OPOSICIONES 2018

ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS

OPCIÓN 1

1.- Se tiene una pirámide regular de base un triángulo equilátero y cuyas caras laterales son triángulos isósceles iguales. Si abatimos las caras laterales sobre el plano de la base se forma una estrella de tres puntas que quedaría inscrita dentro de un círculo de radio 10 cm. Determinar las longitudes de las aristas de la base y de las caras laterales que hacen máximo el volumen de la pirámide.

(12 puntos)

2.- Demostrar que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(sen(x)) > sen(\cos(x))$

(20 puntos)

3.- Los afijos $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 \; y \; z_6$ son los vértices consecutivos de un hexágono regular. Sabiendo que $z_1 = 0 \; y \; z_4 = 4 + 6i$, hallar $z_2, z_3, z_5 \; y \; z_6$

(16 puntos)

4.- Una urna contiene una bola blanca y una bola negra. Una persona saca dos bolas (con reemplazamiento) y ganará una cierta cantidad C si saca dos veces la bola blanca. En caso contrario, se introduce una nueva bola negra en la urna y se le permite hacer dos nuevas extracciones. Ganará si, como antes, saca dos veces la bola blanca. Si esto no ocurre se le vuelve a permitir sacar otras dos bolas de la urna en la que se ha introducido otra bola negra y así indefinidamente. ¿Cuál es la probabilidad de que esa persona gane la cantidad (supuesto que viva eternamente)?

(20 puntos)

5.- Sean *r* y *s* dos rectas del plano afín ordinario que se cortan en un punto *O*. Tenemos tres puntos *A*, *B* y *C* en la recta *r* y tres puntos *A'*, *B'* y *C'* en la recta *s*. Las rectas *CB'* y *BC'* se cortan en *M*, las *CA'* y *AC'* en *N* y las rectas *AB'* y *BA'* en *P*. Demostrar que los puntos *M*, *N* y *P* están alineados.

(16 puntos)

6.- a) En una batalla en la que participaron entre 8.000 y 10.000 soldados resultaron muertos $\frac{23}{165}$ y heridos $\frac{16}{65}$ del total. Hallar cuántos soldados resultaron ilesos. (6 puntos)

b) Hallar el número (o los números) $N = 2^a 3^b$ sabiendo que la suma de todos sus divisores es 363

(10 puntos)

OPCIÓN 2

1.- Una recta en el plano se mueve de forma que el segmento determinado por sus puntos de corte con los dos ejes de coordenadas mantiene una longitud constante *L*.

a) Determinar las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico descrito por el pie de la perpendicular a dicho segmento trazada desde el origen de coordenadas.

b) Hallar las ecuaciones implícitas de dicho lugar. (16 puntos)

2.- Sea *f* una función real de variable real y supongamos que existe por lo menos un punto $c \in \mathbb{R}$ en el que *f* es continua. Supongamos también que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo par de valores x e $y \in \mathbb{R}$.

Demostrar que existe una constante $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = a\,x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (20 puntos)

3.- Consideremos la parte superior ($y \geq 0$) de las circunferencias de ecuaciones $x^2 + y^2 = R^2$;

$x^2 + y^2 - R\,x = 0 \quad ; \quad x^2 + y^2 + R\,x = 0$

a) Determinar el radio *r* del círculo inscrito en la región encerrada entre los tres semicírculos y que es tangente a los mismos.

b) Calcular las longitudes de los lados del triángulo cuyos vértices son los puntos de tangencia.

(16 puntos)

4.- Se dispone de dos monedas A y B cuyas probabilidades respectivas de caer de cara son α y β. Se efectúan lanzamientos de acuerdo con el siguiente sistema: para el primer lanzamiento se escoge al azar (probabilidad ½) una de las dos monedas. En los lanzamientos sucesivos se utiliza la misma moneda que en el lanzamiento anterior si esta ha caído de cara o, en caso contrario, se cambia de moneda. Hallar las probabilidades λ_n y μ_n de utilizar la moneda A en el lanzamiento n-ésimo y de obtener cara en el n-ésimo lanzamiento respectivamente. Estudiar el comportamiento de λ_n y μ_n cuando $n \to \infty$

(20 puntos)

5.- Sean r_1, r_2, r_3, r_4 y r_5 las raíces quintas de la unidad. Estudiar qué valores toma la expresión $E = r_1^n + r_2^n + r_3^n + r_4^n + r_5^n$ cuando *n* recorre los números naturales, ($n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$).

(12 puntos)

6.- Determinar el área de la región del primer cuadrante del plano limitada por la curva $y = e^{-x} sen(x)$ y el eje *OX*. (16 puntos)