTUACIÓ: Si considerem que els quatre problemes es puntuen amb 40 punts, la distribució és la següent: els problemes 1,2 i 3 valen 9 punts i el problema 4, 13 punts.