COMPETICIÓN MATEMÁTICA MEDITERRÁNEA 2009

Memorial Peter O'Halloran

Requena, 2 de mayo de 2009

Problema 1

Determinar todos los enteros $n \geq 1$ para los que existen n números reales $x_1, x_2, \cdots, x_n$ en el intervalo cerrado $[-4, 2]$ tales que se verifiquen simultáneamente las tres condiciones siguientes:

- La suma de esos números es mayor o igual que n.
- La suma de sus cuadrados es menor o igual que $4n$.
- La suma de sus cuartas potencias es mayor o igual que $34n$.

Problema 2

Sea ABC un triángulo con $90^\circ \neq \hat{A} \neq 135^\circ$. Sean D y E puntos exteriores al triángulo tales que DAB y EAC son triángulos isósceles con los ángulos en D y en E rectos. Sea $F = BE \cap CD$, y M y N los puntos medios respectivos de BC y DE.

Probar que si tres de los puntos A, F, M, N están alineados, entonces los cuatro están alineados.

Problema 3

Decidir, razonadamente, si los enteros $1, 2, \cdots, 99, 100$ pueden colocarse en las celdas $C(i, j)$ de una matriz 10x10 (con $1 \leq i, j \leq 10$), de tal manera que se verifiquen las tres condiciones siguientes:

- (i) en cada fila, la suma de todos sus elementos es la misma, S.
- (ii) en cada columna, la suma de todos sus elementos es la misma, S.
- (iii) Para todo $k = 1, \cdots, 10$, los 10 elementos $C(i, j)$ con $i - j \equiv k (\mathrm{mod} 10)$ suman también S.

Problema 4

Sean x, y, z números reales positivos. Demostrar que

$$\sum_{cíclica} \frac{xy}{xy + x^2 + y^2} \leq \sum_{cíclica} \frac{x}{2x + z}.$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.oei.es/oim/revistaoim/

Editado por la OEI a través de su Centro de Altos Estudios Universitarios

Con el apoyo de la Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo (AECID)