CINCO PROBLEMAS DE LA OLIMPIADA DE BIELORRUSIA 2009, CATEGORIA E (ALUMNOS DE 12-13 AÑOS DE EDAD)

Problema By35.1 (*I. Voronovich)*

Se da el trapecio ABCD con BC paralelo a AD y el ángulo CAD de 30º. La longitud de la diagonal BD es igual a la longitud de la paralela media del trapecio. Hallar la medida del ángulo entre las diagonales AC y BD.

Problema By35.2 (*I. Bliznets)*

Se dan 15 trinomios cuadráticos con coeficientes distintos dos a dos:

$$x^2 + p_i x + q_i \ ,$$

con $i = 1, \cdots, 15$. El conjunto de los valores de los coeficientes de esos trinomios es $\{1, 2, \cdots, 30\}$. Una raíz de uno de esos trinomios cuadráticos se dice que es *buena* si es mayor que 20. Sea M el número total de raíces buenas de esos 15 polinomios.

Determinar el mayor valor que puede tomar M.

Problema By35.3 (*V.Karamzin)*

Se dan un número primo $p>3$ y los enteros positivos k y n.

Mediante $S_p(k,n)$ representamos la suma de todas las fracciones irreducibles de la forma m/p tales que $k<(m/p)<n$.

Hallar todos los números p,k,n tales que $S_p(k,n) = 2009$.

Problema By35.4 (*I.Voronovich)*

Se dibuja la gráfica de la parábola $y=x^2$ en el plano cartesiano. Dos rectas, r_1 *y* r_2 son paralelas al eje de abscisas; la distancia entre ellas es 1, y r_1 es más próxima al eje de abscisas que r_2. A es uno de los puntos de intersección de la parábola con r_1, B es el punto de intersección de r_2 con el eje de ordenadas y O es el origen de coordenadas. Hallar la medida del ángulo OAB.

Problema By35.5 *(A.Mirotin)*

Las casillas de un tablero 4x4 se pintan de verde, rojo o azul de acuerso con las siguientes reglas: Cualquier casilla se puede pintar de rojo. Una casilla se puede pintar de azul solamente si tiene alguna casilla adyacente pintada de rojo (dos casillas son adyacentes si comparten un lado). Una casilla se puede pintar de verde solamente si tiene una casilla adyacente azul. Cualquier casilla se puede pintar más de una vez.

Determinar el mayor número posible de casillas que pueden pintarse de verde.