**Problemas de Nivel medio y de Olimpiadas 40**
**Cinco problemas de la Olimpiada de Suiza 2007**

CH1. Determinar todas las soluciones reales positivas del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a &= \max\left\{\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right\}\ ;\ b=\max\left\{\frac{1}{c},\frac{1}{d}\right\}\ ;\ c=\max\left\{\frac{1}{d},\frac{1}{e}\right\} \\ d &= \max\left\{\frac{1}{e},\frac{1}{f}\right\}\ ;\ \ e=\max\left\{\frac{1}{f},\frac{1}{a}\right\}\ ;\ f=\max\left\{\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right\} \end{aligned}$$

CH2. Sea ABC un triángulo acutángulo con AB > AC y ortocentro H. Sea D el pie de la altura desde A sobre BC. Sea E el simétrico de C respecto de D. Las rectas AE y BH se cortan en el punto S. Sea N el punto medio de AE y M el punto medio de BH. Demostrar que MN es perpendicular a DS.

CH3. Determinar todas las funciones $f:\mathbb{R}_{\geq 0}\longrightarrow\mathbb{R}_{\geq 0}$ que verifican las propiedades siguientes:
i) $f(1)=0$
ii) $f(x)>0$ para todo $x>1$.
iii) Cualesquiera que sean $x,y\geq 0$ tales que $x+y>0$, se verifica

$$f\left(xf\left(y\right)\right)f\left(y\right)=f\left(\frac{xy}{x+y}\right).$$

CH4. Sean $a,b,c$ números reales no negativos con media aritmética $m=\frac{a+b+c}{3}$.
Demostrar que

$$\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}}+\sqrt{b+\sqrt{c+\sqrt{a}}}+\sqrt{c+\sqrt{a+\sqrt{b}}}\leq 3\sqrt{m+\sqrt{m+\sqrt{m}}}.$$

CH5. Hallar todos los pares $(a,b)$ de números naturales tales que

$$\frac{a^3+1}{2ab^2+1}\ \text{ es un número entero.}$$