Crux Mathematicorum

Published by the Canadian Mathematical Society.

http://crux.math.ca/

The Back Files

The CMS is pleased to offer free access to its back file of all issues of Crux as a service for the greater mathematical community in Canada and beyond.

Journal title history:

- The first 32 issues, from Vol. 1, No. 1 (March 1975) to Vol. 4, No.2 (February 1978) were published under the name *EUREKA*.
- Issues from Vol. 4, No. 3 (March 1978) to Vol. 22, No. 8 (December 1996) were published under the name *Crux Mathematicorum*.
- Issues from Vol 23., No. 1 (February 1997) to Vol. 37, No. 8 (December 2011) were published under the name *Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem*.
- Issues since Vol. 38, No. 1 (January 2012) are published under the name *Crux Mathematicorum*.

ISSN 0705 - 0348

CRUX MATHEMATICORUM

Vol. 5, No. 2

February 1979

Sponsored by
Carleton-Ottawa Mathematics Association Mathématique d'Ottawa-Carleton
Publié par le Collège Algonquin

For Vol. 5 (1979), the support of Algonquin College, the Samuel Beatty Fund, the Canadian Mathematical Olympiad Committee, and the Ottawa Valley Education Liaison Council is gratefully acknowledged.

CRUX MATHEMATICORUM is published monthly (except July and August). The yearly subscription rate for ten issues is $10.00. Back issues: $1.00 each. Bound volumes with index: Vol. 1-2 (combined), $10.00; Vol. 3-4, $10.00 each. Cheques or money orders, payable in Canadian or U.S. funds to CRUX MATHEMATICORUM, should be sent to the managing editor.

All communications about the content of the magazine (articles, problems, solutions, etc.) should be sent to the editor. All changes of address and inquiries about subscriptions and back issues should be sent to the managing editor.

Editor: Léo Sauvé, Architecture Department, Algonquin College, 281 Echo Drive, Ottawa, Ontario, K1S 1N3.

Managing Editor: F.G.B. Maskell, Mathematics Department, Algonquin College, 200 Lees Ave., Ottawa, Ontario, K1S 0C5.

Typist-compositor: Nancy Makila.

* * *

CONTENTS

L A P L A C E

Mathématicien, Astronome, Physicien,... et Ministre français[1]

NICOLE et JEAN DHOMBRES

Comme il est bien, dans la requête au Prince,
d'interposer l'ivoire ou bien le jade
Entre la face suzeraine et la louange courtisane

SAINT-JOHN PERSE, *Amers* (Et vous mers...)

Lorsque la Révolution française éclate, Laplace vient de fêter son quarantième anniversaire et doit se réjouir d'une situation sociale bien assise pour un roturier, fils de fermier normand et non propriétaire de sa terre, c'est-à-dire pour un être inférieur selon les préjugés exacerbés par l'agonie de l'Ancien Régime(1)[2]. Un an plus tôt, il a épousé quelque héritière, certes de petite noblesse, mais au visage charmant si l'on en croit la tradition. Elle lui donne coup sur coup fille et successeur mâle(2).

Depuis plus de quinze ans, il siège à l'Académie des Sciences et bénéficie depuis maintenant trois ans d'un titre de pensionnaire dans la classe de mécanique, ce qui lui assure plus que la seule notoriété(3).

Sur le plan scientifique, il est désormais et sans hésitation apparente l'homme d'une grande oeuvre dont il mesure l'étendue, mais qu'il sait pouvoir achever: l'explication du système solaire et de sa stabilité, c'est-à-dire l'*Exposition du Système du Monde*(4). Cette explication devra être réglée par une seule loi: celle de la gravitation universelle de Newton, et se bâtir avec l'aide d'un seul outil, le calcul mathématique que Newton et Leibniz ont élaboré au XVIIème siècle finissant, le Calcul par excellence, qu'ignoraient les Anciens, c'est-à-dire le calcul différentiel et intégral. Bien entendu, pour cette construction, il faudra toucher à mille morceaux divers dans toutes les sciences exactes de l'époque. N'oublions pas que Laplace appartient à la deuxième moitié du XVIIIème siècle, à cette génération de savants qui connaissent tout des sciences du temps et dont la curiosité est multiforme, héritiers avec usufruit de la Grande Encyclopédie(5).

Sur le plan politique ou religieux, Laplace ne s'est pas fait remarquer de façon particulière avant 1789. Il est considéré sans doute comme appartenant au

---

[1]Conférence donnée par Jean Dhombres à l'université d'Ottawa le 22 février 1978.
[2]Ces numéros renvoient aux notes à la fin du texte.

mouvement des Lumières, athée résolu mais sans ostentation, libéral dans le respect de l'ordre, membre d'une élite dont le parisianisme garantit l'universalité.

Quelques-uns de ses amis, collègues ou relations, ont alors nom: Lavoisier[7], de six ans son aîné, fermier général[6] et fondateur de la chimie moderne; Lagrange[8], de treize ans son aîné, le mathématicien qui instaure une première théorie des fonctions, c'est-à-dire en fait un système totalisateur sur le calcul différentiel et intégral; Bailly[9], de treize ans son aîné également, astronome tout comme Delambre[10], né la même année, Lacroix[11], mathématicien de seize ans son cadet, Berthollet[12], le célèbre chimiste, son aîné d'un an, Bossut[13], le professeur de mathématiques, son aîné de 19 ans, Monge[14], de trois ans son aîné, qui vient de construire la Géométrie descriptive, Condorcet[15], le philosophe de trois ans son aîné avec lequel Laplace a collaboré pour des applications du calcul des probabilités à l'estimation de la population en France, Legendre[16], le mathématicien de 3 ans son cadet. Il faudrait encore citer Daubenton, Lacépède, Lamarck, Fourcroy, Chaptal, etc...

Mais par la Révolution, le vieux monde s'écroule et des problèmes nouveaux surgissent avec d'autant plus d'acuité que la naissance de l'état jacobin s'accompagne d'une guerre européenne quasiment ininterrompue jusqu'en 1815. Au rassemblement de toutes les forces populaires de la nation en armes, scandé par les accents vengeurs de La Marseillaise, s'adjoint un véritable embrigadement des têtes scientifiques, une mobilisation des Savants de l'An II.

Pour la première fois sans doute dans l'histoire apparaît une politique scientifique planifiée au niveau des instances gouvernementales[17].

C'est bien à ce tournant-là que la vie de Laplace peut encore capter l'attention de l'homme d'aujourd'hui[18] et la question doit être posée en termes précis:

Quelles peuvent être les relations entre un pouvoir politique, éventuellement variable, mais toujours soucieux, même dans le domaine tout nouveau pour lui de la science, de centralisation bureaucratique, d'unanimisme populaire, de domination internationale et d'assentiment universel et un savant, tout occupé par une construction unique et a priori inutile à toutes fins pratiques puisqu'il s'agit de la cohérence du système astronomique?

Laplace donne une calme réponse qui ne cherche pas à atteindre la noblesse morale. Mais une réponse pleine de bon sens, en paysan normand dont il était issu. Et ce n'était pas si simple car le pouvoir prit tour à tour la forme du Comité de Salut Public, de Bonaparte, de Napoléon puis de Louis XVIII et après une valse-hésitation qu'une coda termina à Waterloo, de nouveau les Ultras. Bref, cela vaut la peine d'y regarder de plus près[19].

Nous nous permettrons, avec l'arbitraire universitaire par lequel on dispose d'une vie irrémissiblement vécue, de distinguer trois aspects: d'une part, les périodes militantes de Laplace, d'autre part, ce qui a constitué le point fixe et le pivot de sa vie, et enfin, l'attitude générale à l'abri du pouvoir.

1. *Les périodes militantes de la vie de Laplace*

Homme réservé dont un portrait placé en frontispice d'un de ses ouvrages[20] laisse deviner la taille moyenne[21], le caractère méticuleux sous l'apparente nonchalance d'un cheveu blanc flottant, le mélange d'une urbanité délicate et aristocratique du Siècle des Lumières, d'une volonté tenace et d'un goût de l'apparat.

Homme de goûts classiques et l'on sait qu'il appréciait les vers de Racine, les tableaux de Raphaël, et les conversations dans un cercle choisi d'amis. Ce n'est pas un tribun, ni un homme qui cherche à briller en dehors d'un auditoire de familiers. Les divers mémoires du temps, hors des cénacles scientifiques, l'ignorent le plus souvent.

Cet homme froid a pourtant connu deux périodes au moins d'enthousiasme militant.

La première période fut certes de courte durée, du 1er Pluviôse an III au 30 Floréal de la même année: temps imparti aux mémorables séances de l'Ecole Normale de l'An III. Il nous faut imaginer ces douze cents "étudiants", dont la majorité avaient dépassé les vingt-cinq ans, des patriotes, d'anciens abbés, massés dans une grande salle surchauffée du Muséum d'Histoire Naturelle et écoutant chaque matin, coup sur coup, trois leçons de maîtres aussi prestigieux que Lagrange, Laplace, La Harpe, Haüy, Berthollet ou Bernardin de Saint Pierre, disserter de mathématiques, de littérature, de physique, de chimie ou de civisme moral. Un cérémonial laïque perchait sur une estrade les deux délégués de la Convention Nationale, en grande tenue empanachée de plumes et de tricolore. En dessous d'eux, les trois professeurs du matin, assis dans des fauteuils, mais tête nue. Puis des curieux, des gens de plume, des dames qu'une grille séparait des gradins où s'agglutinaient les "élèves", la tête couverte. Le tout sous la lumière blafarde chichement dispensée par la verrière du toit de l'amphithéâtre. Au dehors, couche contre couche, le Paris glacé[22], sans bois de chauffage, affamé, les faubourgs révolutionnaires durs (Saint-Marcel et Saint-Antoine) et au ci-devant Palais-Royal, le monde déluré des muscadins et des merveilleuses, héritiers sarcastiques du 9

Thermidor.

Mais qu'on y prenne garde. Ces leçons de l'Ecole Normale sont effectivement les premières leçons cohérentes professées sur le Continent pour un public assez large. Elles sonnent l'ère du professorat. D'entrée de jeu, la forme est classique puisque celle-ci va servir de moule à tout l'enseignement universitaire du XIXème siècle. En mathématiques, avec Lagrange et Laplace, la nouveauté est considérable, même si la matière traitée est élémentaire et se résume en une architecture adroite de matériaux enfouis dans mille Mémoires académiques. Et pourtant, tout nous paraît immuable. Laplace ahane sous un règlement vétilleux, mais louable, qui contraint les professeurs à relire la copie sténographique des leçons le lendemain même, et de la remettre le surlendemain à l'impression. De même pour les épreuves d'imprimerie. Il multiplie les errata.

En outre, à être vécu par des Laplace, le métier de professeur, qu'avait dédaigné D'Alembert ou Voltaire, prend valeur sociale et cela nous conduit tout droit au respecté Herr Professor germanique de la fin du XIXème siècle[(23)].

Enfin, piqué par le peu de temps qui lui est accordé, de n'avoir pu parler que de mathématiques en négligeant l'astronomie ou les probabilités qui lui sont chères, Laplace promet un ouvrage où—dégagé du langage trop technique de l'analyse[(24)] —sera expliqué et exposé: *Le Système du Monde*. Il lui suffira d'un an pour le rédiger en une langue limpide, bien cadencée et simple.

Ces extraordinaires leçons de l'Ecole Normale de l'An III permettent aussi de juger de la cautèle avisée de Laplace vis-à-vis du Pouvoir. Quel était l'objet de cette Ecole dans l'esprit des députés? Rien d'autre que d'appliquer la "méthode révolutionnaire" à la formation des maîtres, de ceux qui allaient enseigner la France puisque la Convention venait de décréter, en 1793, l'instruction primaire gratuite et obligatoire. Cette "méthode révolutionnaire" avait fait ses preuves d'une manière éclatante en Pluviôse An II avec l'Ecole des Armes. En trente jours, trois décades, pas une de plus, mobilisant les Savants comme en août on avait mobilisé les soldats du sol de France, on forma tant d'ingénieurs capables de fabriquer le salpêtre indispensable à la poudre de canon et de construire les canons eux-mêmes. Aussitôt, les enseignés regagnaient leurs provinces d'origine, enseignaient à d'autres et la production du salpêtre était multipliée par cinq, assurant l'indépendance vis-à-vis de l'approvisionnement étranger. Qu'ils sont concis, explicites et efficaces, les ouvrages correspondants: l'*Avis aux ouvriers en fer* de Vandermonde, Berthollet et Monge ou l'*Art de fabriquer des canons* de ce dernier! L'imagination est au pouvoir: on carbonise des marrons d'inde, on calcine des gerbes de lilas pour recueillir la soude caustique. Les coryphées du temps, ceux qui avaient par exemple forgé les néologismes pour les noms de mois, débordent d'allégories.

Donc il s'agissait, à l'Ecole Normale, de former en peu de temps, quelques semaines au plus, des instituteurs enthousiastes et patriotes "pour les disséminer ensuite dans tous les districts"[25].

Que propose pourtant Laplace, dans son programme de cours à l'Ecole? "Présenter les plus importantes découvertes que l'on ait faites dans la Science, en développer les principes, faire remarquer les idées fixes et heureuses qui leur ont donné naissance, indiquer la voie la plus directe qui y peut conduire, les meilleures sources où l'on peut puiser les détails, ce qui reste encore à faire, la marche qu'il faut suivre: tel est l'objet de l'Ecole Normale, et c'est sous ce point de vue que les mathématiques y seront enseignées".

Beau programme certes, mais à développer sur plusieurs années et non en quelques semaines, à moins que l'on ne se contente d'une mystagogie mystifiante. On ne saurait mieux torpiller le projet initial de l'Ecole Normale en évitant soigneusement de s'y opposer. Tout simplement, on ne le mentionne pas. Cette méthode me paraît typiquement laplacienne[26].

La deuxième période de militantisme de Laplace va durer sept ans et constituera la vie de la Société d'Arcueil. Dans ce petit village du sud de Paris, entre la barrière d'Enfer et le Parc de Sceaux, les Berthollets et les Laplaces disposent de villas mitoyennes et reçoivent tous les quinze jours une bonne dizaine de jeunes scientifiques en de libres et vivantes discussions à la charnière des mathématiques, mais surtout de la physique et de la chimie. Les membres ont nom: Malus, von Humboldt, Gay-Lussac, Thenard, Biot, Arago, Chaptal. Ce n'est pas rien, et de ce qui eut trait à ces sciences, de 1807 à 1814, rien ne passa en dehors d'Arcueil! Laplace apparaît là dans la plénitude, attentif à tous et bien sorti de la tour d'ivoire si souvent reprochée aux mathématiciens. Comme dit Fourier[24]: "il les entretenait tous avec une extrême politesse. Il la portait même si loin qu'il aurait donné lieu de croire, à ceux qui ne connaissaient point encore toute l'étendue de son génie, qu'il pouvait lui-même retirer quelque fruit de leurs entretiens". Son militantisme le pousse à favoriser les très jeunes savants d'Arcueil, les hisser aux postes honorifiques, à l'Académie, quitte à bousculer les préséances et les clans du mérite acquis par l'âge seul. On l'accusera—sans doute avec quelque vraisemblance—de favoritisme. Et il nous faudra plus loin préciser cette attitude.

(la suite au prochain numéro)

NOTES

(1) Pierre Simon Laplace est né le 23 mars 1749, de Pierre Laplace et Marie Anne Sochon, à Beaumont-en-Auge, localité qui fait désormais partie du département du Calvados. L'académicien achètera plus tard la terre et la maison que ses parents louaient. Le registre des baptêmes de la bourgade, du 25 mars, précise son parrain et sa marraine. Depuis 1932, une statue de Laplace est érigée à Beaumont.

(2) Laplace épouse en 1788 Marie Charlotte de Courty de Romanges.

Les charmes de celle-ci devaient être remarqués pour que Marat, le pamphlétiste fielleux de l'Ami du Peuple, accusât Laplace d'en user pour se pousser dans le monde ("Mais combien doivent leurs fortunes au petit manège de leurs chastes moitiés?", in Marat, *Les Charlatans modernes*, Paris 1791). Un protégé particulièrement doué de Laplace, le jeune physicien J.B. Biot, évoquera plus tard avec émotion la gentillesse de Madame Laplace à l'occasion des réunions bimensuelles et presque familiales de la société scientifique d'Arcueil, à partir de 1807.

Le seul fils du couple, Charles Emile Pierre Joseph Michel nait le 15 avril 1789. Il entrera à l'Ecole Polytechnique en 1805, dans la même promotion qu'Augustin Louis Cauchy, se vouera à l'armée et deviendra lieutenant général d'artillerie en 1843, avant d'être sénateur. Il mourra en 1874.

La seule fille du couple épousera le sieur De Porte de Pardailhan, auditeur attaché à la Préfecture de la Seine. Elle mourra des suites de ses couches le 22 septembre 1813.

(3) L'entrée de Laplace à l'Académie des Sciences fut quelque peu laborieuse. (D'après Joseph Bertrand, secrétaire perpétuel de cette Académie in *L'Académie des Sciences et les Académiciens de 1666 à 1793*, Paris, Hetzel, 1869.) Dès 1773, c'est à dire à 24 ans, il est certes adjoint mécanicien mais en 1775 et 1776, à plusieurs reprises, on lui préfère d'autres têtes (Desmaret, Vandermonde, Cousin) pour passer adjoint géomètre, position considérée comme plus noble. Et il sera associé mécanicien en 1783, en remplacement de Desmaret devenu quant à lui pensionnaire. Ce n'est qu'en 1785, le 23 avril précisément, qu'il accède au titre et privilèges de pensionnaire de la classe de mécanique, à la suite d'une réorganisation de l'Académie Royale des Sciences, due à son directeur, le chimiste Lavoisier, ami de Laplace.

Au titre de cette pension, Laplace reçoit au moins 1200 livres annuellement.

(4) *L'Exposition du Système du Monde,* traité de vulgarisation pour le public cultivé, date de 1796 (2 volumes in 8°). De nombreuses rééditions suivirent puisqu'on en est déjà à la sixième édition en 1835.

L'oeuvre maîtresse de Laplace, celle qui étaie les assertions de *l'Exposition du Système du Monde,* c'est bien le *Traité de la Mécanique Céleste*. La parution de l'ouvrage en cinq volumes, débute en 1799 (les deux premiers tomes), un troisième tome paraît en 1803, un quatrième en 1805 et vingt ans plus tard le cinquième et dernier tome. Nous donnons un résumé de la table des matières:

- Des lois générales de l'équilibre et du mouvement.
- De la loi de la pesanteur universelle et du mouvement des centres de gravité des corps célestes.
- De la figure des corps célestes.
- Des oscillations de la mer et de l'atmosphère.
- Des mouvements des corps célestes autour de leurs propres centres de gravité.
- Théories particulières des mouvements célestes.
- Théorie de la lune.

- Théories des satellites de Jupiter, de Saturne et d'Uranus.
- Théorie des comètes.
- Sur divers points relatifs au système du monde.
- De la figure et de la rotation de la terre.
- De l'attraction et de la répulsion des sphères, et des lois de l'équilibre et du mouvement des fluides élastiques.
- Des oscillations des fluides qui recouvrent les planètes.
- Des mouvements des corps célestes autour de leur centre de gravité.
- Du mouvement des planètes et des comètes.
- Du mouvement des satellites.

Les oeuvres de Laplace furent rassemblées une première fois en sept volumes par les instances officielles françaises de 1843 à 1847, à la suite d'un rapport présenté par F. Arago et grâce à une subvention coquette de 40.000 francs.

Un seconde édition des oeuvres publiées en quatorze volumes, cette fois exhaustive, mais excluant la correspondance, s'étale de 1878 à 1914. Elle est également le fruit d'une action officielle et récompensait autrefois le major de l'Ecole Polytechnique.

(5) *L'Encylopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers,* dirigée par Jean le Rond d'Alembert et Denis Diderot, est publiée de 1751 à 1772.

(6) C'est à dire quelque chose comme le Trésorier Payeur Général d'une province, celui qui encaisse impôts et droits, en somme le comptable intéressé d'un portion du royaume.

(7) Antoine Laurent de Lavoisier (1743-1794). Laplace a collaboré avec Lavoisier aux premières mesures calorimétriques et les résultats sont colligés dans deux mémoires de l'Académie Royale des Sciences en 1780 et 1781.

(8) Louis Lagrange (1736-1813), auteur d'une magistrale *Théorie des Fonctions Analytiques* (Paris 1797). Les premiers biographes de Laplace ont lancé la mode— tentante et toujours reprise—d'une comparaison des styles scientifiques et humains de Laplace et Lagrange. Nous n'y succomberons pas.

(9) Jean Sylvain Bailly (1736-1793), astronome qui prendra une part importante dans l'Assemblée Constituante.

(10) Jean-Baptiste Delambre (1749-1822). Astronome, qui sera chargé avec Méchain de faire les triangulations nécessaires à la mesure de l'arc du méridien entre Dunkerque et Barcelone en vue de la définition du mètre.

(11) Sylvestre François Lacroix (1765-1843), auteur d'un *Traité sur le Calcul Différentiel et Intégral* (1796) qui fait date entre celui d'Euler (1748) et celui de Cauchy (1821). Laplace aidera beaucoup Lacroix lequel lui succédera comme examinateur des élèves de l'Artillerie.

(12) Claude Berthollet (1748-1822), chimiste, qui découvrit les propriétés oxydantes du chlore et le caractère explosif des oxydes de chlore. Il sera avec Laplace le fondateur et l'animateur de la Société d'Arcueil à partir de 1807.

(13) Charles Bossut (1730-1814), abbé, qui fut professeur de mathématiques à l'Ecole de Génie de Mézières laquelle fournira le modèle de l'Ecole Polytechnique.

(14) Gaspard Monge (1746-1818), le futur organisateur de l'Ecole Polytechnique, homme d'activité débordante.

(15) Jean Antoine Caritat, marquis de Condorcet (1743-1794), philosophe, homme politique et mathématicien, qui écrira avant de se suicider un *Tableau historique des progrès de l'esprit humain*, sorte de résumé de l'esprit de l'Encyclopédie.

(16) Adrien Marie Legendre (1752-1833), mathématicien qui se spécialisa en arithmétique mais contribua également à l'analyse.

(17) Bien sûr, un Pierre le Grand pourrait déjà être crédité d'une politique scientifique. Mais il s'agissait plus d'adapter la Russie féodale à la technique occidentale, et au commerce européen, que de développer per se une science nationale.

L'antécédent de Frédéric II est beaucoup plus proche de ce que va réaliser la Révolution en matière scientifique. Cependant, ces autocrates agissent pratiquement seuls, et par la force, tandis que les Pères Conscrits de la Constituante ou les députés de la Convention, représentent une force élue par le peuple et sont unanimes quant à la science. Il y a là un phénomène absolument nouveau. Et comme tout ce qui émerge irrésistiblement avec violence des couches les plus profondes de la nation, la forme même qui va être donnée à cette politique scientifique restera le moule pour toutes les actions futures, pendant de longues décennies. On pourrait presque dire qu'il faudra attendre la création de la Caisse Nationale des Sciences en 1930, embryon du Centre National de la Recherche Scientifique, créé sous l'impulsion de Borel et Perrin en 1939, pour voir se profiler des actions nouvelles en France au niveau étatique.

Que l'on songe un instant à la création de l'Ecole Polytechnique (1794), de l'Ecole Normale (1795), des Ecoles Centrales, du Bureau des Longitudes, de la Commission des Poids et Mesures, du Conservatoire de Musique, du Musée du Louvre, du Muséum d'Histoire Naturelle, etc...

Bien sûr, l'enthousiasme qui a présidé à la mobilisation des savants de l'an II et qui faisait dire que "le mot impossible n'était pas républicain" va bientôt s'éteindre, mais les institutions subsisteront.

(18) L'historien ou le philosophe des sciences aura quant à lui beaucoup d'autres raisons—et des plus importantes—pour s'intéresser à Laplace. Si nous avons choisi de nous limiter à un aspect presque politique de l'apport de Laplace, c'est d'une part parce qu'en une conférence, il était impossible de rendre justice à l'astronome théoricien sans entrer dans des considérations scientifiques précises. Tel ne pouvait être le but choisi. C'est d'autre part que le monde mathématique familier à Laplace nous est désormais terre étrangère après les constructions axiomatiques du XXème siècle. Une introduction trop longue eut été nécessaire pour éviter l'hagiographie. C'est enfin, plus positivement, parce que la politique excite toujours les français et qu'on a trop souvent fait grief à Laplace de ses fidélités variées, pour ne pas tenter de chercher une logique humaine plus profonde dans l'attitude de toute sa vie. Enfin le Laplace déterministe et novateur en théorie des probabilités est finalement trop bien connu pour qu'il soit nécessaire de le décrire à nouveau.

Profitons-en pour indiquer quelques références bibliographiques, en dehors des ouvrages déjà cités et des *Oeuvres Complètes* de Laplace. Je dois plusieurs informations aux Professeurs R. Hahn, C.C. Gillispie et R. Taton.

- Henri Andoyer - *L'oeuvre scientifique de Laplace*, Paris, Payot, 1922.

- Biographie Universelle, ancienne et moderne (supplément: tome 70) Michaud, Paris, 1842.

- J.B. Biot - *Essai sur l'Histoire Générale des Sciences pendant la Révolution,* Paris, an XI (1803), 83 pages.
- M.P. Crosland - *The society of Arcueil: a view of French Science at the time of Napoleon I,* 1967, London.
- L. Van Dantzig - Laplace, probabiliste et statisticien, *Arch. Int. Hist.* (1955) 8, p. 27-37.
- Paul Dupuis - *L'Ecole Normale de l'An III* in le Centenaire de l'Ecole Normale, Paris, Hachette, 1895.
- J.B.G. Fabry - *Le génie de la révolution considéré dans l'éducation,* Paris, 1817-1818, 3 volumes.
- Joseph Fayet - *La Révolution française et la Science,* Marcel Rivière, Ed., 1960.
- A. Fourcy - *Histoire de l'Ecole Polytechnique*, Paris, 1828.
- Joseph Fourier - *Eloge historique de M. le Marquis de Laplace*, in Exposition du Système du Monde, Paris, Bachelier, 1835.
- Robert Fox - The rise and fall of Laplacian physics, *Historical studies in the Physical Sciences,* 4 (1974), p. 89-136.
- Henry Guerlac - Chemistry as a branch of physics: Laplace's collaboration with Lavoisier, *Historical studies in the Physical Sciences,* 7 (1976), p. 193-276.
- Roger Hahn - *The anatomy of a scientific institution - The Paris Academy of Sciences - 1666-1803*, University of California Press, 1971.
- Roger Hahn - *Laplace as a Newtonian scientist*, Los Angeles, Clark Library, 1967.
- S.F. Lacroix - *Essai sur l'enseignement en général et celui des mathématiques en particulier*, Paris, 1805.
- J. Merleau-Ponty - La cosmologie de Laplace, *Revue d'histoire des sciences,* 1975, p. 21-49.
- *Nouvelle Encyclopédie Théologique* publiée par l'Abbé Migne, article Laplace, Tome 48, Dictionnaire de Cosmogonie et de paléontologie, 1854.
- S.S. Petrova - Early history of Laplace transforms, *Hist. Math. essays,* 1975, Vol. 20, p. 246-256.
- O.B. Sheynin - P.S. Laplace's work on probability, *Archive for History of exact sciences,* Vol. 16 (1976-1977), p. 137-187.
- René Taton (éd.) - *L'enseignement et la diffusion des sciences en France au XVIIIème siècle*, Hermann, 1964.
- René Taton - Laplace et Sylvestre-François Lacroix, *Revue d'Histoire des Sciences,* Tome 6, 1953, p. 350-360.

(19) Pour éviter des redites il est apparu commode de fournir en fin de notes un curriculum vitae de Laplace, suffisamment succinct pour être consulté, suffisamment complet pour rendre compte de l'oeuvre dans ses grandes lignes.

A titre indicatif, comme texte de fond, on a joint, en une deuxième colonne, quelques événements marquants dans l'ordre de l'histoire, de la science et de la culture. Les familiers du XVIIIème siècle, de la Révolution, de l'Empire et de la Restauration nous pardonneront ces pense-bêtes.

(20) *Exposition du Système du Monde,* édition de 1824.

(21) Ceci est confirmé dans une lettre de Fourier, auditeur à l'Ecole Normale, croquant avec mordant les manies de ses professeurs (cf. Bull. Soc. Sc. Hist. et Nat. de l'Yonne, 1871, pages 229-232).

Université de Nantes et Université d'Ottawa,
Conseiller scientifique, Ambassade de France au Canada, 42 Sussex, Ottawa, Ont. K1M 2C9.

* * *

THE BOBILLIER ENVELOPE THEOREM

DAN PEDOE

In Exercise 4 on page 100 of my book *Geometry and the Liberal Arts* [4], I invite the reader, if he is willing, to verify by drawing that

If a triangular lamina ABC *moves so that* AB *touches a fixed circle* γ *and* AC *touches another fixed circle* β, *then the envelope of the third side* BC *is a third circle* α.

I had a mental note that this attractive theorem was due to Bobillier, and recently I tried to prove it and to find a reference for it. I quickly succeeded in my first endeavour but had more difficulty with my second. There are, it is true, brief references to Bobillier in a few currently available geometry books, e.g. Coolidge [2] and Salmon [8], but they do not refer to this particular theorem. I then recollected seeing this theorem on the left-hand page of a geometry book I used as a student, fifty years ago. After a wait of some weeks, an interlibrary loan, from the University of Cincinnati, confirmed my belief that this theorem, given in the index as Bobillier's Theorem, does appear on a left-hand page, in fact on page 158, as Exercise 3, of *A Sequel to Elementary Geometry, With Numerous Examples*, by John Wellesley Russell, M.A. [7]. This book was first published in 1907. Since then, acting on a friendly tip, I found the theorem, again credited to Bobillier, as Exercise 99 on page 159 of Casey [1]. Finally the editor, who has a copy of the rare *Exercices de Géométrie* by F.G.-M. [3], found in it the information on Bobillier contained in the following paragraph. But the book did not mention our theorem.

Bobillier (1797-1832) died at the young age of 35. He was a professor at the *École d'arts et métiers de Châlons*, and author of a *Cours de géométrie* and a *Principes d'algèbre*, both of which were textbooks destined for students of the *écoles d'arts et métiers*. His *Cours de géométrie* was the first textbook to introduce the notion of *barycentre*. He is credited with the following familiar formula connecting the radii of the circumscribed, inscribed, and escribed circles of a triangle:

$$4R = r_a + r_b + r_c - r.$$

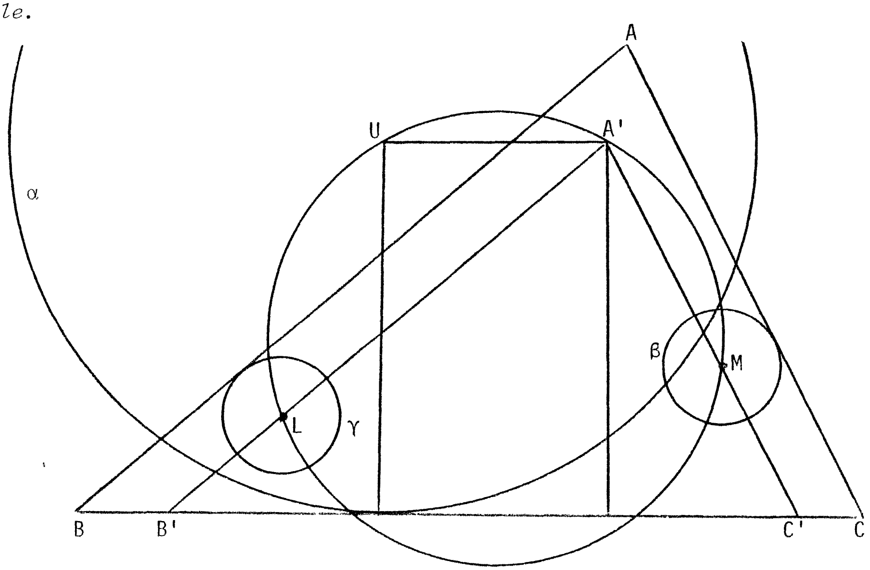
Perhaps readers of this journal may be able to trace our theorem in Bobillier's original works (Russell and Casey give no reference) and explain why this beautiful theorem has vanished from modern geometry books, some of which obviously owe much in other ways to Russell's and Casey's excellent texts. I have included it in the reprint of my book *Circles* [6], to which I was asked to add Exercises, the original edition not containing any.

Russell gives the theorem as a sequel to a short discussion of the motion of a lamina in its plane, the instantaneous centre of motion being introduced. This also is a topic omitted from modern geometry books (see [5]).

When I described the Bobillier theorem to Dan Sokolowsky, he found one aspect of the configuration very intriguing. If we regard triangle ABC as fixed, and the circles α, β, and γ as in motion, the whole thing suggests a circus tricycle act, with three wheels rigidly attached to each other, each sliding along the sides of triangle ABC, the whole motion taking place in a plane. One feels that this could be made into an entertaining toy, and it may well already be in existence, somewhere.

The proof of the Bobillier Theorem, as in Russell, proceeds from the special case when γ and β are both points. We prove the

LEMMA. If, for a given triangular lamina A'B'C', *the side* A'B' *passes through a given point* L *and* A'C' *passes through a given point* M, *then* B'C' *touches a fixed circle.*



Proof. The circle A'LM (see figure) remains fixed as A' moves, since L and M are fixed and $\angle$LA'M is given. If A'U is parallel to B'C', meeting this circle in U, then $\angle UA'L = \angle A'B'C'$, which is given, so that U is a fixed point on the circle A'LM. The perpendicular from U onto B'C' is equal to that from A' onto B'C', and is therefore constant. Hence B'C' touches a circle α, centre U, of radius equal to the perpendicular distance of A' from B'C'. This proves the lemma.

Coming back now to the original lamina ABC, if AB touches a circle γ and AC touches a circle β, then suitable parallels to AB and to AC pass through the centres L and M of γ and β, respectively, and BC is attached to a triangular lamina which satisfies the conditions of the lemma, and the Bobillier Theorem follows.

The proof makes it plain that BC touches different circles, according to the manner in which AB touches γ and AC touches β.

REFERENCES

1. John Casey, *A Sequel to Euclid*, Sixth Edition, Longmans, Green, London, 1892.

2. Julian Lowell Coolidge, *A History of Geometrical Methods*, Dover, New York, 1963, pp. 143, 144, 163, 427.

3. F.G.-M., *Exercices de Géométrie*, Quatrième édition, Mame et Fils, Tours, 1907, pp. 118, 229, 314.

4. Dan Pedoe, *Geometry and the Liberal Arts*, St. Martin's Press, New York, 1978.

5. ______, "The Ellipse as an Hypotrochoid", *Mathematics Magazine*, 48 (1975) 228-230.

6. ______, *Circles*, Dover, New York, 1979.

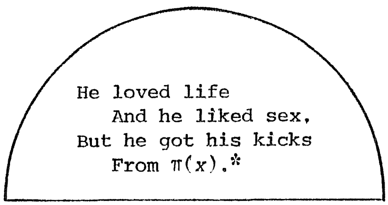
7. John Wellesley Russell, *A Sequel to Elementary Geometry*, Clarendon Press, Oxford, 1913.

8. George Salmon, *A Treatise on Conic Sections*, Chelsea, New York (no date), p. 120.

School of Mathematics, University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota 55455.

* * *

EPITAPH FOR A NUMBER THEORIST



Footstone ⟹ $\boxed{* \ \pi(x) = \text{the number of primes} \le x}$

HAROLD N. SHAPIRO

THE OLYMPIAD CORNER: 2

MURRAY S. KLAMKIN

We present this month one new Practice Set and solutions to Practice Set 1 which appeared in last month's column. Teachers should impress upon their students that solutions should be *clear*, *concise* and *complete*, since *good presentation counts* in the Olympiads. This includes *legibility*, *good English* and *mathematical clarity*.

PRACTICE SET 4 (3 hours)

4-1. What is the probability of an odd number of sixes turning up in a random toss of n fair dice?

4-2. If a, b, c, d are real, prove that

$$\left\{\begin{aligned} a^2+b^2 &= 2, \\ c^2+d^2 &= 2, \\ ac &= bd, \end{aligned}\right\} \quad \text{if and only if} \quad \left\{\begin{aligned} a^2+c^2 &= 2, \\ b^2+d^2 &= 2, \\ ab &= cd. \end{aligned}\right\}$$

4-3. If a, a'; b, b'; and c, c' are the lengths of the three pairs of opposite edges of an arbitrary tetrahedron, prove that

(i) there exists a triangle whose sides have lengths $a+a'$, $b+b'$, and $c+c'$;

(ii) the triangle in (i) is acute.

SOLUTIONS TO PRACTICE SET 1

1-1. If a, b, c, d are positive integers such that $ab = cd$, prove that $a^2+b^2+c^2+d^2$ is never a prime number.

Solution.

Since c divides ab, we can let $c = nm$, where m divides a and n divides b. Then $a = pm$, $b = qn$, and $d = pq$. Thus

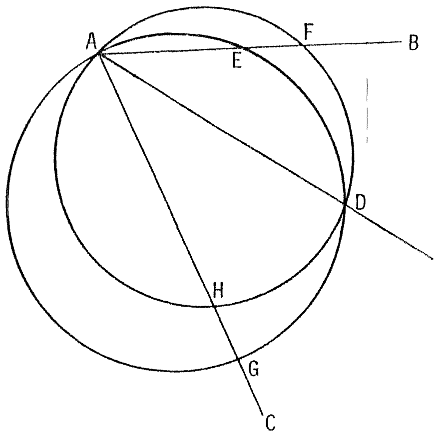
$$a^2+b^2+c^2+d^2 = p^2m^2+q^2n^2+m^2n^2+p^2q^2 = (m^2+q^2)(p^2+n^2).$$

1-2. If two circles pass through the vertex and a point on the bisector of an angle, prove that they intercept equal segments on the sides of the angle.

Solution.

In the figure on the next page, we have $\angle BAD = \angle CAD$, $DE = DG$, and $DF = DH$, since equal angles in a circle subtend equal arcs and chords. Also, $\angle EDG = \angle FDH$

(both are supplements of $\angle BAC$). Thus $\angle EDF = \angle HDG$, so $\Delta DEF \cong \Delta DGH$ and $EF = GH$.



1-3. (a) If $a, b, c \geq 0$ and $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$, prove that $abc \leq 1$.

(b) If $a, b, c \geq 1$, prove that $4(abc+1) \geq (1+a)(1+b)(1+c)$.

Solution.

(a) We have

$$8 = (1+a)(1+b)(1+c) = 1 + \Sigma a + \Sigma bc + abc,$$

where Σ denotes symmetric sums, e.g., $\Sigma bc = bc + ca + ab$. Then we use the known inequalities

$$a+b+c \geq 3(abc)^{1/3}, \qquad bc+ca+ab \geq 3(abc)^{2/3},$$

giving $8 \geq 1 + 3P + 3P^2 + P^3 = (1+P)^3$, where $P^3 = abc$, and so $P \leq 1$. There is equality *iff* (if and only if) $a = b = c = 1$.

This inequality can be generalized to $a_1 a_2 \ldots a_n \leq 1$ when $a_i \geq 0$ and

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) = 2^n.$$

The proof is similar and uses Maclaurin's inequalities for symmetric functions:

$$P_1 \geq P_2^{1/2} \geq P_3^{1/3} \geq \ldots \geq P_n^{1/n},$$

where

$$P_1 = \Sigma a_i/n, \quad P_2 = \Sigma a_1 a_2 \Big/ \binom{n}{2}, \ldots, \quad P_r = \Sigma a_1 a_2 \ldots a_r \Big/ \binom{n}{r}, \ldots, \quad P_n = a_1 a_2 \ldots a_n.$$

(b) We show more generally that, if all the $a_i \geq 1$, then

$$2^{n-1}(P_n + 1) \geq (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n), \tag{1}$$

where $P_n = a_1 a_2 \ldots a_n$. Our proof is by induction. It is clear that (1) holds trivially for $n = 1$, but it will be more instructive to verify it for $n = 2$. Then (1) states that

$$2(a_1 a_2 + 1) \geq (1+a_1)(1+a_2), \tag{2}$$

and this is equivalent to

$$(a_1 - 1)(a_2 - 1) \geq 0, \tag{3}$$

which is known to be true. If the equivalence of (2) and (3) is written in the form

$$2(P_2+1) \ge (1+P_1)(1+a_2) \iff (P_1-1)(a_2-1) \ge 0,$$

we are led to verify that

$$2(P_{n+1}+1) \ge (1+P_n)(1+a_{n+1}) \iff (P_n-1)(a_{n+1}-1) \ge 0 \qquad (4)$$

is also an equivalence, the right side of which is known to be true.

Now suppose (1) holds for some $n \ge 1$; then, using the left inequality in (4), we have

$$\begin{aligned} 2^n(P_{n+1}+1) &= 2^{n-1}\cdot 2(P_{n+1}+1) \\ &\ge 2^{n-1}(P_n+1)(1+a_{n+1}) \\ &\ge (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)(1+a_{n+1}), \end{aligned}$$

and the induction is complete.

This proof makes it clear that the result is also valid if all the a_i satisfy $0 \le a_i \le 1$.

Editor's note. All communications about this column should be sent to Professor M.S. Klamkin, Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada T6G 2G1.

* * *

PROBLEMS--PROBLÈMES

Problem proposals and solutions should be sent to the editor, whose address appears on the front page of this issue. Proposals should, whenever possible, be accompanied by a solution, references, and other insights which are likely to be of help to the editor. An asterisk (*) after a number indicates a problem submitted without a solution.

Original problems are particularly sought. But other interesting problems may also be acceptable provided they are not too well known and references are given as to their provenance. Ordinarily, if the originator of a problem can be located, it should not be submitted by somebody else without his permission.

To facilitate their consideration, your solutions, typewritten or neatly handwritten on signed, separate sheets, should preferably be mailed to the editor before May 1, 1979, although solutions received after that date will also be considered until the time when a solution is published.

411. *Proposed by Alan Wayne, Pasco-Hernando Community College, New Port Richey, Florida.*

"But you can't make arithmetic out of passion. Passion has no square root." (Steve Shagan, *City of Angels*, G.P. Putnam's Sons, New York, 1975, p. 16.)

On the contrary, show that in the decimal system

$$\sqrt{\text{PASSION}} = \text{KISS}$$

has a unique solution.

412.* *Proposed by Kesiraju Satyanarayana, Gagan Mahal Colony, Hyderabad, India.*

The sides BC, CA, AB of ΔABC are produced respectively to D, E, F so that CD = AE = BF. Show that ΔABC is equilateral if ΔDEF is equilateral.

(This problem was brought to my notice several years ago. I was told it was from a magazine. It is, of course, a converse of the trivial problem that ΔDEF is equilateral if ΔABC is equilateral.)

413. *Proposed by G.C. Giri, Research Scholar, Indian Institute of Technology, Kharagpur, India.*

If $a,b,c > 0$, prove that

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \le \frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3}.$$

414. *Proposed by Basil C. Rennie, James Cook University of North Queensland, Australia.*

A few years ago a distinguished mathematician wrote a book saying that the theorems of Ceva and Menelaus were dual to each other. Another distinguished mathematician reviewing the book wrote that they were not dual. Explain why they were both right or, if you are feeling in a sour mood, why they were both wrong.

415.* *Proposed by A. Liu, University of Alberta.*

Is there a Euclidean construction of a triangle given two sides and the radius of the incircle?

416. *Proposed by W.A. McWorter Jr., The Ohio State University.*

Let A_0BC be a triangle and a a positive number less than 1. Construct P_1 on A_0B so that $A_0P_1/A_0B = a$. Construct A_1 on P_1C so that $P_1A_1/P_1C = a$. Inductively construct P_{n+1} on A_nB so that $A_nP_{n+1}/A_nB = a$ and construct A_{n+1} on $P_{n+1}C$ so that $P_{n+1}A_{n+1}/P_{n+1}C = a$. Show that all the P_i are on a line and all the A_i are on a line, the two lines being parallel.

417. *Proposed by John A. Tierney, U.S. Naval Academy, Annapolis, Maryland.*

It is easy to guess from the graph of the folium of Descartes,

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0, \quad a > 0$$

that the point of maximum curvature is $(3a/2, 3a/2)$. Prove it.

418*. *Proposed by James Gary Propp, student, Harvard College.*

Given a sequence S consisting of n consecutive natural numbers with $n \geq 3$, two players take turns striking terms from S until only two terms a,b remain. If a and b are relatively prime, then the player with the first move wins; otherwise, his opponent does. For what values of n does the first player have a winning strategy, regardless of S?

419. *Proposed by G. Ramanaiah, Madras Institute of Technology, India.*

A variable point P describes the ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Does it make sense to speak of "the mean distance of P from a focus S"? If so, what is this mean distance?

420. *Proposed by J.A. Spencer, Magrath, Alberta.*

Given an angle AOB, find an economical Euclidean construction that will quadrisect the angle. "Economical" means here using the smallest possible number of Euclidean operations: setting a compass, striking an arc, drawing a line.

* * *

SOLUTIONS

No problem is ever permanently closed. The editor will always be pleased to consider for publication new solutions or new insights on past problems.

88. [1975: 85; 1976: 33] *Proposé par F.G.B. Maskell, Collège Algonquin.*

Evaluer l'intégrale indéfinie

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$$

II. *Comment by M.S. Klamkin, University of Alberta.*

More generally, the method used in solution I can be used to evaluate, for any positive integer n,

$$I_n = \int \frac{dx}{\sqrt[n]{1+x^n}}.$$

Here we set

$$u = \frac{x}{\sqrt[n]{1+x^n}}, \qquad \text{so} \qquad du = \frac{dx}{(1+x^n)^{1+1/n}}$$

and

$$I_n = \int (1+x^n)\,du = \int \frac{du}{1-u^n},$$

which can be evaluated by standard methods (e.g., partial fractions).

* * *

325. [1978: 66, 258] *Proposed by Basil C. Rennie, James Cook University of North Queensland, Australia.*

It is well-known that if you put two pins (thumb-tacks) in a drawing board and a loop of string around them you can draw an ellipse by pulling the string tight with a pencil. Now suppose that instead of the two pins you use an ellipse cut out from plywood. Will the pencil in the loop of string trace out another ellipse?

II. *Comment by Dan Pedoe, University of Minnesota.*

In the published solution [1978: 258], some conceptual economy can be achieved by omitting any reference to focal angles. A ray passing through any point within the plywood ellipse E will intersect a given confocal ellipse in a unique point P; and if O is the point chosen within E, the essential fact, implied but not mentioned in the proof, is that δP is a steadily increasing function of OP. Hence there is a one-to-one correspondence between δP and points P on the ray through O which are outside E, and the converse of the Graves Theorem follows. The solver is to be commended, however, for his insistence on proving both necessary and sufficient conditions are satisfied by a given locus.

The editor in a comment [1978: 259] expressed uncertainty as to the content of the reference Klein [1]. What Klein proves, by elliptic integrals and also by an elementary method, is Graves's Theorem. He adds that the converse is evident. Macaulay [2] proves the problem as stated here and deduces Graves's Theorem as an evident conclusion. Sommerville [3] proves our problem and calls it Graves's Theorem, making far too great use of limiting processes.

REFERENCES

1. Felix Klein, *Vorlesungen über höhere Geometrie*, Springer's Grundlehren, Bd. 22, 3rd edition, 1968, pp. 32-35.

2. F.S. Macaulay, *Geometrical Conics*, Cambridge University Press, 1921, p. 236.

3. D.M.Y. Sommerville, *Analytical Conics*, Bell, London, 1924, p. 199.

*　　　*　　　*

347. [1978: 134, 191] *Proposed by M.S. Klamkin, University of Alberta.*

Determine the maximum value of

$$\sqrt[3]{4-3x+\sqrt{16-24x+9x^2-x^3}}+\sqrt[3]{4-3x-\sqrt{16-24x+9x^2-x^3}}$$

in the interval $-1 \le x \le 1$.

Solution de Hippolyte Charles, Waterloo, Québec.

Puisque nous sommes à la recherche d'une valeur maximale, la fonction en question doit être à valeurs réelles; et comme

$$16 - 24x + 9x^2 - x^3 = (1 - x)(4 - x)^2,$$

la fonction n'est définie que pour $x \leq 1$, avec un point isolé à $x = 4$.

Notons A et B les deux racines cubiques, et soit S leur somme. On a alors

$$S^3 = (A + B)^3 = A^3 + B^3 + 3ABS = 8 - 6x + 3xS,$$

d'où $S^3 - 8 - 3x(S - 2) = 0$ et

$$(S - 2)(S^2 + 2S + 4 - 3x) = 0.$$

Or les zéros du second facteur sont imaginaires quand $x < 1$. Pour toutes ces valeurs, donc, on doit avoir $S = 2$, valeur que l'on obtient encore pour $x = 1$. La fonction prend donc la valeur constante $S = 2$, non pas seulement dans l'intervalle $-1 \leq x \leq 1$, mais pour tout $x \leq 1$.

Also solved by STEVE CURRAN and DIANA PALENZ (independently), both for the Beloit College Solvers, Beloit, Wisconsin; ROBERT S. JOHNSON, Montréal, Québec; JEREMY PRIMER, student, Columbia H.S., Maplewood, N.J.; BASIL C. RENNIE, James Cook University of North Queensland, Australia; KESIRAJU SATYANARAYANA, Gagan Mahal Colony, Hyderabad, India; and the proposer.

Editor's comment.

The proposer mentioned that the problem was suggested by a note of Claire Adler, "A Modern Trick", *American Mathematical Monthly*, 59 (1952) 328.

* * *

348. [1978: 134] *Proposed by Gilbert W. Kessler, Canarsie High School, Brooklyn, N.Y.*

I launched a missle, airward bound;
Velocity—the speed of sound;
Its angle—30. Can you tell
How far from here that missle fell?

I. *Solution by P.R. Beesack, Carleton University, Ottawa (to be sung to the tune of "Auld Lang Syne").*

Should air resistance be forgot
And curvature ignored,
While v is just the speed of sound
And g is Newton's constant,

The missile then will fall to earth
Or dive into the sea
At distance v squared root of three
All over two times g.

II. *Epic solution by Leon Bankoff, Los Angeles, California.*

I'd gladly tell how far from here
That missile fell if it were clear
How fast it travelled, or how slow:
That's something I would have to know.
The speed would vary, that's for sure,
With pressure and with temperature.
Air motion and humidity
Will alter the validity
Of oversimplified equations
Purporting to reveal relations
Between the v's and g's and sines,
The y's and x's and cosines.

For practicality it's fitting
That we eliminate hair-splitting.
If we're content to forego rigor
We could proceed at once with vigor
By first approximating v
At, for example, 20 C.
(Eleven thirty feet per second
Is close enough—or so they've reckoned.)
The range when multiplied by g
Is $\sin 2\theta$ square of v.
Since all the factors now are known
It's clear how far the missile's flown.

Just plug into your calculator
Root 3 slash 2 for $\sin 2\theta$.
For g use thirty-two point two,
Or some say merely thirty-two.

The seconds squared will cancel out,
While feet-squared over feet, no doubt,
Will leave us with the proper units,
Thus pleasing those who pick a few nits.
The method's quick—it is terrific
For computations scientific.
It works in metric just as well
To tell us where the missile fell.

III. *Solution by Robert S. Johnson, Montréal, Québec.*

Modern missiles are not like bullets: they have *loads* which provide *thrust* to counter gravitational attraction. At angle 30° and the speed of sound (≈ 1100 ft/sec or 750 mi/hr), if the load is sufficient to provide thrust for one hour, the missile will then be at an elevation of about 400 miles above the surface of the earth.

Meanwhile, back at Mission Control, the expected message comes, wafted over the air waves:

I am a missile flying straight
At speed of sound, a constant rate.
My soul rejoiceth, for my future's
No more to lie down in green pastures.
For if I put my thrust in the load
    I shall not want
To know where lies the end of the road.

I am a missile flying straight
To the orbiting life which is my fate.

Also solved by LOUIS H. CAIROLI, Kansas State University, Manhattan, Kansas; CLAYTON W. DODGE, University of Maine at Orono; ALLAN Wm. JOHNSON Jr., Washington, D.C.; N. KRISHNASWAMY, student, Indian Institute of Technology, Kharagpur, India; LAI LANE LUEY, Willowdale, Ontario; DONALD P. SKOW, McAllen H.S., McAllen, Texas; and KENNETH M. WILKE, Topeka, Kansas.

Edith Orr's comment.

The Muse wept, because several solvers treated the problem strictly as a mathematical challenge (the editor tells me it wasn't much of *that*) rather than as a *poetic* one. Such persons have no romance in their makeup and must have a dried pea for a soul.

* * *

349. [1978: 134] *Proposed by the late R. Robinson Rowe, Sacramento, California.*

Solve in positive integers a and b the continued fraction equation

$$2\left\{\frac{1}{a+}\ \frac{1}{a+}\ \frac{1}{a+}\ \cdots\right\} - \left\{\frac{1}{b+}\ \frac{1}{b+}\ \frac{1}{b+}\ \cdots\right\} = 1.$$

Solution by P.R. Beesack, Carleton University, Ottawa.

It is known from the theory of continued fractions that, for all $c > 0$,

$$\frac{1}{c+}\ \frac{1}{c+}\ \frac{1}{c+}\ \cdots$$

converges to a positive limit. If λ is this limit, then $\lambda = 1/(c+\lambda)$, so $\lambda^2 + c\lambda - 1 = 0$ and $\lambda = \frac{1}{2}\{-c + \sqrt{c^2+4}\}$. Thus, if a and b are both positive, the given equation is equivalent to

$$-a + \sqrt{a^2+4} - \tfrac{1}{2}\{-b + \sqrt{b^2+4}\} = 1. \tag{1}$$

We will find all solutions (a,b) of (1) in which a and b are both positive and a is an integer, thus slightly weakening the hypothesis of the problem.

If (1) is written in the equivalent form

$$\sqrt{b^2+4} - b = 2\{\sqrt{a^2+4} - (a+1)\},$$

in which the left side is always positive, we see that we must have

$$a+1 < \sqrt{a^2+4} \qquad \text{or} \qquad 2a < 3.$$

Thus $a = 1$, and the required solutions are all the pairs $(1,b)$ where b is a positive solution of the equation

$$\sqrt{b^2+4} - b = 2(\sqrt{5} - 2). \tag{2}$$

Since the *only* solution of (2) is $b = 4$, the unique answer to our problem is $(a,b) = (1,4)$.

Also solved by LOUIS H. CAIROLI, Kansas State University, Manhattan, Kansas; CLAYTON W. DODGE, University of Maine at Orono; ALLAN Wm. JOHNSON Jr., Washington, D.C.; LAI LANE LUEY, Willowdale, Ontario; LEROY F. MEYERS, The Ohio State University; BOB PRIELIPP, The University of Wisconsin-Oshkosh; HYMAN ROSEN, Yeshiva University H.S., Brooklyn, N.Y.; KESIRAJU SATYANARAYANA, Gagan Mahal Colony, Hyderabad, India; KENNETH M. WILKE, Topeka, Kansas; and the proposer.

* * *

350. [1978: 135] *Proposed by W.A. McWorter, Jr., The Ohio State University.*

What regular n-gons can be constructed by paper folding? (Scissors and paste are assumed to be available if needed.)

Solution by the proposer.

All regular n-gons can be constructed. Take a piece of paper and fold it once. Fold it again so that the first fold is folded on itself creating two perpendicular folds. Fold it again so that the second fold coincides with the doubled first fold, creating eight 45° angles. Repeat to produce sixteen 22.5° angles and continue until you have 2^k angles, where k is chosen so that 2^{k-1} exceeds n. Open the last fold so that you have 2^{k-1} angles bisected by a crease. Fold the common vertex of all these triangles so that the crease is folded on itself producing a fold perpendicular to the crease. Cut the paper along this last fold, producing a regular 2^{k-1}-gon. Cut away enough of the triangles so that $n+1$ are left. Glue the first to the last, producing a pyramid with an n-gon as base. Put the pyramid on a flat surface and gently press the vertex of the pyramid until all sides of the base touch the surface. The base then becomes a regular n-gon.

* * *

351. [1978: 159] *Proposed by Sidney Kravitz, Dover, N.J.*

Solve the following base ten alphametic addition:

$$\begin{array}{r} \text{GRAPE} \\ \underline{\text{APPLE}} \\ \text{CHERRY} \end{array}.$$

Solution by Allan Wm. Johnson Jr., Washington, D.C.

This problem is nourishing but indigestible. It is easy enough to find C = 1 and $|A - L| = 1$; but beyond this, without the use of a food processing machine, much tedious mastication is required [details of which will be mercifully omitted (Editor)]. The resulting unique answer is

$$\begin{array}{r} 90634 \\ \underline{63374} \\ 154008 \end{array}.$$

A more natural setting for this problem would have been base nine, since nine distinct letters are involved. Here the answer is also unique:

$$\begin{array}{r} 56428 \\ \underline{42238} \\ 108667 \end{array}.$$

Also solved by CLAYTON W. DODGE, University of Maine at Orono; J.A.H. HUNTER, Toronto, Ontario; the following student of ARVON KYER, Eastview Secondary School, Barrie, Ontario: DANIAL GARBALLA; the following students of JACK LeSAGE, Eastview Secondary School, Barrie, Ontario: JOHN PAJAK, SHARON SIEBERT; HERMAN NYON, Paramaribo, Surinam; CHARLES W. TRIGG, San Diego, California; KENNETH M. WILKE, Topeka, Kansas; and the proposer.

* * *

352. [1978: 159] *Proposed by Dan Sokolowsky, Antioch College, Yellow Springs, Ohio.*

Let

$$x^{(0)} = 1; \qquad x^{(n)} = \prod_{k=1}^{n} \{x+(k-1)c\}, \quad c \text{ constant}, \quad n = 1,2,\ldots .$$

Prove that

$$(a+b)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{(n-k)} b^{(k)}, \quad n = 0,1,2,\ldots .$$

Solution by Basil C. Rennie, James Cook University of North Queensland, Australia.

For $c = 0$, the given identity becomes merely a statement of the binomial theorem, so we assume $c \neq 0$. We start with the Leibniz formula for derivatives of a product:

$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (D^{n-k}f)(D^k g), \quad n = 0,1,2,\ldots .$$

If we apply this formula to the functions defined by

$$f(x) = x^{-a/c} \quad \text{and} \quad g(x) = x^{-b/c},$$

then multiply both sides by $(-c)^n$ and set $x = 1$, we obtain precisely

$$(a+b)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{(n-k)} b^{(k)}.$$

Also solved by G.P. HENDERSON, Campbellcroft, Ontario; ALLAN Wm. JOHNSON Jr., Washington, D.C.; M.S. KLAMKIN, University of Alberta (two solutions); BOB PRIELIPP, The University of Wisconsin-Oshkosh; KESIRAJU SATYANARAYANA, Gagan Mahal Colony, Hyderabad, India; KENNETH M. WILKE, Topeka, Kansas; and the proposer (two solutions). A comment was received from LEROY F. MEYERS, The Ohio State University.

Editor's comment.

Meyers located this problem and a multinomial analogue in Pólya-Szegö [1], together with an outline of a proof that is quite different from the one presented here. The existence of a multinomial analogue was also mentioned by Klamkin who, by way of illustration, gave the trinomial version:

$$(x+y+z)^{(n)} = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} x^{(i)} y^{(j)} z^{(k)}.$$

REFERENCE

1. G. Pólya & G. Szegö, *Problems and Theorems in Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1972, Vol. I, pp. 7, 183, Problems 35 and 36.

* * *

353, [1978: 159] *Proposed by Orlando Ramos, Instituto Politécnico José Antonio Echevarría, Habana, Cuba.*

Prove that, if a triangle is self-polar with respect to a parabola, its nine-point circle passes through the focus.

Comment by Sahib Ram Mandan, Indian Institute of Technology, Kharagpur, India.

The problem as stated is given and solved in Baker [2]. It is an immediate consequence of the following two theorems, which can also be found in the more accessible Baker [3]:

THEOREM 1. *If a triangle T is self-polar with respect to a parabola, the sides of its medial triangle T' (whose vertices are the midpoints of the sides of T) are all tangent to the parabola.*

THEOREM 2. *Any three tangents of a parabola form a triangle whose circumcircle contains the focus of the curve.*

The proof should now be obvious, for the circumcircle of T' is the nine-point circle of T.

Also solved by JORDI DOU, Escola Tecnica Superior Arquitectura de Barcelona, Spain; DAN PEDOE, University of Minnesota; BASIL C. RENNIE, James Cook University of North Queensland, Australia; KESIRAJU SATYANARAYANA, Gagan Mahal Colony, Hyderabad, India; and the proposer.

Editor's comment.

Pedoe also found our problem as an exercise in Durell [4], and the proposer located our Theorem 2 in Archbold [1].

REFERENCES

1. J.W. Archbold, *Introduction to the algebraic geometry of the plane*, London, 1947, p. 165.
2. H.F. Baker, *Principles of Geometry II*, Cambridge, 1954, p. 83, Exercise 5.
3. _______, *An Introduction to Plane Geometry*, Chelsea, 1971, pp. 137, 140.
4. C.V. Durell, *Projective Geometry*, Macmillan, London, 1945, p.95 , Exercise 3.

* * *

354. [1978: 159] *Proposed by Sidney Penner, Bronx Community College, Bronx, N.Y.*

Along a circular road there are n identical parked automobiles. The total amount of gas in all of the vehicles is enough for only one of them to travel the whole circular road. Prove that at least one of these cars could travel the entire road, taking on gas along the way from the other $n-1$ vehicles.

I. *Solution by Dan Eustice, The Ohio State University (slightly extended by the editor).*

We will use the following

LEMMA. Let $(d_i)_{i=1}^{n}$ be a sequence of n real numbers whose sum is nonnegative, and let $d_{i+n} = d_i$. Then there exists a subscript t such that

$$\sum_{i=t}^{t+k-1} d_i \geq 0 \quad \text{for } k = 1,2,3,\ldots \,. \tag{1}$$

This lemma is essentially equivalent to a problem proposed by Conrad in [1], and a simple inductive proof of it was given by Kuenzi and Prielipp in [2]. But this proof was merely one of existence; it did not indicate how a satisfactory subscript t could be found, a task which is easily accomplished in the following constructive proof.

Let

$$S_j = \sum_{i=1}^{j} d_i, \qquad j = 1,2,3,\ldots \,.$$

The hypothesis assures us that $S_n \geq 0$. Let S_m be a minimal element of the set $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$. We show that (1) is satisfied for $t = m+1$. For each $k = 1,2,3,\ldots$, there is a k', $1 \leq k' \leq n$, such that $m+k \equiv k' \pmod{n}$, and then $S_n \geq 0$ implies that $S_{m+k} \geq S_{k'}$. Now we have

$$\sum_{i=m+1}^{m+k} d_i = S_{m+k} - S_m \geq S_{k'} - S_m \geq 0,$$

and so (1) holds for $t = m+1$.

Now, in the problem at hand, we have n automobiles in place along a circular road. We assume that they are parked with back fender to the curb, so that they can drive in either direction with equal ease. We identify them consecutively in, say, counterclockwise order, by the labels $A_1, A_2, A_3, \ldots$, with $A_{i+n} = A_i$. Let a_i be the distance that A_i can travel with the gas it has originally, and b_i the distance along the road from A_i to A_{i+1}. The problem assures us that

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

If we set $d_i = a_i - b_i$, then an automobile A_t can travel the complete circuit in the counterclockwise sense if and only if (1) holds for $k = 1,2,\ldots,n$. Since

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i \geq 0,$$

it follows from the lemma that at least one automobile can accomplish the task. In fact, if the subscript m is identified as in our proof of the lemma, then one automobile that can do the trick is A_{m+1}.

The counterclockwise sense was chosen arbitrarily. So it is clear that at least one automobile can effect the round trip in the clockwise sense, and we could even identify such an automobile by redistributing the labels A_1, A_2, $A_3,\ldots$ consecutively in the clockwise sense. But it will be more sporting to effect the identification without changing the labels (using the same license plates, so to speak). So we assume that the automobiles are still numbered consecutively in the counterclockwise sense, and the *only* change in the notation used so far is that now b_i is the distance along the road from A_i to A_{i-1}. A moment (or two) of thought will then show that if S_M is a *maximal* element of the set $\{S_1, S_2,\ldots, S_n\}$, then A_M is one automobile that can travel the entire circuit in the clockwise sense.

II. *Comment extracted from the solution of Jordi Dou, Escola Tecnica Superior Arquitectura de Barcelona, Spain.*

The lemma in solution I, from which a solution to our problem follows, is equivalent to the following

THEOREM. *Let $(\delta_i)_{i=1}^{n}$ be a sequence of n real numbers, and let $\delta_{i+n} = \delta_i$. Then there exists a subscript t such that*

$$\frac{\sum_{i=t}^{t+k-1} \delta_i}{k} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i}{n} \quad \text{for all } k = 1,2,3,\ldots\,. \tag{2}$$

Proof of equivalence. Assume the theorem. If the sum of the δ_i is nonnegative, then there exists a subscript t such that

$$\frac{\sum_{i=t}^{t+k-1} \delta_i}{k} \geq 0 \qquad \text{for all } k = 1,2,3,\ldots,$$

and the lemma follows upon setting $\delta_i = d_i$.

Conversely, assume the lemma. Denote by $\overline{\delta}$ the right member of (2), which is the arithmetic mean of the δ_i, and let

$$d_i = \delta_i - \overline{\delta}, \quad \text{so that} \quad \sum_{i=1}^{n} d_i = 0.$$

It now follows from the lemma that there is a subscript t such that, for $k = 1,2,3,\ldots,$

$$\frac{\sum_{i=t}^{t+k-1} d_i}{k} = \frac{\sum_{i=t}^{t+k-1} (\delta_i - \overline{\delta})}{k} = \frac{\sum_{i=t}^{t+k-1} \delta_i}{k} - \overline{\delta} \geq 0,$$

and the theorem follows.

III. *Solution by Basil C. Rennie, James Cook University of North Queensland, Australia.*

EXXONADU: OR, A VISION IN A DREAM

In Bronx, N.Y., did City Hall
A stately public park decree,
And there an endless road install,
A parking place for one and all.
I dreamt one night that I could see
A ghostly creature drain each tank.
At every car it stopped and drank.
This gasoline the creature found
Would give it just the energy
It needed going once around.
I noted then with sudden glee
Just where it was where hunger most
Impelled this eerie brute to drink,
And then I gently thanked the ghost
For picking out from all that host
The only car that could be found
To make the journey right around.
But note, if you have time to think,
The only one that could essay
The journey round the other way
Was clearly singled out as that
Where ghostie's belly grew most fat.

Also solved by P.R. BEESACK, Carleton University, Ottawa; the Beloit College Solvers, Beloit, Wisconsin; LOUIS H. CAIROLI, Kansas State University, Manhattan, Kansas; CLAYTON W. DODGE, University of Maine at Orono; F. DAVID HAMMER, Santa Cruz, California; G.P. HENDERSON, Campbellcroft, Ontario; ROBERT S. JOHNSON, Montréal, Québec; LEROY F. MEYERS, The Ohio State University; GALI SALVATORE, Perkins, Québec; DAN SOKOLOWSKY, Antioch College, Yellow Springs, Ohio (four solutions); KENNETH M. WILKE, Topeka, Kansas; and the proposer (two solutions). A comment was received from Murray S. Klamkin, University of Alberta.

Editor's comment.

The proposer noted that this problem appears without proof in [3]; and Klamkin wrote that an equivalent problem appears in [4], of which he is co-editor. Four solvers referred to Conrad's related problem in *Mathematics Magazine* [1, 2]; but Eustice was of course in the best position to be aware of it since he is the Problem Editor for that journal.

REFERENCES

1. Steven R. Conrad, Problem 876, *Mathematics Magazine*, 46 (September 1973) 230.

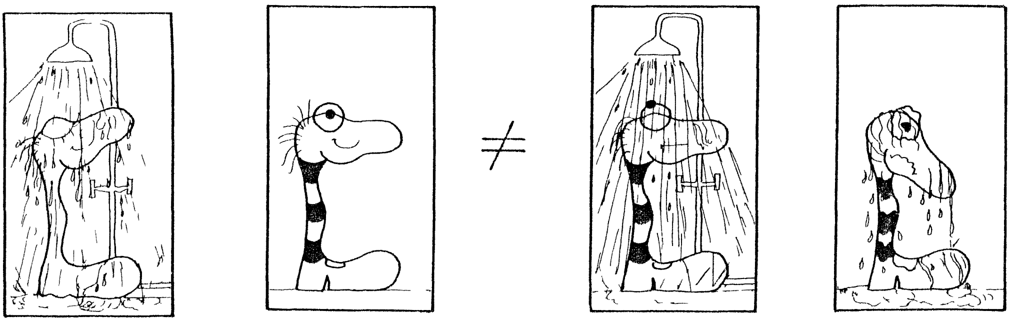
2. N.J. Kuenzi and Bob Prielipp, Solution to Problem 876, *Mathematics Magazine*, 47 (May 1974) 171.

3. V.A. Krutetskii, *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*, The University of Chicago Press, 1976, p. 150.

4. E. Barbeau, M. Klamkin, W. Moser, 1001 *Problems in High School Mathematics*, Vol. 3, Canadian Mathematical Society, 1978, p. 12.

* * *

HOW TO CONVINCE A STUDENT THAT $\sqrt{A+B} \neq \sqrt{A}+\sqrt{B}$



First take a shower... | ... then dress | First dress... | ... then take a shower

ANDREJS DUNKELS,
University of Luleå, Sweden.