Language **Spanish**

2nd Benelux Mathematical Olympiad
Amsterdam, 23–25 April 2010

Problems

Problema 1. Un conjunto finito de enteros se denomina *malo* si la suma de sus elementos es 2010. Un conjunto finito de enteros se denomina *conjunto Benelux* si ninguno de sus subconjuntos es un conjunto malo. Determinar el menor entero n para el cual existe una partición del conjunto $\{502, 503, 504, \ldots, 2009\}$ en n conjuntos Benelux.
(Una partición de un conjunto S en n subconjuntos es una colección de n subconjuntos de S disjuntos dos a dos, cuya unión es igual a S.)

Problema 2. Determinar todos los polinomios $p(x)$ con coeficientes reales tales que

$$p(a+b-2c)+p(b+c-2a)+p(c+a-2b)=3p(a-b)+3p(b-c)+3p(c-a)$$

para todos los $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Problema 3. Los puntos A, B y P están sobre la recta l, en ese orden. Sea a la recta perpendicular a l por A, y sea b la recta perpendicular a l por B. Una recta distinta de l que pasa por P corta a la recta a en Q y a la recta b en R. La perpendicular por A a BQ corta a BQ en L y a BR en T. La perpendicular a AR por B corta a AR en K, y a AQ en S.

(a) Demostrar que P, T, S están alineados.

(b) Demostrar que P, K, L están alineados.

Problema 4. Determinar todas las cuaternas (a, b, p, n) de enteros positivos tales que p es primo y

$$a^3+b^3=p^n.$$