

Departamento de física, Facultad de Ciencias, Bogotá, Colombia



Determinación de la cantidad mínima de puntos necesaria para la reconstrucción de curvas de luz de estrellas variables

Alejandro Cubillos
Asesor: Profesor Alejandro García

Presentación del documento de proyecto de grado, en cumplimiento a los requisitos para la
obtención del título de físico

Diciembre 15, 2021

Índice general

.....	6
1. Introducción	9
1.1. Teorema de Nyquist-Shannon	10
1.2. Métodos para hallar los períodos de estrellas variables	10
1.2.1. Método de mínima entropía:	10
1.2.2. Método de fnpeaks:	14
1.2.3. Método de Lomb-Scargle:	15
2. Datos y tipos de estrellas	17
2.1. Descripción de algunas estrellas variables	18
2.1.1. Cefeidas clásicas:	18
2.1.2. RR Lyræ:	22
2.1.3. Estrellas binarias eclipsantes:	24
2.2. Relación período-luminosidad de Leavitt	27
3. Estrellas a estudiar y sus períodos con los datos completos	28
3.1. Períodos de las Estrellas Cefeidas y sus curvas de Luz	28
3.1.1. Ejemplos de curvas de luz hechas con el método de mínima entropía	29
3.1.2. Ejemplos de curvas de luz hechas con el método de fnpeaks	30
3.1.3. Ejemplos de curvas de luz hechas con el método de Lomb-Scargle	31
3.2. Períodos de las Estrellas RR Lyræ y sus curvas de Luz	33
3.2.1. Ejemplos de curvas de luz hechas con el método de mínima entropía	33
3.2.2. Ejemplos de curvas de luz hechas con el método de fnpeaks	34
3.2.3. Ejemplos de curvas de luz hechas con el método de Lomb-Scargle	35
3.3. Períodos de las binarias eclipsantes y sus curvas de Luz	36
3.3.1. Ejemplos de curvas de luz hechas con el método de mínima entropía	37
3.3.2. Ejemplos de curvas de luz hechas con el método de fnpeaks	38
3.3.3. Ejemplos de curvas de luz hechas con el método de Lomb-Scargle	39
4. Mínima Cantidad de datos, con la que se puede determinar el período de las estrellas estudiadas	41
4.1. Mínima Cantidad de puntos para hallar el período de las Cefeidas	43
4.1.1. Método de mínima entropía:	43
4.1.2. Método de fnpeaks:	44
4.1.3. Método de Lomb-Scargle:	44

4.2.	Mínima Cantidad de puntos para hallar el período de las RR Lyræ	45
4.2.1.	Método de mínima entropía:	45
4.2.2.	Método de fnpeaks:	46
4.2.3.	Método de Lomb-Scargle:	47
4.3.	Mínima Cantidad de puntos para hallar el período de las binarias eclipsantes	48
4.3.1.	Método de mínima entropía:	48
4.3.2.	Método de fnpeaks	50
4.3.3.	Método de Lomb-Scargle	51

Índice de figuras

1.1.	Típica curva de luz de un período incorrecto	12
1.2.	Curva de luz del período de la serie de datos sintéticos	12
1.3.	Períodograma (S vs periodo) de los datos sintéticos	12
1.4.	Curva de luz de un período alias	13
1.5.	Gráfica entropía en función del período en un ejemplo de alias	13
1.6.	Períodograma de Lomb Scargle para los datos generados artificialmente	15
2.1.	Ejemplo de curva de luz de Cefeida, oscilando en modo fundamental	19
2.2.	Ejemplo de curva de luz de la Cefeida, oscilando en primer modo	19
2.3.	Zonas de ionización del Hidrógeno y Helio a distintas temperaturas	20
2.4.	Distribución de períodos de las estrellas Cefeidas	21
2.5.	Proceso de conversión de un fotón de alta energía en fotones de energía más baja	22
2.6.	Ejemplo de curva de luz de una RR Lyræ	23
2.7.	Distribución de períodos de las estrellas RR Lyræ	23
2.8.	Ejemplo de curva de luz de una Algol	25
2.9.	Ejemplo de curva de luz de una β Lyræ	25
2.10.	Ejemplo de una curva de luz de una W Ursæ Majoris	26
2.11.	Distribución de períodos de las binarias eclipsantes	26
2.12.	Relación período-luminosidad en la LMC	27
3.1.	Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-CEP-3565 hallada con el método de mínima entropía	29
3.2.	Gráfica de entropía en función de período para la estrella OGLE-LMC-CEP-3565	29
3.3.	Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-CEP-0596 hallada con el método de mínima entropía	30
3.4.	Gráfica de entropía en función de período para la estrella OGLE-LMC-CEP-0596	30
3.5.	Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-CEP-0549 hallada con el método de fnpeaks	30
3.6.	Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-CEP-0648 hallada con el método de fnpeaks	31
3.7.	Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-CEP-2493 hallada con el método de Lomb-Scargle	32
3.8.	Períodograma para la estrella OGLE-LMC-CEP-2493, cuyo pico de frecuencia de 0.3506 días^{-1} corresponde al período de la estrella	32

3.9. Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-CEP-0801 hallada con el método de Lomb-Scargle	32
3.10. Períodograma para la estrella OGLE-LMC-CEP-0801, cuyo pico de frecuencia de 0.047 días^{-1} corresponde al período de la estrella	32
3.11. Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-RRLYR-06223 hallada con el método de mínima entropía	33
3.12. Gráfica de entropía en función de período para la estrella OGLE-LMC-RRLYR-06223	33
3.13. Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-RRLYR-14065 hallada con el método de mínima entropía	34
3.14. Gráfica de entropía en función de período para la estrella OGLE-LMC-RRLYR-14065	34
3.15. Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-RRLYR-01981 hallada con el método de fnpeaks	35
3.16. Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-RRLYR-15818, con un período de 0.469946 días , hallada con el método de fnpeaks	35
3.17. Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-RRLYR-13099 hallada con el método de Lomb-Scargle	36
3.18. Períodograma para la estrella OGLE-LMC-RRLYR-13099, cuyo pico de frecuencia de 1.7023 días^{-1} corresponde al período de la estrella	36
3.19. Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-RRLYR-31715 hallada con el método de Lomb-Scargle	36
3.20. Períodograma para la estrella OGLE-LMC-RRLYR-31715, cuyo pico de frecuencia de 1.8814 días^{-1} corresponde al período de la estrella	36
3.21. Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-ECL-16239 hallada con el método de mínima entropía	37
3.22. Gráfica de entropía en función de período para la estrella OGLE-LMC-ECL-16239	37
3.23. Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-ECL-13085 hallada con el método de mínima entropía	37
3.24. Gráfica de entropía en función de período para la estrella OGLE-LMC-ECL-13085	37
3.25. Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-ECL-05084 hallada con el método de fnpeaks	38
3.26. Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-ECL-09945 hallada con el método de fnpeaks	39
3.27. Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-ECL-28617 hallada con el método de Lomb-Scargle	39
3.28. Períodograma para la estrella OGLE-LMC-ECL-28617, cuyo pico de frecuencia de 0.3745 días^{-1} corresponde al período de la estrella	39
3.29. Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-ECL-31494 hallada con el método de Lomb-Scargle	40
3.30. Períodograma para la estrella OGLE-LMC-ECL-31494, cuyo pico de frecuencia de 0.5996 días^{-1} corresponde al período de la estrella	40

4.1.	Esquema del método para hallar mínimo número de puntos	42
4.2.	Mínimo número de puntos en relación al período para las Cefeidas con mínima entropía	43
4.3.	Mínimo número de puntos en relación al período para las Cefeidas con fnpeaks	44
4.4.	Mínimo número de puntos en relación al período para las Cefeidas con Lomb-Scargle	45
4.5.	Mínimo número de puntos en relación al período para las RR Lyræ con mínima entropía	46
4.6.	Mínimo número de puntos en relación al período para las RR Lyræ con fnpeaks	47
4.7.	Mínimo número de puntos en relación al período para las RR Lyræ con Lomb-Scargle	48
4.8.	Mínimo número de puntos en relación al período para las binarias eclipsantes con mínima entropía	49
4.9.	Mínimo número de puntos en relación al período para las binarias eclipsantes con fnpeaks	50
4.10.	Mínimo número de puntos en relación al período para las binarias eclipsantes con Lomb-Scargle	51

Agradecimientos: A mi padre y a mi madre

Resumen

Las curvas de luz de una estrella variable proporcionan mucha información sobre los fenómenos físicos que suceden al interior de la estrella. Estas se pueden construir si se conoce su periodo. Además de conocer información sobre la estrella, conocer el período, de una Cefeida por ejemplo, también tiene otras aplicaciones como la determinación de distancias extragalácticas. Sin embargo, la toma de datos fotométricos tiene dificultades como el estado del clima o la disponibilidad del telescopio. Por esta razón, conocer el tiempo en el que se va a usar el telescopio y la frecuencia con la que se va a tomar los datos es muy importante para un astrónomo observacional. Conocer el mínimo número de datos (o puntos) que se debe tomar es de gran ayuda para conocer estas variables de tiempo y frecuencia de toma de datos. En el presente trabajo se determinó la mínima cantidad de puntos que requieren los métodos de mínima entropía, fnpeaks y Lomb-Scargle para hallar el período de una muestra de estrellas variables Cefeidas, RR Lyræ y binarias eclipsantes en la Nube Mayor de Magallanes. Para ello, se halló el periodo de 100 estrellas de cada uno de los tipos mencionados, con datos fotométricos del proyecto OGLE-IV, sin remover ningún dato. Luego se removió un porcentaje grande inicial de puntos y se intentó hallar el período de cada estrella con cada uno de los métodos. Luego se retiró una cantidad menor de puntos de los datos originales, aumentado el número de datos remanentes en 1 en cada intento de hallar el período, para luego intentar hallar el período de nuevo. Una vez obtenido el período, se registró el número de puntos remanentes. El proceso entero se repitió 20 veces, registrando, para cada estrella y por cada método, el número promedio de puntos remanentes con el que se logró hallar el período. El método que requirió el menor número de puntos en promedio para hallar el período de las estrellas Cefeidas y binarias eclipsantes fue Lomb-Scargle, con 13 y 31 puntos respectivamente, mientras que el método que requirió menos puntos para hallar los períodos de las RR Lyræ fue el método de fnpeaks , con 14 puntos en promedio.

Abstract

Light curves of variable stars give a lot of information about physical phenomena inside the star. These light curves can be built if the star's period is known. Knowing a star's period has also other applications like the extragalactic distance determination, if the star is a Cepheid for example. Nevertheless, photometric data sampling has difficulties like weather conditions or telescope availability. For this reason, knowing the time in which the telescope will be used and the data sampling frequency, is very important for an observational astronomer. Knowing the minimum number of data (or points) that must be taken helps to know the adequate time and frequency for the data collection. In the present work, the minimum number of points required to get the periods of a sample of Cepheids, RR Lyrae and eclipsing binaries in the Large Magellanic Cloud, by using minimum entropy, fnpeaks and Lomb-Scargle methods, is determined. To aim that goal, the period of 100 stars of each type, using the three methods and photometric data from OGLE-IV project, were found without removing any point. Then, a large initial percentage of the original points was removed, and then, an attempt to find the period of each star, using all the methods, was done. Then, a lesser number of points were removed from the original file data, augmenting the number of remnant points in 1 for each attempt to find the period, and then, another attempt to find the period was made. Once the star's period had been gotten, the number of remnant points was registered. This entire process was repeated 20 times, registering, for each star and method, the average of the remnant points, in which, the star's period was found. The method that required the least amount of points, in average, to find the period of Cepheid stars and eclipsing binaries was Lomb-Scargle, with 13 and 31 points respectively. The method that required the least amount of points, in average, to find the period of RR Lyrae stars was fnpeaks with 14 points.

Capítulo 1

Introducción

Las estrellas cuyas magnitudes van cambiando en el tiempo son llamadas estrellas variables. La clasificación de estas estrellas está basada en la forma de su curva de luz, la clase espectral y su luminosidad. Las variaciones en el brillo de las estrellas fueron notadas en Europa al final del siglo XVI, cuando la supernova de Tycho Brahe se iluminó en 1572 y la variación regular de la estrella α -Ceti (Mira) fue observada en 1596. Inicialmente los brillos estelares fueron determinados visualmente comparando estrellas vecinas. En el presente, las observaciones más precisas son hechas foto-eléctricamente o usando cámaras CCD (Karttunen et al. 2017). El estudio de estrellas variables juega un rol importante, por ejemplo, en determinar distancias de las galaxias más lejanas. Concretamente, a partir de la población de las estrellas Cefeidas se ha logrado determinar la distancia de la galaxia Andrómeda por medio de la relación período-luminosidad, la cual se describirá más adelante (sección 2.2). La distancia encontrada de esta galaxia, en el año 2012, con ayuda de las Cefeidas es de (752 ± 27) kpc (Riess et al. 2012).

Las estrellas variables están divididas en 3 principales grupos: pulsantes, eruptivas y eclipsantes. En las variables pulsantes, las oscilaciones se dan debido a la variación de temperatura y a la expansión-contracción de sus capas más externas. Estas son gigantes y supergigantes que han alcanzado una fase inestable en su evolución. Las variables eruptivas son usualmente estrellas tenues expulsando mása. Son mayormente miembros de sistemas binarios en donde se transfiere mása de un componente a otro. Las variables eclipsantes son sistemas binarios cuyas componentes periódicamente pasan una en frente de la otra. En este caso, las variaciones de luz no corresponden a ningún cambio físico en el interior de la estrella (Karttunen et al. 2017). En el capítulo 2 se describirá con más detalle las estrellas variables con las que se trabajará en el presente proyecto.

En el trabajo de Graham et al. (2013) se comparan distintos métodos para hallar el período de estrellas variables, usando datos de los proyectos de CRTS, MACHO y ASAS. Una de las comparaciones consiste en evaluar la “integridad” en función del número de observaciones de una estrella. La “integridad” consiste en la fracción de periodos verdaderos que fueron recuperados dentro de un límite de precisión Graham et al. (2013). No se encontraron trabajos que compararan el desempeño de algoritmos para hallar el período usando los datos de OGLE.

1.1. Teorema de Nyquist-Shannon

El teorema de Nyquist - Shannon establece que la reconstrucción exacta de una señal periódica que no tiene frecuencias más altas que f_{max} se puede hacer si la tasa de muestreo de esa señal es mayor a $2f_{max}$ (Shannon 1949).

Para recuperar o reconstruir una señal $y(t)$ (con una frecuencia máxima de f_{max} y muestreada a una frecuencia de $f_{ms} > 2f_{max}$ se puede usar la siguiente función de pulso:

$$g(t) = \frac{\sin 2\pi f_{max} t}{2\pi f_{max} t} . \quad (1.1)$$

De esta manera, podemos expresar la señal original como se muestra a continuación:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n g\left(t - \frac{n}{f_{ms}}\right) . \quad (1.2)$$

Si $f_{ms} = 2f_{max}$ la anterior expresión se reduce a:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \frac{\sin \pi(2\pi f_{max} t - n)}{\pi(2\pi f_{max} t - n)} . \quad (1.3)$$

Donde y_n son los valores muestreados de la señal periódica $y(t)$ (Shannon 1949).

1.2. Métodos para hallar los períodos de estrellas variables

Los períodos de las estrellas variables se pueden determinar usando distintos métodos. Estos métodos se clasifican en métodos que usan transformadas modificadas de Fourier y métodos que usan la curva de luz o métodos de dispersión de fase (PDM) (Cincotta et al. 1995). Una curva de luz es un gráfica que representa cómo varía la magnitud de una estrella. Es decir, se grafica la magnitud en función de la fase ϕ , reemplazando cada dato de tiempo de la siguiente manera:

$$\phi = \frac{(t - t_0)}{T} - \text{int} \left(\frac{t - t_0}{T} \right) . \quad (1.4)$$

A continuación se mostrarán los métodos que se estudiarán en el presente proyecto.

1.2.1. Método de mínima entropía:

En este método se crea un conjunto de períodos de prueba T_{prueba} y a cada uno se le construye una curva de luz. En esta curva se grafica $u(t)$, que representa la magnitud, en

función de una variable modificada ϕ la cual es llamada “fase” y se relaciona con el tiempo de la siguiente manera (Cincotta et al. 1995):

$$\phi = \frac{(t - t_0)}{T_{prueba}} - int \left(\frac{t - t_0}{T_{prueba}} \right) . \quad (1.5)$$

Esta función se aplica a cada dato de tiempo que se tiene y se grafican los N datos de $u_{(t)}$ en función de los N datos de ϕ . Esta gráfica de $u_{(t)}$ en función de ϕ se divide en A secciones en el eje horizontal y B secciones en el eje vertical, es decir, se construye una grilla de $A \times B$ cuadros. En cada cuadro se cuenta el número de puntos $n_{(i,j)}$ y se divide entre el número total de puntos N : $x_{(i,j)} = n_{(i,j)}/N$. Finalmente se procede a calcular la entropía de Shannon (Cincotta et al. 1995):

$$S_{(T_{prueba})} = - \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B x_{(i,j)} \ln (x_{(i,j)}) . \quad (1.6)$$

En el caso de que $x_{(i,j)} = 0$ el término entero de la sumatoria es cero. Este proceso se repite para todos los períodos de prueba. Cuando la entropía de Shannon es mínima, tenemos que el período de prueba correspondiente a esa entropía mínima es el período con el que oscila la variable $u_{(t)}$. En resumen, simplemente se sobrepuso cada dato de acuerdo a la fracción del período de prueba en donde este estaba. La entropía de Shannon representa una cantidad que va a “medir” en algún sentido el grado de certeza. Por ejemplo, si tenemos varias probabilidades p_1, p_2, p_3, \dots la entropía será cero si alguna de las probabilidades es 1 y el resto cero. Esto indica que tenemos un grado total de certeza. Por otro lado, si todas las probabilidades son iguales, la entropía es máxima y tenemos la menor certeza posible (Shannon & Weaver 1964).

Por ejemplo, tenemos una muestra de $N = 400$ puntos (valores de $u_{(t)}$ y t) aleatorios y distribuidos no uniformemente de la siguiente función:

$$u_{(t)} = A_0 + \sum_{n=1}^2 A_n \sin \left(\frac{2n\pi t}{T} \right) + \sigma . \quad (1.7)$$

Donde $A_0 = 14$, $A_1 = -0,5$, $A_2 = -0,15$, $T = 173,015$ y σ es ruido uniformemente distribuido con valores de ± 3 . A continuación se construirán dos curvas de luz: una para un período de 120.989 (un período incorrecto) y otra para un período de 173.015, y luego estas se dividirán en una grilla de 5×6 ($A=5$, $B=6$).

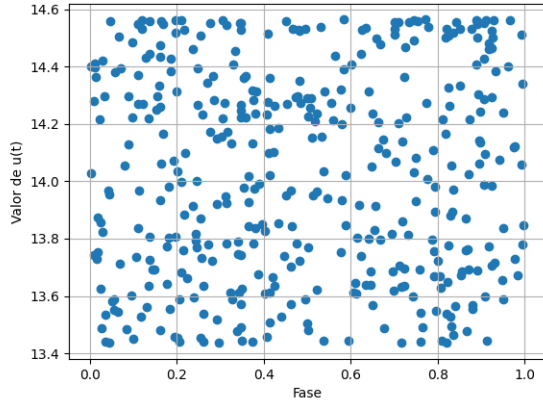


Figura 1.1: Curva de luz de los datos contruidos para un período de prueba de $T_{prueba} = 120,989$. Curva de luz con alta entropía

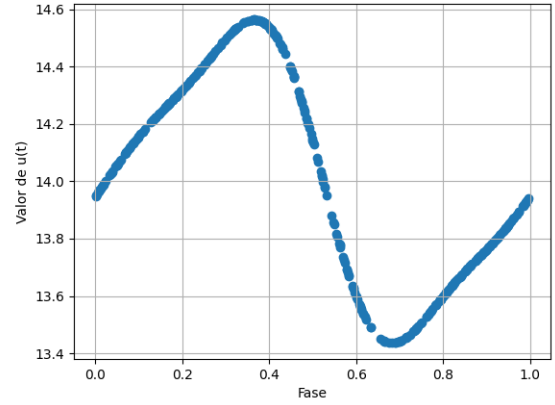


Figura 1.2: Curva de luz de los datos contruidos para un período de prueba de $T_{prueba} = 173,015$. Curva de luz con baja entropía

La curva de luz de un período incorrecto mostrará los puntos de manera muy distribuida, casi uniforme en los cuadros de la grilla. Por esta razón esta curva de luz arroja entropías altas. Por otro lado la curva de luz del período correcto tiene cuadros de la grilla donde hay más puntos que otros. Incluso hay cuadros de la grilla vacíos. Esto arroja una entropía más baja. Por esta razón se escoge el período cuya entropía es la mínima. A continuación se muestra la entropía para distintos períodos:

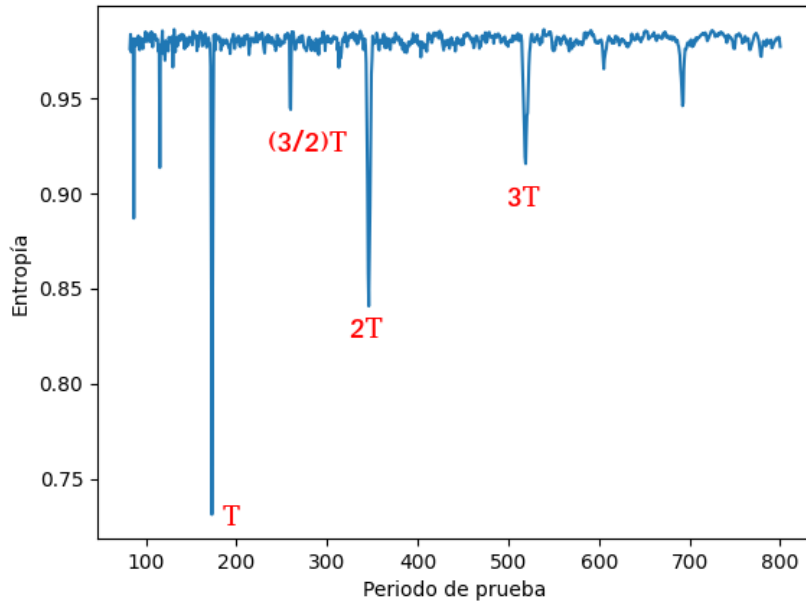


Figura 1.3: Períodograma (entropía en función del período de prueba) para los datos generados artificialmente

Se puede observar que la figura cuenta con varios mínimos. Estos corresponden a múlti-

plos enteros y semienteros del período original.

También existen mínimos correspondientes a alias. Estos son períodos correspondientes al período de toma de datos (usualmente medio día). Por ejemplo, en la curva de luz de la estrella RR Lyræ 06223 que se muestra en la Figura 1.5 se puede ver que el período de mínima entropía corresponde al período de toma de datos y no al período real de la estrella. La curva de luz construida con el período correcto de la estrella y su respectiva gráfica de entropía en función del periodo se pueden ver en las Figuras 3.11 y 3.12 respectivamente.

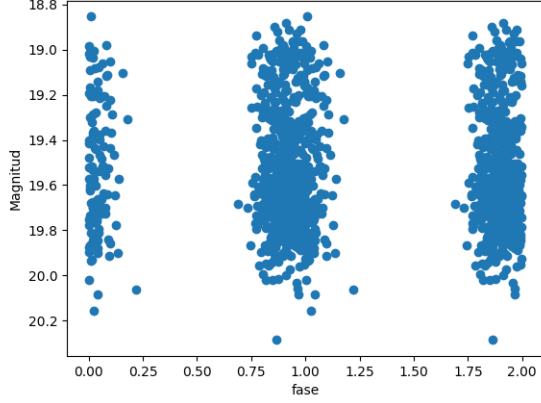


Figura 1.4: Curva de luz de un periodo alias de 0.499 días de la estrella OGLE-LMC-RRLYR-06223

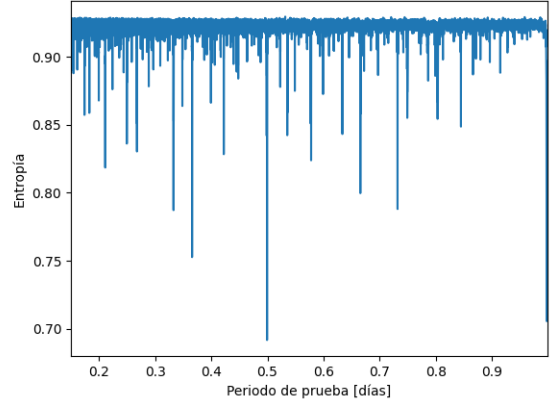


Figura 1.5: Gráfica entropía en función del período para la estrella OGLE-LMC-RRLYR-06223

Los períodos correspondientes a un alias usualmente tienen menor entropía que el período con el que oscila la estrella, por lo que el método termina reportando estos períodos alias como el período de la estrella, cuando estos períodos no lo son. Para resolver este problema se introdujeron las siguientes funciones de castigo, las cuales son calculadas para cada período de prueba y tendrán un valor grande si corresponden a un período que es un alias. Estas dependen de las composiciones de cada uno de los cuadros de la grilla. Estas funciones recibirán el nombre de función g y función f. Sea y_i la composición de puntos en cada columna:

$$y_i = \sum_{j=1}^B x_{(i,j)} . \quad (1.8)$$

Función g: Esta función toma valores grandes cuando la diferencia de composiciones entre columnas vecinas de la grilla es grande. Lo cual sucede en curvas de luz cuyos períodos corresponden a alias. La función g será entonces la siguiente:

$$g = \frac{1}{A + \log_A(A-1)} \log_A \left(\sum_{i=1}^{A-1} A^{0.5NA^2|\Delta y_i|} \right) . \quad (1.9)$$

Donde A es el número de columnas de la grilla, usando una grilla de AxB. Aquí $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$. En una curva de luz correspondiente a un alias se espera que la mitad de los puntos

se distribuyan uniformemente en la mitad de las columnas y que la otra mitad de las columnas esté prácticamente vacía. De esta manera, se espera que el valor de y_i para una columna llena sea de $y_i = 2/A$. De esta manera, se espera que si hay al menos una diferencia grande de y entre columnas vecinas el valor de g es también grande. Por ejemplo si la diferencia entre dos columnas vecinas es $2/A$ entonces al valor de g va a ser aproximadamente: $g \approx N$.

Función f: Por otro lado, se espera que en un período distribuya sus puntos uniformemente a lo largo de todas las columnas, si este es un período que no corresponde a un alias y que puede ser un periodo correcto o incorrecto. Es decir, se espera que el valor de y_i de cada columna sea de $y_i = 1/A$. Si alguna columna se aleja de esta composición ideal debe haber otra función de castigo que tome grandes valores cada vez que esto suceda. De esta manera, se introduce la función de castigo f , la cual tiene la siguiente forma:

$$f = \frac{1}{A+1} \log_A \left(\sum_{i=1}^A A^{0.5NA^2|y_i - y_{Ideal}|} \right). \quad (1.10)$$

De esta manera, si la curva de luz tiene columnas vacías, con pocos puntos o bien columnas con muchos puntos concentrados, entonces la función f tenderá a tener un valor de N . Los valores máximos de f y g , así como el valor de N , son fijados por el usuario. En el capítulo 3 se definirán máximos valores de g y f permitidos para cada caso, así como el valor de N .

1.2.2. Método de fnpeaks:

Es un algoritmo que usa transformadas modificadas de Fourier, basado en los trabajos de Deeming (1975) y Kurtz (1985). Este algoritmo parte modificando la transformada de Fourier (discreta):

$$F_{(\omega_j)} = \sum_{k=1}^N u_{t_k} \cos(\omega_j t_k) + i \sum_{k=1}^N u_{t_k} \sin(\omega_j t_k). \quad (1.11)$$

En este método, se reemplazan las frecuencias ω_j por un set de frecuencias que están uniformemente espaciadas entre una frecuencia inicial y otra final: $\omega_j = \omega_{j-1} + \Delta\omega$. Luego, aplicando identidades trigonométricas, se tiene que (Kurtz 1985):

$$\begin{aligned} F_{(\omega_j)} = \sum_{k=1}^N u_{t_k} [\cos(\omega_{j-1} t_k) \cos(\Delta\omega t_k) - \sin(\omega_{j-1} t_k) \sin(\Delta\omega t_k)] \\ + i \sum_{k=1}^N u_{t_k} [\sin(\omega_{j-1} t_k) \cos(\Delta\omega t_k) + \cos(\omega_{j-1} t_k) \sin(\Delta\omega t_k)]. \end{aligned}$$

El método halla aquellas frecuencias que corresponden al período de una estrella. Los detalles se pueden encontrar en el trabajo de Deeming (1975).

1.2.3. Método de Lomb-Scargle:

En este método, basado en transformadas modificadas de Fourier, en donde se construye un “periodograma” a partir de una frecuencia y los datos de magnitud y tiempo usando la siguiente expresión (VanderPlas 2018):

$$P_{(f)} = \frac{1}{2} \left(\frac{(\sum_{n=1}^N u_n \cos(2\pi f(t_n - \tau)))^2}{\sum_{n=1}^N \cos^2(2\pi f(t_n - \tau))} + \frac{(\sum_{n=1}^N u_n \sin(2\pi f(t_n - \tau)))^2}{\sum_{n=1}^N \sin^2(2\pi f(t_n - \tau))} \right). \quad (1.12)$$

Donde f es la frecuencia en la que se está evaluando el periodograma y τ es:

$$\tau = \frac{1}{4\pi f} \tan^{-1} \left(\frac{\sum_{n=1}^N \sin 4\pi f t_n}{\sum_{n=1}^N \cos 4\pi f t_n} \right). \quad (1.13)$$

De esta manera se determina que la frecuencia de la estrella es aquella frecuencia cuyo P es máximo. Con esta frecuencia se halla finalmente el período de la estrella. Hacer este análisis del periodograma es equivalente a hacer un ajuste por mínimos cuadrados a funciones seno (VanderPlas 2018). De manera similar a `findpeaks`, se halla la magnitud de $P_{(f)}$ para varias frecuencias f y se escoge la frecuencia cuyo $P_{(f)}$ sea mayor. Para ver el algoritmo en acción tomemos la misma muestra de 400 puntos, dada la ecuación 1.7 con los mismos parámetros. Vamos a hallar los valores de $P_{(f)}$ para 10000 valores de frecuencia entre $1/200$ y $1/100$ uniformemente espaciados. Como se puede ver en la siguiente gráfica de $P_{(f)}$ en función de la frecuencia, la frecuencia f con mayor valor de $P_{(f)}$ fue de $0.005779 \text{ días}^{-1}$, lo cual equivale a 173.023 días, el cual es un período muy cercano al de la función original:

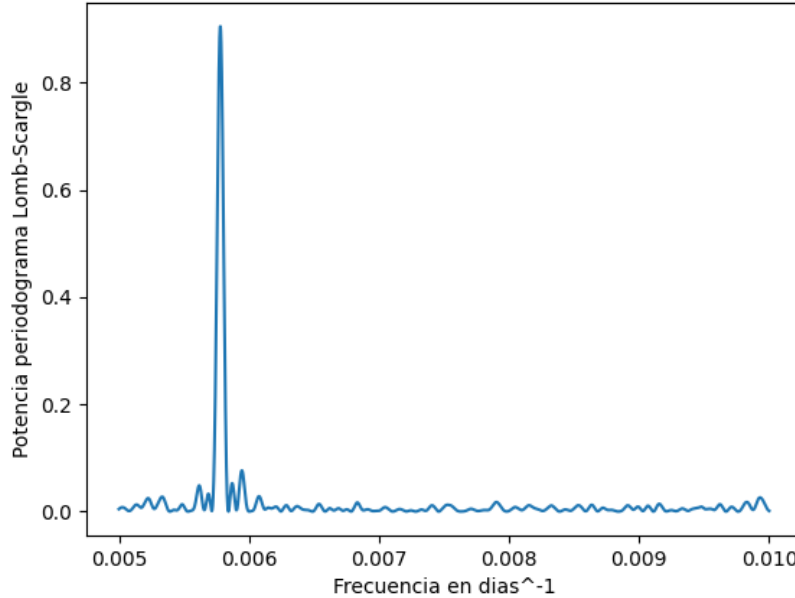


Figura 1.6: Períodograma de Lomb Scargle para los datos generados artificialmente

Para los métodos de `fnpeaks` y Lomb-Scargle también se pueden encontrar períodos correspondientes a alias, sin embargo, en el presente trabajo no hubo problemas con los alias que correspondían a múltiplos de 0.5 días, para estos métodos. Una vez teniendo el período con cualquiera de los anteriores métodos se puede construir la curva de luz. Para que estos métodos funcionen se debe tomar un mínimo número de puntos, el cual se busca encontrar en el presente proyecto. Luego, con lo que establece el teorema de Nyquist-Shannon y conociendo el mínimo número de puntos que necesita un método, se puede saber cuánto tiempo hay que estar observando una estrella variable para poder determinar su período. Este número mínimo de puntos se determinará para los métodos de mínima entropía, `fnpeaks` y Lomb-Scargle, para las estrellas Cefeidas clásicas, RR Lyræ y binarias eclipsantes de la Nube Mayor de Magallanes (LMC). Para cumplir este objetivo se construyó un código que retire una fracción de puntos aleatoriamente y calcule los períodos cada vez que se retiren los puntos, para cada método.

Capítulo 2

Datos y tipos de estrellas

El “Optical Gravitational Lensing Experiment” (OGLE) es un estudio del cielo de gran escala, a largo plazo, enfocado en la variabilidad del cielo. Este fue establecido a principios de los noventa y ha provisto continuamente descubrimientos importantes en una variedad de campos de la astrofísica moderna. El proyecto OGLE empezó el monitoreo regular del cielo el 12 de Abril de 1992 como uno de los estudios de microlentes gravitacionales. El proyecto busca estudiar principalmente eventos de microlentes gravitacionales en nuestra galaxia y la búsqueda de materia oscura en el halo galáctico (Udalski et al. 2015b).

La primera fase del proyecto, OGLE-I, se ejecutó entre los años 1992-1995 en el observatorio de Las Campanas, con el telescopio Swope de 1.0 m equipado con una cámara CCD de un solo chip. La primera mejora a este proyecto, OGLE-II ocurrió en 1997 y duró hasta Diciembre del año 2000. En este se equipó un telescopio nuevo de 1.3m con una cámara nueva CCD de un chip. Para incrementar el área monitoreada del cielo, el detector CCD fue operado usando la técnica “drift-scan”. Este modo de operación incrementó significativamente la cantidad de datos tomados, incrementando por un factor de 30 las capacidades de observación respecto al proyecto OGLE-I. En OGLE-II se agregaron nuevos objetivos de monitoreo: las Nubes de Magallanes (Udalski et al. 2015b).

Al final de la década de los 90 se hacían estudios para otra mejora instrumental mayor en el proyecto OGLE. En aquel entonces, una cámara mosaico de campo ancho fue diseñada. En Junio 12 del año 2001 empezaron las observaciones regulares. En este proyecto se implementó la técnica de análisis de imagen diferencial. Las contribuciones científicas más importantes del OGLE-III incluyen el descubrimiento de los primeros exoplanetas con dos nuevas técnicas fotométricas: tránsitos y microlentes gravitacionales, el descubrimiento de las muestras más grandes de estrellas variables, estudios del centro galáctico y la estructura de las Nubes de Magallanes, entre otras (Udalski et al. 2015b).

El proyecto OGLE-IV comenzó a ejecutarse en Septiembre de 2009 y sigue ejecutándose hasta la fecha. En este proyecto se está usando una cámara mosaico de 262.5 megapíxeles que, para el año 2015, correspondía a las más grandes del mundo. Sin embargo, el cambio en la cámara principal no fue el único. Se hicieron cambios mayores en el hardware auxiliar, entre otras mejoras. Los detalles de la instrumentación se pueden encontrar en el trabajo de

Udalski et al. (2015b).

Datos a usar en el presente proyecto: En el presente proyecto se usarán los datos obtenidos en los proyectos OGLE-IV, dado que son los datos que se tomaron con la tecnología más reciente. Los datos de las estrellas Cefeidas clásicas se tomaron de los trabajos de Soszyński et al. (2015b), Soszyński et al. (2015) y Udalski et al. (2015a). Los datos de las estrellas RR Lyræ se tomaron del trabajo de Soszyński et al. (2016). Finalmente, los datos de las estrellas binarias eclipsantes se tomaron del trabajo de Pawlak et al. (2016).

2.1. Descripción de algunas estrellas variables

Estrellas variables pulsantes: De la misma manera en que un tenedor golpeado vibra con una frecuencia característica, una estrella variable pulsante tiene una frecuencia fundamental de vibración. Al rededor de 1920 el astrofísico inglés Sir Arthur Eddington descubrió la relación entre período de pulsación (T) y densidad media de una estrella (ρ): $T < \rho^{-1/2} \propto C$, (Karttunen et al. 2017). La principal causa de variación en la luminosidad, es la variación periódica de la temperatura superficial. Dado que $L \propto T_E^4$ un cambio pequeño en la temperatura efectiva lleva a un gran cambio en la luminosidad (Karttunen et al. 2017).

Mecanismo de pulsación de los pulsadores radiales: La oscilación radial de una estrella pulsante es el resultado de ondas de sonido resonando al interior de la estrella. Estas ondas son de naturaleza estacionaria. En el modo fundamental, los gases se mueven en la misma dirección en cada punto de la estrella. En los siguientes modos, los gases de cierta capa se mueven en dirección contraria de los gases de las capas vecinas, donde cada capa, en este caso, estaría separada por un nodo. La gran mayoría de Cefeidas clásicas y W Virginis pulsan en el modo fundamental, y las RR Lyræ pulsan en el modo fundamental o en el primer modo. Estas oscilaciones se dan por el mecanismo de la válvula de Eddington (Carroll & Ostlie 2017).

2.1.1. Cefeidas clásicas:

Entre las estrellas variables pulsantes, están las Cefeidas. Estas son supergigantes de la población I de las clases espectrales F-K. Sus períodos son de alrededor de 1 a 50 días y sus magnitudes oscilan con una amplitud de 0.1 a 2.5. La forma de la curva de luz es regular, mostrando un aumento de brillo rápido, llamado rama ascendente, seguido de un descenso de brillo lento, llamado rama descendente. Hay una relación entre el período de una Cefeida y su magnitud absoluta, descubierta en 1912 por Henrietta Leavitt en Cefeidas de la Nube Menor de Magallanes. Esta relación período-luminosidad puede ser usada para medir las distancias intergalácticas (Karttunen et al. 2017). Estas estrellas suelen oscilar en el modo fundamental o en los primeros modos (Carroll & Ostlie 2017). A continuación se muestran algunos ejemplos de curvas de luz de estrellas Cefeidas:

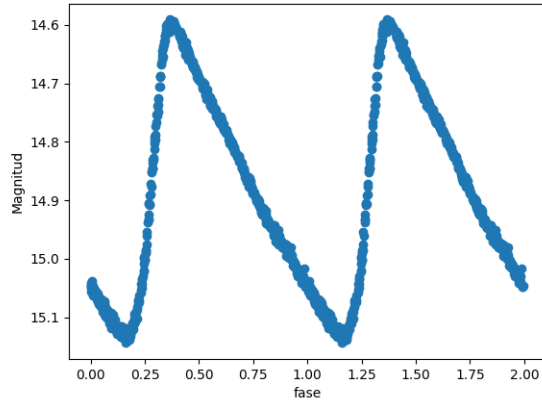


Figura 2.1: Curva de luz de la estrella Cefeida OGLE-LMC-CEP-2543 en la LMC, con un período de 4.088 días, hecha con los datos de Soszyński et al. (2015b). Esta oscila en su modo fundamental

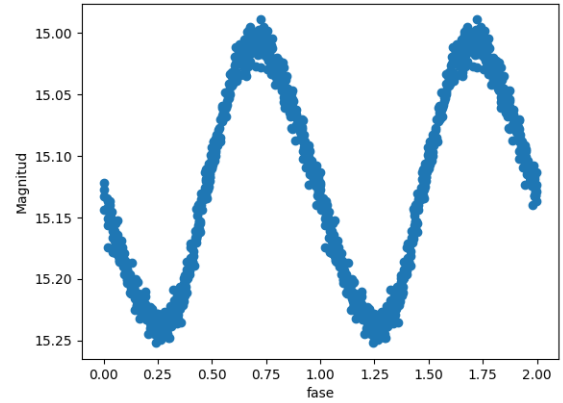


Figura 2.2: Curva de luz de la estrella Cefeida OGLE-LMC-CEP-0656 en la LMC, con un período de 2.2937 días, hecha con los datos de Soszyński et al. (2015b). Esta oscila en su primer modo

Mecanismo de la válvula de Eddington: Si una capa de la estrella se volviera más opaca, luego de la compresión, se podría “represar” la energía que está fluyendo hacia la superficie y puede empujar las capas superficiales hacia afuera. Mientras esta capa se hace más transparente, el calor atrapado puede escapar y la capa vuelve a opacarse y comprimirse para empezar el ciclo otra vez. Sin embargo, en la mayoría de regiones de la estrella la opacidad disminuye con la compresión. Para la ley de Kramer la opacidad κ depende de la densidad y la temperatura como $\kappa \propto \rho/T^{3.5}$. Mientras las capas de la estrella son comprimidas, tanto su densidad como su temperatura incrementan. Sin embargo, la opacidad es más sensible a la temperatura que la densidad. Por esta razón, la opacidad de los gases usualmente disminuye con la compresión, y no aumenta. Se requieren circunstancias muy especiales para superar este efecto amortiguador en la mayoría de las capas estelares, lo cual explica por qué solo se observa pulsaciones estelares en 1 de cada 10^5 estrellas (Carroll & Ostlie 2017).

Efectos de Opacidad y los mecanismos κ y γ : Las circunstancias especiales donde se supera el efecto amortiguador en las capas estelares fueron encontradas por S.A Zhevakin, luego verificadas por Rudolph Kippenhahn, Norman Baker y John P. Cox. Las regiones de una estrella donde el mecanismo de la válvula de Eddington puede operar son las zonas de ionización parcial. En estas capas parte del trabajo, hecho por los gases al ser comprimidos, produce ionización en vez de subir la temperatura de la capa. Con un incremento de temperatura menor, la mayor densidad en comparación produce un incremento en la opacidad, dado que la densidad domina en la ley de Kramer. De manera similar, al expandirse la capa de la estrella, la temperatura no baja mucho dado que los iones se recombinan y liberan energía. De nuevo, el término de la densidad en la ley de Kramer domina y la opacidad disminuye con la densidad decreciente en la expansión. Los astrónomos se refieren a este mecanismo de opacidad como el mecanismo κ . En una zona de ionización parcial, el mecanismo κ es reforzado por la tendencia del calor de fluir dentro de la zona de compresión simplemente porque su temperatura se incrementó menos que las capas estelares adyacentes. Este efecto es llamado el mecanismo γ , debido a que en la capa hay una relación menor entre

la capacidades caloríficas C_P y C_V , debido al aumento de las mismás (Carroll & Ostlie 2017).

En la mayoría de estrellas hay 2 zonas de ionización principales. En la primera zona ocurre la ionización del Hidrógeno neutral ($H- > H^+$) y la primera ionización del Helio ($He- > He^+$), con una temperatura de 1 a 1.5×10^4 K. Esta zona se conoce como la zona de ionización parcial del hidrógeno. La segunda zona, más profunda, involucra la segunda ionización del Helio ($He^+- > He^{+2}$), la cual ocurre a una temperatura característica de 4×10^4 K, y es llamada la zona de ionización parcial de He II. La localización de estas zonas determinan sus propiedades de pulsación. A continuación se mostrará en la Figura 2.3 la localización de estas zonas para 3 temperaturas (Carroll & Ostlie 2017):

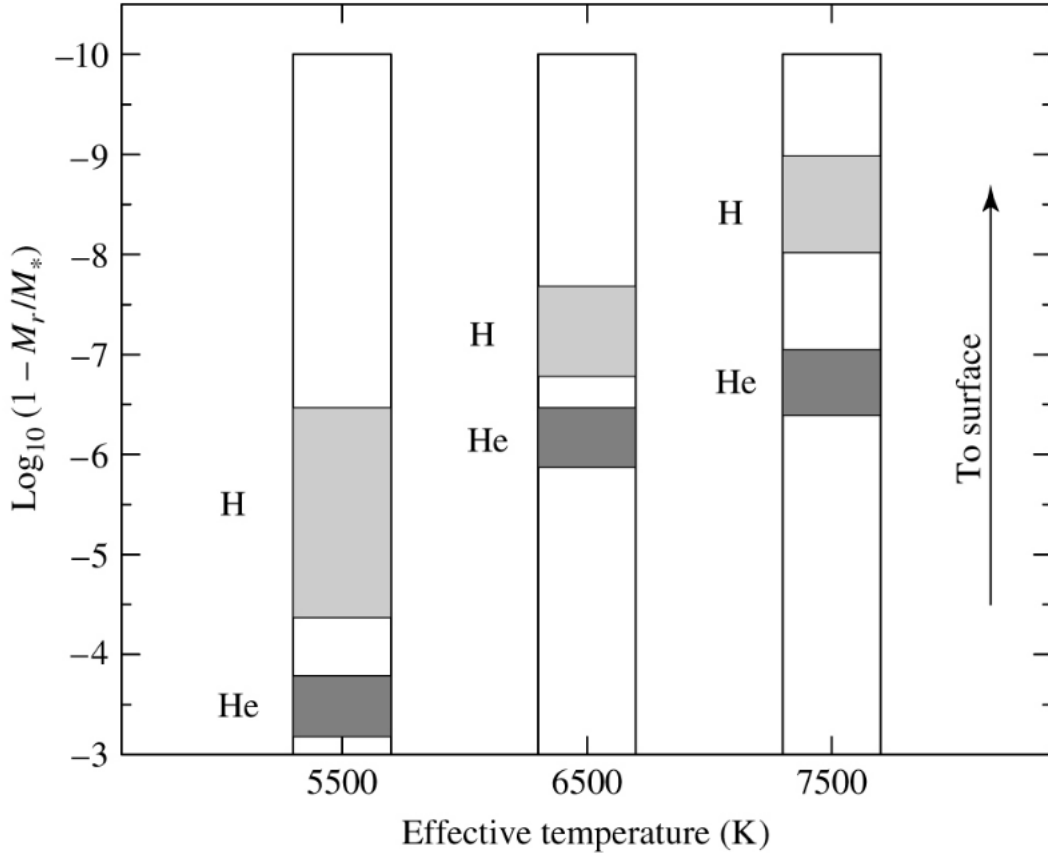


Figura 2.3: Zonas de ionización del Hidrógeno y Helio a distintas temperaturas. El eje vertical representa el logaritmo de la fracción de mása de la estrella que está debajo del punto indicado en ese eje. Tomado de (Carroll & Ostlie 2017)

Si la estrella es muy caliente (7500K) las zonas de ionización se ubicarán muy cerca a la superficie. Aquí la densidad es baja y no hay suficiente mása disponible para que ocurran oscilaciones efectivas. En una estrella más fría (6500K) las temperaturas características de las zonas de ionización se encuentran en puntos más profundos de la estrella. En estos puntos hay más mása que haga como pistón para empujar, lo que hará que el primer modo de oscilación sea más excitado. En una estrella aún más fría (5500K) las zonas de ionización

están lo suficientemente profundas, como para que exista un modo fundamental de pulsación. Sin embargo, si la temperatura superficial de la estrella es muy baja, la arremetida de la convección en las capas más alejadas puede amortiguar las oscilaciones (Carroll & Ostlie 2017).

La distribución de períodos para las estrellas Cefeidas se puede observar en el histograma de la Figura 2.4:

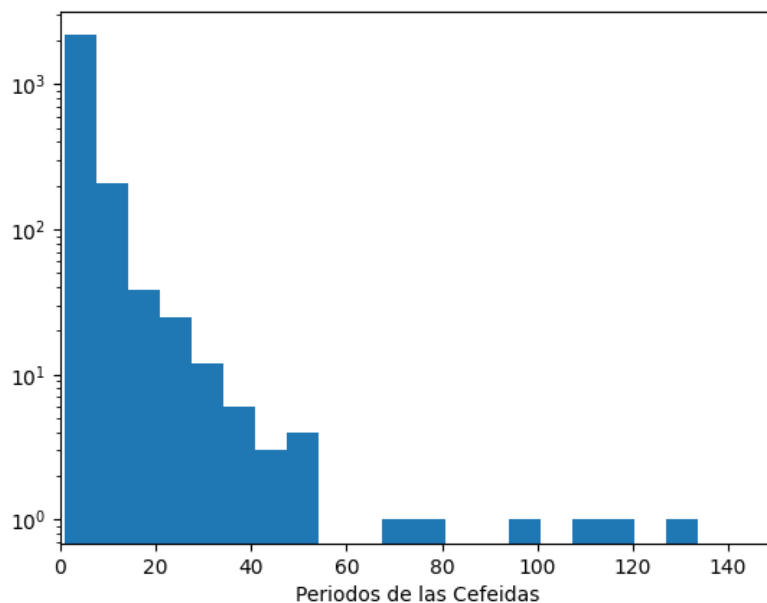


Figura 2.4: Distribución de períodos de los datos del proyecto OGLE IV de las estrellas Cefeidas (Soszyński et al. 2015b)

A partir de aquí surge la pregunta de cómo se ioniza el helio en una estrella. La primera energía de ionización del Helio es de 24.58 eV y la segunda es de 54.41 eV (Kramida et al. 2020). Por otro lado, la energía liberada en un proceso de fusión nuclear es del orden de MeV. ¿Qué sucede?. Dado que los fotones producidos en las reacciones no están libres, y tienen mucha energía, hay una probabilidad de que un fotón de estos produzca un par electrón positrón. El electrón y el positrón antes de aniquilarse con un antipar que se encuentre en su camino, van a interactuar con los núcleos de los átomos, iones y otras partículas, desacelerándose y produciendo radiación de Bremsstrahlung, para finalmente chocarse, aniquilarse y producir un fotón. Si antes teníamos un fotón, ahora tenemos al menos 2 fotones de menor energía, uno producto de la aniquilación y otro producto de la radiación de Bremsstrahlung. Estos fotones pueden volver a producir o bien un par electrón positrón y repetir todo el proceso o bien pueden ionizar átomos pesados en caso de que los haya dentro de la estrella. Si seguimos el rastro de los fotones que volvieron a crear un par electrón-positrón, estos van a crear más y más fotones de menor energía, hasta un punto en que la energía de los fotones es suficientemente baja para ionizar el átomo de helio. A continuación se mostrará en la Figura 2.5 el proceso descrito anteriormente:

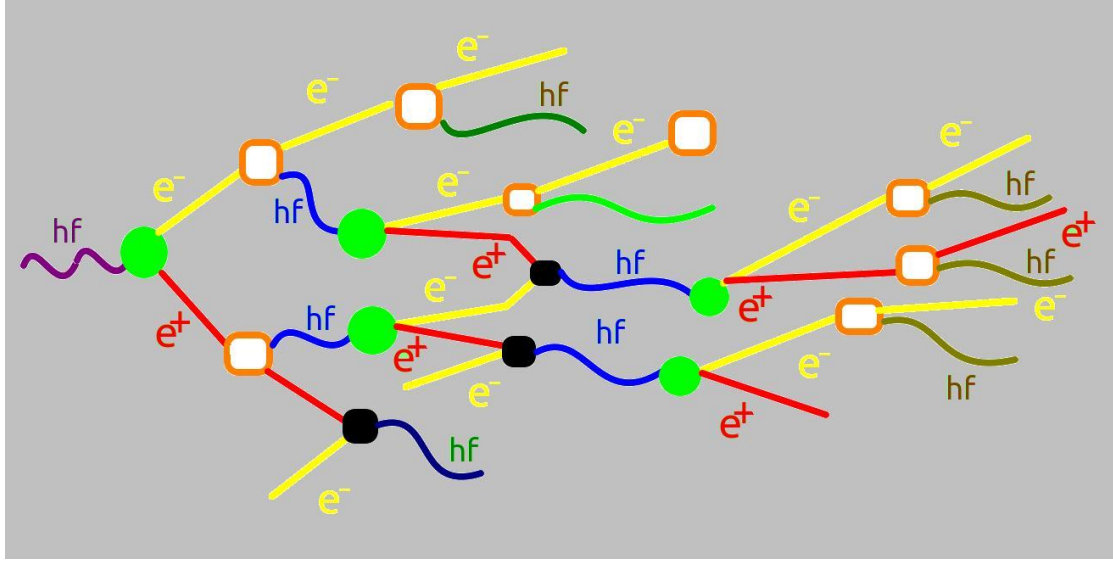


Figura 2.5: Proceso de conversión de un fotón de alta energía en varios fotones de energía más baja. Los cuadros naranjas representan un proceso de radiación por Bremsstrahlung, los círculos verdes indican la creación de un par electrón positrón y los cuadros negros indican la aniquilación entre un electrón y un positrón. Las curvas representan fotones, las líneas rectas amarillas representan electrones y las rectas rojas representan positrones

Progresión de Hertzsprung: La progresión de Hertzsprung está presente en estrellas Cefeidas que oscilan en su modo fundamental y cuyo período está entre 6-16 días. Esta progresión consiste en una onda o “bump” de amplitud pequeña dentro de la propia oscilación de la estrella como se puede ver, más adelante en la figura 3.6. Este efecto está presente en la rama descendente para pulsaciones en el rango de 6-9 días. Para períodos más largos se observa en la rama descendente. La amplitud de la progresión es máxima para períodos de 10-11 días (García-Varela et al. 2016).

Existen 2 modelos que explican algunas de las propiedades de la progresión observada. El primero, llamado el mecanismo eco, propone ondas de presión radial generadas en la zona de ionización de Helio II, que viajan al interior, regresan desde el núcleo y llegan a la superficie un período más tarde. El segundo modelo, conocido como el mecanismo de resonancia, propone que la progresión surge de la resonancia entre el modo fundamental y el segundo modo (García-Varela et al. 2016).

2.1.2. RR Lyræ:

Otro tipo de estrella variable pulsante son las estrellas RR Lyræ. Estas son estrellas antiguas de la población II y se encuentran en una fase evolutiva donde el helio se empieza a fusionar en el núcleo. Su variación en brillo es menor que en las Cefeidas, usualmente menos de una magnitud. Sus períodos también son más cortos, usualmente, de menos de un día. Las magnitudes absolutas de las estrellas RR Lyræ son de $M_V = 0,6 \pm 0,3$ (Karttunen et al. 2017). Las estrellas RR Lyræ pueden oscilar en el modo fundamental, primer modo o segundo modo (Soszyński et al. 2016). La Figura 2.6 muestra un ejemplo de curva de luz de una RR

Lyræ:

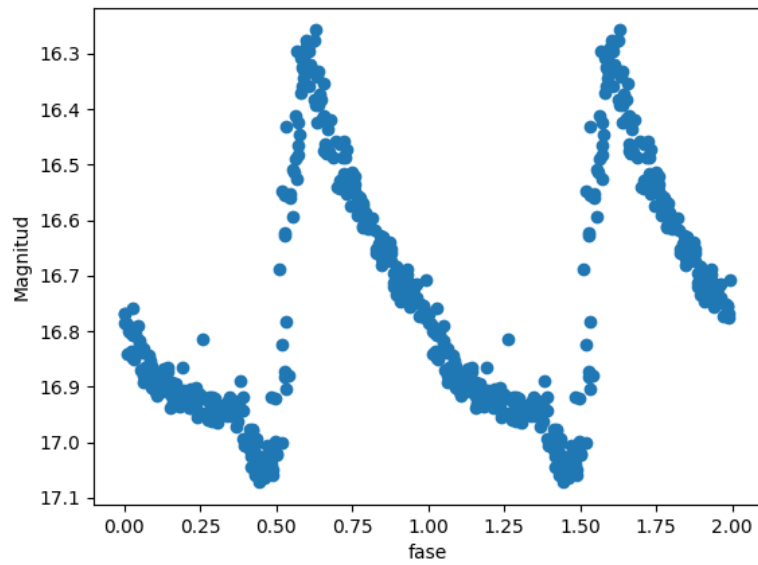


Figura 2.6: Curva de luz de la estrella RR Lyræ OGLE-LMC-RRLYR-31715 en la LMC hecha con los datos de Soszyński et al. (2016), con un período de 0.53153 días

La distribución de períodos para las estrellas RR Lyræ se puede observar en el histograma de la Figura 2.7:

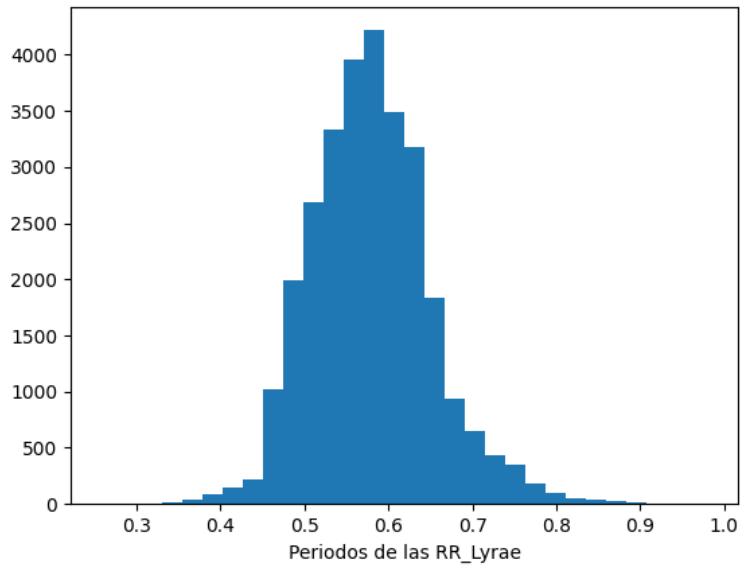


Figura 2.7: Distribución de períodos de los datos del proyecto OGLE IV de las estrellas RR Lyræ (Soszyński et al. 2016)

Las estrellas RR Lyræ se pueden clasificar en los siguientes tipos: RRab, RRc, RRd. A continuación se mostrarán en que se diferencia cada tipo de estrella RR Lyræ (Soszyński et al. 2016) de acuerdo al Atlas de las curvas de luz de las estrellas variables del proyecto OGLE¹

RRab: Son estrellas oscilando en su modo fundamental, con una rama ascendente tipo paso escalera y una rama descendente muy lenta después del máximo y, usualmente, se pueden observar una proyección (una pequeña oscilación interna en la curva de luz) antes de comenzar la rama ascendente, como se puede ver en la figura 2.6. La morfología detallada de las curvas de luz depende de la composición química de las estrellas. Este hecho se utiliza para hacer mediciones de metalicidad basadas en observaciones fotométricas. Las amplitudes de oscilación, en estas curvas de luz, están fuertemente relacionadas con sus periodos, y estas amplitudes son típicamente más pequeñas para estrellas RRab de periodo más largo. Un significativo número de estrellas RRab exhiben modulaciones de largo plazo de las amplitudes y las fases de sus curvas de luz. En la página del Atlas de las curvas de luz de las estrellas variables del proyecto OGLE ¹ se puede observar en formato .gif cómo suceden estas modulaciones en una curva de luz.

RRc: Son estrellas RR Lyræ oscilando en su primer modo. Estas estrellas tienen periodos de 0.2 días a un poco más de 0.5 días. Estas estrellas tienen curvas de luz más simétricas y menores amplitudes que los pulsadores RRab. Usualmente las estrellas RRc exhiben una proyección secundaria en la rama ascendente¹.

RRd: Son estrellas RR Lyræ pulsando en dos modos fundamental y el primer modo simultáneamente. La abundancia relativa de las RRd (respecto a las demás RR Lyræ) depende fuertemente de la metalicidad¹.

2.1.3. Estrellas binarias eclipsantes:

Son estrellas binarias, cuyo observador las ve en un ángulo cercano a su plano orbital. Una estrella periódicamente eclipsa a la otra. Cuando esto sucede el brillo total del par disminuye. Estas estrellas son de interés debido a que normalmente consisten en estrellas orbitando muy cerca, y en algunas estrellas como las variables elipsoidales la forma de cada estrella es deformada por la gravedad de su compañera, a una forma de huevo. Las estrellas variables eclipsantes se pueden clasificar en estrellas Algol que tienen curvas de luz con máximos casi planos, y las estrellas casi no están distorsionadas, β Lyræ que tienen curvas de luz ligeramente redondeadas y están distorsionadas en elipsoides, y finalmente, las estrellas W Ursae Majoris que tienen curvas de luz que varían continuamente. Estas últimas estrellas están esencialmente en contacto, sus periodos son cortos de menos de un día, sus mínimos en las curvas de luz son aproximadamente iguales en profundidad y son estrellas de tipo espectral F a G. Los periodos de las estrellas variables eclipsantes están, generalmente, en el rango de 0.25 a 10 días, dado que, la mayoría de variables eclipsantes suelen ser binarias cercanas (Percy 2007). A continuación se mostrarán algunos ejemplos de curvas de luz de estrellas binarias eclipsantes:

¹http://ogle.astrouw.edu.pl/atlas/RR_Lyr.html

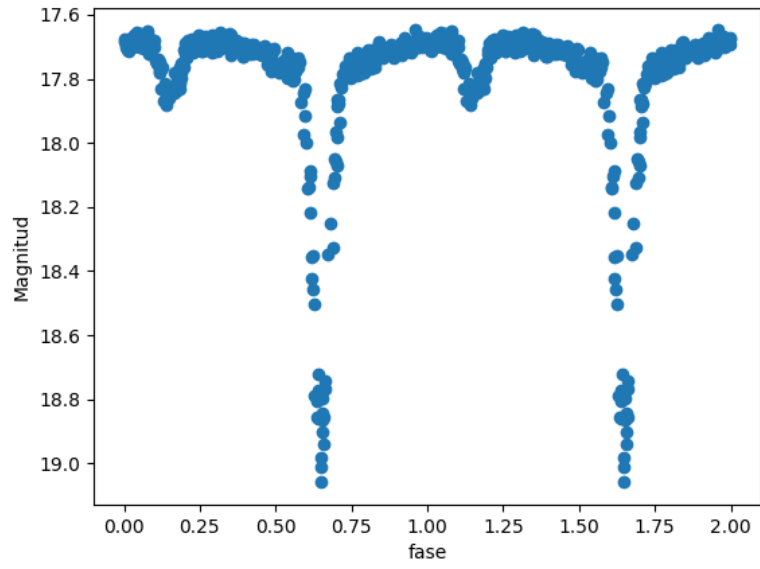


Figura 2.8: Ejemplo de curva de luz de una Algol hecha con los datos de Pawlak et al. (2016), con un período de 2.6700 días

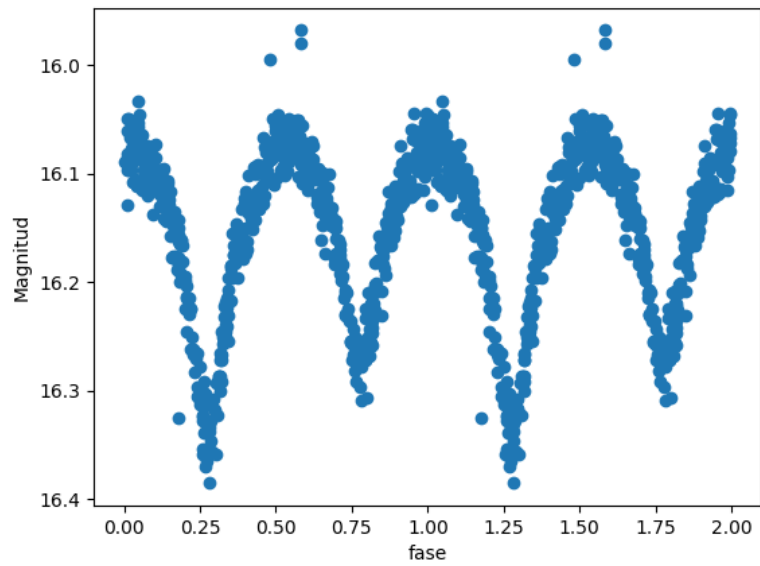


Figura 2.9: Ejemplo de curva de luz de una β Lyræ hecha con los datos de Pawlak et al. (2016), con un período de 1.25394 días

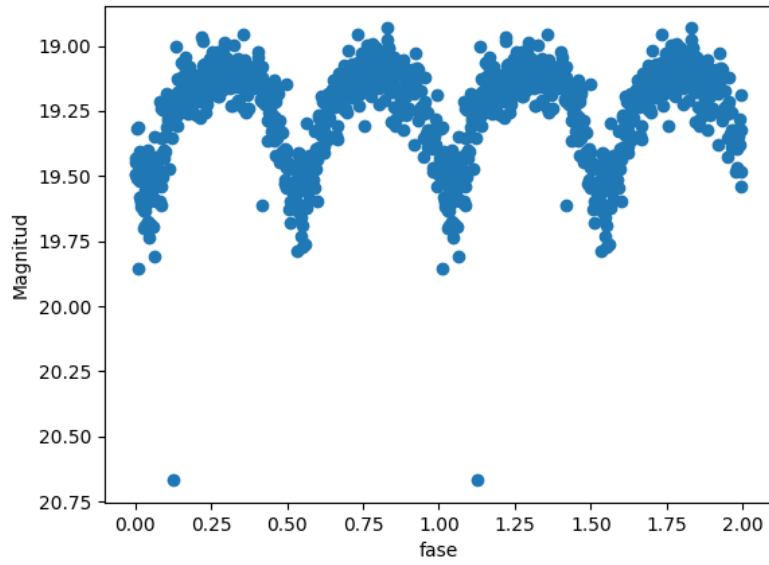


Figura 2.10: Ejemplo de una curva de luz de una W Ursae Majoris hecha con los datos de Pawlak et al. (2016), con un período de 1.31563 días

La distribución de períodos para las estrellas binarias eclipsantes se puede observar en el histograma de la figura 2.11:

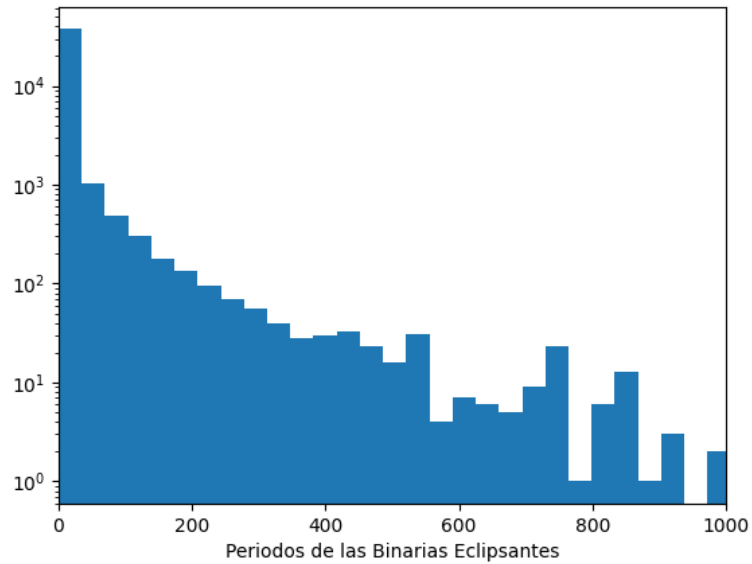


Figura 2.11: Distribución de períodos de los datos del proyecto OGLE IV de las binarias eclipsantes reportadas por Pawlak et al. (2016).

Se puede observar que ese histograma tiene un eje logarítmico vertical. Esto indica que si bien existen binarias eclipsantes de periodos entre 400 y 1000 días, se puede afirmar que

la gran mayoría de binarias eclipsantes tienen periodos menores a 200 días. En el presente proyecto solo se tendrán en cuenta binarias eclipsantes con periodos de 0.4 a 500 días.

2.2. Relación período-luminosidad de Leavitt

Mientras Henrietta Swan Leavitt trabajaba en la Universidad de Harvard, descubrió 2400 estrellas variables en la Nube Menor de Magallanes (SMC). Se dio cuenta de que las Cefeidas más luminosas tardaban más en hacer un ciclo de pulsación. Luego graficó la magnitud aparente de esas estrellas en función de los períodos y obtuvo una relación lineal entre la magnitud y el logaritmo del período Carroll & Ostlie (2017). A continuación se muestra una gráfica de relación período-luminosidad para distintos tipos de estrellas variables en la Nube Mayor de Magallanes (LMC) (Soszyński et al. 2015a):

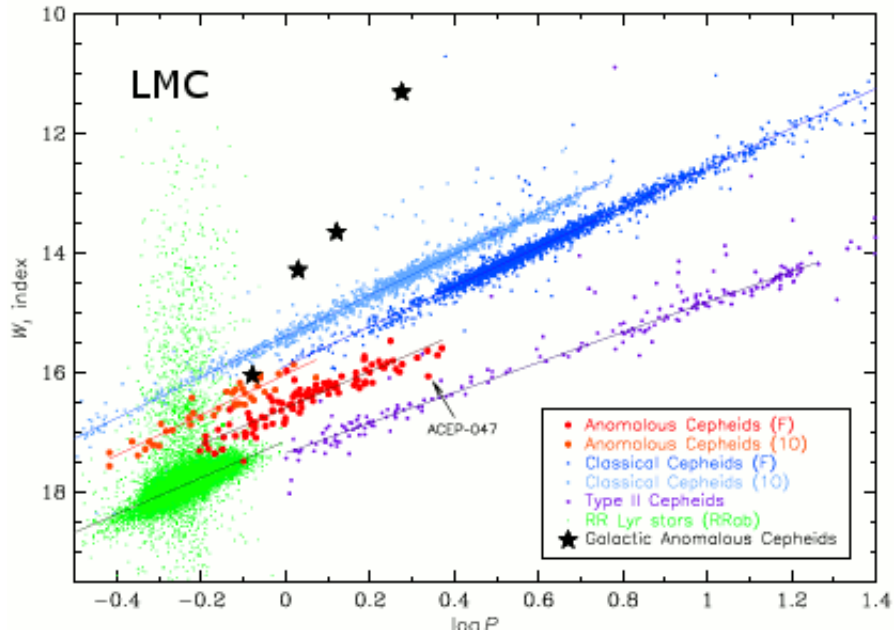


Figura 2.12: Relación período-luminosidad para distintas estrellas variables en la LMC, tomado de Soszyński et al. (2015a)

La relación de las Cefeidas que pulsan en el modo fundamental se puede calibrar para conocer la magnitud de una estrella en función del período en la que esta oscila. Por ejemplo, para las Cefeidas en la banda I se tiene la siguiente relación entre la magnitud y el período (Udalski 2000):

$$m_I = -(2,977 \pm 0,021) \log_{10} T + (16,593 \pm 0,014) . \quad (2.1)$$

Conociendo la magnitud absoluta y el período de pulsación podemos saber la distancia a la que se encuentra la población de variables Cefeidas. De esta manera, se puede afirmar que las Cefeidas clásicas son faros estelares para determinar distancias (Carroll & Ostlie 2017).

Capítulo 3

Estrellas a estudiar y sus períodos con los datos completos

Los datos fotométricos de las estrellas a estudiar en la LMC, tomados por el proyecto OGLE-IV se pueden obtener en el primer enlace del pie de página¹. Dependiendo del tipo de estrella, cuyos datos se quieren tomar, se accede a la carpeta “cep/” para acceder a los datos de las Cefeidas clásicas, “rrlyr/” para las estrellas RR Lyræ y la carpeta “ecl/” para las binarias eclipsantes. Luego se accede a la carpeta “phot/” y finalmente a la carpeta “I/”. Por ejemplo, el acceso a los datos de la estrella Cefeida “OGLE-LMC-CEP-0004.dat” está disponible en el segundo enlace del pie de página². Los archivos .dat están divididos en 3 columnas, separadas por un espacio. La primera columna contiene la fecha Juliana Heliocéntrica, la segunda columna tiene los datos de magnitud en la banda I de la estrella y la tercera columna tiene la incertidumbre de los datos de la segunda columna. En total se tomaron los datos de 100 estrellas variables de cada tipo (300 en total). Los datos fotométricos de las Cefeidas fueron obtenidos gracias al trabajo de Soszyński et al. (2015b), los datos de las RR Lyræ fueron obtenidos con el trabajo de Soszyński et al. (2016) y los datos de las binarias eclipsantes fueron obtenidos con el trabajo de Pawlak et al. (2016). Para los 3 métodos se buscaron 100000 frecuencias uniformemente espaciadas entre los siguientes rangos de períodos:

- **Estrellas Cefeidas:** de 0.4 a 200 días
- **RR Lyræ:** de 0.15 a 1.2 días
- **Binarias eclipsantes:** de 0.4 a 500 días

3.1. Períodos de las Estrellas Cefeidas y sus curvas de Luz

Los períodos hallados de las estrellas Cefeidas se encuentran en el anexo 1. La grilla usada para el método de mínima entropía fue de 12x7 en el caso de las estrellas Cefeidas y RR Lyræ y de 17x5 en el caso de las estrellas binarias eclipsantes. Los valores máximos de las funciones de castigo g y f , son de $g = 1,5$ y $f = 1,02$ para las estrellas Cefeidas, RR Lyræ y la

¹<http://www.astrouw.edu.pl/ogle/ogle4/OCVS/lmc/>

²<http://www.astrouw.edu.pl/ogle/ogle4/OCVS/lmc/cep/phot/I/OGLE-LMC-CEP-0004.dat>

mayoría de binarias eclipsantes. Para la binaria eclipsante 11639 los valores áximos de g y f fueron $g = 0,9$, $f = 0,9$, para la binaria 14200 $g = 1$ y $f = 0,8$ y para la binaria 24305 $g = 1,1$ y $f = 0,7$. En todos los casos se usó un N en el exponente de las funciones g y f (ecuaciones 1.9 y 1.10) de $N = 4$. Para la estrella binaria 22820 no fue posible hallar el periodo con el método de mínima entropía, ya que había periodos incorrectos que tenían menor entropía y menores valores de g y f , sin ser alias. A continuación se muestran algunas curvas de luz construidas a partir de los períodos hallados con cada uno de los métodos.

3.1.1. Ejemplos de curvas de luz hechas con el método de mínima entropía

La curva de luz para la estrella OGLE-LMC-CEP-3565 con un período de 8.1275 días y su correspondiente gráfica de entropía en función del período se muestran a continuación:

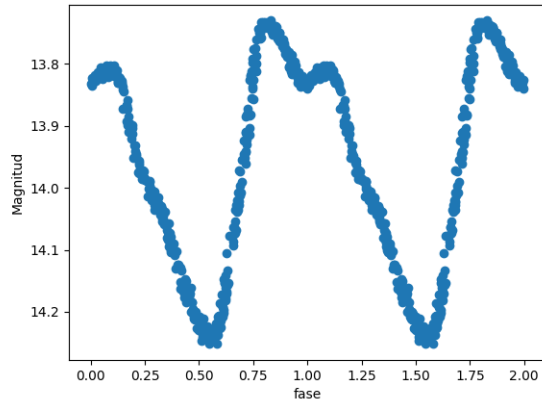


Figura 3.1: Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-CEP-3565 hallada con el método de mínima entropía

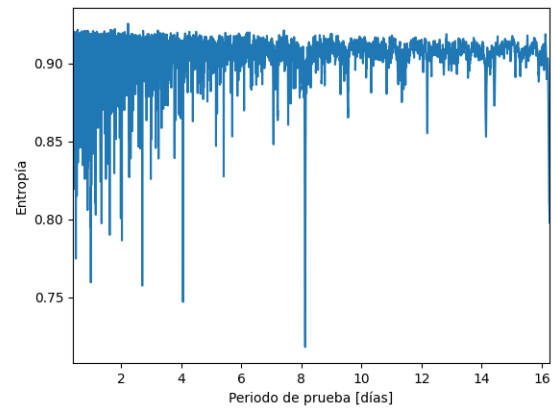


Figura 3.2: Gráfica de entropía en función de período para la estrella OGLE-LMC-CEP-3565

Se puede observar que esta estrella, que oscila en su modo fundamental, tiene la proyección de Hertzsprung comenzando por la rama descendente.

La curva de luz para la estrella OGLE-LMC-CEP-0596 con un período de 3.0527 días y su correspondiente gráfica de entropía en función del período se muestran a continuación:

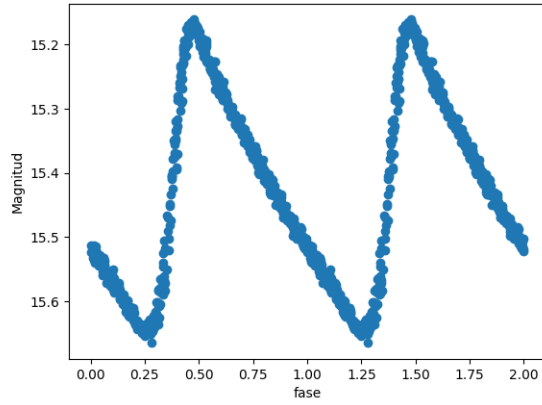


Figura 3.3: Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-CEP-0596 hallada con el método de mínima entropía

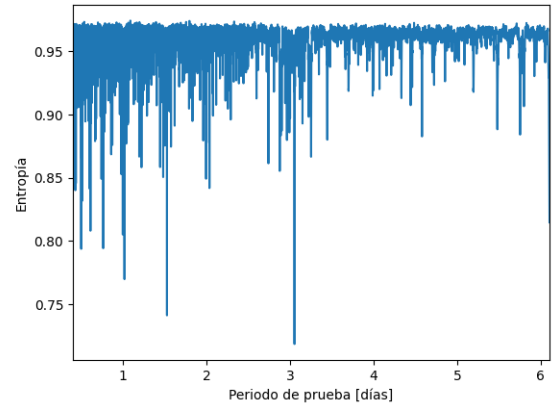


Figura 3.4: Gráfica de entropía en función de período para la estrella OGLE-LMC-CEP-0596

Se puede observar que esta estrella tiene una rama ascendente muy rápida, seguida por una rama descendente más lenta, lo cual indica que oscila en su modo fundamental.

3.1.2. Ejemplos de curvas de luz hechas con el método de fnpeaks

La curva de luz para la estrella OGLE-LMC-CEP-0549, se muestra a continuación:

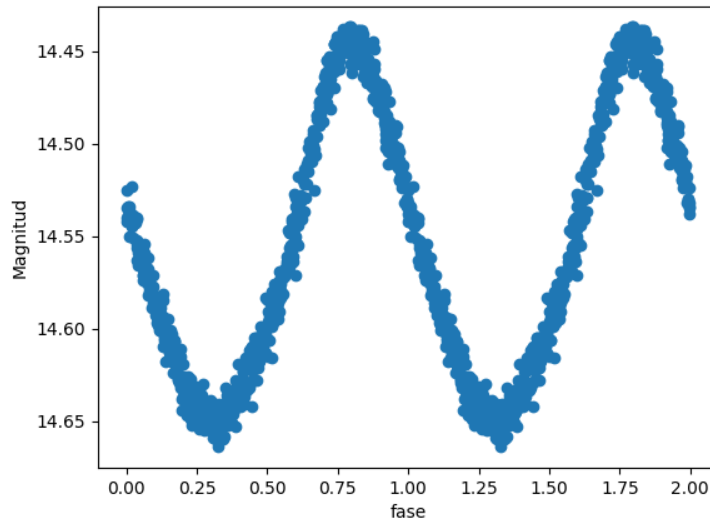


Figura 3.5: Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-CEP-0549, con un período de 3.5330 días, hallada con el método de fnpeaks

Se puede observar que, en este caso, la rama ascendente y la descendente tienen tasas de cambio parecidas, en valor absoluto. Esto se debe a que esta Cefeida no está oscilando en su modo fundamental, sino que está pulsando en su primer armónico, el cual es similar a una

sinusoidal.

La curva de luz para la estrella OGLE-LMC-CEP-0648 se muestra a continuación:

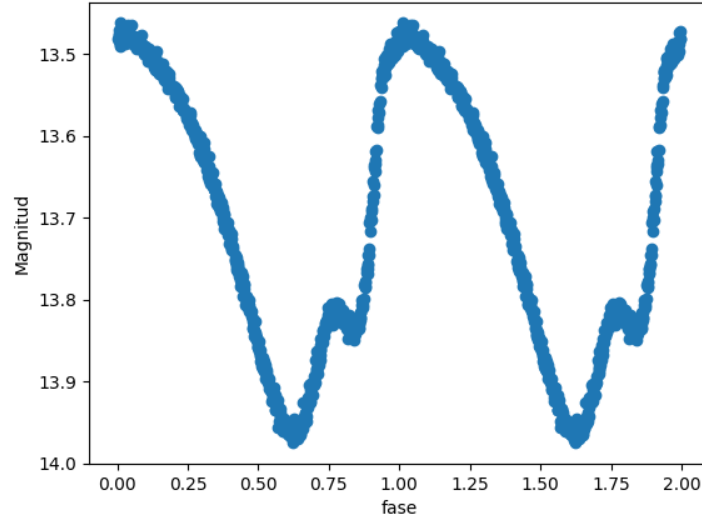


Figura 3.6: Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-CEP-0648, con un período de 13.62 días, hallada con el método de fnpeaks

Se puede observar que esta Cefeida oscila en su modo fundamental y que cuenta con una progresión de Hertzsprung en su rama ascendente. Esto implica que, o bien la estrella está oscilando ligeramente en su segundo modo, el cual está teniendo resonancia con el fundamental, o bien, la segunda capa de ionización de Helio II está generando ondas de choque con la pulsación original.

3.1.3. Ejemplos de curvas de luz hechas con el método de Lomb-Scargle

La curva de luz para la estrella OGLE-LMC-CEP-2493 con un período de 2.8522 días y su correspondiente periodograma se muestran a continuación:

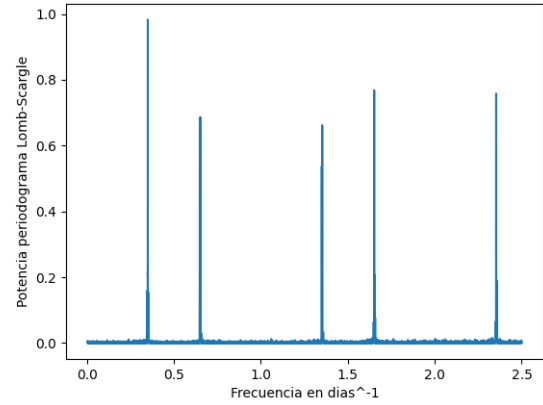
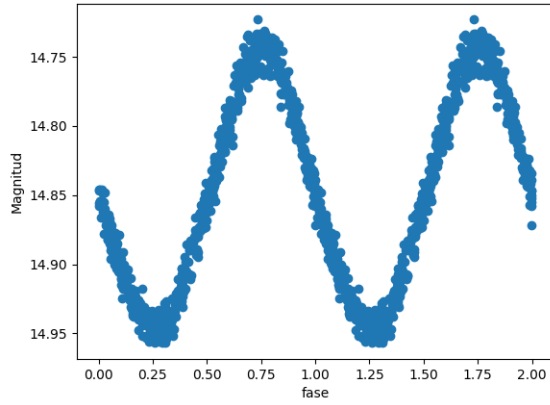


Figura 3.7: Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-CEP-2493 hallada con el método de Lomb-Scargle

Figura 3.8: Períodograma para la estrella OGLE-LMC-CEP-2493, cuyo pico de frecuencia de 0.3506 días^{-1} corresponde al período de la estrella

La estrella OGLE-LMC-CEP-2493 está pulsando en su primer armónico.

La curva de luz para la estrella OGLE-LMC-CEP-0801 con un período de 21.269 días y su correspondiente periodograma se muestran a continuación:

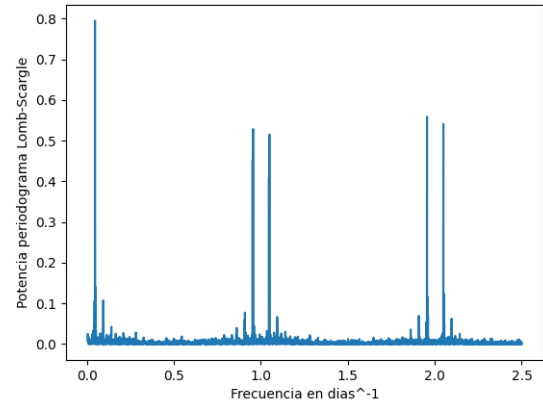
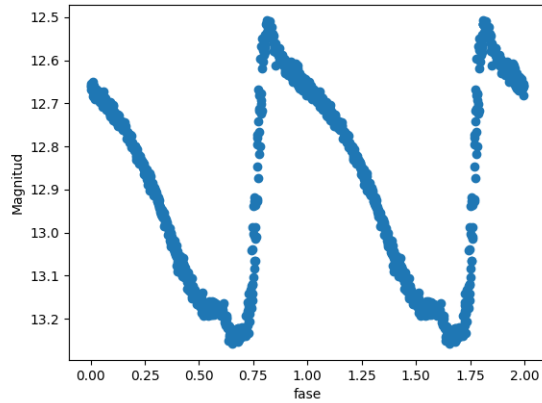


Figura 3.9: Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-CEP-0801 hallada con el método de Lomb-Scargle

Figura 3.10: Períodograma para la estrella OGLE-LMC-CEP-0801, cuyo pico de frecuencia de 0.047 días^{-1} corresponde al período de la estrella

Esta Cefeida también tiene una progresión de Hertzsprung. En este caso, la tiene al final de la rama descendente.

3.2. Períodos de las Estrellas RR Lyræ y sus curvas de Luz

Los períodos hallados de las estrellas RR Lyræ se encuentran en el anexo 1. A continuación se muestran algunas curvas de luz construidas a partir de los períodos hallados con cada uno de los métodos.

3.2.1. Ejemplos de curvas de luz hechas con el método de mínima entropía

La curva de luz para la estrella OGLE-LMC-RRLYR-06223 con un período de 0.365834 días y su correspondiente gráfica de entropía en función del período se muestran a continuación:

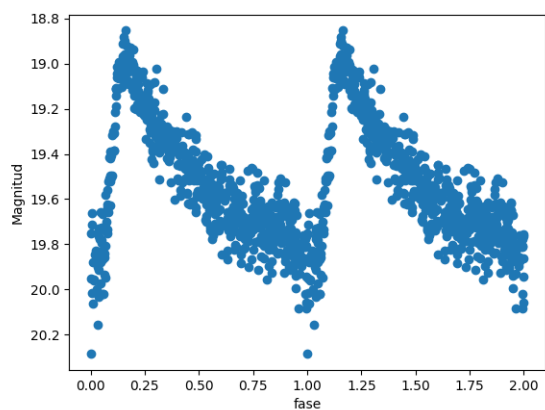


Figura 3.11: Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-RRLYR-06223 hallada con el método de mínima entropía

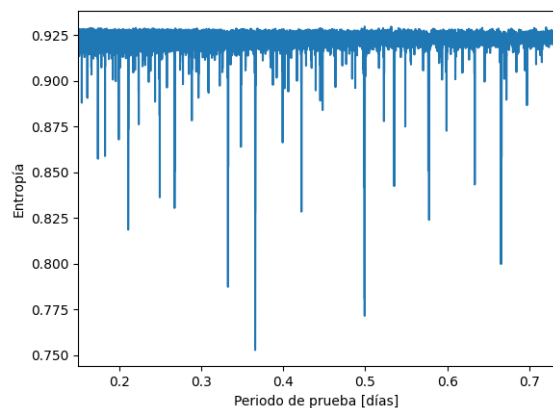


Figura 3.12: Gráfica de entropía en función de período para la estrella OGLE-LMC-RRLYR-06223

La curva de luz para la estrella OGLE-LMC-RRLYR-14065 con un período de 0.508740 días y su correspondiente gráfica de entropía en función del período se muestran a continuación:

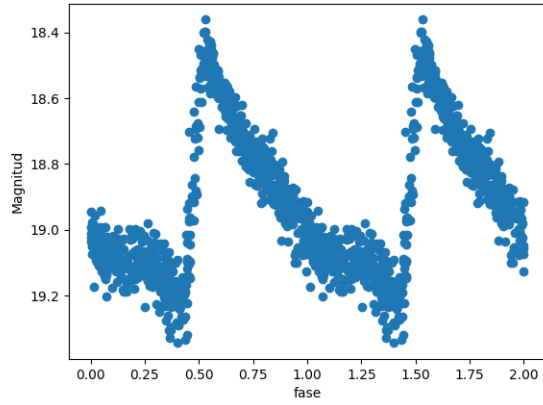


Figura 3.13: Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-RRLYR-14065 hallada con el método de mínima entropía

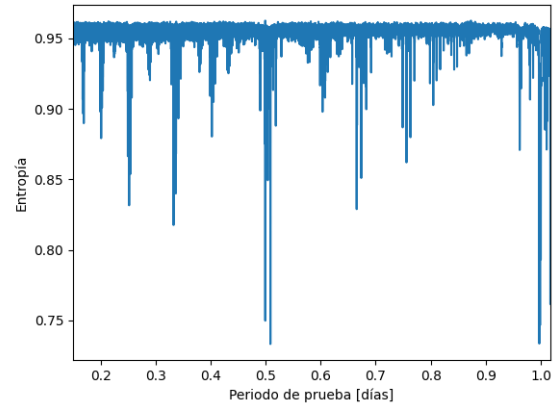


Figura 3.14: Gráfica de entropía en función de período para la estrella OGLE-LMC-RRLYR-14065

Se puede observar que las estrellas RR Lyrae tienen una rama ascendente muy rápida, casi vertical, mientras que tienen una rama descendente lenta. Debido a la rapidez de la rama ascendente, esta ocupa un espacio pequeño en la curva de luz, por lo que es menos probable tomar datos o puntos correspondientes a esta rama. Por esta razón es necesario obtener más datos o puntos de estas estrellas, para así tener suficientes puntos correspondientes a la rama ascendente (en el capítulo 4 se mostrará que las RR Lyrae requieren más puntos mínimos, para los 3 métodos, para poder determinar su período).

3.2.2. Ejemplos de curvas de luz hechas con el método de fnpeaks

La curva de luz para la estrella OGLE-LMC-RRLYR-01981 se muestra a continuación:

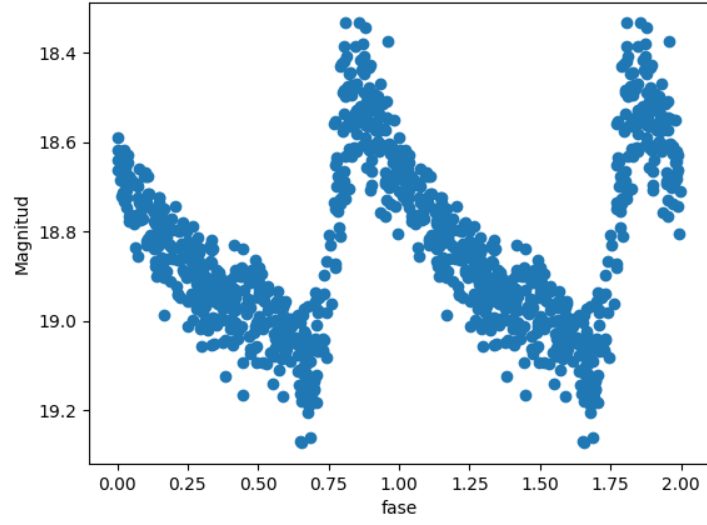


Figura 3.15: Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-RRLYR-01981, con un período de 0.553352 días, hallada con el método de `fnpeaks`

La curva de luz para la estrella OGLE-LMC-RRLYR-15818 se muestra a continuación:

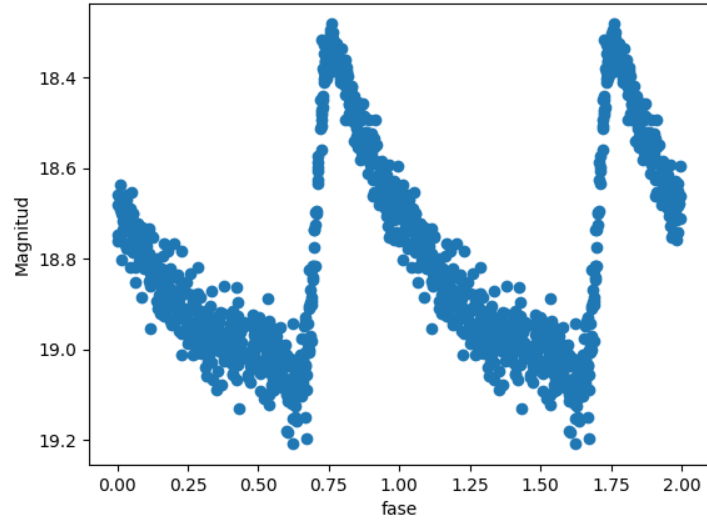


Figura 3.16: Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-RRLYR-15818, con un período de 0.469946 días, hallada con el método de `fnpeaks`

3.2.3. Ejemplos de curvas de luz hechas con el método de Lomb-Scargle

La curva de luz para la estrella OGLE-LMC-RRLYR-13099 con un período de 0.58743 días y su correspondiente periodograma se muestran a continuación:

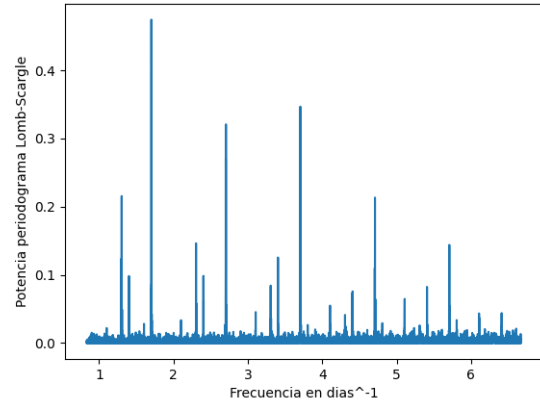
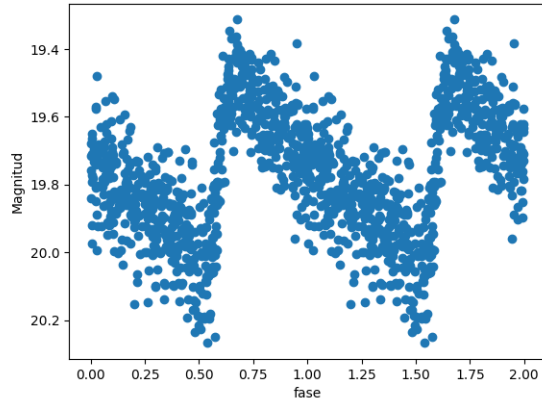


Figura 3.17: Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-RRLYR-13099 hallada con el método de Lomb-Scargle

Figura 3.18: Períodograma para la estrella OGLE-LMC-RRLYR-13099, cuyo pico de frecuencia de 1.7023 días^{-1} corresponde al período de la estrella

La curva de luz para la estrella OGLE-LMC-RRLYR-31715 con un período de 0.531530 días y su correspondiente periódograma se muestran a continuación:

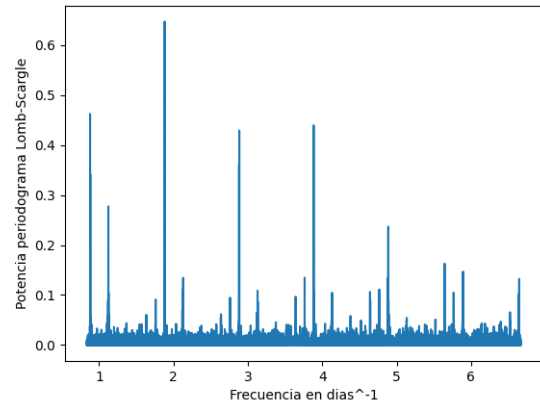
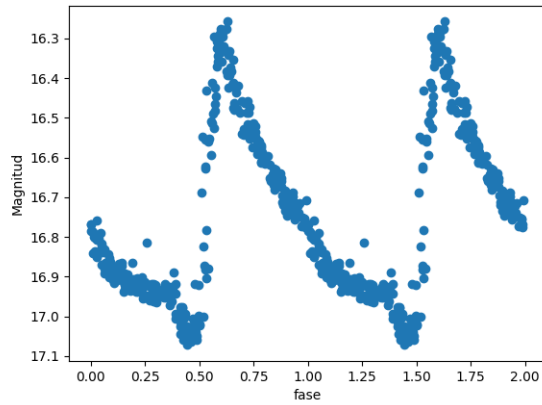


Figura 3.19: Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-RRLYR-31715 hallada con el método de Lomb-Scargle

Figura 3.20: Períodograma para la estrella OGLE-LMC-RRLYR-31715, cuyo pico de frecuencia de 1.8814 días^{-1} corresponde al período de la estrella

3.3. Períodos de las binarias eclipsantes y sus curvas de Luz

Los períodos hallados de las estrellas binarias eclipsantes se encuentran en el anexo 1. A continuación se muestran algunas curvas de luz construidas a partir de los períodos hallados con cada uno de los métodos.

3.3.1. Ejemplos de curvas de luz hechas con el método de mínima entropía

La curva de luz para la estrella OGLE-LMC-ECL-16239 con un período de 1.58135 días y su correspondiente gráfica de entropía en función de período se muestran a continuación:

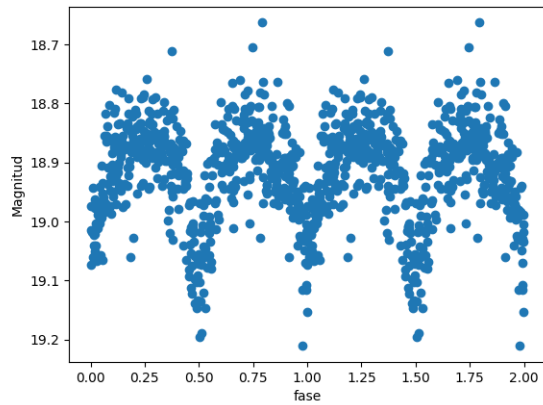


Figura 3.21: Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-ECL-16239 hallada con el método de mínima entropía

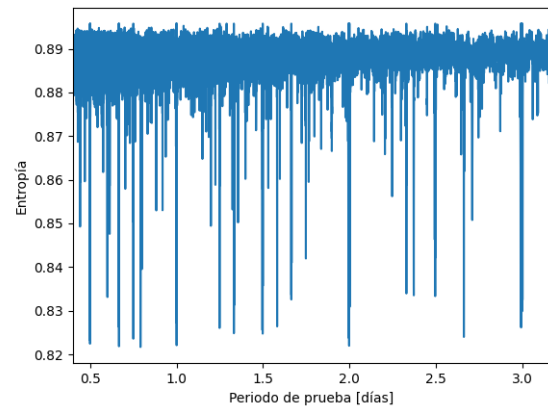


Figura 3.22: Gráfica de entropía en función de período para la estrella OGLE-LMC-ECL-16239

Se puede observar que los eclipses primarios y secundarios de estas binarias eclipsantes están cercanos y no hay secciones planas de la curva de luz entre ellos. Esto permite afirmar que, esta binaria eclipsante es una β Lyræ. Se puede notar también que tiene bastante ruido de fondo, cuya causa posiblemente es la luz de otras estrellas.

La curva de luz para la estrella OGLE-LMC-ECL-13085 con un período de 1.25394 días y su correspondiente gráfica de entropía en función de período se muestran a continuación:

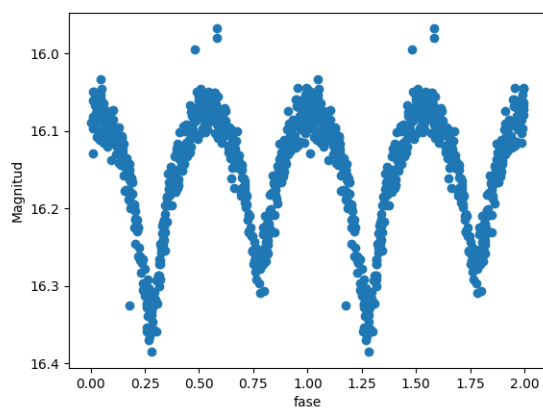


Figura 3.23: Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-ECL-13085 hallada con el método de mínima entropía

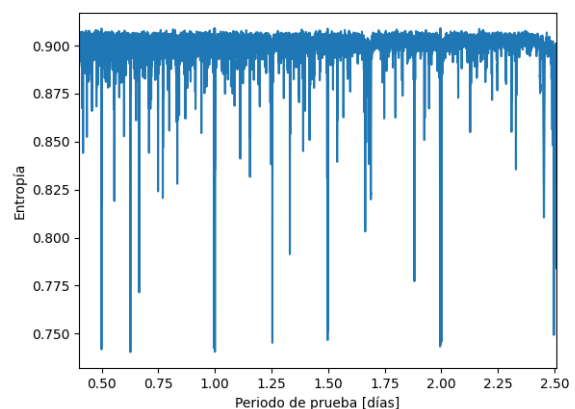


Figura 3.24: Gráfica de entropía en función de período para la estrella OGLE-LMC-ECL-13085

Se puede observar que esta binaria eclipsante es también una β Lyræ. Se pueden distinguir los eclipses primario y secundario, pero no se observa ninguna región plana en la curva de luz. Esto indica que las estrellas están a una distancia corta, pero no llegan a estar en contacto.

3.3.2. Ejemplos de curvas de luz hechas con el método de fnpeaks

La curva de luz para la estrella OGLE-LMC-ECL-05084 con un período de 2.69312 días se muestra a continuación:

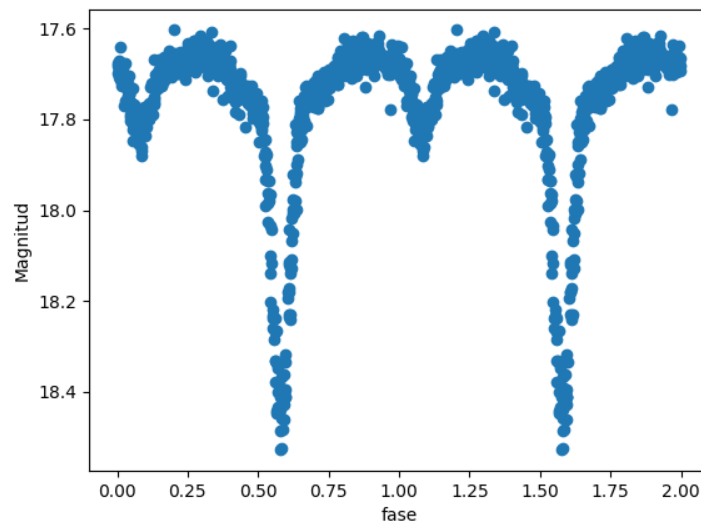


Figura 3.25: Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-ECL-05084 hallada con el método de fnpeaks

Esta binaria eclipsante tiene unos eclipses primario y secundario muy diferentes entre ellos. Se puede distinguir una pequeña zona plana entre los eclipses. Por lo tanto esta binaria eclipsante es una Algol, lo cual quiere decir, que las estrellas en el sistema binario están relativamente lejos.

La curva de luz para la estrella OGLE-LMC-ECL-09945 con un período de 33.554 días se muestra a continuación:

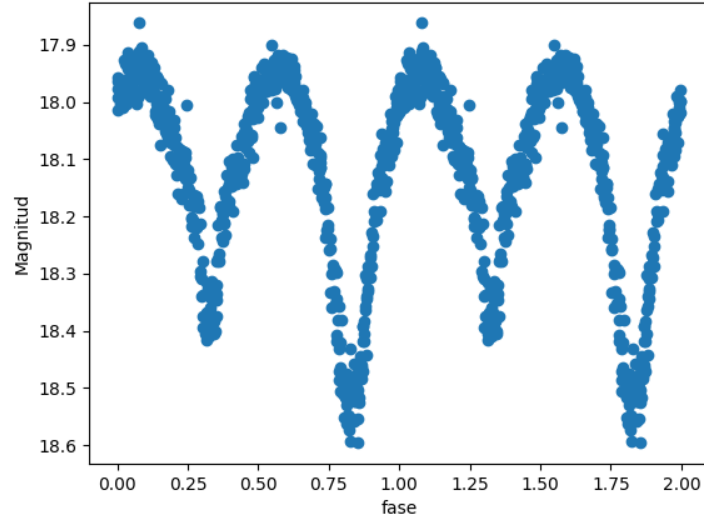


Figura 3.26: Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-ECL-09945 hallada con el método de fnpeaks

Se puede observar que la estrella OGLE-LMC-ECL-09945 es una β Lyræ, dado que se distinguen los eclipses pero no se observa ninguna región plana.

3.3.3. Ejemplos de curvas de luz hechas con el método de Lomb-Scargle

La curva de luz para la estrella OGLE-LMC-ECL-28617 con un período de 2.6700 días y su correspondiente periodograma se muestran a continuación:

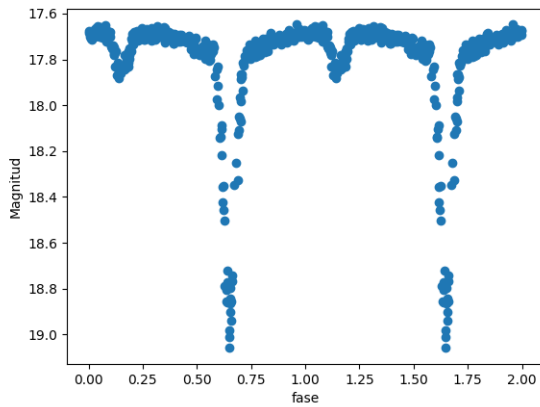


Figura 3.27: Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-ECL-28617 hallada con el método de Lomb-Scargle

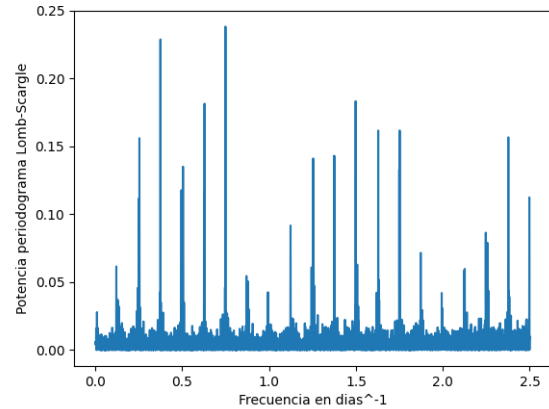


Figura 3.28: Períodograma para la estrella OGLE-LMC-ECL-28617, cuyo pico de frecuencia de 0.3745 días^{-1} corresponde al período de la estrella

Se puede observar que esta binaria eclipsante es de tipo Algol, con elipses primario y

secundario bien diferenciados y regiones planas entre los eclipses en la curva de luz.

La curva de luz para la estrella OGLE-LMC-ECL-31494 con un período de 1.66753 días y su correspondiente periodograma se muestran a continuación:

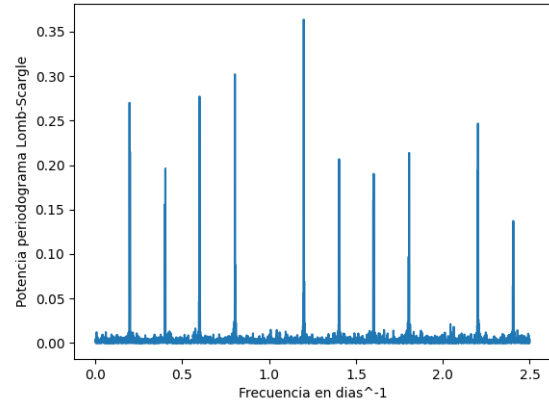
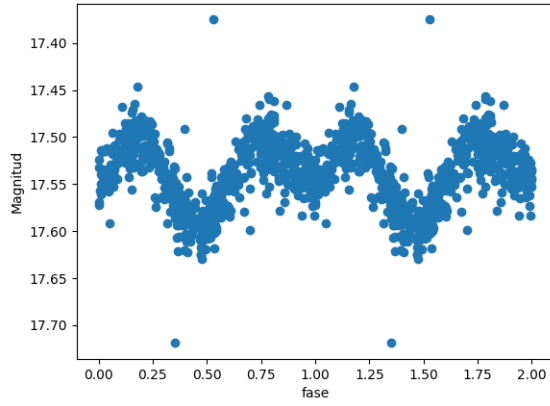


Figura 3.29: Curva de luz para la estrella OGLE-LMC-ECL-31494 hallada con el método de Lomb-Scargle

Figura 3.30: Períodograma para la estrella OGLE-LMC-ECL-31494, cuyo pico de frecuencia de 0.5996 días^{-1} corresponde al período de la estrella

La estrella OGLE-LMC-ECL-31494 es una β Lyræ.

Capítulo 4

Mínima Cantidad de datos, con la que se puede determinar el período de las estrellas estudiadas

Para determinar el mínimo número de puntos o datos que se necesitan para encontrar el período de una estrella variable, se definirán los siguientes números. N_{TOTAL} como el número total de puntos o datos que tiene la estrellas N_r como el número de puntos removidos de la estrella y $N_{REMANENTES}$ como el número de puntos remanentes o número de puntos que no se removieron. El archivo original será el archivo que contiene los datos o puntos completos de una estrella. Inicialmente se remueve un número de puntos correspondiente a una fracción entre 0.7 y 0.99 de los puntos totales, es decir, si x es la fracción de los puntos removidos inicialmente, se tendrá que: $N_r = \text{int}(xN_{TOTAL})$ y $N_{REMANENTE} = \text{int}((1-x)N_{TOTAL})$. Luego se intenta hallar el período con los puntos remanentes. Si no se logra hallar el período se retira aleatoriamente $N_r - 1$ puntos del archivo original, es decir quedan $N_{REMANENTES} + 1$ puntos, y se vuelve a intentar hallar el período. Si no se halla el período, se remueven aleatoriamente $N_r - 2$ puntos del archivo original, quedando $N_{REMANENTES} + 2$ puntos y se vuelve a intentar hallar el período. Este proceso se repite sucesivamente hasta que se logre determinar el mismo período hallado con los puntos completos, con un error máximo de 1×10^{-3} , donde el error está definido como $Error = \frac{|p_{rem} - p_{sin}|}{p_{sin}}$, donde p_{rem} es el período hallado con los puntos removidos y p_{sin} es el período hallado sin remover puntos (el período hallado en el capítulo 3). Una vez se haya logrado encontrar el período, se registra la cantidad de puntos remanentes ($N_{REMANENTES}$). Todo el anterior procedimiento se repitió 20 veces, y el promedio de los puntos remanentes se registró, para cada estrella, en las tablas del anexo 1. En la figura 4.1 resume el anterior procedimiento.

El procedimiento anterior, también se ilustrará a continuación con el siguiente ejemplo: Se tiene una estrella Cefeida X con un período de 4.5 días, hallado con los 100 datos completos. Se remueve inicialmente el 95 % de los puntos. Es decir se removieron $N_r = 95$ puntos y quedaron $N_{REMANENTES} = 5$ puntos. Se intentó hallar el período con los 5 puntos restantes y no se encontró el período de 4.5 días. Entonces, se removieron $N_r = 94$ puntos y quedaron $N_{REMANENTES} = 6$ puntos, pero tampoco se logró hallar el período. Entonces se removió $N_r = 93$ puntos y quedaron $N_{REMANENTES} = 7$ puntos y se logró hallar el período. Este

número $N_{REMANENTES} = 7$ se registra en un archivo .csv y se vuelve a repetir el procedimiento, empezando de nuevo con $N_r = 95$ y $N_{REMANENTES} = 5$. En esta ocasión se logra hallar el período con $N_{REMANENTES} = 10$ puntos. El proceso se repite 20 veces, teniendo así 20 valores de $N_{REMANENTES}$. Finalmente se halla el promedio de estos 20 valores, y se registra en las tablas del anexo 1.

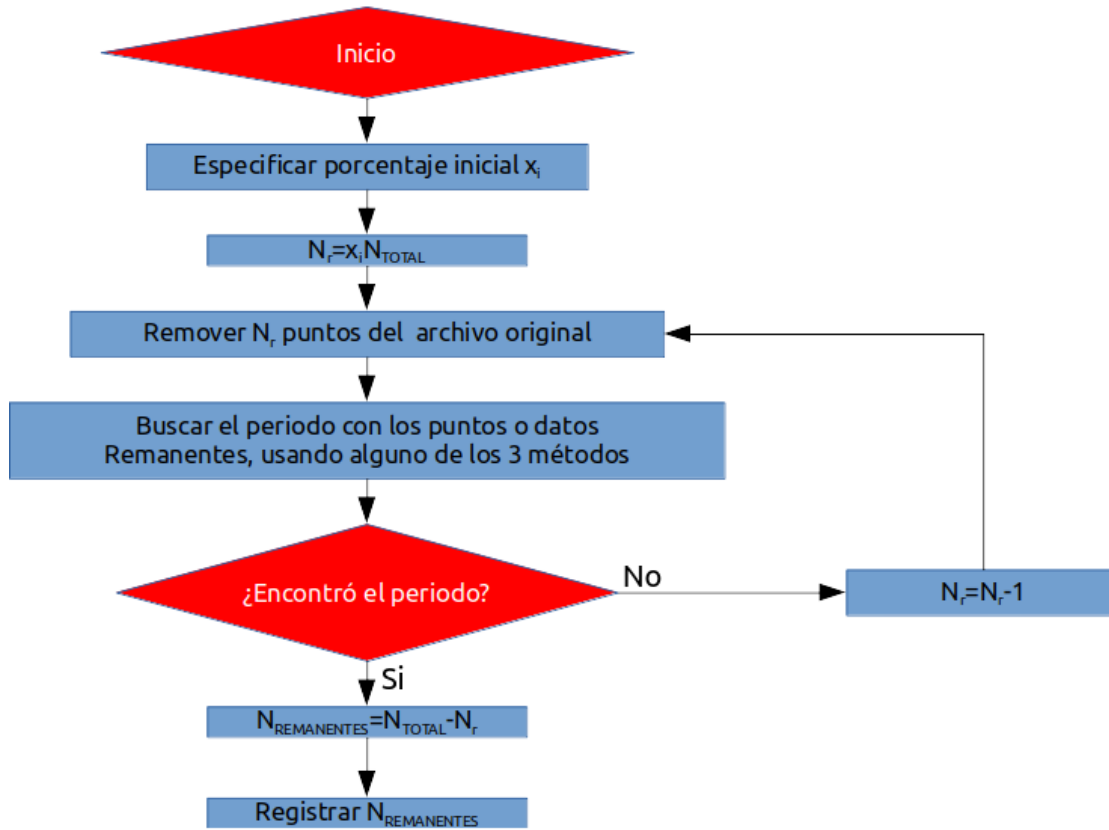


Figura 4.1: Método para hallar el mínimo número de puntos necesario, para determinar el período, donde N_r es el número de puntos o datos removidos, N_{TOTAL} es el número total de puntos o datos de la estrella y $N_{REMANENTES}$ es el número de puntos o datos no removidos

En el método de mínima entropía, se usaron valores de g y f correspondientes a 1.5 veces los valores de g y f del período de la estrella, con los puntos remanentes. En las líneas 120, 121 y 122 del código “HallarPuntosME.cpp”, la línea 120 halla el valor de la entropía, g y f en el período de la estrella, con los puntos remanentes. Estos valores de g y f son los que filtran los “alias”. De esta manera, se garantiza que no se filtre el período y que si no se tienen suficientes puntos, el método halle un período incorrecto que no corresponda a un “alias”, o bien, si se tiene suficientes puntos, el método halle el período correcto. En todos los métodos se buscaron las frecuencias (correspondientes a cada período) en los mismos rangos y con el mismo espaciamiento (100000 frecuencias uniformemente espaciadas entre períodos de: 0.4-200 días para Cefeidas, 0.15-1.2 días para RR Lyræ y 0.4-500 días para binarias eclipsantes).

En enlace de códigos fuente y una descripción de lo que hacen, para ejecutar este pro-

ceso, se encuentran en el anexo 2. A continuación se muestran los resultados, que muestran el mínimo número de puntos, promedio, necesarios para hallar el período de una estrella, organizados según el período hallado de la estrella sin remover puntos.

4.1. Mínima Cantidad de puntos para hallar el período de las Cefeidas

En las siguientes gráficas de puntos se muestra el número promedio de puntos remanentes de cada estrella Cefeida según su período. Los puntos azules son las Cefeidas que pulsan en su modo fundamental (F), los puntos naranjas son las que pulsan en su primer modo normal (1O) y los puntos verdes son las Cefeidas que pulsan en el primer y segundo modo (1O2O).

4.1.1. Método de mínima entropía:

La grilla usada en este caso fue de 12 columnas y 7 filas (12x7). Los porcentajes iniciales en este caso fueron todos de 0.95.

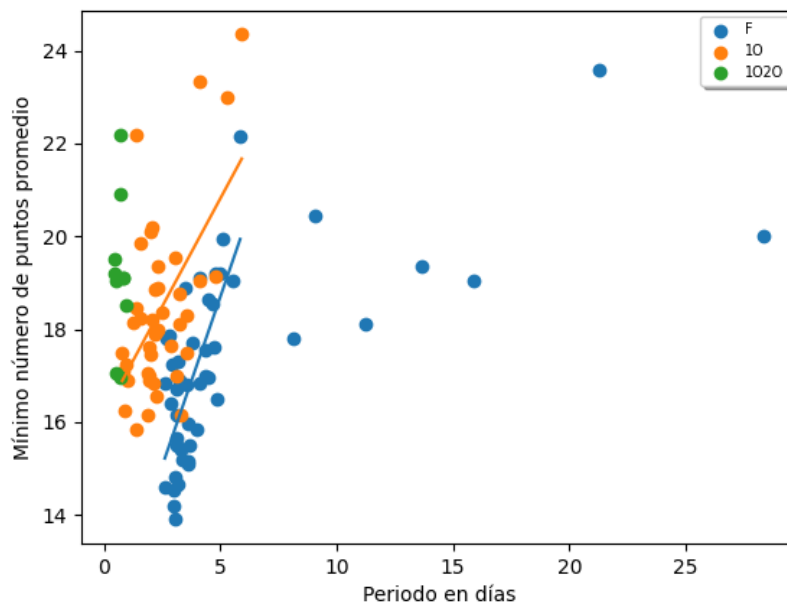


Figura 4.2: Mínimo número de puntos en relación al período para las Cefeidas con mínima entropía

Se puede observar en la gráfica que para las Cefeidas que oscilan en su modo fundamental y las que oscilan en el primer modo hay una relación entre el período y el mínimo número de puntos para períodos entre 0 a 8 días, el cual indica que entre mayor el período, más puntos se necesitarán. Se puede observar también que las estrellas que oscilan en el primer modo requieren más datos que las que oscilan en el modo fundamental. Para las estrellas que oscilan en el modo fundamental se necesita en promedio 17.3 puntos, con una desviación

de 1.9 puntos. Para las estrellas que oscilan en el primer modo se necesita un promedio de 18.4 puntos con una desviación de 2 puntos. Finalmente, para las estrellas que oscilan en el primer y segundo modo se necesita en promedio 19.1 puntos con una desviación de 1.5 puntos. El promedio general de mínimo número de puntos para estrellas Cefeidas con el método de mínima entropía es de 17.9 puntos con una desviación de 2.0 puntos.

4.1.2. Método de fnpeaks:

En este caso todos los porcentajes iniciales fueron de 0.99

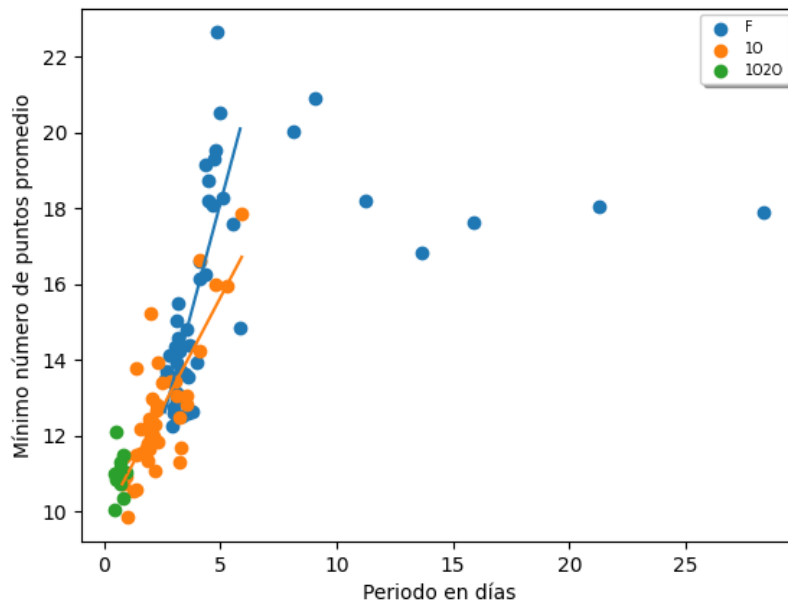


Figura 4.3: Mínimo número de puntos en relación al período para las Cefeidas con fnpeaks

Se puede observar una tendencia general (sin importar en que modo oscila la Cefeida) de los puntos mínimos a incrementarse a medida que aumenta el período, para períodos de 0 a 8 días. Para períodos mayores a 8 días no se observa ninguna tendencia. Para las estrellas que oscilan en el modo fundamental se necesita en promedio 15.7 puntos, con una desviación de 2.7 puntos. Para las estrellas que oscilan en el primer modo se necesita un promedio de 12.6 puntos con una desviación de 1.7 puntos. Finalmente, para las estrellas que oscilan en el primer y segundo modo se necesita en promedio 11.0 puntos con una desviación de 0.5 puntos. El promedio general de mínimo número de puntos para estrellas Cefeidas con el método de fnpeaks es de 13.9 puntos con una desviación de 2.8 puntos.

4.1.3. Método de Lomb-Scargle:

En este caso todos los porcentajes iniciales fueron de 0.98

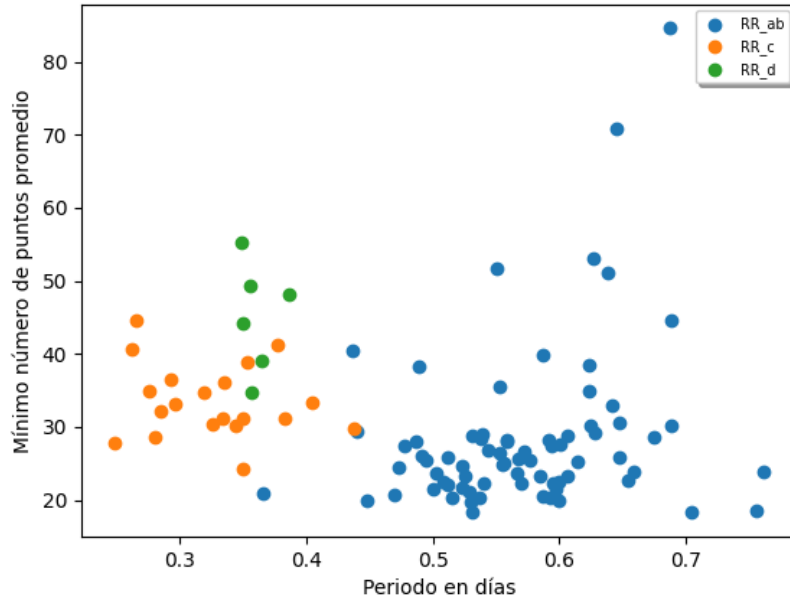


Figura 4.5: Mínimo número de puntos en relación al período para las RR Lyrae con mínima entropía

Para las estrellas tipo ab se necesita en promedio 28.5 puntos, con una desviación de 11.1 puntos. Para las estrellas tipo c se necesita un promedio de 33.5 puntos con una desviación de 4.9 puntos. Finalmente, para las estrellas tipo d se necesita en promedio 45.1 puntos con una desviación de 6.8 puntos. El promedio general de mínimo número de puntos para estrellas RR Lyrae con el método de mínima entropía es de 30.5 puntos con una desviación de 10.8 puntos.

4.2.2. Método de fnpeaks:

En este caso todos los porcentajes iniciales fueron de 0.98

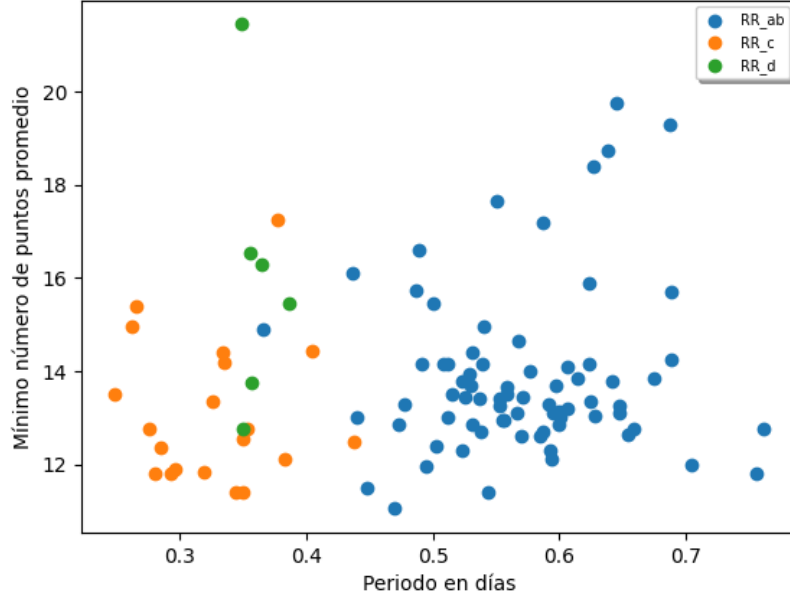


Figura 4.6: Mínimo número de puntos en relación al período para las RR Lyrae con fnpeaks

Para las estrellas tipo ab se necesita en promedio 13.9 puntos, con una desviación de 1.8 puntos. Para las estrellas tipo c se necesita un promedio de 13.1 puntos con una desviación de 1.5 puntos. Finalmente, para las estrellas tipo d se necesita en promedio 16.0 puntos con una desviación de 2.8 puntos. El promedio general de mínimo número de puntos para estrellas RR Lyrae con el método de fnpeaks es de 13.8 puntos con una desviación de 1.9 puntos.

4.2.3. Método de Lomb-Scargle:

En este caso todos los porcentajes iniciales fueron de 0.98

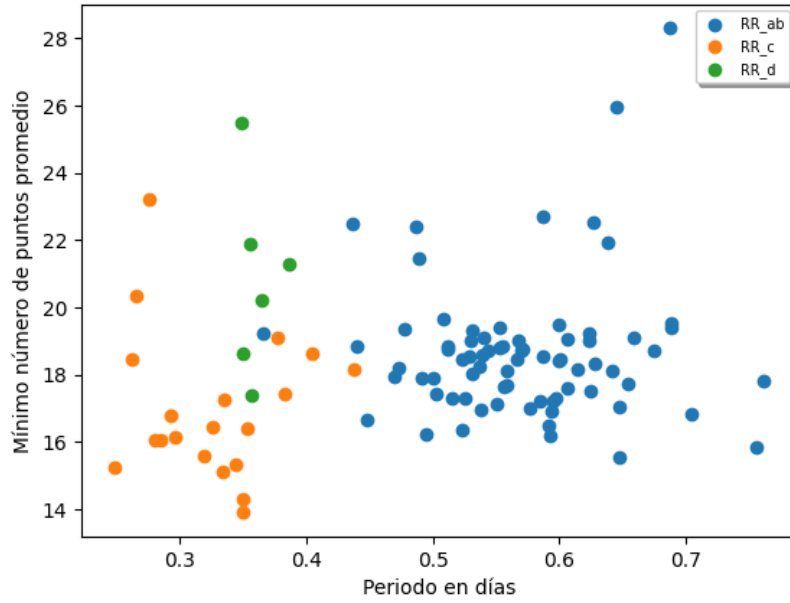


Figura 4.7: Mínimo número de puntos en relación al período para las RR Lyrae con Lomb-Scargle

Para las estrellas tipo ab se necesita en promedio 18.7 puntos, con una desviación de 2.0 puntos. Para las estrellas tipo c se necesita un promedio de 17.0 puntos con una desviación de 2.1 puntos. Finalmente, para las estrellas tipo d se necesita en promedio 20.8 puntos con una desviación de 2.6 puntos. El promedio general de mínimo número de puntos para estrellas RR Lyrae con el método de Lomb-Scargle es de 18.5 puntos con una desviación de 2.3 puntos.

4.3. Mínima Cantidad de puntos para hallar el período de las binarias eclipsantes

En las siguientes gráficas de puntos se muestra el número promedio de puntos remanentes de cada estrella binaria eclipsante según su período.

4.3.1. Método de mínima entropía:

En este caso los porcentajes iniciales variaban entre 0.7 y 0.975. La grilla fue de 17x5.

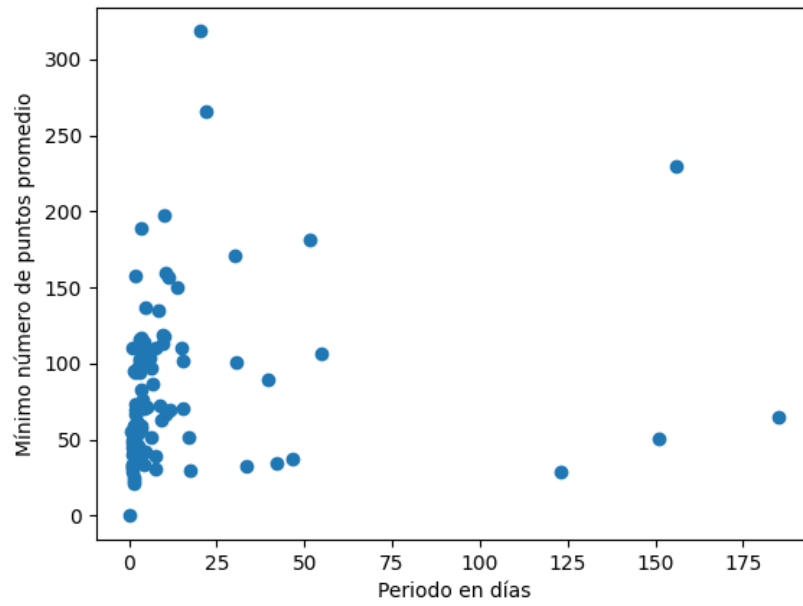
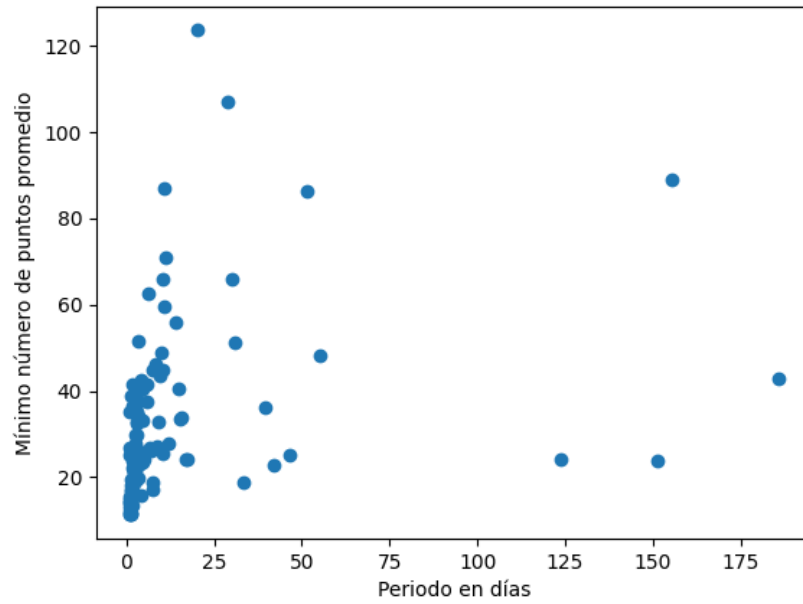


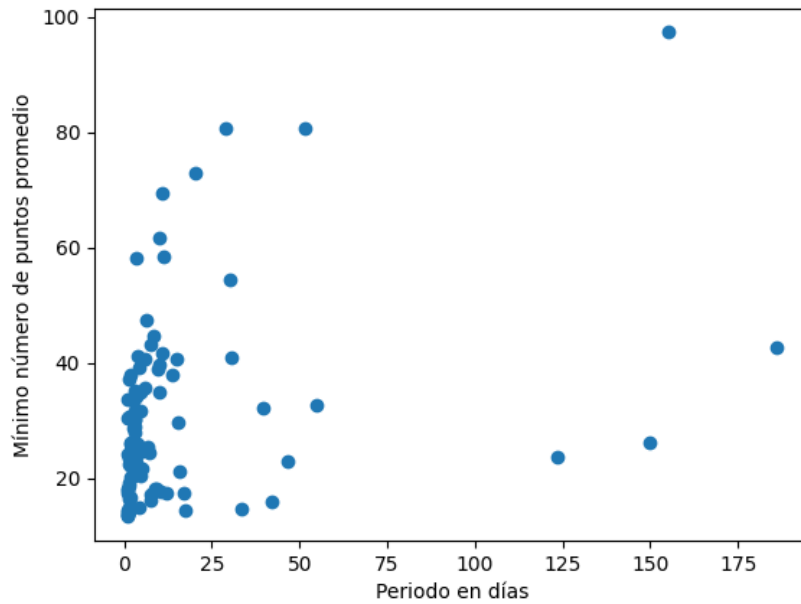
Figura 4.8: Mínimo número de puntos en relación al período para las binarias eclipsantes con mínima entropía

El promedio de mínimo número de puntos para las binarias eclipsantes con el método de mínima entropía es de 81.3 puntos con una desviación de 53.2 puntos. Este ha sido el promedio más grande de los 3 métodos, con los 3 tipos de estrella estudiados.

4.3.2. Método de fnpeaks



4.3.3. Método de Lomb-Scargle



Conclusiones

En el presente trabajo se encontró el mínimo número de puntos que requieren los métodos de mínima entropía, fnpeaks y Lomb-Scargle para determinar el periodo de 3 tipos de estrellas variables: Cefeidas clásicas, RR Lyræ y binarias eclipsantes. Conociendo el dato del mínimo número de puntos y lo establecido en el teorema de Nyquist-Shannon se puede establecer el tiempo necesario en el que se deben recolectar los datos fotométricos de una estrella variable. En el caso de una estrella variable, de la cual se estima que su período está entre 3 y 5 días, se requerirían entre 13 y 14 puntos para poder determinar el periodo con el método de Lomb-Scargle. Por otro lado, de acuerdo al teorema de Nyquist-Shannon se necesitaría estar observando entre 5 y 35 días, tomando los datos uniformemente, para poder tener el número de datos suficiente para hallar su período. En caso de tener una estrella de período corto, por ejemplo, de 0.4 días, sería necesario tomar 2 datos cada 0.4 días si se quiere obtener el período en 2.8 días. Sin embargo, en muchas ocasiones solo es posible tomar un dato por día, por lo que tomar dos datos dentro del espacio de fase de la estrella tardaría 2 días. Es decir, en este caso se necesitaría tomar datos al menos durante 14 días. En general, para cualquier estrella se debe observar este mínimo número de puntos, de tal manera que, estos cubran todo su espacio de fase, es decir, si se tiene, por ejemplo, una estrella con un periodo de 50 días, no se va a lograr hallar el periodo con 14 puntos tomados los primeros 10 días. Es necesario que estos puntos estén distribuidos de manera lo más uniformemente posible. Es decir, es necesario haber tomado 14 puntos mientras estos se tomaban a un ritmo de 2 puntos cada 50 días. En el ritmo más lento posible, entonces, se necesitan 350 días, sin embargo, en este caso si es posible observar a un ritmo más rápido del que exige Nyquist-Shannon, que es 1 dato por día, por lo que en este caso sencillamente se necesitarían tomar datos durante 50 días a un ritmo de un dato por día. Entonces, si se desea conocer el período de una estrella variable del cual no se tiene una estimación del período y se toma un dato cada noche, es posible hallar ese período si se observa durante 14 días, para estrellas de período menor a 2 días y determinando este período con el método de Lomb-Scargle. Tomar datos una vez cada noche permite tener un muestreo suficiente para recuperar la señal de la estrella antes de llegar al tiempo límite que impone Nyquist-Shannon. Estos mismos cálculos se pueden hacer con los métodos de fnpeaks y mínima entropía.

Sin embargo, los datos de mínimo número de puntos para hallar el periodo de una estrella variable obtenidos en el presente trabajo, fueron en su mayoría de estrellas de periodos cortos. En las muestras tomadas, hay pocas estrellas de períodos largos. Por esta razón es necesario extender el presente estudio a estrellas con períodos exclusivamente mayores a 20 días. Este estudio se puede extender también a otros métodos para hallar el período o bien

a otro tipo de estrellas variables.

De acuerdo a los resultados del capítulo 4, para hallar el periodo de estrellas Cefeidas y binarias eclipsantes se recomienda usar el método de Lomb-Scargle. Para hallar el periodo de estrellas RR Lyræ se recomienda usar el método de fnpeaks. Estos resultados se resumen en el cuadro 4.1

Tipo estrella/método	LS	fnP	ME
Cefeidas	13	14	18
RR Lyræ	19	14	36
Binarias eclipsantes	31	33	82

Cuadro 4.1: Tabla que indica el mínimo número de puntos promedio necesarios para hallar el período de estrellas variables. LS hace referencia a Lomb-Scargle, fnP hace referencia a fnpeaks y ME hace referencia a mínima entropía

Bibliografía

- Carroll, B. W. & Ostlie, D. A. 2017, *An Introduction to Modern Astrophysics* (Cambridge University Press)
- Cincotta, P. M., Mendez, M., & Nuñez, J. A. 1995, *Astrophysical Journal*, 449, 231
- Deeming, T. J. 1975, *Astrophysics and Space Science*, 36, 137
- García-Varela, A., Muñoz, J. R., Sabogal, B. E., Domínguez, S. V., & Martínez, J. 2016, *The Astrophysical Journal*, 824, 74
- Graham, M. J., Drake, A. J., Djorgovski, S. G., et al. 2013, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 434, 3423
- Karttunen, H., Kröger, P., Oja, H., Poutanen, M., & Donner, K. J., eds. 2017, *Fundamental Astronomy* (Springer Berlin Heidelberg)
- Kramida, A., Yu. Ralchenko, Reader, J., & and NIST ASD Team. 2020, *NIST Atomic Spectra Database* (ver. 5.8), [Online]. Available: <https://physics.nist.gov/asd> [2021, September 15]. National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD.
- Kurtz, D. W. 1985, *Monthly Notices Royal Astronomical Society*, 213, 773
- Pawlak, M., Soszyński, I., Udalski, A., et al. 2016, *Acta Astronomica*, 66, 421
- Percy, J. R. 2007, in *Understanding Variable Stars* (Cambridge University Press), 103–135
- Riess, A. G., Fliri, J., & Valls-Gabaud, D. 2012, *Astrophysical Journal*, 745, 156
- Shannon, C. 1949, *Proceedings of the IRE*, 37, 10
- Shannon, C. E. & Weaver, W. 1964, *The Mathematical Theory of Communication* (The University of Illinois Press)
- Soszyński, I., Udalski, A., Szymański, M. K., et al. 2015a, *Acta Astronomica*, 65, 233
- Soszyński, I., Udalski, A., Szymański, M. K., et al. 2015b, *Acta Astronomica*, 65, 297
- Soszyński, I., Udalski, A., Szymański, M. K., et al. 2015, *Acta Astronomica*, 65, 329
- Soszyński, I., Udalski, A., Szymański, M. K., et al. 2016, *Acta Astronomica*, 66, 131

Udalski, A. 2000, *Acta Astronomica*, 50, 279

Udalski, A., Soszyński, I., Szymański, M. K., et al. 2015a, *Acta Astronomica*, 65, 341

Udalski, A., Szymański, M. K., & Szymański, G. 2015b, *Acta Astronomica*, 60, 1

VanderPlas, J. T. 2018, *Astrophysical Journal Supplement*, 236, 16

Anexos

Anexo 1: períodos hallados de las estrellas Cefeidas con los datos completos

En las siguientes tablas LS hace referencia al método de Lomb-Scargle, fnP hace referencia al método de fnpeaks y ME hace referencia al método de mínima entropía. N es el número mínimos de puntos promedio, necesario para hallar el período, redondeado al número entero mayor más cercano. Todos los períodos en las siguientes tablas están reportados en días.

Períodos y mínimo número de puntos para hallar el período de estrellas Cefeidas, para cada uno de los métodos:

Ident. Estrella	Periodo[LS](días)	Periodo[fnP](días)	Periodo[ME](días)	Incert	N [LS]	N[fnP]	N[ME]
OGLE-LMC-CEP-0004	2.2297	2.2297	2.2296	1E-04	12	13	17
OGLE-LMC-CEP-0006	3.2948	3.2946	3.2946	3E-04	12	12	17
OGLE-LMC-CEP-0019	1.9291	1.92912	1.92912	9E-05	12	12	18
OGLE-LMC-CEP-0034	11.254	11.257	11.254	3E-03	12	19	19
OGLE-LMC-CEP-0068	28.38	28.38	28.38	2E-02	16	18	20
OGLE-LMC-CEP-0142	3.7721	3.7725	3.7718	4E-04	14	13	18
OGLE-LMC-CEP-0174	15.864	15.865	15.865	6E-03	13	18	20
OGLE-LMC-CEP-0297	4.8066	4.8067	4.8073	6E-04	13	16	20
OGLE-LMC-CEP-0309	0.78861	0.78862	0.7886	2E-05	14	12	20
OGLE-LMC-CEP-0318	1.95222	1.95224	1.95223	1E-04	13	13	17
OGLE-LMC-CEP-0326	3.1228	3.1229	3.1229	2E-04	13	14	17
OGLE-LMC-CEP-0327	0.88218	0.88217	0.88217	2E-05	14	12	17
OGLE-LMC-CEP-0493	0.70887	0.70888	0.70886	1E-05	13	12	17
OGLE-LMC-CEP-0495	2.0745	2.0744	2.0744	1E-04	14	13	21
OGLE-LMC-CEP-0503	0.486438	0.486437	0.486437	6E-06	12	13	20
OGLE-LMC-CEP-0549	3.5333	3.533	3.533	3E-04	13	13	19
OGLE-LMC-CEP-0555	2.0152	2.0153	2.0153	1E-04	13	16	21
OGLE-LMC-CEP-0596	3.0529	3.0527	3.0527	2E-04	14	14	14
OGLE-LMC-CEP-0635	1.54967	1.54969	1.54969	6E-05	12	12	20
OGLE-LMC-CEP-0637	2.6069	2.6069	2.6068	2E-04	15	14	17
OGLE-LMC-CEP-0648	13.626	13.626	13.626	5E-03	13	17	20
OGLE-LMC-CEP-0656	2.2938	2.2938	2.2937	1E-04	13	14	18
OGLE-LMC-CEP-0728	3.0837	3.0839	3.0837	2E-04	14	13	16
OGLE-LMC-CEP-0801	21.27	21.27	21.28	1E-02	16	19	24
OGLE-LMC-CEP-0813	5.9146	5.9147	5.9147	9E-04	14	18	25
OGLE-LMC-CEP-0846	9.051	9.049	9.051	2E-03	14	21	21
OGLE-LMC-CEP-0916	1.36976	1.36978	1.36982	5E-05	14	14	23
OGLE-LMC-CEP-1056	4.461	4.4611	4.4606	5E-04	14	19	17
OGLE-LMC-CEP-1072	2.6664	2.6663	2.6663	2E-04	15	14	18
OGLE-LMC-CEP-1096	4.3691	4.3687	4.3687	5E-04	14	20	18
OGLE-LMC-CEP-1172	4.8257	4.8252	4.8258	6E-04	14	23	17
OGLE-LMC-CEP-1206	0.526282	0.526281	0.526274	7E-06	14	11	18
OGLE-LMC-CEP-1385	0.9348	0.93478	0.93478	2E-05	14	12	19
OGLE-LMC-CEP-1501	2.4814	2.4812	2.4814	2E-04	14	14	19
OGLE-LMC-CEP-1559	3.6468	3.6468	3.6468	3E-04	14	15	16
OGLE-LMC-CEP-1699	0.82429	0.82428	0.82428	2E-05	12	11	20
OGLE-LMC-CEP-1745	3.2142	3.2143	3.2143	3E-04	14	15	17
OGLE-LMC-CEP-1785	5.5052	5.5052	5.5052	8E-04	14	18	20
OGLE-LMC-CEP-1799	5.0035	5.0035	5.0035	6E-04	14	21	20
OGLE-LMC-CEP-1948	3.9859	3.9859	3.9859	4E-04	14	14	16
OGLE-LMC-CEP-1991	2.2378	2.2378	2.2378	1E-04	13	13	18
OGLE-LMC-CEP-2100	5.8482	5.8482	5.8482	9E-04	13	15	23

Ident. Estrella	Periodo[LS](días)	Periodo[fnP](días)	Periodo[ME](días)	Incert	N [LS]	N[fnP]	N[ME]
OGLE-LMC-CEP-2117	2.1653	2.1653	2.1652	1E-04	12	13	18
OGLE-LMC-CEP-2155	1.53407	1.53409	1.53409	6E-05	13	13	19
OGLE-LMC-CEP-2193	3.086	3.0863	3.0861	2E-04	14	14	17
OGLE-LMC-CEP-2217	2.3114	2.3112	2.3114	1E-04	13	12	20
OGLE-LMC-CEP-2219	5.2727	5.272	5.2727	7E-04	13	16	23
OGLE-LMC-CEP-2233	3.0483	3.0483	3.0483	2E-04	13	14	20
OGLE-LMC-CEP-2240	2.0805	2.0805	2.0805	1E-04	12	12	19
OGLE-LMC-CEP-2263	3.2363	3.2366	3.2363	3E-04	13	13	19
OGLE-LMC-CEP-2284	3.6356	3.6356	3.6359	3E-04	15	14	16
OGLE-LMC-CEP-2295	2.9116	2.9117	2.9117	2E-04	15	13	18
OGLE-LMC-CEP-2297	1.86761	1.86763	1.86763	9E-05	13	12	18
OGLE-LMC-CEP-2311	1.9545	1.95442	1.95452	1E-04	12	13	17
OGLE-LMC-CEP-2493	2.8522	2.852	2.852	2E-04	12	14	18
OGLE-LMC-CEP-2543	4.0879	4.088	4.088	4E-04	15	17	17
OGLE-LMC-CEP-2576	3.1948	3.1948	3.1946	3E-04	14	16	18
OGLE-LMC-CEP-2638	4.6505	4.6505	4.6505	5E-04	15	19	19
OGLE-LMC-CEP-2650	3.2696	3.2696	3.2699	3E-04	14	14	16
OGLE-LMC-CEP-2730	3.5711	3.5711	3.5711	3E-04	13	14	18
OGLE-LMC-CEP-2743	3.5752	3.5753	3.5753	3E-04	15	15	17
OGLE-LMC-CEP-2781	2.997	2.997	2.9972	2E-04	15	13	15
OGLE-LMC-CEP-2799	3.4703	3.4706	3.47	3E-04	14	14	19
OGLE-LMC-CEP-2823	3.1069	3.1069	3.1069	2E-04	14	16	17
OGLE-LMC-CEP-2829	2.8708	2.8706	2.8706	2E-04	14	14	17
OGLE-LMC-CEP-2910	5.1087	5.1087	5.1081	7E-04	15	19	20
OGLE-LMC-CEP-2936	4.7256	4.7251	4.7257	6E-04	14	20	18
OGLE-LMC-CEP-2939	4.3706	4.3706	4.3706	5E-04	14	17	17
OGLE-LMC-CEP-2943	3.126	3.126	3.126	2E-04	14	14	16
OGLE-LMC-CEP-2952	3.2001	3.2002	3.1999	3E-04	14	15	15
OGLE-LMC-CEP-3022	2.6142	2.6143	2.6143	2E-04	14	14	15
OGLE-LMC-CEP-3065	3.5884	3.5881	3.5881	3E-04	14	13	16
OGLE-LMC-CEP-3251	0.98876	0.98877	0.98877	2E-05	12	10	17
OGLE-LMC-CEP-3259	1.97618	1.9763	1.9762	1E-04	12	12	18
OGLE-LMC-CEP-3377	3.2145	3.2143	3.2148	3E-04	12	12	19
OGLE-LMC-CEP-3400	0.68775	0.68776	0.68776	1E-05	13	11	21
OGLE-LMC-CEP-3477	4.098	4.098	4.0976	4E-04	14	17	24
OGLE-LMC-CEP-3549	3.3782	3.3782	3.3779	3E-04	14	13	16
OGLE-LMC-CEP-3554	4.4845	4.4845	4.484	5E-04	13	19	19
OGLE-LMC-CEP-3556	2.9994	2.9992	2.9997	2E-04	13	13	15
OGLE-LMC-CEP-3565	8.126	8.126	8.128	2E-03	14	21	18
OGLE-LMC-CEP-3579	4.1034	4.1035	4.103	4E-04	13	15	20
OGLE-LMC-CEP-3618	0.9644	0.96441	0.96441	2E-05	12	11	18
OGLE-LMC-CEP-3666	0.41877	0.418774	0.418774	4E-06	10	11	20
OGLE-LMC-CEP-3682	1.89177	1.89179	1.89179	9E-05	13	12	17
OGLE-LMC-CEP-3762	2.1164	2.1165	2.1165	1E-04	12	12	17
OGLE-LMC-CEP-3808	1.39956	1.39957	1.39957	5E-05	12	11	16
OGLE-LMC-CEP-3856	3.077	3.0773	3.0771	2E-04	14	15	15
OGLE-LMC-CEP-3990	4.0834	4.0834	4.0834	4E-04	14	17	20
OGLE-LMC-CEP-4041	4.8015	4.8015	4.8021	6E-04	13	20	20
OGLE-LMC-CEP-4074	0.77573	0.77573	0.77572	2E-05	12	11	18
OGLE-LMC-CEP-4158	1.37862	1.37859	1.37863	5E-05	12	12	19
OGLE-LMC-CEP-4189	0.443255	0.443255	0.44326	5E-06	11	11	20
OGLE-LMC-CEP-4232	2.7854	2.7852	2.7854	2E-04	14	15	18
OGLE-LMC-CEP-4311	0.83204	0.83205	0.83203	2E-05	12	11	18
OGLE-LMC-CEP-4360	3.6221	3.6221	3.6224	3E-04	13	13	16
OGLE-LMC-CEP-4412	1.25021	1.25018	1.25022	4E-05	14	11	19
OGLE-LMC-CEP-4467	2.1747	2.1746	2.1747	1E-04	12	12	19
OGLE-LMC-CEP-4479	0.67156	0.67156	0.67156	1E-05	14	12	23
OGLE-LMC-CEP-4526	2.3112	2.3112	2.3112	1E-04	12	13	19

Cuadro 4.2

Períodos y mínimo número de puntos para hallar el período de estrellas RR Lyræ, para cada uno de los métodos:

Ident. Estrella	Periodo[LS](días)	Periodo[fnP](días)	Periodo[ME](días)	Incert	N [LS]	N[fnP]	N[ME]
OGLE-LMC-RRLYR-00573	0.348992	0.348994	0.348994	7E-06	26	22	56
OGLE-LMC-RRLYR-01074	0.55236	0.55236	0.55236	2E-05	19	14	36
OGLE-LMC-RRLYR-01981	0.55335	0.55335	0.55336	2E-05	20	14	27
OGLE-LMC-RRLYR-02264	0.62717	0.62718	0.62717	2E-05	23	19	53
OGLE-LMC-RRLYR-02615	0.47794	0.47795	0.47796	1E-05	20	14	28
OGLE-LMC-RRLYR-02871	0.57162	0.57162	0.57162	2E-05	19	14	27
OGLE-LMC-RRLYR-02889	0.64464	0.64463	0.64462	2E-05	26	20	71
OGLE-LMC-RRLYR-02896	0.43978	0.43978	0.43979	1E-05	19	13	30
OGLE-LMC-RRLYR-03525	0.5674	0.5674	0.56739	2E-05	19	15	26
OGLE-LMC-RRLYR-03968	0.4375	0.43749	0.4375	1E-05	19	13	30
OGLE-LMC-RRLYR-04413	0.5122	0.5122	0.51221	2E-05	19	15	26
OGLE-LMC-RRLYR-04626	0.284655	0.284652	0.284653	5E-06	17	13	33
OGLE-LMC-RRLYR-04779	0.265188	0.265188	0.26519	4E-06	21	16	45
OGLE-LMC-RRLYR-04979	0.59197	0.59198	0.59198	2E-05	17	14	29
OGLE-LMC-RRLYR-05034	0.325569	0.325572	0.325571	6E-06	17	14	31
OGLE-LMC-RRLYR-05188	0.62495	0.62494	0.62495	2E-05	18	14	31

Ident. Estrella	Periodo[LS](días)	Periodo[fnP](días)	Periodo[ME](días)	Incert	N [LS]	N[fnP]	N[ME]
OGLE-LMC-RRLYR-05308	0.65884	0.65884	0.65884	3E-05	20	13	24
OGLE-LMC-RRLYR-06223	0.365831	0.365832	0.365834	8E-06	20	15	21
OGLE-LMC-RRLYR-06786	0.53763	0.53762	0.53762	2E-05	17	13	29
OGLE-LMC-RRLYR-06806	0.62315	0.62316	0.62316	2E-05	20	15	39
OGLE-LMC-RRLYR-07323	0.52497	0.52498	0.52497	2E-05	18	14	24
OGLE-LMC-RRLYR-07759	0.55025	0.55024	0.55025	2E-05	18	18	52
OGLE-LMC-RRLYR-08167	0.275985	0.275984	0.275983	4E-06	24	13	35
OGLE-LMC-RRLYR-08332	0.57678	0.57677	0.57678	2E-05	17	14	26
OGLE-LMC-RRLYR-08398	0.53931	0.5393	0.53931	2E-05	19	15	29
OGLE-LMC-RRLYR-08633	0.55578	0.55577	0.55576	2E-05	18	13	26
OGLE-LMC-RRLYR-09566	0.62749	0.62749	0.62751	2E-05	19	14	30
OGLE-LMC-RRLYR-10038	0.62329	0.62329	0.62329	2E-05	19	16	35
OGLE-LMC-RRLYR-10483	0.68869	0.6887	0.6887	3E-05	20	16	45
OGLE-LMC-RRLYR-10489	0.59976	0.59975	0.59974	2E-05	19	14	23
OGLE-LMC-RRLYR-10624	0.63871	0.6387	0.63871	2E-05	22	19	52
OGLE-LMC-RRLYR-10795	0.55479	0.55478	0.55479	2E-05	19	13	25
OGLE-LMC-RRLYR-11284	0.52912	0.52911	0.52911	2E-05	19	14	22
OGLE-LMC-RRLYR-11497	0.38308	0.383083	0.383083	9E-06	18	13	32
OGLE-LMC-RRLYR-12703	0.33524	0.335236	0.335242	7E-06	18	15	37
OGLE-LMC-RRLYR-13099	0.58743	0.58743	0.58743	2E-05	23	18	40
OGLE-LMC-RRLYR-13510	0.349925	0.34992	0.349921	7E-06	15	13	32
OGLE-LMC-RRLYR-13987	0.5235	0.5235	0.5235	2E-05	19	14	25
OGLE-LMC-RRLYR-14065	0.50874	0.50874	0.50874	2E-05	20	15	23
OGLE-LMC-RRLYR-14486	0.54393	0.54393	0.54393	2E-05	19	12	27
OGLE-LMC-RRLYR-15452	0.60115	0.60114	0.60113	2E-05	19	13	28
OGLE-LMC-RRLYR-15680	0.64143	0.64144	0.64144	2E-05	19	14	33
OGLE-LMC-RRLYR-15818	0.46995	0.46995	0.46995	1E-05	18	12	21
OGLE-LMC-RRLYR-15842	0.59423	0.59422	0.59421	2E-05	17	13	28
OGLE-LMC-RRLYR-16357	0.55813	0.55813	0.55813	2E-05	19	14	29
OGLE-LMC-RRLYR-16623	0.405182	0.405184	0.405185	1E-05	19	15	34
OGLE-LMC-RRLYR-17089	0.47359	0.47358	0.47359	1E-05	19	13	25
OGLE-LMC-RRLYR-17125	0.350018	0.350017	0.350021	7E-06	19	13	45
OGLE-LMC-RRLYR-17736	0.54017	0.54019	0.54018	2E-05	20	15	23
OGLE-LMC-RRLYR-17955	0.49093	0.49092	0.49094	1E-05	18	15	26
OGLE-LMC-RRLYR-18478	0.55797	0.55796	0.55797	2E-05	18	14	29
OGLE-LMC-RRLYR-18726	0.68745	0.68746	0.68745	3E-05	29	20	85
OGLE-LMC-RRLYR-18813	0.280455	0.280458	0.280457	5E-06	17	12	29
OGLE-LMC-RRLYR-18835	0.51151	0.51151	0.5115	2E-05	19	13	23
OGLE-LMC-RRLYR-18839	0.53691	0.53692	0.53691	2E-05	19	14	21
OGLE-LMC-RRLYR-19818	0.43628	0.43628	0.43629	1E-05	23	17	41
OGLE-LMC-RRLYR-20381	0.67521	0.67521	0.67522	3E-05	19	14	29
OGLE-LMC-RRLYR-20567	0.614	0.61399	0.61401	2E-05	19	14	26
OGLE-LMC-RRLYR-20752	0.48631	0.48631	0.4863	1E-05	23	16	28
OGLE-LMC-RRLYR-21061	0.59744	0.59745	0.59744	2E-05	18	14	22
OGLE-LMC-RRLYR-21074	0.58715	0.58714	0.58713	2E-05	19	13	21
OGLE-LMC-RRLYR-21345	0.5924	0.5924	0.59241	2E-05	17	13	21
OGLE-LMC-RRLYR-21365	0.48941	0.4894	0.48941	1E-05	22	17	39
OGLE-LMC-RRLYR-21878	0.68811	0.68813	0.68812	3E-05	20	15	31
OGLE-LMC-RRLYR-22004	0.353855	0.353857	0.353857	7E-06	17	13	39
OGLE-LMC-RRLYR-23970	0.334044	0.334042	0.33404	7E-06	16	15	32
OGLE-LMC-RRLYR-24089	0.356504	0.356501	0.356499	7E-06	18	14	35
OGLE-LMC-RRLYR-24383	0.76188	0.76188	0.76188	3E-05	18	13	24
OGLE-LMC-RRLYR-24631	0.70443	0.70445	0.70443	3E-05	17	12	19
OGLE-LMC-RRLYR-25075	0.292784	0.292782	0.292786	5E-06	17	12	37
OGLE-LMC-RRLYR-26113	0.5227	0.5227	0.5227	2E-05	17	13	22
OGLE-LMC-RRLYR-26193	0.349939	0.349935	0.349935	7E-06	14	12	25
OGLE-LMC-RRLYR-26652	0.59997	0.59996	0.59997	2E-05	20	13	20
OGLE-LMC-RRLYR-27169	0.64778	0.64778	0.64779	2E-05	16	14	26
OGLE-LMC-RRLYR-28461	0.355248	0.35525	0.35525	7E-06	22	17	50
OGLE-LMC-RRLYR-28468	0.248036	0.248036	0.248035	4E-06	16	14	28
OGLE-LMC-RRLYR-28722	0.344268	0.344268	0.344264	7E-06	16	12	31
OGLE-LMC-RRLYR-29444	0.296568	0.296563	0.296565	5E-06	17	12	34
OGLE-LMC-RRLYR-29660	0.50004	0.50005	0.50004	1E-05	18	16	22
OGLE-LMC-RRLYR-29875	0.57031	0.5703	0.57029	2E-05	19	13	23
OGLE-LMC-RRLYR-30055	0.64783	0.64783	0.64784	2E-05	18	14	31
OGLE-LMC-RRLYR-30144	0.56626	0.56627	0.56624	2E-05	19	14	24
OGLE-LMC-RRLYR-31051	0.51534	0.51535	0.51535	2E-05	18	14	21
OGLE-LMC-RRLYR-31715	0.53153	0.53152	0.53152	2E-05	19	13	19
OGLE-LMC-RRLYR-32376	0.37694	0.376945	0.376942	8E-06	20	18	42
OGLE-LMC-RRLYR-32430	0.58496	0.58495	0.58495	2E-05	18	13	24
OGLE-LMC-RRLYR-34245	0.52992	0.52993	0.52992	2E-05	19	14	20
OGLE-LMC-RRLYR-34604	0.262685	0.262683	0.262683	4E-06	19	15	41
OGLE-LMC-RRLYR-34693	0.60662	0.6066	0.6066	2E-05	18	14	24
OGLE-LMC-RRLYR-34739	0.386405	0.386401	0.386399	9E-06	22	16	49
OGLE-LMC-RRLYR-34760	0.318847	0.31885	0.31885	6E-06	16	12	35
OGLE-LMC-RRLYR-34930	0.65404	0.65405	0.65404	2E-05	18	13	23
OGLE-LMC-RRLYR-35166	0.49504	0.49504	0.49505	1E-05	17	12	26
OGLE-LMC-RRLYR-37054	0.59456	0.59456	0.59456	2E-05	18	14	23
OGLE-LMC-RRLYR-37234	0.44776	0.44776	0.44776	1E-05	17	12	20
OGLE-LMC-RRLYR-38112	0.36447	0.364471	0.364472	8E-06	21	17	39
OGLE-LMC-RRLYR-38397	0.60595	0.60596	0.60595	2E-05	20	15	29
OGLE-LMC-RRLYR-38567	0.53137	0.53137	0.53137	2E-05	20	15	29
OGLE-LMC-RRLYR-38632	0.7552	0.75519	0.75523	3E-05	16	12	19
OGLE-LMC-RRLYR-38746	0.5025	0.5025	0.50249	1E-05	18	13	24

Cuadro 4.3

Períodos y mínimo número de puntos para hallar el período de estrellas binarias eclipsantes, para cada uno de los métodos:

En la estrella 22820 no se logró hallar el periodo con el método de mínima entropía con los puntos completos.

Identificación Estrella	Periodo[LS](días)	Periodo[fnP](días)	Periodo[ME](días)	Incert	N [LS]	N[fnP]	N[ME]
OGLE-LMC-ECL-00565	0.93992	0.93991	0.93992	2E-05	14	12	34
OGLE-LMC-ECL-01729	0.79701	0.79702	0.79701	2E-05	34	36	55
OGLE-LMC-ECL-01947	9.796	9.796	9.795	2E-03	39	44	113
OGLE-LMC-ECL-02079	0.81197	0.81197	0.81199	2E-05	14	14	34
OGLE-LMC-ECL-02654	10.976	10.978	21.947	3E-03	70	88	266
OGLE-LMC-ECL-02868	10.655	10.655	10.657	3E-03	42	60	160
OGLE-LMC-ECL-03282	3.0731	3.0731	3.0732	2E-04	29	38	103
OGLE-LMC-ECL-03348	5.7603	5.7604	5.7616	8E-04	41	42	108
OGLE-LMC-ECL-03657	1.53548	1.53548	1.53538	6E-05	38	39	95
OGLE-LMC-ECL-03678	8.87	8.87	8.867	2E-03	19	28	73
OGLE-LMC-ECL-03826	2.669	2.669	2.669	2E-04	26	24	55
OGLE-LMC-ECL-03995	13.917	13.917	13.922	5E-03	38	56	150
OGLE-LMC-ECL-04188	4.6627	4.6627	4.663	5E-04	32	34	105
OGLE-LMC-ECL-04212	2.0266	2.0265	2.0266	1E-04	21	21	49
OGLE-LMC-ECL-04458	39.75	39.71	39.7	4E-02	33	37	90
OGLE-LMC-ECL-04640	16.998	17.002	17.013	7E-03	18	25	52
OGLE-LMC-ECL-04658	11.152	11.152	11.151	3E-03	59	71	157
OGLE-LMC-ECL-05084	2.6931	2.6931	2.693	2E-04	22	20	43
OGLE-LMC-ECL-06013	1.63434	1.63432	1.63429	7E-05	25	23	74
OGLE-LMC-ECL-06578	7.425	7.425	7.424	1E-03	17	19	40
OGLE-LMC-ECL-06635	1.16108	1.16109	1.16105	3E-05	18	15	32
OGLE-LMC-ECL-06708	5.954	5.954	5.954	9E-04	36	38	104
OGLE-LMC-ECL-06746	1.63605	1.63599	1.63596	7E-05	38	42	158
OGLE-LMC-ECL-06797	4.5236	4.5236	4.5239	5E-04	35	41	137
OGLE-LMC-ECL-07487	0.80496	0.80497	1.60991	2E-05	15	15	46
OGLE-LMC-ECL-07817	6.949	6.949	6.95	1E-03	25	26	87
OGLE-LMC-ECL-07881	3.0639	3.0638	3.0638	2E-04	36	36	117
OGLE-LMC-ECL-07927	42.25	42.23	84.45	4E-02	16	23	35
OGLE-LMC-ECL-07944	1.31099	1.311	1.31098	4E-05	17	12	25
OGLE-LMC-ECL-09143	3.3397	3.3398	3.3396	3E-04	23	20	57
OGLE-LMC-ECL-09432	10.228	10.229	10.228	3E-03	36	45	118
OGLE-LMC-ECL-09945	33.57	33.55	33.58	3E-02	15	19	33
OGLE-LMC-ECL-11029	51.39	51.39	51.38	7E-02	81	87	182
OGLE-LMC-ECL-11071	1.59794	1.59792	1.59795	6E-05	24	17	46
OGLE-LMC-ECL-11307	1.30916	1.30915	1.30915	4E-05	23	20	39
OGLE-LMC-ECL-11639	155.3	155.3	154.8	6E-01	98	90	230
OGLE-LMC-ECL-11655	30.01	30.01	29.71	2E-02	55	66	171
OGLE-LMC-ECL-12052	5.205	5.2047	5.2054	7E-04	22	25	72
OGLE-LMC-ECL-12360	4.3168	4.3166	4.3166	5E-04	25	26	71
OGLE-LMC-ECL-12376	3.6193	3.6194	3.6192	3E-04	26	27	103
OGLE-LMC-ECL-12678	1.63544	1.63543	1.63549	7E-05	23	19	52
OGLE-LMC-ECL-13014	9.838	9.837	9.838	2E-03	40	50	119
OGLE-LMC-ECL-13085	1.25393	1.25394	1.25394	4E-05	15	12	22
OGLE-LMC-ECL-13226	1.36666	1.36668	1.36661	5E-05	31	27	60
OGLE-LMC-ECL-14159	2.2434	2.2434	2.2434	1E-04	25	22	63
OGLE-LMC-ECL-14200	20.4	20.4	21.63	1E-02	73	124	319
OGLE-LMC-ECL-14264	15.102	15.102	15.1	6E-03	41	41	111
OGLE-LMC-ECL-14776	4.4435	4.4433	4.4433	5E-04	40	43	114
OGLE-LMC-ECL-15477	1.56254	1.56256	1.56253	6E-05	19	14	34
OGLE-LMC-ECL-15999	30.75	30.76	30.75	2E-02	41	52	101
OGLE-LMC-ECL-16001	3.3912	3.3914	3.3914	3E-04	26	23	59
OGLE-LMC-ECL-16014	1.31566	1.31567	1.31563	4E-05	15	12	24
OGLE-LMC-ECL-16239	1.58137	1.58139	1.58135	6E-05	20	18	48
OGLE-LMC-ECL-17301	3.8256	3.8253	3.8253	4E-04	26	24	76
OGLE-LMC-ECL-17857	1.0461	1.0461	1.04612	3E-05	15	12	29
OGLE-LMC-ECL-18565	7.587	7.587	7.586	1E-03	18	18	32
OGLE-LMC-ECL-19314	4.5688	4.5688	4.5688	5E-04	21	24	43
OGLE-LMC-ECL-19644	9.183	9.183	9.184	2E-03	19	33	64
OGLE-LMC-ECL-19819	2.2734	2.2734	2.2733	1E-04	25	23	55
OGLE-LMC-ECL-19850	3.6599	3.6599	3.6595	3E-04	42	41	117
OGLE-LMC-ECL-19988	6.506	6.505	6.505	1E-03	48	63	98
OGLE-LMC-ECL-20172	1.14422	1.14423	1.14429	3E-05	31	27	111
OGLE-LMC-ECL-20318	3.3206	3.3206	3.3209	3E-04	35	35	83
OGLE-LMC-ECL-20507	1.98766	1.98763	1.98759	1E-04	27	25	67
OGLE-LMC-ECL-20558	54.99	54.99	54.98	8E-02	33	49	107
OGLE-LMC-ECL-21420	2.5731	2.5731	2.5729	2E-04	21	21	43
OGLE-LMC-ECL-22820	28.92	28.91	29.08	2E-02	81	107	N/A
OGLE-LMC-ECL-22939	123.4	123.5	123.2	4E-01	24	25	29
OGLE-LMC-ECL-23142	11.882	11.882	23.757	4E-03	18	28	70
OGLE-LMC-ECL-23472	17.592	17.592	17.596	8E-03	15	25	31
OGLE-LMC-ECL-23656	3.0059	3.0062	3.0061	2E-04	32	38	95
OGLE-LMC-ECL-24305	3.5413	3.5413	3.8629	3E-04	59	52	190
OGLE-LMC-ECL-24469	3.019	3.0189	3.019	2E-04	31	30	111
OGLE-LMC-ECL-24853	15.588	15.586	15.588	6E-03	22	34	102
OGLE-LMC-ECL-24857	2.7086	2.7086	2.6814	2E-04	34	30	99
OGLE-LMC-ECL-26555	46.76	46.65	46.6	5E-02	23	26	38
OGLE-LMC-ECL-27562	0.81873	0.81873	0.81872	2E-05	19	15	49
OGLE-LMC-ECL-27894	2.8897	2.8896	2.8896	2E-04	29	33	57
OGLE-LMC-ECL-28617	2.67	2.6702	2.6702	2E-04	29	28	71

Identificación Estrella	Periodo[LS](días)	Periodo[fnP](días)	Periodo[ME](días)	Incert	N [LS]	N[fnP]	N[ME]
OGLE-LMC-ECL-29376	0.83959	0.83958	0.83959	2E-05	25	26	50
OGLE-LMC-ECL-30750	186.2	185.9	185.3	9E-01	43	43	65
OGLE-LMC-ECL-31494	1.66753	1.66751	1.66751	7E-05	21	18	35
OGLE-LMC-ECL-32386	10.22	10.22	10.22	3E-03	62	66	198
OGLE-LMC-ECL-32654	2.3439	2.3439	2.3439	1E-04	25	19	61
OGLE-LMC-ECL-33227	10.554	10.554	10.554	3E-03	18	26	67
OGLE-LMC-ECL-33388	15.349	15.35	15.349	6E-03	30	34	71
OGLE-LMC-ECL-33454	1.90314	1.90316	1.90298	9E-05	26	24	70
OGLE-LMC-ECL-34342	1.45427	1.45425	1.45428	5E-05	24	18	42
OGLE-LMC-ECL-34516	4.2225	4.2226	4.2223	4E-04	16	16	34
OGLE-LMC-ECL-34711	7.723	7.723	7.724	1E-03	44	45	111
OGLE-LMC-ECL-34998	1.9797	1.97972	1.97972	1E-04	17	14	39
OGLE-LMC-ECL-35339	0.92855	0.92855	0.92854	2E-05	14	13	32
OGLE-LMC-ECL-36923	149.9	151	151	6E-01	27	24	51
OGLE-LMC-ECL-37246	2.0817	2.0816	2.0817	1E-04	25	21	62
OGLE-LMC-ECL-37270	1.75158	1.7516	1.75168	8E-05	34	37	94
OGLE-LMC-ECL-37280	2.7368	2.7369	2.7369	2E-04	23	22	46
OGLE-LMC-ECL-37308	8.3	8.3	8.3	2E-03	45	47	135
OGLE-LMC-ECL-39328	0.97536	0.97536	0.97537	2E-05	19	16	41
OGLE-LMC-ECL-39770	2.952	2.952	2.9522	2E-04	31	33	104
OGLE-LMC-ECL-40051	6.536	6.536	6.535	1E-03	26	27	52

Cuadro 4.4

Anexo 2: Códigos para determinar períodos y mínimo número de puntos

Todos los códigos se pueden encontrar en el repositorio de Github: <https://github.com/jacubillos10/ProyectoDeGradoFisica>

Archivo .csv que contiene los números de las estrellas estudiadas: numero_estrellas.csv. Es necesario que este archivo esté en la misma carpeta de los códigos que se van a describir a continuación.

Códigos relacionados con el método de mínima entropía:

MinimaEntropía.cpp: Código en C++ que evalúa todos los períodos de prueba, halla sus respectivas entropías y filtra aquellos períodos que hayan superado un valor máximo de las funciones g y f. Luego guarda los valores de los períodos de prueba, sus entropías y funciones g y f en un archivo .csv, cuyo nombre tiene la forma Entropia_OGLE-LMC-XXX-YYYY.csv. Donde en el espacio XXX corresponde al tipo de estrella (CEP si es Cefeida, RR Lyr si es RR Lyræ y ECL si es una binaria eclipsante). YYYY corresponde al número de la estrella. Para compilarlo se debe colocar el siguiente comando en la terminal: `g++ -o MinimaEntropia MinimaEntropia.cpp`. Para ejecutarlo: `./MinimaEntropia [NombreArchivo-Datos] [Mínimo período de Prueba] [Máximo período de prueba] [Dimensión 1 de la grilla (A)] [Dimensión 2 de la grilla (B)] [Número de frecuencias a evaluar] [Valor de N del exponente de las funciones g y f]`. Por ejemplo, para la estrella RR Lyræ 00573 se ejecutaría así: `./MinimaEntropia OGLE-LMC-RRLYR-00573.dat 0.15 1.2 12 7 100000 4`.

generarCurvasLuz_ME.py: Código en python 3 que, a partir del archivo .csv generado con el código anterior, determina el período correspondiente a la menor entropía, genera la gráfica de la curva de luz y la gráfica de entropía en función del período de prueba, en formato .png. Este código genera todas las gráficas de las 100 estrellas Cefeidas, RR Lyræ o

binarias eclipsantes (según lo escoja el usuario en la línea 8 del código). Si se desea generar la gráfica de una sola estrella en específico se ejecuta el código `generarCurvasLuz_ME1.py`. Este código funciona igual, solo que hay que especificar el `n+umero` de la estrella en la línea 32.

generar_MinimaEntropia.sh: Este código en bash ejecuta para cada una de las estrellas el código de `MinimaEntropia.cpp`, para generar de una vez los 100 archivos `Entropia_OGLE-LMC-XXX-YYYY.csv` de las 100 estrellas de algún tipo en específico. Este se ejecuta así: `./generar_MinimaEntropia.sh` [índice del tipo de estrella a estudiar]. Este código necesita el archivo `numero_estrellas.csv` y el ejecutable `MinimaEntropia` para funcionar. el índice del tipo de estrella es 0 para Cefeidas, 1 para RR Lyræ y 2 para binarias eclipsantes. Por ejemplo, si se quiere generar los 100 archivos `Entropia_OGLE-LMC-ECL-YYYY.csv` para las binarias eclipsantes se ejecuta así: `./genrar_MinimaEntropia.sh 2`.

HallarPuntosME.cpp: Código en C++ que determina el mínimo número de puntos que se necesita para hallar el período de una estrella en específico, 20 veces. Los 20 números enteros los guarda en un archivo con el nombre `LosPuntosME_OGLE-LMC-XXX-YYYY.csv`. Este archivo se debe compilar de la siguiente manera: `g++ -o HallarPuntosME HallarPuntosME.cpp`. Para ejecutarlo: `./HallarPuntosME` [NombreArchivoDatos] [Mínimo período de Prueba] [Máximo período de prueba] [Dimensión 1 de la grilla (A)] [Dimensión 2 de la grilla (B)] [Número de frecuencias a evaluar] [Valor de N del exponente de las funciones g y f] [período de la estrella con todos los puntos] [porcentaje inicial] [numero de corridas (20 en todos los casos)]. Por ejemplo, para hallar 20 veces el mínimo número de puntos para hallar el período de la estrella RR Lyræ 00573, con un porcentaje inicial de 0.95, se ejecutaría así: `./HallarPuntosME OGLE-LMC-RRLYR-00573.dat 0.15 1.2 12 7 100000 4 0.3489944597 0.95 20`

hallarMinPuntosME_uno.sh: Código en bash que hace que la ejecución de `HallarPuntosME` sea más fácil. Este se debe ejecutar así: `./hallarMinPuntosME_uno.sh` [índice del tipo de estrella a estudiar] [posición de la estrella en la tabla `numero_estrellas.csv`] [porcentaje inicial] [número de corridas]. Para ejecutarlo sobre la misma estrella anterior (RR Lyræ 00573) se puede ejecutar así: `hallarMinPuntosME_uno.sh 1 0 0.95 20`.

hallarMinPuntosME_def.sh: Código en bash que ejecuta `hallarMinPuntosME_uno.sh` sobre un rango de estrellas de un mismo tipo. Uso: `./hallarMinPuntosME_def.sh` [índice del tipo de estrella a estudiar] [índice de la primera estrella a estudiar] [índice de la ultima estrella a estudiar] [porcentaje inicial]. Por ejemplo, si se quiere hallar el mínimo número de puntos para todas las estrellas Cefeidas el código se correría así: `./hallarMinPuntosME_def.sh 0 0 99 0.975`.

Códigos relacionados con el método de `fnpeaks`:

generar_fnpeaks.sh: Código en bash que ejecuta `fnpeaks` para todas las estrellas de un tipo. Uso: `./generar_fnpeaks.sh` [índice del tipo de estrella a estudiar]. Por ejemplo para las Cefeidas: `./generar_fnpeaks.sh 0`. `Fnpeaks` es un código escrito en C, necesario para correr este

código en bash. Este se encuentra en el enlace <http://helas.astro.uni.wroc.pl/data/source/fnpeaks.tar.gz>. Los archivos en C y el makefile se deben colocar en la misma carpeta que el código bash. Para compilarlo basta con ejecutar en la terminal el comando make. Este código saca como resultado el archivo .max (el cual no es más que un archivo de texto) que contiene los resultados de los 10 períodos con los picos más altos.

generarCurvasLuz_fnpeaks.py: Código en python que genera las curvas de luz de las 100 estrellas de cierto tipo (el tipo de estrella se puede especificar en la línea 8 del código). Si solo se quiere generar una curva de luz se puede ejecutar el código generarCurvasLuz_fnpeaks1.py y especificar el número de la estrella en la línea 32.

remover_puntos.py: Código en python que toma los datos de los archivos OGLE-LMC-XXX-YYYY.dat (ubicados en una carpeta distinta a donde está ubicado el código) y selecciona aleatoriamente unas filas (dependiendo el porcentaje de puntos a remover), las cuales guarda en 2 array. Luego escribe estos array en un archivo diferente, con el mismo nombre (colocándolo en la misma carpeta donde está ubicado el código). Este se ejecuta así: `python3 remover_puntos.py [porcentaje de puntos a remover] [índice del tipo de estrella a estudiar] [número de estrella a la que se removerá los puntos]`. Por ejemplo si se quiere generar un archivo .dat removiendo una fracción de 0.9 de los puntos de la estrella RR Lyræ 00573, se ejecuta el código así: `python3 remover_puntos.py 0.9 1 00573`.

MinP_fnpeaks.py: Código en python que halla el mínimo número de puntos que se necesita para hallar el período de 100 estrellas de un tipo para el método de fnpeaks, usando el código anterior y luego usando el ejecutable de fnpeaks repetidas veces. En las líneas 9 y 10

Códigos relacionados con el método de Lomb-Scargle:

LombScargle.py: Código en python que halla el período, las curvas de luz y los periodogramas (en formato .png) de las 100 estrellas de un tipo específico. En la línea 9 del código se puede especificar el tipo de estrella. En las líneas 59 a 61 se puede especificar el rango de períodos y el número de períodos a evaluar. Si se desea hallar el período, la curva de luz o el periodograma de una estrella en específico se puede ejecutar el código LombScargle1.py, especificando el número de la estrella en la línea 19.

LombScargle1_MinPuntos.py: Código en python que determina el mínimo número de puntos que necesita una estrella en específico para encontrar su período por el método de Lomb-Scargle. Este código se debe usar de la siguiente manera: `python3 LombScargle1_MinPuntos.py [porcentaje inicial] [tipo de estrella] [número de la estrella] [período de la estrella]`. Por ejemplo, si se desea encontrar el mínimo número de puntos para la estrella RR Lyræ 00573 se ejecuta el código así: `python3 LombScargle1_MinPuntos.py 0.98 RR_Lyrae 00573 0.348992`. Este código hallará 20 veces el mínimo número de puntos y lo imprimirá en la terminal.

hallarMinPuntosLS.sh: Código en bash que ejecuta el código LombScargle1_MinPuntos.py

para cada una de las 100 estrellas de un mismo tipo. Este se usa así: `./hallarMinPuntosLS.sh` [índice del tipo de estrella a estudiar]. Éste código devuelve un archivo `.csv` con las 20 corridas del mínimo número de puntos de cada estrella de cierto tipo (especificado por el usuario). Este archivo va a tener el siguiente nombre genérico: `LS_PuntosMinimos_XXX.csv`. Donde el espacio `XXX` es `CEP` si se trata de Cefeidas, `RRLYR` si se trata de RR Lyræ y `ECL` si se trata de binarias eclipsantes.