Crux Mathematicorum

Published by the Canadian Mathematical Society.

http://crux.math.ca/

The Back Files

The CMS is pleased to offer free access to its back file of all issues of Crux as a service for the greater mathematical community in Canada and beyond.

Journal title history:

- The first 32 issues, from Vol. 1, No. 1 (March 1975) to Vol. 4, No.2 (February 1978) were published under the name *EUREKA*.
- Issues from Vol. 4, No. 3 (March 1978) to Vol. 22, No. 8 (December 1996) were published under the name *Crux Mathematicorum*.
- Issues from Vol 23., No. 1 (February 1997) to Vol. 37, No. 8 (December 2011) were published under the name *Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem*.
- Issues since Vol. 38, No. 1 (January 2012) are published under the name *Crux Mathematicorum*.

ISSN 0705 - 0348

CRUX MATHEMATICORUM

Vol. 5, No. 4

April 1979

Sponsored by
Carleton-Ottawa Mathematics Association Mathématique d'Ottawa-Carleton
Publié par le Collège Algonquin

The assistance of the publisher and the support of the Samuel Beatty Fund, the Canadian Mathematical Olympiad Committee, the Carleton University Mathematics Department, and the Ottawa Valley Education Liaison Council are gratefully acknowledged.

CRUX MATHEMATICORUM is published monthly (except July and August). The yearly subscription rate for ten issues is $10.00. Back issues: $1.00 each. Bound volumes with index: Vol. 1-2 (combined), $10.00; Vol. 3-4, $10.00 each. Cheques or money orders, payable in Canadian or U.S. funds to CRUX MATHEMATICORUM, should be sent to the managing editor.

All communications about the content of the magazine (articles, problems, solutions, etc.) should be sent to the editor. All changes of address and inquires about subscriptions and back issues should be sent to the managing editor.

Editor: Léo Sauvé, Architecture Department, Algonquin College, 281 Echo Drive, Ottawa, Ontario, K1S 1N3.

Managing Editor: F.G.B. Maskell, Mathematics Department, Algonquin College, 200 Lees Ave., Ottawa, Ontario, K1S 0C5.

Typist-compositor: Nancy Makila.

*   *   *

CONTENTS

LAPLACE

Mathématicien, Astronome, Physicien,... et Ministre français

(suite et fin)

NICOLE et JEAN DHOMBRES

3. *L'attitude générale: Laplace à l'abri du pouvoir*

Les honneurs lui écherront avec une grande régularité après les événements du 9 Thermidor: Laplace fait sonner ses titres avec orgueil au frontispice de ses ouvrages à la fin de sa vie[20]:

"Pair de France, Grand Officier de la Légion d'Honneur, l'un des quarante de l'Académie française, de l'Académie des Sciences, membre du Bureau des Longitudes de France, des Sociétés royales de Londres et de Göttingen, des Académies des Sciences de Russie, de Danemark, de Suède, de Prusse, des Pays-Bas, d'Italie, etc...".

Nous avons dit déjà les accusations de favoritisme s'appliquant à son clan.

En un mot, Laplace sut se placer pratiquement toujours à l'abri du pouvoir politique et ce dernier, quel qu'il fut, sut toujours considérer que Laplace était un maître à penser qu'on avait intérêt à se concilier.

A l'abri du pouvoir, mais non éminence grise. Laplace n'a pas d'ambition politique et les faveurs officielles qu'il reçoit sont des postes honorifiques ou de complaisance. Chancelier ou Président du Sénat de Napoléon, Ministre ou Pair de France, on ne lui attribue aucune décision de quelque importance en dehors de son aire scientifique, et encore moins de décision personnelle.

Mais à l'abri du pouvoir, Laplace utilise tous les moyens dont il dispose pour faire avancer ses projets, ceux de ses collaborateurs ou des hommes de science dont il décèle ou pressent les qualités. Y-a-t-il quelque place vacante à l'Académie, à l'Institut (quel que soit d'ailleurs le nom de l'institution), un poste libre de professeur ici ou là, un prix, une subvention? Laplace pose son candidat et avec l'autorité qui l'auréole impose le "bon choix", lui donnant même l'extérieur du seul choix possible, quand bien même il s'agirait d'un très jeune homme, hier inconnu. Il a agi ainsi sous Louis XVI, du moins dès qu'il fut installé à l'Académie, sous le Directoire, sous le Consulat, mais tout aussi bien sous l'Empire et enfin sous la Restauration.

Pour Laplace, semble-t-il, les institutions savantes ou politiques, leurs règles d'élection, leurs traditions, sont comme les figures du discours dont il abuse dans la louange, des ornements conventionnels que l'on peut modifier, aménager, supprimer ou distordre tout à loisir. Ces fioritures, insignifiantes au sens propre pour Laplace, sont pourtant nécessaires et l'astronome indique par son action qu'elles constituent le lien obligé entre le discours du scientifique et le discours du politique. Se rend-il compte chemin faisant que tout discours ne peut être innocent et qu'il porte en lui-même des conséquences qui tiennent à sa forme propre?

Un exemple est constitué par les variations successives, selon les éditeurs et les régimes, d'une conclusion à l'*Exposition du Système du Monde*. On lit cette belle envolée:

"Conservons avec soin, augmentons le dépôt de ces hautes connaissances, les délices des êtres pensants. Elles ont rendu d'importants services, à l'agriculture, à la navigation et à la géographie; mais leur plus grand bienfait est d'avoir dissipé les craintes occasionnées par les phénomènes célestes, et détruit les erreurs nées de l'ignorance de nos vrais rapports avec la nature...".

A partir de ce mot, commencent les variations.

En 1796 comme en 1799 (2ème édition), on lit ce qui fleure tant l'esprit de l'Encyclopédie... que l'esprit de la réaction thermidorienne:

..."erreurs d'autant plus funestes que l'ordre social doit reposer uniquement sur ces rapports. VERITE, JUSTICE: voilà ses lois immuables. Loin de nous, la dangereuse maxime, qu'il est quelquefois utile de s'en écarter, et de tromper ou d'asservir les hommes pour assurer leur bonheur: de fatales expériences ont prouvé dans tous les temps, que ces lois sacrées ne sont jamais impunément enfreintes".

En 1811, le passage est inséré dans l'*Annuaire* pour une diffusion populaire, sous une forme croupion, mais avec un codicille de taille: rien moins que Dieu.

..."et son Auteur; erreurs et craintes qui renaîtraient promptement si le flambeau des sciences venait à s'éteindre".

Comme commente avec alacrité J.S. Lacroix, les mots "et son Auteur" ne sont mis dans la version populaire que pour le peuple auquel *il faut* une religion car dans la cinquième édition, celle de janvier 1824, on lit seulement:

..."erreurs et craintes qui renaîtraient promptement si le flambeau des sciences venait à s'éteindre".

Plus typique, beaucoup plus important aussi, est le discours du 1er Jour complémentaire An IV, prononcé par "le citoyen Laplace au Conseil des Anciens au nom de l'Institut National des Sciences et des Arts" et "contenant l'apperçu (*sic*) du progrès des sciences et de l'analyse des travaux des diverses classes de l'Institut pendant la première année de son établissement".

Certes, dans ce discours, il s'agit d'un bilan, et d'un bilan justificatif après la réouverture, le 20 novembre 1795, et sous forme de l'Institut National des Sciences, de l'Académie des Sciences, dissoute le 8 août 1793. Certes, Laplace n'agit pas en son nom personnel—il ne fut jamais l'homme de telles initiatives—mais en tant que président de la 1ère classe et pour satisfaire à la loi votée d'un rapport annuel. Certes la logomachie du jour le conduit sans trop de peine à jurer solennellement sa haine des tyrans.

Mais le rapport est là et constitue le premier bilan d'une politique scientifique nationale. Qui dit bilan, dit aussitôt dépendance et action. Le discours n'est pas neutre. Cela est d'autant plus notable que les scientifiques de grand renom sont désormais des fonctionnaires stipendiés par le gouvernement auxquels ils servent de consultants techniques. Avec l'Institut, du moins dans sa classe scientifique, la 1ère classe faut-il le rappeler, on a le prototype *ab ovo* de tous les futurs mais lointains ministères de la recherche(33), c'est-à-dire le triple rôle de compétence experte, d'incitation à certaines recherches "utiles à la nation" et de porte-parole sur la scène mondiale. Ce nouveau rôle étouffe très vite toute possibilité de recherche scientifique active au sein même de l'Institut, mais la Révolution a su créer les relais nécessaires où va se faire la recherche du XIXème siècle en France: les Grandes Ecoles, le Muséum, le Bureau des Longitudes, des sociétés comme la Société Philomatique. Elle a su utiliser les institutions vénérables comme L'Observatoire, le Collège de France(34).

Laplace illustre bien les trois rôles mentionnés:

—Comme expert, on s'en doute et il me paraît inutile d'insister ici(35).

—Comme membre de multiples commissions destinées à favoriser des recherches appliquées puisque, par exemple, Laplace s'occupera de la Société d'Encouragement pour l'Industrie Nationale créée par Bonaparte en 1801, sera membre des multiples jurys destinés à récompenser le meilleur travail sur les piles électriques et les effets voltaïques, etc... . Il est de tous les comités et ne craint pas de faire un exposé pompeux sur la nécessité d'applications immédiates, lui qui dans ses recherches est passionné d'explications de fond. Qu'importe puisqu'il s'agit d'une clause de style et qu'il est convaincu que les explications de fond sont celles qui à la longue apportent pratiquement le plus. Sa carrière scientifique le prouve et cela lui suffit. Ce type de discours, quelquefois, sera entendu—que dis-je est entendu—*stricto sensu*!

—Comme promoteur international, Laplace n'hésite guère. On le sait en correspondance avec des astronomes anglais, nonobstant les longues périodes de guerre entre la France et l'Angleterre. Un exemple éclatant le décrit bien. Il s'agit de l'adoption, si possible internationale, du système métrique décimal et nous allons user des termes mêmes de Laplace, présentant les étalons du mètre et du kilogramme au Conseil des Anciens et au Conseil des Cinq-Cents le 22 juin 1799.

"On a senti de tous les temps, une partie des avantages qu'aurait l'uniformité des poids et mesures. Mais, d'un pays à l'autre, et dans l'intérieur de chaque pays, l'habitude, les préjugés s'opposaient sur ce point à tout accord, à toute réforme...".

(De fait en France, innombrables sont les tentatives pour fixer des mesures uniformes: de Dagobert en 650 à Colbert en 1671 en passant par Louis le Débonnaire (819), Philippe le Bel (1312) ou les Etats Généraux de 1560. A l'aube de 1789, il y a une myriade de mesures en France variant selon les provinces: dix-huit sortes d'aunes dans le Nord, douze unités de poids différentes en Ardèche, etc...) Poursuivons notre lecture:

"L'Assemblée Constituante, qui n'a pas toujours pu faire tout ce qu'elle aurait voulu, mais à laquelle aucune grande vue d'utilité publique n'a échappé, a d'après une motion remarquable du citoyen Talleyrand(27), invité l'Académie des Sciences à fonder le système métrique sur une base naturelle".

Vient la raison diplomatique évidente:

"En effet, aucune nation, employant pour les mesures des éléments arbitraires, ne pouvait réclamer le droit, ni concevoir l'espérance de faire adopter aux autres ceux qu'elle aurait préférés.

Il fallait donc en trouver le principe dans la Nature, que tous les peuples ont un intérêt égal à observer, et le choisir tel que sa convenance pût déterminer tous les esprits"(28).

Cette mesure naturelle fit l'objet de longues discussions où l'aspect diplomatique ne joue pas un rôle négligeable. Laplace ne s'étend pas:

"L'Académie des Sciences jugea que l'unité de cette mesure devait être une partie connue et aliquote de la circonférence du globe terrestre. Elle la fixa au dix-millionnième du quart du méridien compris entre l'équateur et le pôle boréal...".

Entre 1790 et 1799, Delambre et Méchain, avec d'ailleurs l'occasionnelle collaboration géodésique de Laplace, malgré les troubles des temps, avaient mesuré par triangulation l'arc de méridien compris entre Dunkerque et Barcelone.

Le principe de la division décimale avait quant à lui été adopté dès le 27 octobre 1790 et on ne peut manquer de relever que lors de ses travaux de 1780 avec Lavoisier sur la calorimétrie, Laplace employait déjà le système décimal.

Reste le problème de l'adoption, par l'usage national et surtout international.

En janvier 1798, Laplace écrivait une lettre à Delambre au sujet de la venue de représentants experts d'autres pays à propos du système métrique.

"Vous sentez que cela n'est qu'une formalité pour qu'ils puissent regarder cette mesure comme leur étant propre, et pour faire ainsi disparaître toute jalousie nationale et les déterminer à adopter ces mesures".

Avec le mot "formalité" c'est tout le ton des discours de Laplace, c'est toute une attitude qui est décrite.

Dans cette même lettre, Laplace ne peut s'empêcher de juger par le mépris les congrès politiques, en l'occurrence celui de Rastadt de sinistre mémoire:

"Il sera curieux de former un congrès scientifique à côté de ceux de Rastadt et il y a grande apparence que ce qui sera arrêté dans le premier sera plus durable et aura plus d'influence sur le bien être de l'espèce humaine".

De fait, des savants vinrent à Paris de la République Batave, du Piémont, du Danemark, de l'Espagne, de la Toscane, des Républiques Romaine, Cisalpine, Ligurienne et Helvétique. Mais les Iles Britanniques se firent attendre...jusqu'à ces dernières années pour ratifier le choix dans leur pratique courante. Il eût mieux valu dès 1799 que ce ne fut pas une simple formalité. Mais au fait, qu'y pouvait Laplace?

Sorte de courtisan en marge(29), Laplace a donc nécessairement vécu des périodes de retrait et habilement su laisser passer les orages les plus forts.

Ainsi, au printemps 1793, il se retire à Melun. L'Académie est dissoute le 8 août et le voilà en décembre 1793 limogé de la Commission Temporaire des Poids et Mesures, constituée le 11 septembre, faute d'un brevet de républicanisme et de haine de la royauté.

La ville de Melun est calme et Madame Laplace invite le malheureux Bailly et son épouse, en fuite et hors la loi, à venir occuper leur maison. Les Laplace se retirant encore plus à la campagne. Or, voici qu'on annonce l'installation d'une division de l'armée révolutionnaire à Melun. Contre-ordre affolé de Madame Laplace aux Bailly, réduits à la cachette du côté de Nantes. Peine perdue, car, fin juillet 1793, Bailly et sa femme traversent le parc de la demeure des Laplace à Melun. On les héberge. Le surlendemain, Bailly est reconnu par un soldat, arrêté. Madame Laplace lui propose une évasion qu'il élude. Bailly sera guillotiné(30).

A partir de 1813, nouvelle retraite. Laplace ne paraît plus guère au Sénat dont il est pourtant chancelier. On le dit sérieusement malade. Sa fille meurt en couches. Est-il las de faire partie de ces commissions préparatoires à des senatus-consultes fantoches pour enrôler des classes toujours plus nombreuses et plus jeunes de soldats en vue de la dévorante guerre(31)? Il doit signer au Sénat en 1814 la déchéance de Napoléon, et, en juin 1814, Louis XVIII "ramené dans les fourgons" de l'étranger, l'établit pair, puis le fera élire à l'Académie Française en 1816. On ne le mentionne pas pendant les Cent-Jours. Le Pouvoir est silencieux, ne joue pas son rôle de pouvoir. Il faut donc rentrer les discours. Laplace se tait. Il reprendra la parole une fois le Pouvoir ressaisi(32).

Bien sûr, Laplace est un "élitiste". C'est l'archétype du scientifique qui mêle étroitement dans ses discours raison d'état et raison scientifique, flagornerie et ornement de style. Lorsque le vent est sûr, il est le premier à refuser la perche à la minorité dans une assemblée scientifique au nom précisément de la laïcité, de la neutralité scientifique(36).

Mais ce n'est pas du tout un Lyssenko, c'est-à-dire celui qui impose un a priori scientique à la logomachie de l'Etat. Tout simplement, Laplace sépare Discours et Pratique scientifiques(37). En cela, il se place dans le cadre d'une vieille tradition libertine et européenne, qui porta ses fruits. Elle ne put être supportée plus longtemps lorsque l'on perçut que le discours pouvait de par lui-même devenir réalité tragique: il y faudra les "maîtres penseurs" et les divers fascismes pour en prendre conscience.

Au Dictionnaire des Girouettes(38), Laplace occupe donc une rubrique de choix. En un sens pourtant, et que nous souhaitons avoir pu souligner, Laplace, le roturier, rejoint au plan scientifique certaines fidélités profondes, celles d'un Talleyrand-Périgord pour la nation française, duc quant à lui de la plus ancienne noblesse de France...et prince d'Empire.

NOTES

(30) Ces détails sont fournis par F. Arago dans ses *Notices Biographiques* publiées en 1854 par Barral (tome II, au chapitre Bailly, pages 389-390). On comprend mal les allégations soupçonneuses—sans preuves écrites—de F.N. David (Some notes on Laplace, in Bernoulli-Bayes-Laplace—Ed. par Neyman et Le Cam, chez Springer en 1965) sur une trahison par délation de Laplace vis-à-vis de son ami Bailly. Si plus tard, Laplace, Ministre de l'Intérieur, fera accorder une pension à Mme Bailly, n'est-ce pas tout simplement parce que Mme Laplace garda le fils de Bailly quelque temps?

(31) La correspondance de Cambacérès à Napoléon martèle l'esprit de ces demandes continuelles de soldats, de ces commissions dont Laplace fait toujours partie. Cependant Cambacérès, à trois reprises en 1813, parle de la mort très prochaine du savant. On ne le voit plus dans les milieux du pouvoir.

(32) Au soir du 18 Brumaire, le Général Bonaparte le nomme Ministre de l'Intérieur. Ce pouvait être un poste crucial en cas de réactions populaires. Mais les boulevards et les faubourgs parisiens restent calmes et Laplace règle des affaires absolument mineures. La seule mesure qu'on puisse mentionner est un décret

du 25 Frimaire An VIII portant réorganisation habile de l'Ecole Polytechnique, réorganisation qui trainassait dans les tiroirs ministériels. Il tient six semaines seulement le portefeuille.

Napoléon à Sainte-Hélène ajoutera méchamment que le savant fut vite évincé car "Laplace portait dans l'administration l'esprit des infiniment petits". Le mot s'il fait florès a un passé et déjà, lors de l'élection de Laplace à l'Académie française en 1816, il était appliqué sans vergogne à ses collègues immortels:

"Goûte la béatitude
Au sein des quarante élus,
Tu dois avoir l'habitude
D'être avec des inconnus... .
Avec eux, tu peux sans peine,
Connaître à fond le domaine
Des infiniment petits".

(33) A cela près qu'on n'y trouve que des scientifiques, et non des administrateurs. Leur règne viendra au XXème siècle et on créera en France une nouvelle Grande Ecole pour ce faire: L'Ecole Nationale d'Administration.

(34) L'Observatoire date de Louis XIV et le Collège de France est plus ancien encore puisqu'il remonte à François 1er.

(35) Toutefois, il ne serait pas inutile de dresser une liste systématique des interventions de Laplace comme expert en mécanique céleste, au Bureau des Longitudes, pour les marées, les prévisions démographiques, etc.

(36) Un exemple entre autres est fourni par une séance à l'Institut du 7 Prairial An VIII (25 mai 1800). Réaction de droite. Plusieurs victimes de Fructidor sont exclues de l'Institut National. La discussion fait rage. Ce n'est évidemment pas l'ordre du jour. "Enfin, après deux heures d'agitation, le citoyen Laplace a de nouveau proposé l'ordre du jour, pour conserver, a-t-il dit, les libertés et les règlements de l'Institut" selon un compte-rendu de *l'Ami des Lois*, journal qui sera supprimé deux jours plus tard par Lucien Bonaparte.

(37) Tout comme dans le discours scientifique, il élimine l'ontologique, le métaphysique.

(38) Ouvrage paru sous la Restauration.

Année	Vie de Laplace	Les événements contemporains
1749	Naissance de Pierre Simon Laplace le 23 mars 1749 à Beaumont-en-Auge.	En Chine paraît "La Forêt des Lettres", roman de critique sociale.
1755	Envoyé chez les Bénédictins à Caen.	Fondation de l'Université de Moscou.
1760	Brillantes études.	Parution du tome V de l'Encyclopédie. Capitulation de Montréal.
1765	Envoyé au Collège des Jésuites de Caen.	L'Encyclopédie est achevée.

1768	Arrivée de Laplace à Paris. Introduction chez d'Alembert. Premiers mémoires à l'Académie des sciences.	Euler commence à publier à Saint-Pétersbourg son "Institutiones Calculi Integralis". Premier voyage de Cook.
1769	Professeur à l'Ecole Militaire de Paris.	Naissance de Napoléon Bonaparte.
1772	Publie des mémoires sur le calcul intégral et le système du monde à l'Académie des Sciences.	Premier partage de la Pologne. Lagrange: addition à l'algèbre d'Euler.
1773	Membre-adjoint de l'Académie Royale des Sciences (Section Mécanique) (4 avril).	Fondation du Grand Orient de France. Dissolution des Jésuites par Clément XIV. Echauffourée de Boston (Boston Tea Party).
1774	Publie un "mémoire sur la probabilité des causes par les événements" et une application de l'analyse aux probabilités.	Goethe publie Werther. Scheele découvre le chlore. Mort de Louis XV.
1775	Mémoire sur "plusieurs points du Système du Monde".	Washington commandant en chef. Beaumarchais publie "Le Barbier de Séville".
1776	Mémoire sur "l'inclinaison moyenne des orbites des comètes, etc."	Déclaration de l'indépendance américaine. A. Smith publie "La richesse des Nations".
1777	Mémoire sur la précession des équinoxes.	Mort de Voltaire.
1778	Mémoire sur les probabilités.	Rousseau termine "les Rêveries d'un promeneur solitaire".
1779	Mémoire sur les suites.	Gluck compose Iphigénie.
1780	Collabore avec Lavoisier à des mesures calorimétriques. (Mémoire sur la chaleur.)	Joseph II règne avec Marie-Thérèse en Autriche.
1781	Mémoire sur la détermination des orbites des comètes.	Edit réservant les grades militaires à la noblesse en France. Herschel découvre Uranus. Kant publie "la Critique de la Raison Pure".
1782	Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes.	Laclos publie "Les Liaisons Dangereuses".

1783	Mémoire sur la figure de la terre.	Ascension de Montgolfier en ballon. Traité de Versailles sur l'indépendance américaine.
1784	Attaque virulente de Brissot contre Laplace.	Haüy publie la "Structure des cristaux".
1785	Application des probabilités à la démographie à Paris. Membre pensionnaire de l'Académie des Sciences. Il fait passer un examen à Bonaparte.	Berthollet analyse l'ammoniaque. Mozart écrit Les Noces de Figaro. Invention du métier mécanique de Cartwright.
1786	Equation séculaire de la lune.	Mort de Frédéric II.
1787	Théorie de l'anneau de Saturne.	Lagrange publie sa "Mécanique Analytique".
1788	Epouse Marie Charlotte de Courty de Romanges.	Talleyrand, évêque d'Autun.
1789	Théorie des satellites de Jupiter. Naissance du fils aîné Charles.	Etats-Généraux. Prise de la Bastille. Déclaration des droits de l'homme.
1790	Mémoire sur le flux et le reflux de la mer.	Création de la commission des poids et mesures. Fête de la Fédération.
1791	Pamphlet de Marat contre les Académiciens.	Mort de Mozart. Fuite du roi et arrestation à Varennes.
1792	Vice-Président de l'Académie des Sciences.	Création de la République Française. La Patrie en danger.
1793	Laplace se retire à Melun. (Dissolution de l'Académie des Sciences.)	Exécution de Louis XVI. Adoption du système métrique décimal. Instruction primaire gratuite et obligatoire.
1794	Laplace exclu de la Commission des Poids et Mesures pour manque de "haine pour les rois".	Création de l'Ecole Polytechnique. Chute de Robespierre.
1795	Professeur à l'Ecole Normale. Membre de l'Institut de France.	Séances de l'Ecole Normale de l'an III.
1796	Exposition du système du monde. Présente au Conseil des Anciens le rapport sur le progrès des sciences. Examinateur à l'Ecole Polytechnique.	Bonaparte commande l'Armée d'Italie. Mort de Catherine II. L'Etat du Tennessee admis parmi les Etats-Unis.

1797	Rencontres avec Bonaparte.	Naissance de Schubert.
1798	Mémoire sur la mécanique.	Haydn écrit la Création.
1799	Laplace présente les nouveaux étalons. (Mètre, kilogramme.) Ministre de l'Intérieur de Bonaparte. Fait paraître les deux premiers tomes de la Mécanique Céleste.	Coup d'Etat de Bonaparte. Nouveaux statuts de l'Ecole Polytechnique.
1800	Nommé au Sénat.	Volta invente la pile électrique.
1801	Théorie de la lune. Membre des Académies de Göttingen, Turin et Copenhague.	Gauss publie "Disquisitiones Arithmeticae". Chateaubriand publie "Atala".
1802	Membre de l'Académie de Milan.	Lois de Gay-Lussac sur les gaz.
1803	3ème tome de la Mécanique Céleste.	Vente de la Louisiane.
1804	Chancelier du Sénat.	Napoléon 1er Empereur.
1805	4ème tome de la Mécanique Céleste. Grand Cordon de la Légion d'Honneur.	Argand fait la théorie des nombres complexes. Beethoven compose l'Héroïque.
1806	Création de la Société d'Arcueil. Comte d'Empire.	Iéna. Prises de Berlin et Varsovie.
1809	Mémoire sur l'analyse mathématique.	Enlèvement du pape sur ordre de Napoléon.
1812	Théorie analytique des probabilités.	Retraite de Russie.
1813	Multiples honneurs officiels mais maladie qui le retire de la scène. Mort de sa fille.	Bataille de Leipzig. Mort de Lagrange.
1814	Essai philosophique sur les probabilités. Fait pair de France par Louis XVIII.	Déchéance de Napoléon. Naissance de Bakounine. Retour des Bourbons.
1816	Elu à l'Académie Française.	Hegel publie la "Science de la Logique".
1817	Fait marquis en échange de son titre de Comte d'Empire.	Monroe président des Etats-Unis.
1818	Mémoire sur le flux et le reflux de la mer.	Naissance de Marx.
1821	Précis de l'histoire de l'astronomie.	Mort de Napoléon. Théorie de Fresnel sur la lumière.

1823	Mémoire de mécanique céleste.	Beethoven écrit la 9ème Symphonie.
1825	5ème tome de la Mécanique Céleste.	Loi du milliard des émigrés.
1827	Mort le 5 mars 1827.	Loi d'Ohm. Mémoire de Lobatchevski sur la géométrie non euclidienne.

Université de Nantes et Université d'Ottawa,
Conseiller scientifique, Ambassade de France au Canada, 42 Sussex, Ottawa, Ont. K1M 2C9.

* * *

THE OLYMPIAD CORNER: 4

MURRAY S. KLAMKIN

There are quite a number of publications which contain problem sections, here and abroad. For those readers who do not get enough Problem Solving from this journal, we give the following list:

1. *The Mathematics Student.*

This slim newsletter is published 8 times a year by the National Council of Teachers of Mathematics and contains a Competition Corner edited by George Berzsenyi. The individual subscription rate is $2 a year for N.C.T.M. members. There are also group subscriptions: MS 5-Packs (5 copies of each issue) at $5 a pack and MS Class Sets (35 copies of each issue) at $30 a set.

Sample problem (1978): *Prove that any subset of* 55 *numbers chosen from the set* $\{1,2,3,\ldots,100\}$ *must contain numbers differing by* 9, 10, 12, *and* 13, *but need not contain a pair differing by* 11.

Write to James R. Tewell,
Circulation Manager,
1906 Association Drive,
Reston, Virginia 22091.

2. *Ontario Secondary School Mathematics Bulletin.*

The *Bulletin* is published 3 times a year at the University of Waterloo. The subscription rate is $2.50 a year, with a reduction for multiple subscriptions. It has a Problem Section edited by E.M. Moskal.

Sample problem (1978): *A sequence* $\{b_n\}$ *is defined by requiring that* b_n *is the number of subsets of* $\{1,2,\ldots,n\}$ *having the property that any two different elements of the subset differ by more than* 1. *Show that for all* n, $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$, *and then determine* b_{10}.

Write to Mr. E. Anderson,
Faculty of Mathematics,
University of Waterloo,
Waterloo, Ontario N2L 3G1.

3. *Pi Mu Epsilon Journal.*

This journal is published twice a year at the South Dakota School of Mines and Technology. It is the official journal of the Pi Mu Epsilon honorary mathematical fraternity. The subscription rate for two years is $4 for members, $6 for nonmembers. There is an extensive problem section edited by Leon Bankoff.

Sample problem (1978): *Are there examples of angles which are trisectible but not constructible? That is, can you find an angle* α *which is not constructible with straight edge and compass, but such that when* α *is given,* $\alpha/3$ *can be constructed from it with straight edge and compass?*

Write to Pi Mu Epsilon Journal,
South Dakota School of Mines and Technology,
Rapid City, South Dakota 57701.

4. *The Pentagon.*

This is the official journal of the Kappa Mu Epsilon College Honor Society. It is published twice a year and the subscription price is $5 for two years. There is a Problem Corner edited by Kenneth M. Wilke.

Sample problem (1976): *Each of the three consecutive integers* 4, 5, *and* 6 *terminates its own cube. That is,* $4^3 = 64$, $5^3 = 125$, *and* $6^3 = 216$. *Find four pairs of larger consecutive integers in which each integer terminates its own cube.*

Write to Douglas W. Nance,
Business Manager, The Pentagon,
Central Michigan University,
Mount Pleasant, Michigan 48859.

5. *School Science and Mathematics.*

This is the official journal of the School Science and Mathematics Association, Inc. It is published 8 times a year and the subscription price is $9 a year in the U.S.A. ($11 elsewhere). The Problem Department is edited by N.J. Kuenzi and Bob Prielipp.

Sample problem (1979): *The triple* (5,12,13) *is a primitive Pythagorean triple. So is the triple* (15,112,113) *formed by affixing the same digit (in this case a* 1*) to each member of the first triple. Prove or disprove that there are no other pairs of primitive Pythagorean triples that are related in this way.*

Write to Dale M. Shafer, Executive Secretary,
Stright Hall, P.O. Box 1614,
Indiana University of Pennsylvania,
Indiana, Pennsylvania 15705.

6. *Journal of Recreational Mathematics.*

This journal is published twice a year by the Baywood Publishing Company, Inc. The individual subscription price is $10 per two-year volume (4 issues). It has a Problems and Conjectures Section edited by Friend H. Kierstead, Jr.

Sample problem (1978): *The lengths and widths of two rectangles are chosen randomly in the interval* (0,1).

(a) *What is the probability that one will fit completely within the other?*

(b) *What is the probability that the one with the smaller area has the larger perimeter?*

Write to Baywood Publishing Company, Inc.,
120 Marine Street,
Farmingdale, N.Y. 11735.

7. *The Two-Year College Mathematics Journal.*

This is one of three journals published by the Mathematical Association of America (see below for the other two). It is published 5 times a year. Annual dues for members of the M.A.A. (including a subscription to the *TYCMJ*) are $16 for each of the first two years of membership and $20 thereafter. Student membership is available with annual dues of $10. For nonmembers the subscription price is $12. The *Journal* has a Problem Section edited by Erwin Just (see Crux 431 in this issue).

Sample problem (1977): *A* 3-*brick is a* $3 \times 1 \times 1$ *rectangular parallelepiped. Assume that a* $7 \times 7 \times 7$ *cube has been packed with* 3-*bricks and a single unit cube which is not located on the periphery. Prove that the unit cube must be located at the center.*

Write to TYCMJ Subscriptions Department,
The Mathematical Association of America,
1529 Eighteenth St., N.W.,
Washington, D.C. 20036.

8. *Mathematics Magazine.*

Another journal published by the M.A.A. There are 5 issues a year for $12. Members of the M.A.A. or of Mu Alpha Theta may subscribe at reduced rates. The Problem Section is edited by Dan Eustice and Leroy F. Meyers.

Sample problem (1977): *A river flows with a constant speed* w. *A motorboat cruises with a constant speed* v *with respect to the river, where* $v > w$. *If the path travelled by the boat is a square of side* L *with respect to the ground, the time of traverse will vary with the orientation of the square. Determine the maximum and minimum times for the traverse.*

Write to A.B. Willcox, Executive Director of the M.A.A., at the address given above in 7.

9. *The American Mathematical Monthly.*

The *Monthly* is published 10 times a year by the M.A.A. Annual dues for members of the M.A.A. (including a subscription to the *Monthly*) are $21 for each of the first two years of membership and $25 thereafter. Student membership is available with annual dues of $15. For nonmembers the subscription price is $28. The Problem Section is edited by A.P. Hillman.

Sample problem (1978): *Let* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *be distinct non-collinear points in the plane. A circle with center* P *and radius* r *is called minimal if* $A_kP \le r$ *for all* k *and equality holds for at least three values of* k.

If $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *vary (n being fixed) what is the maximum number of minimal circles?*

Write to A.B. Willcox as in 8.

If the above Problem Sections are not enough, here are a few more for which I'll be glad to supply additional information on request:

10. *Canadian Mathematical Bulletin.*
11. *Delta.*
12. *Elemente der Mathematik.*
13. *The Fibonacci Quarterly.*
14. *Mathematics Association of Two-Year Colleges Journal.*
15. *Mathematical Spectrum.*
16. *Nabla.*
17. *Nieuw Archief Voor Wiskunde.*
18. *Scientific American.*

It would appear from the above list that of the making of problems there is no end. As a further proof of this fact, here are more problems:

PRACTICE SET 6 (3 hours)

6-1. Determine all triplets of integers (x,y,z) satisfying the equation

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)^3.$$

6-2. Given are two points, one on each of two given skew lines (lines not lying in a common plane). Prove that there exists a unique sphere tangent to each of the given lines at each of the two given points.

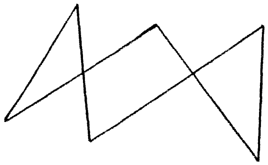
6-3. If $x,y,z \ge 0$, prove that

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq y^2 z + z^2 x + x^2 y$$

and determine when there is equality.

SOLUTIONS TO PRACTICE SET 3

3-1. Does there exist a polygon of 17 sides such that some straight line intersects each of its sides in some point other than a vertex of the polygon? Note that the polygon need not be convex nor simple, e.g.,



Solution.

A polygon with the stated property would have to have an even number of vertices, since exactly half of the vertices must be on each side of the line. Hence there is no such polygon of 17 sides.

3-2. Prove that from any row of n integers one may always select a block of adjacent integers whose sum is divisible by n.

Solution.

Let the row of integers be $a_1, a_2, \ldots, a_n$ and consider the n sums

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2, \ldots,\ s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

If some $s_i \equiv 0 \pmod{n}$, we are through. Otherwise we have n sums with at most $n-1$ possible residues modulo n; hence, by the pigeonhole principle, there must be two sums s_j and s_k, with $j > k$, such that $s_j \equiv s_k \pmod{n}$, and then

$$s_j - s_k = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_j \equiv 0 \pmod{n}.$$

3-3. If

$$\frac{a}{bc - a^2} + \frac{b}{ca - b^2} + \frac{c}{ab - c^2} = 0,$$

prove that also

$$\frac{a}{(bc - a^2)^2} + \frac{b}{(ca - b^2)^2} + \frac{c}{(ab - c^2)^2} = 0.$$

Solution.

We have to show that

$$P_1 = 0 \implies P_2 = 0 \qquad (1)$$

where

$$P_n \equiv \frac{a}{(bc-a^2)^n} + \frac{b}{(ca-b^2)^n} + \frac{c}{(ab-c^2)^n}, \quad n = 1,2.$$

If we set

$$P_0 \equiv \frac{1}{bc-a^2} + \frac{1}{ca-b^2} + \frac{1}{ab-c^2},$$

then straightforward multiplication (and subsequent simplification) shows that $P_0 \cdot P_1 = P_2$, and (1) follows at once, as well as

$$P_0 = 0 \implies P_2 = 0. \qquad (2)$$

Observe now that the converse of either (1) or (2) is not true, since

$$P_2 = 0 \implies P_0 = 0 \text{ or } P_1 = 0. \qquad (3)$$

Moreover, the disjunction in (3) cannot be avoided since neither equation on the right of (3) implies the other. For example, if ω is an imaginary cube root of unity, then $(a,b,c) = (0,\omega,-1)$ is a solution of $P_0 = 0$ but not of $P_1 = 0$, while the reverse is true for $(a,b,c) = (0,1,-1)$.

Editor's note. All communications about this column should be sent to Professor M.S. Klamkin, Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada T6G 2G1.

* * *

PROBLEMS--PROBLÈMES

Problem proposals and solutions should be sent to the editor, whose address appears on the front page of this issue. Proposals should, whenever possible, be accompanied by a solution, references, and other insights which are likely to be of help to the editor. An asterisk (*) after a number indicates a problem submitted without a solution.

Original problems are particularly sought. But other interesting problems may also be acceptable provided they are not too well known and references are given as to their provenance. Ordinarily, if the originator of a problem can be located, it should not be submitted by somebody else without his permission.

To facilitate their consideration, your solutions, typewritten or neatly handwritten on signed, separate sheets, should preferably be mailed to the editor before September 1, 1979, although solutions received after that date will also be considered until the time when a solution is published.

431. *Proposed by Alan Wayne, Pasco-Hernando Community College, New Port Richey, Florida.*

The following decimal alphametic is dedicated to Erwin Just, Problem Editor of the *Two-Year College Mathematics Journal*, who modestly refused to publish it in his own journal:

$$\begin{array}{r} \text{YES} \\ \text{YES} \\ \underline{\text{JUST}} \\ \text{ERWIN} \end{array}.$$

ERWIN is, of course, unique.

432. *Proposed by Basil C. Rennie, James Cook University of North Queensland, Australia.*

Evaluate

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + x\sin x}{x^2 + \cos^2 x}\,dx.$$

433. *Proposed by Dan Sokolowsky, Antioch College, Yellow Springs, Ohio.*

An exam question asked: *How many distinct 5-letter words can be formed using the letters A, A, A, B, B, B?*

A student misread the question and determined instead the number of distinct 6-letter words using these same letters, yet obtained the correct answer. Was this accidental or is it a special case of a more general pattern? Explain.

434. *Proposed by Harold N. Shapiro, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University.*

(a) It is not hard to show by Bertrand's Postulate that all the solutions in positive integers x, y, m, n of the equation

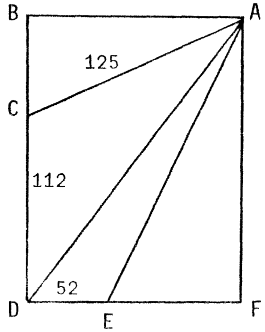
$$(m!)^x = (n!)^y$$

are given by $m = n = 1$; and $m = n$, $x = y$. Find such a proof.

(b)* Prove the same result without using Bertrand's Postulate or equivalent results from number theory.

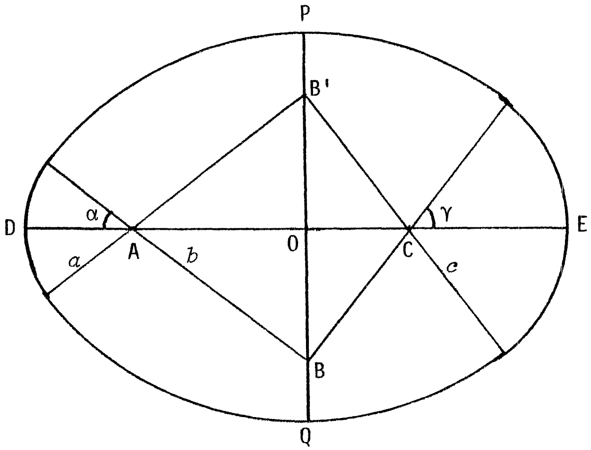
435. *Proposed by J.A.H. Hunter, Toronto, Ontario.*

This little problem was inspired by the late R. Robinson Rowe's tale of the ardent jogger (Crux 356 [1978: 160; 1979: 80]). In rectangle ABDF, we have AC = 125, CD = 112, DE = 52, as shown in the figure, and AB, AD, and AF are also integral. Evaluate EF.



436. *Proposed by the late R. Robinson Rowe, Naubinway, Michigan.*

A hen's egg is an ovoid of revolution and its oval longitudinal section can be approximated by four circular arcs as shown in the figure.



(a) Given the half-central angle α and γ at A and C, the length DE = L and the width PQ = W, find the three radii a, b, c.

(b) Calculate the three radii if

$$\alpha = \sin^{-1} 0.6, \quad \gamma = \sin^{-1} 0.8,$$

$$L = 50 \text{ mm}, \qquad W = 36 \text{ mm}.$$

437. *Proposed by Clayton W. Dodge, University of Maine at Orono.*

Since Professor E.P.B. Umbugio retired, the University of Guayazuela has been able to set aside all of his salary of 50 million Guayazbucks a year. Finally this account accumulated enough money to purchase a basic pocket electronic calculator, which the good Professor Emeritus has been working with since he is the only one at the U. of G. who understands how to use it. The Great Numerologist has been trying to find all Pythagorean triangles having the hypotenuse divisible by 7. He feels it will be good luck to construct his retirement cottage out of these triangles only. To date he has found only the two triangles 21, 28, 35 and 35, 84, 91. Help the professor by finding all such triangles, and especially all primitive ones (triangles having no common factor greater than 1 in their three sides).

438*. *Proposed by Sahib Ram Mandan, Indian Institute of Technology, Kharagpur, India.*

Eliminate x, y, z from the following three equations:

$$a_i x^2 + b_i y^2 + c_i z^2 + 2f_i yz + 2g_i zx + 2h_i xy = 0, \qquad i = 1,2,3.$$

439*. *Proposed by Ram Rekha Tiwari, The Belsund Sugar Co., P.O. Riga, Bihar, India.*

The palindromic number 252 has the property that it becomes a perfect square when multiplied (or divided) by 7. Are there other such *even* palindromic numbers?

440*. *Proposed by Kenneth S. Williams, Carleton University, Ottawa.*

My favourite proof of the well-known result

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

uses the identity

$$\sum_{k=1}^{n} \cot^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

and the inequality

$$\cot^2 x < \frac{1}{x^2} < 1 + \cot^2 x, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

to obtain

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \cdot \frac{n(2n-1)}{3} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \left\{ n + \frac{n(2n-1)}{3} \right\},$$

from which the desired result follows upon letting $n \to +\infty$.

Can any reader find a new elementary proof simpler than the above? (Many references to this problem are given by E.L. Stark in *Mathematics Magazine*, 47 (1974) 197-202.)

* * *

SOLUTIONS

No problem is ever permanently closed. The editor will always be pleased to consider for publication new solutions or new insights on past problems.

326. [1978: 66, 259; 1979: 18]

Editor's comment.

In an earlier comment [1979: 23], I had mentioned that Michael Urciuoli, a Senior at Benjamin N. Cardozo High School, Bayside, N.Y., had selected this difficult problem as his topic for a research paper he was writing for the Westinghouse National Science Talent Search. I am happy to announce that Michael was awarded a 7th prize in the competition, worth $5000. Our congratulations to the happy winner.

* * *

363. [1978: 191] *Proposed by Roland H. Eddy, Memorial University of Newfoundland.*

The following generalization of the Fermat point is known: *If similar isosceles triangles* BCA', CAB', ABC' *are constructed externally to triangle* ABC, *then* AA', BB', CC' *are concurrent.* (When BCA', CAB', ABC' are equilateral, then AA', BB', CC' are concurrent at the Fermat point.)

Determine a situation in which AA', BB', CC' are concurrent if the constructed triangles are isosceles but not similar.

Composite of the solutions submitted by Jordi Dou, Escola Tecnica Superior Arquitectura de Barcelona, Spain; and F.G.B. Maskell, Algonquin College, Ottawa.

We first consider, for a general scalene oblique triangle ABC, the generalization of the Fermat point mentioned in the proposal.

Suppose BCA', CAB', ABC' are similar and similarly situated isosceles triangles with bases on the sides of triangle ABC. The vertices A' and B' correspond under a similarity. There is a projectivity between the pencil of lines which projects A onto A' and that which projects B onto B'. Hence the locus of points $P = AA' \cap BB'$ is a point conic which goes through A (when B' is on AB), through B (when A' is on AB), through C (when A' is on AC), through the centroid G (when A' is on BC), and through the orthocentre H (when A' is at ∞): five distinct points in all. Since a point conic is uniquely determined by five distinct points on it, the same conic would be obtained by projecting B onto B' and C onto C', and we conclude that AA', BB', CC' are concurrent in a point P of this conic. The conic is, in fact, a rectangular hyperbola, since every conic on the vertices and orthocentre of an oblique triangle is a rectangular hyperbola. One branch of the hyperbola contains two vertices, the centroid, and the orthocentre of the triangle, the third vertex being on the other branch.

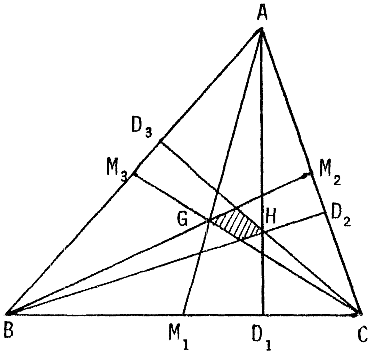


Figure 1

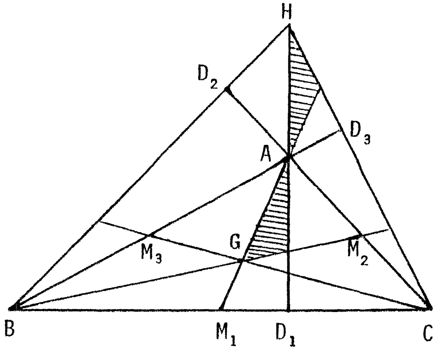


Figure 2

We are now ready to consider our problem, at first for the same general scalene oblique triangle ABC.

Draw medians AM_1, BM_2, CM_3 and altitudes AD_1, BD_2, CD_3 (see Figure 1 where the triangle is acute and Figure 2 where it is obtuse). These intersect at the centroid G and orthocentre H, respectively. An isosceles triangle BCA' can be described externally on BC as base if and only if the segment AA' lies in the (infinite) angular region M_1AD_1, and similar statements can be made about isosceles triangles CAB' and ABC'. Let R be the intersection of the three angular regions M_1AD_1, M_2BD_2, M_3CD_3. Region R (shaded in Figures 1 and 2) is a quadrilateral (not necessarily convex) with G and H as two opposite vertices. It follows from our discussion that there exist externally-described isosceles triangles BCA', CAB', ABC' such that AA', BB', CC' meet in a point P if and only if P is in R; and R contains the arc GH of the rectangular hyperbola on A, B, C, G, H. For any point P in R, the corresponding isosceles triangles BCA', CAB', ABC, are all similar if and only if P lies on the hyperbolic arc GH.

The answer to our problem is now clear: to obtain externally-described non-similar isosceles triangles BCA', CAB', ABC' such that AA', BB', CC' are concurrent, it is necessary and sufficient to select a point P in R but not on the hyperbolic arc GH, and draw AP, BP, CP to meet the perpendicular bisectors of BC, CA, AB, respectively, in A', B', C'. When triangle ABC is right-angled but not isosceles, the situation is pretty much the same, except that now region R is triangular. When triangle ABC is isosceles with apex at A, say, then region R degenerates to a segment GH on AD_1. Any point P on GH will give rise to similar isosceles triangles CAB' and ABC', but then A' can be chosen arbitrarily on the extension of AD_1. Finally, if triangle ABC is equilateral, then region R collapses to a single point G = H; and then, of course, each of A', B', C' can be chosen arbitrarily on the extension of the corresponding altitude.

Also solved by HIPPOLYTE CHARLES, Waterloo, Québec; CLAYTON W. DODGE, University of Maine at Orono; HERMAN NYON, Paramaribo, Surinam; and the proposer.

Editor's comment.

The proposer noted that the generalization of the Fermat point is stated and proved in Johnson [1]. But Johnson's proof does not identify the hyperbolic locus, although he does say: "It is instructive to sketch the figure for varying values of ϕ [the base angle of the similar isosceles triangles], and determine the locus of the point of concurrence."

REFERENCE

1. R.A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry* (*Modern Geometry*), Dover, New York, 1960, p. 223.

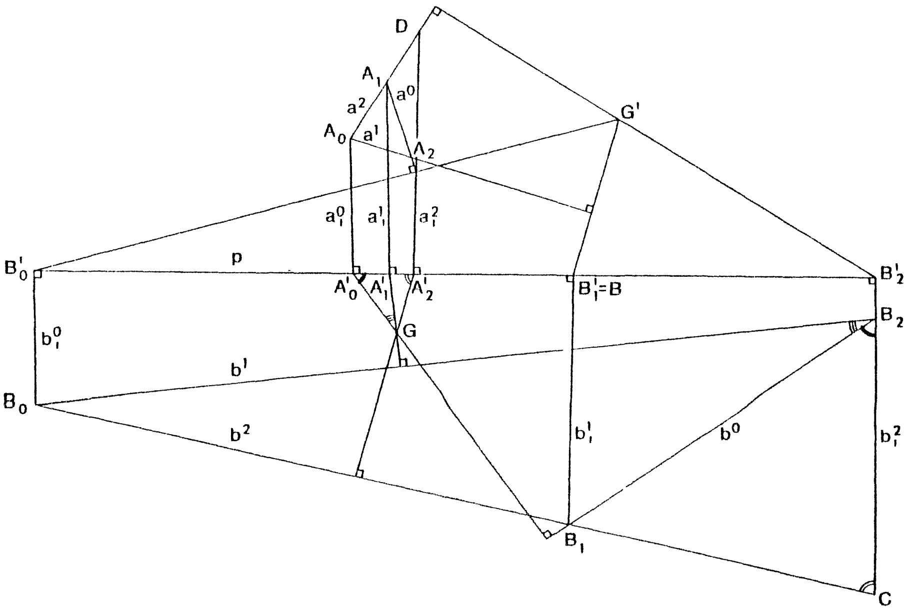
* * *

364. [1978: 192] *Proposed by Sahib Ram Mandan, Indian Institute of Technology, Kharagpur, India.*

In the Euclidean plane E_2, if x_1^i ($x = a,b$; $i = 0,1,2$) are the 2 triads of perpendiculars to a line p from 2 triads of points X_i' ($X = A,B$) on p and (X) a pair of triangles with vertices X_i on x_1^i and sides x^i opposite X_i such that the three perpendiculars to b^i from A_i' concur at a point G, then it is true for every member of the 3-parameter family f(B) of triangles like (B); and the 3 perpendiculars from B_i' to the sides a^i of any member of the 3-parameter family f(A) of triangles like A concur at a point G' if and only if

$$\frac{A_0'A_1'}{A_1'A_2'} = \frac{B_0'B_1'}{B_1'B_2'}$$

Solution by the proposer.



The figure shows that if the perpendiculars from A_i' to b^i concur at G, we have

$$\frac{A_0'A_1'}{A_1'A_2'} = \frac{\sin A_0'GA_1' \cdot \sin GA_2'A_1'}{\sin A_1'GA_2' \cdot \sin GA_0'A_1'}$$

$$= \frac{\sin B_0B_2B_1 \cdot \sin C}{\sin B_2B_0B_1 \cdot \sin B_1B_2C}$$

$$= \frac{B_0B_1}{B_1C} \qquad \text{(where } C = \text{meet of } B_0B_1 \text{ and } B_2B_2'\text{)}$$

$$= \frac{B_0'B_1'}{B_1'B_2'},$$

a result independent of (B), that is, it is true for all (B) with vertices B_i on b_1^i independent of one another, every vertex having an infinity of choices.

Now if the perpendiculars from B_0', B_2' to a^0, a^2 meet at G' and one from G' to a^1 meets p at B, by a similar argument we have

$$\frac{B_0'B}{BB_2'} = \frac{A_0'A_1'}{A_1'A_2'}$$

that is then true if and only if $B = B_1'$.

Editor's comment.

This theorem was extracted from the proposer's paper "On a Gerber's Conjecture", *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei*, Serie 8, 61 (Novembre 1976) 411-419.

* * *

365. [1978: 192] *Proposed by Kesiraju Satyanarayana, Gagan Mahal Colony, Hyderabad, India.*

A scalene triangle ABC is such that the external bisectors of angles B and C (i.e., the segments intercepted by B, C and the opposite sides) are of equal length. Given the lengths of the sides b, c $(b > c)$, find the length of the third side a and show that its value is unique.

Solutions were received from W.J. BLUNDON, Memorial University of Newfoundland; O. BOTTEMA, Delft, The Netherlands; JORDI DOU, Escola Tecnica Superior Arquitectura de Barcelona, Spain; G.C. GIRI, Research Scholar, Indian Institute of Technology, Kharagpur, India; ALLAN Wm. JOHNSON Jr., Washington, D.C.; F.G.B. MASKELL, Collège

Algonquin, Ottawa; and the proposer. A comment was received from M.S. KLAMKIN, University of Alberta.

Editor's comment.

Let t'_b, t'_c denote the external bisectors at B, C. Scalene triangles for which $t'_b = t'_c$ are known as *pseudo-isosceles* triangles and they have a long history, as we will see below.

The forgetful editor was reminded by a couple of readers that this problem about pseudo-isosceles triangles has already been discussed in this journal. "The Steiner-Lehmus Theorem" [1976: 19-24] contained a complete solution to our problem by Charles W. Trigg. This solution first appeared in [1], wherein Trigg gave the additional references [2] - [4]. He showed that the unique answer to our problem is

$$a = M + \sqrt[3]{M^3 + \sqrt{N}} + \sqrt[3]{M^3 - \sqrt{N}}, \tag{1}$$

where

$$M = \frac{b+c}{3} \quad \text{and} \quad N = \frac{bc\{27b^2c^2 - 9bc(b+c)^2 + (b+c)^4\}}{27},$$

and that (1) is equivalent to

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}. \tag{2}$$

As one example of a triangle verifying (2), Trigg gave the following:

$$A = 36°, \qquad B = 132°, \qquad C = 12°. \tag{3}$$

From (2) and the well-known relation

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2},$$

we see that a pseudo-isosceles triangle can also be characterized by

$$\frac{r}{R} = 4 \sin^3 \frac{A}{2}.$$

It was the consideration of pseudo-isosceles triangles that led G. Cesàro [5] to a simple approximate but highly accurate Euclidean construction of a regular polygon of 18 sides (i.e. construction of an arc of 20°). His construction resulted in an arc ≈ 19°59'54". Additional details can be found in the more accessible reference [6].

Bottema wrote that the oldest reference to pseudo-isosceles triangles seems to be Alauda [7], who showed that in such triangles $AI^2 = BI \cdot CI$, where I is the incentre. (This relation easily follows from (2) and $AI = 4R \sin\frac{1}{2}B \sin\frac{1}{2}C$, etc.)

He also mentioned that the triangles are discussed, and references given, by Neuberg in [8].

Bottema brought out a remarkable property of triangle (3), which is known as *the Emmerich triangle* (A. Emmerich, 1856-1915?). Mental calculation of a few angles shows that in triangle (3) we have

$$a = t'_b = t'_c. \qquad (4)$$

Conversely, Bottema showed that in any scalene triangle satisfying (4) the ratios of the sides are uniquely determined; that, in fact,

$$a : b : c = 20 : \left\{5(\sqrt{5}+1) + \sqrt{30(5-\sqrt{5})}\right\} : \left\{5(\sqrt{5}+1) - \sqrt{30(5-\sqrt{5})}\right\}. \qquad (5)$$

Thus, to within a scale factor, there is only one scalene triangle satisfying (4), and it must be the Emmerich triangle. This triangle is *rich* in more than name only, since a glance at (5) shows that

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

the ubiquitous golden ratio.

REFERENCES

1. Charles W. Trigg, Solution to Problem 862, *Mathematics Magazine*, 47 (1974) 52-53.

2. *American Mathematical Monthly*, 24 (1917) 344, 40 (1933) 423, 45 (1938) 480.

3. *National Mathematics Magazine*, 14 (1939) 51.

4. *School Science and Mathematics*, 31 (1931) 465, 39 (1939) 563 and 732-735, 40 (1940) 464-468.

5. *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique*, 1925, p. 126.

6. R. de Marchin et G. Bosteels, *Trigonométrie Rectiligne*, Ad. Wesmael-Charlier, Namur, 1967, p. 207.

7. *Intermédiaire des Mathématiciens*, 1894, p. 70.

8. J. Neuberg, *Bibliographie des triangles spéciaux*, Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège, 3e série, t. XII, 1924, pp. 11-13.

* * *

366. [1978: 192] *Proposed by A. Liu, University of Alberta.*

Evaluate

$$\sum_{i=n}^{2n-1} \binom{i-1}{n-1} 2^{1-i}.$$

Solution by Jeremy D. Primer, student, Columbia H.S., Maplewood, New Jersey.

Let n be a fixed positive integer. We toss a fair coin repeatedly until it has landed n times on the same side. This requires at least n and at most $2n-1$ tosses. For $i = n, n+1, \ldots, 2n-1$, let the event E_i be the set of all outcomes in which i tosses are required to effect n identical landings. Then E_i occurs if and only if exactly $n-1$ of the previous $i-1$ tosses have the same result as the ith toss, and so the probability of E_i is

$$P(E_i) = \binom{i-1}{n-1}(\tfrac{1}{2})^{i-1} = \binom{i-1}{n-1}2^{1-i}.$$

Since exactly one of the E_i occurs, we have

$$P(\underset{i}{\cup}E_i) = 1 = \sum_{i=n}^{2n-1}\binom{i-1}{n-1}2^{1-i}.$$

Similar reasoning with a fair k-sided "coin" $(k > 1)$ yields

$$1 = \sum_{i=n}^{k(n-1)+1}\binom{i-1}{n-1}k^{1-i}(k-1)^{i-n}.$$

Also solved by STANLEY COLLINGS, The Open University, Milton Keynes, England; MICHAEL W. ECKER, Pennsylvania State University, Worthington Scranton Campus (two solutions); RICHARD A. GIBBS, Fort Lewis College, Durango, Colorado; G.P. HENDERSON, Campbellcroft, Ontario; ALLAN Wm. JOHNSON Jr., Washington, D.C.; M.S. KLAMKIN, University of Alberta; BOB PRIELIPP, The University of Wisconsin-Oshkosh; JEREMY D. PRIMER, student, Columbia H.S., Maplewood, New Jersey (second solution); KENNETH M. WILKE, Topeka, Kansas; and the proposer.

Editor's comment.

Prielipp wrote that this problem is directly related to Problem H-283 in the April 1978 issue of *The Fibonacci Quarterly*.

Another related problem, proposed by Sidney Kravitz, appeared in the *Journal of Recreational Mathematics* 10 (1977-78) 294. It is related not so much to our problem as to the method used in our featured solution. It asks for the probability that the World Series in baseball will run to 4, 5, 6, and 7 games. All we have to do is to calculate $P(E_i)$ for $i = 4,5,6,7$ when $n = 4$.

* * *

367. [1978: 192] *Proposed by Viktors Linis, University of Ottawa.*

(a) A closed polygonal curve lies on the surface of a cube with edge of length 1. If the curve intersects every face of the cube, show that the length of the curve is at least $3\sqrt{2}$.

(b) Formulate and prove similar theorems about (i) a rectangular parallelepiped, (ii) a regular tetrahedron.

Solution by Basil C. Rennie, James Cook University of North Queensland, Australia.

Consider the rectangular block given by

$$0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b, \quad 0 \le z \le c, \qquad a \le b \le c.$$

We will show that a closed polygonal curve on the surface meeting every face must have length at least $\sqrt{2}(a+b+c)$, and part (a) of the problem follows when $a=b=c=1$. Figure 1 shows that a length of $3\sqrt{2}$ is best possible for a cube of edge 1.

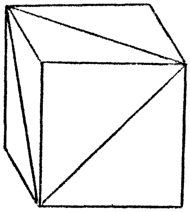


Figure 1

We start with some plane geometry. Suppose a closed polygonal curve in the yz-plane meets each side of the rectangle $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$. Let v be the total length of the segments parallel to the y-axis; w the total length of those parallel to the z-axis; and u the total length of the remaining segments u_i, which make angles θ_i with the positive y-axis. Then we have

$$v + \Sigma|\cos\theta_i|u_i \ge 2b, \qquad w + \Sigma|\sin\theta_i|u_i \ge 2c.$$

Since $|\cos\theta| + |\sin\theta| \le \sqrt{2}$ for any angle, it follows that

$$\sqrt{2}u + v + w \ge 2b + 2c. \tag{1}$$

Now suppose the given curve on the block is divided into disjoint subsets P, Q, R of lengths p, q, r, respectively, where P is the union of the segments on the two faces $x=0$ and $x=a$, and Q, R are defined similarly on the other two pairs of faces. Let the projections of P onto the planes $y=0$ and $z=0$ have lengths p_y and p_z, respectively (counting multiplicities where appropriate), and similarly define q_x, q_z and r_x, r_y. By an argument like that above, we have

$$p_y + p_z \le \sqrt{2}p, \qquad q_x + q_z \le \sqrt{2}q, \qquad r_x + r_y \le \sqrt{2}r. \tag{2}$$

Applying (1) to the projections of the given curve onto each of the coordinate planes in turn gives

$$\begin{aligned} \sqrt{2}p + q_x + r_x &\ge 2b + 2c, \\ p_y + \sqrt{2}q + r_y &\ge 2a + 2c, \\ p_z + q_z + \sqrt{2}r &\ge 2a + 2b. \end{aligned} \tag{3}$$

Now adding and using (2) yield $2\sqrt{2}(p+q+r) \geq 4(a+b+c)$and the desired inequality follows:

$$p+q+r \geq \sqrt{2}(a+b+c). \tag{4}$$

This inequality is in fact best possible when $a+b \geq c$, as can be seen from Figure 2, where the curve meets every edge at 45° and the length of the curve is exactly $\sqrt{2}(a+b+c)$.

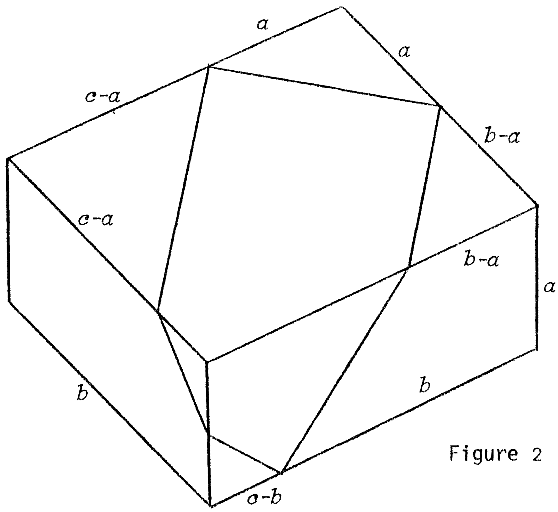


Figure 2

Let $M = \sqrt{(a+b)^2+c^2}$. It is easy to verify that $2M \geq \sqrt{2}(a+b+c)$, with equality if and only if $a+b = c$. We will show that the following inequality,

$$p+q+r \geq 2M, \tag{5}$$

which is sharper than (4), holds and is best possible when $a+b < c$. Let α be the angle such that

$$M\cos\alpha = c, \qquad M\sin\alpha = a+b, \qquad 0 < \alpha < 45°.$$

The argument is much the same as before, except that we use

$$|\cos\theta|\sin\alpha + |\sin\theta|\cos\alpha \leq 1$$

to obtain, instead of (1),

$$u + v\sin\alpha + w\cos\alpha \geq 2b\sin\alpha + 2c\cos\alpha$$

and, instead of (2),

$$p_y\cos\alpha + p_z\sin\alpha \leq p, \quad q_x\cos\alpha + q_z\sin\alpha \leq q, \quad r_x + r_y \leq \sqrt{2}r.$$

The inequalities (3) are then modified to

$$\begin{aligned}
p \qquad &+ q_x\cos\alpha + r_x\sin\alpha \geq 2b\sin\alpha + 2c\cos\alpha,\\
p_y\cos\alpha &+ q \qquad + r_y\sin\alpha \geq 2a\sin\alpha + 2c\cos\alpha,\\
p_z \qquad &+ q_z \qquad + \sqrt{2}r \qquad \geq 2a \qquad + 2b.
\end{aligned}$$

Multiplying the third inequality by $\sin\alpha$ and adding give

$$(p + p_y \cos\alpha + p_z \sin\alpha) + (q + q_x \cos\alpha + q_z \sin\alpha) + 2\sqrt{2}r \sin\alpha \geq 4M$$

from which we get

$$p + q + \sqrt{2}r \sin\alpha \geq 2M.$$

The fact that $\alpha < 45°$ now suffices to establish (5). That this inequality is best possible is shown in Figure 3, where the closed polygonal curve joining two opposite vertices meets all six faces and has length $2M$. Note that here $r = 0$; this is in fact a necessary condition for equality in (5).

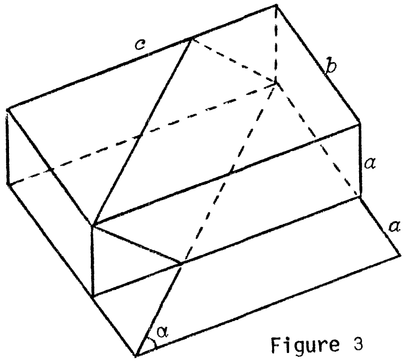


Figure 3

The result for a regular tetrahedron of edge length c is that a closed polygonal curve on the surface meeting every face has length at least $3c/2$. We will use the following easily established theorem from plane geometry: if a triangle PQR is inscribed in another triangle ABC (i.e. P is on the closed segment BC, etc.), then the perimeter of PQR is at least half that of ABC. Now consider the curve on the tetrahedron. There are two possibilities: either (a) the curve meets two opposite edges or (b) the curve meets three coplanar edges (or possibly both). Those who are into graph theory will see this as a simple fact about circuits on K_4 (the complete graph on four vertices), and for others it becomes clear by drawing a picture and sorting out the cases. In case (a) the perimeter is at least $c\sqrt{3}$, which is above the given bound; and in case (b) the perimeter is at least that of a triangle through three points of the curve, one on each edge, and this gives the stated result, which is clearly the best possible.

Also solved by PAUL R. BEESACK, Carleton University, Ottawa; and F.G.B. MASKELL, Collège Algonquin, Ottawa.

Editor's comment.

The proposer wrote that he found part (a) of this problem in the Russian journal *Kvant* (Problem M417).

* * *

NUMBER THEORIST TO HIS PSYCHIATRIST

"I'm odd! Hence it is conjectured that I am not perfect!!"

HAROLD N. SHAPIRO

* * *