UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

NOMBRE . . . .
APELLIDOS . . . .
CALLE . . . .
POBLACIÓN . . . .
PROVINCIA . . . . C.P. . . . .

TEORÍA DE LA DECISIÓN

PRUEBA DE EVALUACIÓN A DISTANCIA / 1
UNIDAD DIDÁCTICA / 1

Número de Expediente

08406PE01A09

Problema 1. Un decisor tiene como función de utilidad

$$u(x) = 3x^5 - 15x^4 + 20x^3 + 60x + 1 \text{ si } x \geq 0$$

Hallar las zonas de inclinación y aversión al riesgo.

Problema 2. Sean $a > b > c > 0$, cantidades monetarias. Un decisor muestra indiferencia ante las loterías

$$\begin{pmatrix} p & 1-p \\ a & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1-p & p \\ b & c \end{pmatrix}$$

donde $0 < p < 1/2$. Probar que existe r, $0 < r < 1$, tal que

$$b \sim \begin{pmatrix} 1-r & r \\ a & c \end{pmatrix}$$

Problema 3. Un decisor tiene como función de utilidad

$$u(x) = \log(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) \text{ si } x \geq 0$$

Hallar las zonas de inclinación y aversión al riesgo.

Problema 4. Supongamos que una persona nos dá la información siguiente sobre su comportamiento ante determinadas perspectivas:

$$200 \sim \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ -300 & 300 \end{pmatrix}; \quad 100 \sim \begin{pmatrix} 0,80 & 0,20 \\ -300 & 300 \end{pmatrix};$$

$$0 \sim \begin{pmatrix} 0,60 & 0,40 \\ -300 & 300 \end{pmatrix}; \quad -100 \sim \begin{pmatrix} 0,30 & 0,70 \\ -300 & 300 \end{pmatrix};$$

$$-200 \sim \begin{pmatrix} 0,10 & 0,90 \\ -300 & 300 \end{pmatrix}$$

Dibujar la curva de utilidad de la persona.

Problema 5. Si al individuo del ejercicio anterior se le ofrecen dos loterías de la forma

$$\xi = \begin{pmatrix} 0,50 & 0,50 \\ -150 & 200 \end{pmatrix}; \qquad \eta = \begin{pmatrix} 0,80 & 0,20 \\ -100 & 300 \end{pmatrix}$$

¿Deberá participar en alguna de ellas?.

Explicar a través de su curva de utilidad si el individuo tiene aversión o inclinación al riesgo.

Problema 6. Cierto individuo debe elegir entre cuatro perspectivas que incluyen tres resultados seguros A_1, A_2, A_3, donde $A_1 > A_2 > A_3$.

Supongamos que para esta persona son indiferentes las perspectivas siguientes:

$$A_2 \sim \begin{pmatrix} 0,40 & 0,60 \\ A_1 & A_3 \end{pmatrix}$$

Si el individuo actúa de acuerdo con la axiomática de Von Neumann-Morgenstern, entre las perspectivas siguientes, ¿cuál elegirá?, ¿cuál será la peor?.

$$\xi = \begin{pmatrix} 0,30 & 0,30 & 0,40 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix}; \quad \eta = \begin{pmatrix} 0,10 & 0,30 & 0,60 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0,40 & 0,50 & 0,10 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix}; \quad \beta = \begin{pmatrix} 0,20 & 0,50 & 0,30 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix}$$

CONSULTAS
REFERENTES AL CONTENIDO DE LOS TEMAS Y METODOLOGÍA DE SU ESTUDIO

RESPUESTAS DEL PROFESOR

EVALUACIÓN	PRUEBA OBJETIVA		PRUEBA DE ENSAYO	
	Aciertos			
	Errores			
	Omisiones			
	TOTAL		**TOTAL**	

UNIVERSIDAD NACIONAL
DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

NOMBRE . . . .
APELLIDOS . . . .
CALLE . . . .
POBLACIÓN . . . .
PROVINCIA . . . . C.P. . . . .

TEORÍA DE LA DECISIÓN

PRUEBA DE EVALUACIÓN A DISTANCIA / 2
UNIDAD DIDÁCTICA / 2

Número de Expediente

08406PE01A09

Problema 1. Sea el problema de decisión $(\Omega, \mathcal{D}, L)$, donde $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{D} = [0,1]$ y

$$L(d,\omega) = \begin{cases} (d-\omega)^2 & \text{si } \mid d-\omega \mid \leq 1/2 \\ 2 & \text{si } \mid d-\omega \mid > 1/2 \end{cases}$$

1. Calcular la decisión pura minimax.
2. Si los ω se distribuyen con función de densidad $f(\omega) = n\omega^{n-1}$, hallar la decisión Bayes.

Problema 2. Sea el problema de decisión $(\Omega, \mathcal{D}, L)$, donde $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{D} = [0,2]$ y

$$L(d,\omega) = \begin{cases} 1+2\omega & \text{si } d < \omega \\ 1+2d & \text{si } \omega < d \leq 1 \\ 0 & \text{si } \omega = d \\ \omega d & \text{si } 1 < d \leq 2 \end{cases}$$

1. Calcular la decisión o decisiones minimax puras.
2. Hallar la clase admisible.
3. Hallar la decisión o decisiones Bayes frente a la distribución a priori que tiene densidad
$$f(\omega) = 2(1-\omega) \text{ si } 0 \leq \omega \leq 1$$

Problema 3. En el problema de decisión $(\Omega, \mathcal{D}, L)$, donde $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{D} = [0,1]$ y $L(d,\omega) = \mid d - \omega \mid$, hallar

1. La decisión minimax pura.
2. La decisión Bayes frente a la distribución *a priori* que tiene densidad $f(\omega) = 2\omega$, $0 \leq \omega \leq 1$.

Problema 4. En el problema de decisión $(\Omega, \mathcal{D}, L)$, donde

$$\Omega = (-\infty, +\infty)\ ,\ \mathcal{D} = (-\infty, +\infty)\ ,\ L(d, \omega) = \mid d - \omega \mid$$

y la distribución *a priori* de ω es normal de media cero y varianza uno, hallar la decisión y es riesgo Bayes.

Problema 5. En el problema de decisión $(\Omega, \mathcal{D}, L)$, donde $\Omega = (0, +\infty)$, y $\mathcal{D} = (0, +\infty)$. Si la función de pérdida es $L(d, \omega) =\mid d - \omega \mid$, y la distribución *a priori* de ω tiene función de densidad:

$$f(\omega) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda\omega} & \text{si } \omega > 0 \\ 0 & \text{si } \omega \leq 0 \end{cases}$$

Hallar la decisión Bayes y el riesgo Bayes.

Problema 6. Sea el proceso de decisión siguiente:

Un decisor elige entre dos alternativas d_1 y d_2.

> Si elige d_1, se lanza una moneda al aire, si sale *cara*, el decisor gana 20 con probabilidad 1/3 y pierde 30 con probabilidad 2/3. Si sale *cruz*, gana 30 con probabilidad 1/4 y pierde 40 con probabilidad 3/4.
>
> Si elige d_2, se sortea un número del 1 al 9 (ambos inclusive). Si dale 1, 2 ó 3, el decisor gana 15. Si sale cualquier otro número pierde 20.

Se pide calcular la decisión óptima y determinar la forma de las estrategias puras del decisor. Dibujar el gráfico de decisión.

Problema 7. Aplicar los criterios de Hurwicz y Wald a un problema de decisión bajo incertidumbre, cuya matriz de valores numéricos viene dada por la tabla siguiente:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{array} & \left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{array}\right) \end{array}$$

Problema 8. Aplicar los criterios *Maximax, Savage y Laplace* a un problema de decisión bajo incertidumbre, cuya matriz de valores numéricos viene dada por la tabla siguiente:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} d_1 \\ d_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 25 & -4 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

CONSULTAS
REFERENTES AL CONTENIDO DE LOS TEMAS Y METODOLOGÍA DE SU ESTUDIO

RESPUESTAS DEL PROFESOR

EVALUACIÓN	PRUEBA OBJETIVA		PRUEBA DE ENSAYO	
	Aciertos			
	Errores			
	Omisiones			
	TOTAL		**TOTAL**	

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

NOMBRE . . . .
APELLIDOS . . . .
CALLE . . . .
POBLACIÓN . . . .
PROVINCIA . . . . C.P. . . . .

TEORÍA DE LA DECISIÓN

PRUEBA DE EVALUACIÓN A DISTANCIA / 4
UNIDAD DIDÁCTICA / 4

Número de Expediente

08406PE01A09

Problema 1. Sea $\Omega = (0, 1)$, un decisor debe estimar el valor de ω basándose en la observación de una variable X de función de densidad

$$f_\omega(x) = 1/\omega \;\; 0 < x < \omega$$

Se sabe que la función de distribución *a priori* de ω tiene función de densidad:

$$g(\omega) = 2\omega \;\; 0 < \omega < 1$$

y que la función de pérdida es $L(\omega, d) = \mid \omega - d \mid$. Hallar la decisión Bayes y la pérdida Bayes.

Problema 2. Cierto decisor debe estimar la probabilidad p de que aparezca cara al lanzar una moneda. Se le permite realizar un experimento que consiste en lanzar sucesivas veces la moneda hasta que aparece por primera vez cara. Si la distribución *a priori* de p es uniforme en $(0, 1)$ y la función de pérdida es:

$$L(p, d) = \frac{(p - d)^2}{p}$$

Hallar el estimador Bayes de p y el riesgo Bayes.

Problema 3. Sea $\Omega = (0,1)$, un decisor debe estimar el valor de ω efectuando una observación de una variable X que se distribuye con función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \omega x + 1 - \omega & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

donde la distribución *a priori* de ω es uniforme en $(0,1)$ y la función de pérdida es:

$$L(\omega, d) = \mid \omega - d \mid$$

Hallar la decisión y el riesgo Bayes.

Problema 4. Un decisor conoce que el número de accidentes sigue una distribución de Poisson de media λ. Desea estimar la probabilidad θ de que ocurran k accidentes. Si observa el número de accidentes durante n días y la distribución *a priori* de λ es exponencial de parámetro μ. Hallar la decisión Bayes para la función de pérdida cuadrática:

$$L(\theta, d) = (\theta - d)^2$$

Problema 5. Considérese el problema de decisión donde el espacio paramétrico Ω contiene todos los números del intervalo $[0, 1]$, y el espacio de decisiones $\mathcal{D} = \mathcal{R}$, sabiendo que la función de pérdida es $L(\omega, d) = 100(\omega - d)^2$. Supóngase que la distribución de ω viene dada por la expresión $\zeta\omega = 2\omega$.

Calcular la decisión Bayes para ζ, y el riesgo Bayes.

Problema 6. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria simple de una variable de distribución exponencial de parámetro ω desconocido. Supongamos que la distribución *a priori* de ω es gamma de parámetros α y β, con $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. Se pide hallar la distribución a posteriori de ω.

Problema 7. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria simple de una variable de Poisson de parámetro λ desconocido, sea $f_n(./\lambda)$ la función de desnsidad condicionada de $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Si T es el estadístico definido por $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$, estudiar si T es suficiente para la familia $f_n(./\lambda)$.

Problema 8. Demostrar que las siguientes familias de distribuciones son exponenciales:

a) Familia de distribuciones de Bernouilli, con parámetro λ desconocido.

b) Familia de distribuciones de Poisson, con parámetro λ desconocido.

Problema 9. Sea $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de una distribución de Poisson, con un valor desconocido de la media ω. Si la distribución *a priori* de ω es una gamma de parámetros α y β ,$\alpha > 0$, $\beta > 0$, calcular el estimador Bayes y el riesgo Bayes tomando como función de pérdida la cuadrática:

$$L(\omega, d) = (\omega - d)^2$$

Problema 10. Demostrar que la familia de distribuciones gamma es una familia conjugada para una muestra de una distribución exponencial.

CONSULTAS
REFERENTES AL CONTENIDO DE LOS TEMAS Y METODOLOGÍA DE SU ESTUDIO

RESPUESTAS DEL PROFESOR

EVALUACIÓN	PRUEBA OBJETIVA		PRUEBA DE ENSAYO	
	Aciertos			
	Errores			
	Omisiones			
	TOTAL		**TOTAL**	

UNIVERSIDAD NACIONAL
DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

NOMBRE ....
APELLIDOS ....
CALLE ....
POBLACIÓN ....
PROVINCIA .... C.P. ....

TEORÍA DE LA DECISIÓN

PRUEBA DE EVALUACIÓN A DISTANCIA / 5
UNIDAD DIDÁCTICA / 5

Número de Expediente

08406PE01A09

Problema 1. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 2\theta x + 2(1-\theta)(1-x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Basándose en una muestra de tamaño $n = 1$, construir el test de Neyman para contrastar la hipótesis

$$H_0 : \theta = \theta_0 \ \text{ frente a } \ H_1 : \theta = \theta_1 \ , \ \theta_1 > \theta_0$$

Problema 2. Hallar un estadístico suficiente para estimar el parámetro θ de una densidad

$$f_\theta(x) = 2(\theta - x)/\theta^2; \qquad 0 < x < \theta$$

basado en una muestra aleatoria de tamaño n.

Problema 3. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria simple de una población con distribución uniforme en $(0, \theta)$.

Sean $X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ y el estadístico

$$T(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{X_{(n)}}{\theta}$$

Construir un intervalo de confianza al nivel de significación α para θ, basado en el estadístico T.

Problema 4. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria simple de una población de distribución uniforme en $(\theta - 1, \theta + 1)$. Hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ. ¿Es centrado?. ¿Es consistente?.

Problema 5. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria simple de una distribución de Bernouilli de parámetro ω desconocido. Supongamos que el valor de ω debe estimarse cuando la función de pérdida es

$$L(\omega, d) = \frac{(\omega - d)^2}{\omega(1-\omega)}$$

y que la distribución a priori de ω es uniforme en $(0, 1)$. Demostrar que el estimador Bayes viene dado por la ecuación;

$$D^*(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \overline{X}$$

Problema 6. Sea una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x,\theta) = 2e^{-2(x-\theta)}; \qquad x \geq \theta$$

Se pide estimar el parámetro θ por el método de máxima verosimilitud.

Problema 7. Supongamos que se ha estimado mediante múltiples observaciones que el número de pulsaciones de varones entre 20 y 25 años de edad, da una media de 72 pulsaciones por minuto, con una desviación típica de 9. Si una muestra de 100 jugadores de fútbol da una media de 64, ¿debe considerarse esta desviación como significativa?.

Problema 8. Sea una población $\mathcal{N}(0,\sigma)$, son σ desconocido, y sean las hipótesis $H_0 : (\sigma = \sigma_0)$ y $H_1 : (\sigma = \sigma_1)$. Demostrar que para el contraste entre H_0 y H_1, la mejor región crítica viene determinada por:

$$\begin{array}{l} \overline{x}^2 + s^2 \leq k \quad \text{si} \quad \sigma_0 > \sigma_1 \\ \overline{x}^2 + s^2 \geq k \quad \text{si} \quad \sigma_0 < \sigma_1 \end{array}$$

donde $s^2 = (\sum(x_i - \overline{x})^2)/n$.

Problema 9. Se admite que la vida de cierto material es una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{a} e^{-x/a}; \qquad x > 0 \ , \ a > 0$$

1. Obtener un estimador para a por el método de máxima verosimilitud, y por el método de los momentos.
2. Hallar la cota de Cramer-Rao para la varianza de los estimadores del apartado (a).

CONSULTAS
REFERENTES AL CONTENIDO DE LOS TEMAS Y METODOLOGÍA DE SU ESTUDIO

RESPUESTAS DEL PROFESOR

EVALUACIÓN	PRUEBA OBJETIVA		PRUEBA DE ENSAYO	
	Aciertos			
	Errores			
	Omisiones			
	TOTAL		**TOTAL**	