IX Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria

Noviembre de 2006

1. (4 puntos) Sean m y n números enteros mayores que 1. Se definen los conjuntos $P_m = \left\{\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots, \frac{m-1}{m}\right\}$ y $P_n = \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right\}$.

   Encontrar la distancia entre P_m y P_n, que se define como
   $$\min\left\{|a-b| : \; a \in P_m, \, b \in P_n\right\}.$$

2. (5 puntos) Demostrar que para cualquier entero positivo n y cualesquiera números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ se cumple que la ecuación
   $$a_1 \operatorname{sen}(x) + a_2 \operatorname{sen}(2x) + \cdots + a_n \operatorname{sen}(nx) = b_1 \cos(x) + b_2 \cos(2x) + \cdots + b_n \cos(nx)$$
   tiene al menos una raíz real.

3. (5 puntos) Sean $p_1(x) = p(x) = 4x^3 - 3x$ y $p_{n+1} = p\left(p_n(x)\right)$ para cada n entero positivo. Denotamos como $A(n)$ el conjunto de todas las raíces reales de la ecuación $p_n(x) = x$.

   Demostrar que $A(n) \subseteq A(2n)$ y que cada producto de dos elementos de $A(n)$ es el promedio de dos elementos de $A(2n)$.

4. (6 puntos) Demostrar que para cualesquiera intervalo de numeros reales $[a, b]$ y número entero positivo n existen un número entero positivo k y una partición del intervalo dado
   $$a = x(0) < x(1) < x(2) < \ldots < x(k-1) < x(k) = b,$$
   tales que
   $$\int_{x(0)}^{x(1)} f(x)dx + \int_{x(2)}^{x(3)} f(x)dx + \cdots = \int_{x(1)}^{x(2)} f(x)dx + \int_{x(3)}^{x(4)} f(x)dx + \cdots$$
   para todo polinomio f con coeficientes reales de grado menor que n.

5. (7 puntos) Un n-ágono regular está inscrito en un círculo de radio 1. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ las distancias de uno de los vértices del polígono a todos los otros vértices. Demostrar que
   $$\left(5 - a_1^2\right)\left(5 - a_2^2\right) \cdots \left(5 - a_{n-1}^2\right) = F_n^2,$$
   donde F_n es n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, ...

6. (7 puntos) Sean $x_0(t) = 1, x_{k+1}(t) = \left(1 + t^{k+1}\right) x_k(t)$, para todo $k \geq 0$; $y_{n,0}(t) = 1, y_{n,k}(t) = \frac{t^{n-k+1}-1}{t^k-1} \cdot y_{n,k-1}(t)$, para $n \geq 0, 1 \leq k \leq n$.

   Demostrar que $\sum\limits_{j=0}^{n-1} (-1)^j x_{n-j-1}(t)\, y_{n,j}(t) = \frac{1-(-1)^n}{2}$, para todo $n \geq 1$.

7. (7 puntos) Consideramos el grupo multiplicativo $A = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z^{2006^k} = 1 \text{ y } 0 < k \in \mathbb{Z}\right\}$ de todas las raíces complejas de la unidad de grado 2006^k para todos los números enteros positivos k. Encontrar el número de homomorfismos $f : A \to A$ que satisfacen la condición:
   $$f\left(f(x)\right) = f(x) \text{ para todos los elementos } x \in A.$$