COMPETICIÓN **MATEMÁTICA MEDITERRÁNEA 2011**

Memorial Peter O'Halloran

Requena, 7 de mayo de 2011

Problema 1

Un *polinomio mediterráneo* es de la forma

$$P(x) = x^{10} - 20x^9 + 135x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

y sólo tiene raíces reales. Sus coeficientes son reales también. Determinar el mayor número real que puede ser raíz de un *polinomio mediterráneo.*

Problema 2

Sea A un conjunto finito de números reales positivos; sea B el conjunto de números de la forma x/y, siendo x e y elementos de A; y sea C el conjunto de números de la forma xy, siendo x e y elementos de A.

Si representamos con $|S|$ el número de elementos del conjunto S, demostrar que $|A|\cdot|B| \le |C|^2$.

Problema 3

De un tetraedro regular de altura *h* se corta un tetraedro regular de altura *xh* por medio de un plano paralelo a la base.

Cuando el tronco de pirámide resultante se coloca en un plano horizontal sobre una de sus caras laterales, la proyección del centro de gravedad G del tronco de cono es un punto de la base menor de esta cara lateral.

Demostrar que *x* es una raíz de la ecuación $x^3+x^2+x = 2$.

Problema 4

Sea D el pie de la bisectriz interior del ángulo $\measuredangle A$ del triángulo ABC .La recta que une los incentros de los triángulos ABD y ACD corta a AB en M y a AC en N. Demostrar que BN y CM se cortan sobre la bisectriz AD.

Tiempo: 4 horas

No se permite el uso de calculadoras ni dispositivos electrónicos de ninguna clase, ni de ningún libro o documento distinto de los que pudiera proporcionar el Tribunal.