GOIB
CONSELLERIA
EDUCACIÓ
I UNIVERSITAT

Oposicions 2018
Cos: SECUNDÀRIA
Especialitat: MATEMÀTIQUES
Tribunal núm.: 1
Illa: MENORCA

PRIMERA PROVA – PART B – MODEL 1

Cada exercici es qualificarà sobre 10 punts.

EXERCICI 1

Sigui $\mathbb{T}$ la transformació lineal de l'espai tridimensional $\mathbb{R}^3$ que compleix les següents condicions (referides a la base canònica de $\mathbb{R}^3$):

- la restricció de $\mathbb{T}$ al subespai $\mathbb{U}$ definit per l'equació $x+y-z=0$ és una homotècia de raó 4
- $\mathbb{T}$ transforma el subespai vectorial $\mathbb{V}$ definit per les equacions implícites $\mathbb{V}=\begin{cases}2x+4y+3z=0\\ x+y+z=0\end{cases}$ en ell mateix
- $\mathbb{T}(3,0,-1)=(6,6,8)$

Determinar la matriu de la transformació $\mathbb{T}$ en la base canònica.

EXERCICI 2

La duració en minuts d'una cridada telefònica de llarga distància ve donada per una variable aleatòria X que té la següent funció de distribució:

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & si \quad x\le 0\\ 1-\dfrac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}x}-\dfrac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x} & si \quad x>0\end{cases}$$

a) Trobar la funció de densitat de X.

b) Calcular l'esperança matemàtica o duració mitjana de les cridades.

c) Calcular la probabilitat de que la durada d'una cridada telefònica estigui compresa entre els 3 i els 6 minuts.

d) Calcular la probabilitat de que una cridada que ja porta 3 minuts no superi els 6.

EXERCICI 3

Un nedador es troba al punt A de la vorera d'un estany circular de 50 m de radi i vol anar a un punt B diametralment oposat nedant fins a un punt P de la vorera i caminant després per l'arc PB de la vorera. Si neda a 50 m per minut i camina a 100 m per minut, a quin punt P s'ha de dirigir per tal de minimitzar el temps del seu recorregut?

Carrer del Ter, 16, 1r
07009 Palma
971 17 78 00
educacioiuniversitat.caib.es

GOIB

Oposicions 2018
Cos: SECUNDÀRIA
Especialitat: MATEMÀTIQUES
Tribunal núm.: 1
Illa: MENORCA

EXERCICI 4

a) Calcular:

$$\int \frac{x+1}{x^3+2x}\,dx$$

b) Siguin $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínues. Es defineix el producte de f per g com:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \cdot g(t)\,dt$$

Provar que es satisfan les següents propietats:

1. Si $f_1, f_2, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ són contínues i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
$$\langle \alpha f_1 + \beta f_2, g \rangle = \alpha \langle f_1, g \rangle + \beta \langle f_2, g \rangle$$
2. $\forall f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínues, $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$
3. $\forall f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, $\langle f, f \rangle \geq 0$
4. $\forall f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, $\langle f, f \rangle = 0 \leftrightarrow f = 0$

EXERCICI 5

En un determinat país, tenim la malaltia endèmica X.

Uns laboratoris han desenvolupat un test per detectar la malaltia. Aquest test dóna positiu en el 99% de les persones que la pateixen. Aquest valor rep el nom de *sensibilitat* del test. A més, el test dóna resultat negatiu en el 95% de les persones que no la pateixen. Aquest valor rep el nom d'*especificitat* del test.

1. Resoldre les qüestions següents:
   a. Si la proporció de persones amb X és $p = 0{,}02$, calcular el *valor predictiu positiu* del test, és a dir, la probabilitat que una persona estigui malalta si el test li dóna positiu. Calcular també el *valor predictiu negatiu*, que és la probabilitat que una persona que tingui resultat negatiu en el test no pateixi la malaltia.
   b. Si ara la proporció de malalts és p, amb $0 \leq p \leq 1$, escriure el valor predictiu positiu com a funció de p si la sensibilitat i l'especificitat són les de l'enunciat. Determinar si és creixent i quin és el seu valor màxim.
   c. Amb les condicions anteriors, determinar quina ha de ser la proporció mínima (aproximada) de malalts perquè el valor predictiu positiu sigui almenys 75%.
2. Situar el problema dins d'un curs d'Educació Secundària Obligatòria o Batxillerat, indicant els coneixements previs que ha de tenir l'alumnat, les possibles relacions amb altres branques de les matemàtiques i/o amb altres matèries, les possibles vies de resolució, els recursos i mitjans que es podrien utilitzar, els possibles instruments d'avaluació i altres aspectes didàctics que es considerin significatius.

Carrer del Ter, 16, 1r
07009 Palma
971 17 78 00
educacioiuniversitat.caib.es

G CONSELLERIA
O EDUCACIÓ
I I UNIVERSITAT
B
/

Oposicions 2018
Cos: SECUNDÀRIA
Especialitat: MATEMÀTIQUES
Tribunal núm.: 1
Illa: MENORCA

PRIMERA PROVA – PART B – MODEL 2

Cada exercici es qualificarà sobre 10 punts.

EXERCICI 1

Un joc consisteix en treure 2 bolles, amb reemplaçament, d'una bossa on hi ha una bolla blanca i una de negra. Si les dues bolles són blanques, es guanya el joc. Si no, s'afegeix a la bossa una altra bolla negra i es fan dues noves extraccions, i aquest procés es va repetint.
Quina és la probabilitat de guanyar el joc?

EXERCICI 2

a) Calcular:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^7 x\, cos^2 x\, dx$$

b) Estudiar la continuïtat, existència de derivades parcials, direccionals i diferenciabilitat en el punt (0,0) de la funció:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

EXERCICI 3

Demostrar per inducció que $n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)$ és múltiple de 3 (on $n \in \mathbb{N}$).

Carrer del Ter, 16, 1r
07009 Palma
971 17 78 00

GOIB

Oposicions 2018
Cos: SECUNDÀRIA
Especialitat: MATEMÀTIQUES
Tribunal núm.: 1
Illa: MENORCA

EXERCICI 4

Sigui $(E, \langle\, , \rangle\,)$ un espai euclidià de dimensió finita $n > 1$.

Siguin ψ i ϕ dos automorfismes de E tals que, per a $x, y \in E$ qualssevol, es compleix:

- ψ és autoadjunt: $\langle \psi(x), y \rangle = \langle y, \psi(x) \rangle$.
- $\langle \phi(x), y \rangle = -\langle y, \phi(x) \rangle$.

. Si ψ i ϕ commuten, demostrar que:

1. Per a tot $x \in E$, $\psi(x)$ i $\phi(x)$ són ortogonals.
2. $\psi + \phi$ i $\psi - \phi$ són automorfismes de E.
3. Per a tot $x \in E$, $\|(\psi + \phi)(x)\| = \|(\psi - \phi)(x)\|$, on $\|\cdot\|$ és la norma definida pel producte escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
4. Si $h = (\psi + \phi) \circ (\psi - \phi)^{-1}$, $\|h(x)\| = \|x\|$ per a tot $x \in E$.
5. Per a tot $x, y \in E$, $\langle h(x), h(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

EXERCICI 5

Donat el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} ax + (2a + 1)y - az = 1 \\ ax + y - az = -2b \\ ay + (1 - a)z = b \end{cases}$$

1. Discutir i resoldre el sistema.
2. Situar el problema dins d'un curs d'Educació Secundària Obligatòria o Batxillerat, indicant els coneixements previs que ha de tenir l'alumnat, les possibles relacions amb altres branques de les matemàtiques i/o amb altres matèries, les possibles vies de resolució, els recursos i mitjans que es podrien utilitzar, els possibles instruments d'avaluació i altres aspectes didàctics que es considerin significatius.

Carrer del Ter, 16, 1r
07009 Palma
971 17 78 00