Solución del examen TIPO B

1. La información de qu disponemos es la siguiente:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B) = 0.5 \\ P\left(Perd|\, A\right) &= 0.25,\ P\left(Perd|\, B\right) = 0.05 \end{aligned}$$

   Nos están pidiendo $P\left(B|\, Perd\right)$ y esto, en virtud de la fórmula de la probabilidad condicionada es

$$\begin{aligned} P\left(B|\, Perd\right) &= \frac{P\left(Perd|\, B\right)P(B)}{P\left(Perd\right)} \\ &= \frac{P\left(Perd|\, B\right)P(B)}{P\left(Perd|\, B\right)P(B)+P\left(Perd|\, A\right)P(A)} \\ &= \frac{(0.05)\,(0.5)}{(0.05)\,(0.5)+(0.25)\,(0.5)} \approx 0.16 \end{aligned}$$

2. Se sabe que la probabilidad de que una planta reaccione desfavorablemente tras la realización de un injerto es de 0.002, i.e. $P(Rd)=0.002$. Se inspeccionan 2000 plantas, de forma que si definimos ξ, la v.a. que da el número de reacciones desfavorables, entonces $\xi \sim B(2000, 0.002)$. La distribución de esta v.a. se puede aproximar por una Poisson de parámentro $\lambda = np = 4$. Hecho esto contestamos a las cuestiones formuladas

   (a) Calculamos

$$\begin{aligned} P\left(\xi \leq 3\right) &= P\left(\xi = 0\right)+P\left(\xi = 1\right)+P\left(\xi = 2\right)+P\left(\xi = 3\right) \\ &= e^{-4}\left(1+\frac{4}{1}+\frac{16}{2}+\frac{64}{6}\right) = 0.43. \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} P\left(\xi \in [1,6]|\, \xi \leq 2\right) &= \frac{P\left(\xi \in [1,2]\right)}{P\left(\xi \leq 2\right)} \\ &= \frac{P\left(\xi = 1\right)+P\left(\xi = 2\right)}{P\left(\xi = 0\right)+P\left(\xi = 1\right)+P\left(\xi = 2\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{4}{1}+\frac{16}{2}\right)}{\left(1+\frac{4}{1}+\frac{16}{2}\right)} = 0.92 \end{aligned}$$

3. Como $X \sim N(3, 0.5)$ entonce $\psi = \frac{X-3}{0.5} \sim N(0,1)$. Así

$$\begin{aligned} P(X &\leq 3.32) = P\left(\psi = \frac{X-3}{0.5} \leq \frac{3.32-3}{0.5} = 0.64\right) = F_\psi(0.64) \\ &= 1 - F_\psi(-0.64) = 0.7389 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(2.15 &\leq X \leq 3.35) = \\ P(-1.7 &= \frac{2.15-3}{0.5} \leq \frac{X-3}{0.5} \leq \frac{3.35-3}{0.5} = 0.7) \\ &= F_\psi(0.7) - F_\psi(-1.7) \\ &= 0.758 - (1 - F_\psi(1.7)) = 0.758 - (1 - 0.9954) \\ &= 0.753\,4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X^2 &\geq 4) = P(X \geq 2) + P(X \leq -2) \\ &= P(\frac{X-3}{0.5} \geq -2) + P(\frac{X-3}{0.5} \leq \frac{-2-3}{0.5} = -10) \\ &= F_\psi(-2) + F_\psi(-10) \\ &= 0.027 + 0 = 0.027 \end{aligned}$$

ya que $F_\psi(-10) \leq F_\psi(-5) = 0$.

4. La longitud en milímetros ξ que se puede estirar un filamento de nylon sin ruptura sigue una distribución de probabilidad cuya densidad de probabilidad es

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 5e^{-5x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

(a) La probabildad de que un filamento se estire entre 0.18 y 0.22 milímetros es

$$\begin{aligned} &P\,(.18 < \xi < .22) \\ &= \int_{0.18}^{0.22} 5e^{-5x}dx = -e^{-5x}\Big|_{0.18}^{0.22} \\ &= e^{-5(0.18)} - e^{-5(0.22)} \approx 0.074 \end{aligned}$$

(b) La longitud esperada en milímetros es

$$E[\xi] = \int_0^\infty 5x^2 e^{-5x}dx = 1/5.$$

$(\alpha_2 = \frac{2}{25}$ y $\sigma^2 = \frac{2}{25} - \frac{1}{25} = \frac{1}{25})$.

(c) La probabilidad de que un filamento supere el control ha sidoe calculado en el primer apartado. Lo que hacemos ahora es inspeccionar 100 filamentos, de modo que si ψ es la v.a. que da el número de filamentos que superan el control, entonces lo que se pide es

$$\begin{aligned}
P(\psi \geq 2) &= 1 - P(\psi < 1) \\
&= 1 - P(\psi = 0) + P(\psi = 1) \\
&= 1 - (0.074)^0 (1 - 0.074)^{100} - (100)(0.074)^1 (1 - 0.074)^{99} \\
&= 0.99
\end{aligned}$$