LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Formale Sprachen und Komplexität
Theoretische Informatik für Medieninformatiker
Sommersemester 2022

Grammatiken und die Chomsky-Hierarchie

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

Letzte Änderung der Folien: 26. April 2022

Formale Sprachen darstellen

- Sei Σ ein Alphabet.
- Eine Sprache über Σ ist eine Teilmenge von Σ^*.
- Z.B. für $\Sigma = \{(,),+,-,*,/,a\}$ sei
  L_{ArEx} die Sprache aller korrekt geklammerten Ausdrücke

  Z.B. $((a+a)-a)*a \in L_{ArEx}$ aber $(a-)+a) \notin L_{ArEx}$
- Unsere bisherigen Operationen auf Sprachen (Mengen) können das nicht darstellen

Benötigt: Formalismus, um L_{ArEx} zu beschreiben

Formale Sprachen darstellen (2)

Anforderungen:

- **Endliche** Beschreibung
- Sprache selbst muss aber auch unendlich viele Objekte erlauben

Zwei wesentliche solchen Formalismen sind

- Grammatiken
- Automaten

Grammatiken

Grammatik für einen sehr kleinen Teil der deutschen Sprache:

$$
\begin{array}{lcl}
<\text{Satz}> & \to & <\text{Subjekt}><\text{Prädikat}><\text{Objekt}> \\
<\text{Subjekt}> & \to & <\text{Artikel}><\text{Attribut}><\text{Nomen}> \\
<\text{Objekt}> & \to & <\text{Artikel}><\text{Attribut}><\text{Nomen}> \\
<\text{Artikel}> & \to & \varepsilon \\
<\text{Artikel}> & \to & \text{der} \\
<\text{Artikel}> & \to & \text{das} \\
<\text{Attribut}> & \to & <\text{Adjektiv}> \\
<\text{Attribut}> & \to & <\text{Adjektiv}><\text{Attribut}> \\
<\text{Adjektiv}> & \to & \text{kleine} \\
<\text{Adjektiv}> & \to & \text{große} \\
<\text{Adjektiv}> & \to & \text{nette} \\
<\text{Adjektiv}> & \to & \text{blaue} \\
<\text{Nomen}> & \to & \text{Mann} \\
<\text{Nomen}> & \to & \text{Auto} \\
<\text{Prädikat}> & \to & \text{fährt} \\
<\text{Prädikat}> & \to & \text{liebt}
\end{array}
$$

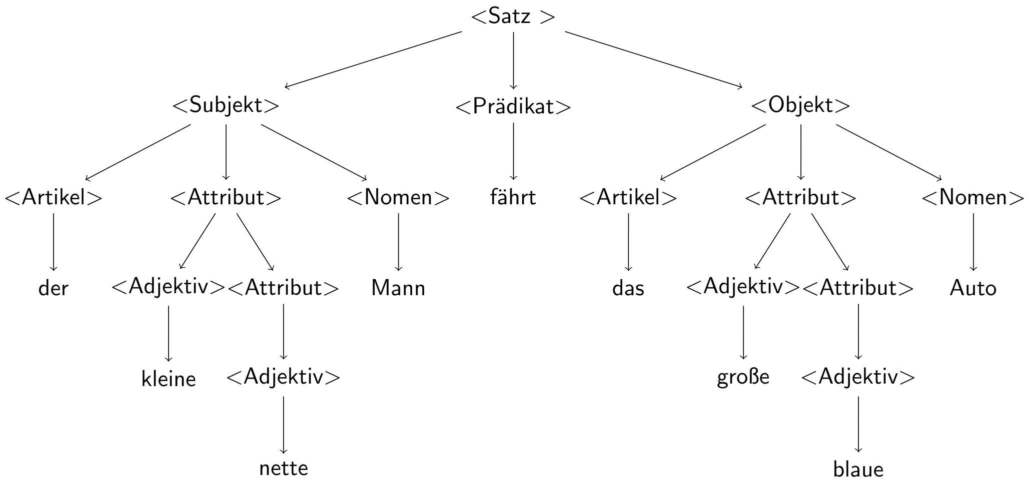
Grammatiken

- Endliche Menge von Regeln „linke Seite $\rightarrow$ rechte Seite"
- Symbole in spitzen Klammern wie $<$Artikel$>$ sind Variablen, d.h. sie sind Platzhalter, die weiter ersetzt werden müssen.
- Z.B. kann

  „der kleine nette Mann fährt das große blaue Auto"

  durch die obige Grammatik abgeleitet werden

Syntaxbaum zum Beispiel



Definition einer Grammatik

Definition (Grammatik)

Eine **Grammatik** ist ein 4-Tupel $\boldsymbol{G = (V, \Sigma, P, S)}$ mit

- $\boldsymbol{V}$ ist eine endliche Menge von **Variablen**
  (alternativ Nichtterminale, Nichtterminalsymbole)
- $\boldsymbol{\Sigma}$ (mit $V \cap \Sigma = \emptyset$) ist ein **Alphabet** von **Zeichen**
  (alternativ **Terminale**, Terminalsymbole)
- $\boldsymbol{P}$ ist eine endliche Menge von **Produktionen** von der Form $\ell \to r$ wobei $\ell \in (V \cup \Sigma)^+$ und $r \in (V \cup \Sigma)^*$
  (alternativ Regeln)
- $\boldsymbol{S} \in V$ ist das **Startsymbol**
  (alternativ Startvariable)

Manchmal genügt es, P alleine zu notieren
(wenn klar ist, was Variablen, Zeichen und Startsymbol sind)

Beispiel für eine Grammatik

$G = (V, \Sigma, P, E)$ mit

$$
\begin{aligned}
V &= \{E\ , M, Z\},\\
\Sigma &= \{+\ , *, 1, 2, (,)\}\\
P &= \{\begin{array}[t]{lcl}
E & \to & M,\\
E & \to & E + M,\\
M & \to & Z,\\
M & \to & M * Z,\\
Z & \to & 1,\\
Z & \to & 2,\\
Z & \to & (E)\}
\end{array}
\end{aligned}
$$

Ableitung

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik.

Ableitungsschritt $\Rightarrow_G$

Für Satzformen u, v (d.h. Worte aus $(V \cup \Sigma)^*$) sagen wir:

u geht unter Grammatik G unmittelbar in v über, $u \Rightarrow_G v$, wenn

$$u = w_1 \ell w_2 \Rightarrow_G w_1 r w_2 = v \text{ mit } (\ell \to r) \in P$$

- Wenn G klar ist, schreiben wir $u \Rightarrow v$ statt $u \Rightarrow_G v$
- $\Rightarrow_G^*$ sei die reflexiv-transitive Hülle von $\Rightarrow_G$

Ableitung

Eine Folge $(w_0, w_1, \ldots, w_n)$ mit $w_0 = S$, $w_n \in \Sigma^*$ und $w_{i-1} \Rightarrow w_i$ für $i = 1, \ldots, n$ heißt Ableitung von w_n. Statt $(w_0, \ldots, w_n)$ schreiben wir auch $w_0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow w_n$

Beispiel

$$G = (V, \Sigma, P, E) \text{ mit } V = \{E, M, Z\} \text{ und } \Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\} \qquad \text{und}$$

$$\begin{aligned} P = \{ E &\to M, & E &\to E + M, & M &\to Z, & M &\to M * Z, \\ Z &\to 1, & Z &\to 2, & Z &\to (E) & & \} \end{aligned}$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$E \Rightarrow M$$

Beispiel

$G = (V, \Sigma, P, E)$ mit $V = \{E, M, Z\}$ und $\Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\}$ und

$$\begin{array}{lllllllllllll} P = \{E & \to & M, & E & \to & E+M, & M & \to & Z, & M & \to & M * Z, \\ Z & \to & 1, & Z & \to & 2, & Z & \to & (E) & & & & \} \end{array}$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z$$

Beispiel

$G = (V, \Sigma, P, E)$ mit $V = \{E, M, Z\}$ und $\Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\}$ und

$$\begin{array}{rlllllllllll} P = \{E & \rightarrow & M, & E & \rightarrow & E + M, & M & \rightarrow & Z, & M & \rightarrow & M * Z, \\ Z & \rightarrow & 1, & Z & \rightarrow & 2, & Z & \rightarrow & (E) & & & \} \end{array}$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z$$

Beispiel

$$G = (V, \Sigma, P, E) \text{ mit } V = \{E, M, Z\} \text{ und } \Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\} \qquad \text{und}$$

$$\begin{array}{llllllllllllll} P = \{E & \rightarrow & M, & E & \rightarrow & E + M, & M & \rightarrow & Z, & M & \rightarrow & M * Z, \\ Z & \rightarrow & 1, & Z & \rightarrow & 2, & {\color{red}Z} & \rightarrow & {\color{green}(E)} & & & \} \end{array}$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * {\color{red}Z} \Rightarrow Z * {\color{green}(E)}$$

Beispiel

$$G = (V, \Sigma, P, E) \text{ mit } V = \{E, M, Z\} \text{ und } \Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\} \qquad \text{und}$$

$$\begin{array}{llllllllllllll} P = \{E & \to & M, & E & \to & E + M, & M & \to & Z, & M & \to & M * Z, \\ Z & \to & 1, & Z & \to & 2, & Z & \to & (E) & & & \} \end{array}$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M)$$

Beispiel

$G = (V, \Sigma, P, E)$ mit $V = \{E, M, Z\}$ und $\Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\}$ und

$$
\begin{array}{rlllllllllll}
P = \{ E & \rightarrow & M, & E & \rightarrow & E + M, & M & \rightarrow & Z, & M & \rightarrow & M * Z, \\
Z & \rightarrow & 1, & Z & \rightarrow & 2, & Z & \rightarrow & (E) & & & \}
\end{array}
$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$
\begin{aligned}
&E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M) \\
&\Rightarrow (E) * (E + M)
\end{aligned}
$$

Beispiel

$$G = (V, \Sigma, P, E) \text{ mit } V = \{E, M, Z\} \text{ und } \Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\} \qquad \text{und}$$

$$\begin{array}{llllllllllll} P = \{E & \to & M, & E & \to & E + M, & M & \to & Z, & M & \to & M * Z, \\ Z & \to & 1, & Z & \to & 2, & Z & \to & (E) & & & \} \end{array}$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$\begin{aligned} & E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M) \\ & \Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \end{aligned}$$

Beispiel

$G = (V, \Sigma, P, E)$ mit $V = \{E, M, Z\}$ und $\Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\}$ und

$$\begin{array}{llllllllllll} P = \{E & \rightarrow & M, & E & \rightarrow & E + M, & M & \rightarrow & Z, & M & \rightarrow & M * Z, \\ Z & \rightarrow & 1, & Z & \rightarrow & 2, & Z & \rightarrow & (E) & & & \} \end{array}$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$\begin{aligned} & E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M) \\ & \Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z) \end{aligned}$$

Beispiel

$$G = (V, \Sigma, P, E) \text{ mit } V = \{E, M, Z\} \text{ und } \Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\} \quad \text{und}$$

$$\begin{array}{llllllllllll} P = \{E & \to & M, & E & \to & E + M, & M & \to & Z, & M & \to & M * Z, \\ Z & \to & 1, & Z & \to & 2, & Z & \to & (E) & & & \} \end{array}$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$\begin{aligned} & E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M) \\ & \Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z) \\ & \Rightarrow (M + M) * (E + Z) \end{aligned}$$

Beispiel

$$G = (V, \Sigma, P, E) \text{ mit } V = \{E, M, Z\} \text{ und } \Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\} \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} P = \{ E &\rightarrow M, & E &\rightarrow E + M, & M &\rightarrow Z, & M &\rightarrow M * Z, \\ Z &\rightarrow 1, & Z &\rightarrow 2, & Z &\rightarrow (E) & & \} \end{aligned}$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$\begin{aligned} &E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M) \\ &\Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z) \\ &\Rightarrow (M + M) * (E + Z) \Rightarrow (M + M) * (M + Z) \end{aligned}$$

Beispiel

$G = (V, \Sigma, P, E)$ mit $V = \{E, M, Z\}$ und $\Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\}$ und

$$
\begin{array}{llllllllllll}
P = \{E & \to & M, & E & \to & E + M, & M & \to & Z, & M & \to & M * Z, \\
Z & \to & 1, & Z & \to & 2, & Z & \to & (E) & & & \}
\end{array}
$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$
\begin{aligned}
&E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M) \\
&\Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z) \\
&\Rightarrow (M + M) * (E + Z) \Rightarrow (M + M) * (M + Z) \\
&\Rightarrow (M + M) * (Z + Z)
\end{aligned}
$$

Beispiel

$$G = (V, \Sigma, P, E) \text{ mit } V = \{E, M, Z\} \text{ und } \Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\} \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} P = \{E &\to M, & E &\to E + M, & M &\to Z, & M &\to M * Z, \\ Z &\to 1, & Z &\to 2, & Z &\to (E) & & \} \end{aligned}$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$\begin{aligned} &E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M) \\ &\Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z) \\ &\Rightarrow (M + M) * (E + Z) \Rightarrow (M + M) * (M + Z) \\ &\Rightarrow (M + M) * (Z + Z) \Rightarrow (M + M) * (Z + 2) \end{aligned}$$

Beispiel

$$G = (V, \Sigma, P, E) \text{ mit } V = \{E, M, Z\} \text{ und } \Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\} \quad \text{und}$$

$$\begin{array}{rlllllllllllll} P = \{ & E & \to & M, & E & \to & E + M, & M & \to & Z, & M & \to & M * Z, & \\ & Z & \to & 1, & Z & \to & 2, & Z & \to & (E) & & & & \} \end{array}$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$\begin{aligned} & E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M) \\ & \Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z) \\ & \Rightarrow (M + M) * (E + Z) \Rightarrow (M + M) * (M + Z) \\ & \Rightarrow (M + M) * (Z + Z) \Rightarrow (M + M) * (Z + 2) \\ & \Rightarrow (M + Z) * (Z + 2) \end{aligned}$$

Beispiel

$$G = (V, \Sigma, P, E) \text{ mit } V = \{E, M, Z\} \text{ und } \Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\} \quad \text{und}$$

$$\begin{array}{llllllllllll} P = \{E & \to & M, & E & \to & E + M, & M & \to & Z, & M & \to & M * Z, \\ Z & \to & 1, & Z & \to & 2, & Z & \to & (E) & & & \} \end{array}$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$\begin{aligned} & E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M) \\ & \Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z) \\ & \Rightarrow (M + M) * (E + Z) \Rightarrow (M + M) * (M + Z) \\ & \Rightarrow (M + M) * (Z + Z) \Rightarrow (M + M) * (Z + 2) \\ & \Rightarrow (M + Z) * (Z + 2) \Rightarrow (M + Z) * (2 + 2) \end{aligned}$$

Beispiel

$$G = (V, \Sigma, P, E) \text{ mit } V = \{E, M, Z\} \text{ und } \Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\} \qquad \text{und}$$

$$\begin{array}{rlllllllllllll} P = \{E & \to & M, & E & \to & E + M, & {\color{red}M} & \to & {\color{green}Z}, & M & \to & M * Z, \\ Z & \to & 1, & Z & \to & 2, & Z & \to & (E) & & & & \} \end{array}$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$\begin{aligned} & E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M) \\ & \Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z) \\ & \Rightarrow (M + M) * (E + Z) \Rightarrow (M + M) * (M + Z) \\ & \Rightarrow (M + M) * (Z + Z) \Rightarrow (M + M) * (Z + 2) \\ & \Rightarrow (M + Z) * (Z + 2) \Rightarrow ({\color{red}M} + Z) * (2 + 2) \\ & \Rightarrow ({\color{green}Z} + Z) * (2 + 2) \end{aligned}$$

Beispiel

$$G = (V, \Sigma, P, E) \text{ mit } V = \{E, M, Z\} \text{ und } \Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\} \quad \text{und}$$

$$\begin{array}{llllllll} P = \{E \to M, & E \to E + M, & M \to Z, & M \to M * Z, \\ \quad Z \to 1, & Z \to 2, & Z \to (E) & \} \end{array}$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$\begin{aligned} & E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M) \\ & \Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z) \\ & \Rightarrow (M + M) * (E + Z) \Rightarrow (M + M) * (M + Z) \\ & \Rightarrow (M + M) * (Z + Z) \Rightarrow (M + M) * (Z + 2) \\ & \Rightarrow (M + Z) * (Z + 2) \Rightarrow (M + Z) * (2 + 2) \\ & \Rightarrow (Z + Z) * (2 + 2) \Rightarrow (2 + Z) * (2 + 2) \end{aligned}$$

Beispiel

$G = (V, \Sigma, P, E)$ mit $V = \{E, M, Z\}$ und $\Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\}$ und

$$P = \{ \begin{array}{llllllllllll} E & \to & M, & E & \to & E + M, & M & \to & Z, & M & \to & M * Z, \\ Z & \to & 1, & Z & \to & 2, & Z & \to & (E) & & & \end{array} \}$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$\begin{aligned} & E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M) \\ & \Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z) \\ & \Rightarrow (M + M) * (E + Z) \Rightarrow (M + M) * (M + Z) \\ & \Rightarrow (M + M) * (Z + Z) \Rightarrow (M + M) * (Z + 2) \\ & \Rightarrow (M + Z) * (Z + 2) \Rightarrow (M + Z) * (2 + 2) \\ & \Rightarrow (Z + Z) * (2 + 2) \Rightarrow (2 + Z) * (2 + 2) \\ & \Rightarrow (2 + 1) * (2 + 2) \end{aligned}$$

Beispiel: Ableitungen sind nicht eindeutig

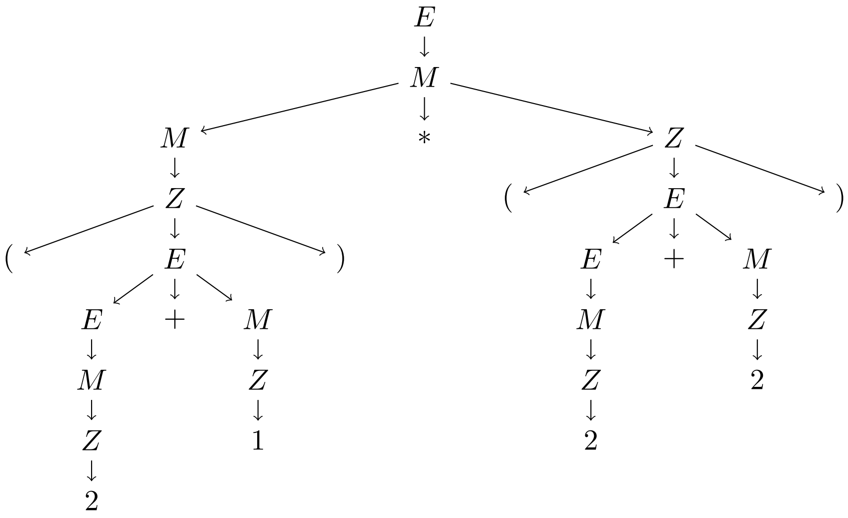
Ableitung von letzter Folie (keine Linksableitung):

$$E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M)$$
$$\Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z)$$
$$\Rightarrow (M + M) * (E + Z) \Rightarrow (M + M) * (M + Z)$$
$$\Rightarrow (M + M) * (Z + Z) \Rightarrow (M + M) * (Z + 2)$$
$$\Rightarrow (M + Z) * (Z + 2) \Rightarrow (M + Z) * (2 + 2)$$
$$\Rightarrow (Z + Z) * (2 + 2) \Rightarrow (2 + Z) * (2 + 2)$$
$$\Rightarrow (2 + 1) * (2 + 2)$$

Linksableitung: ersetzt immer das linkeste Nichtterminal

$$E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow (E) * Z$$
$$\Rightarrow (E + M) * Z \Rightarrow (M + M) * Z \Rightarrow (Z + M) * Z$$
$$\Rightarrow (2 + M) * Z \Rightarrow (2 + Z) * Z \Rightarrow (2 + 1) * Z \Rightarrow (2 + 1) * (E)$$
$$\Rightarrow (2 + 1) * (E + M) \Rightarrow (2 + 1) * (M + M) \Rightarrow (2 + 1) * (Z + M)$$
$$\Rightarrow (2 + 1) * (2 + M) \Rightarrow (2 + 1) * (2 + Z)$$
$$\Rightarrow (2 + 1) * (2 + 2)$$

Syntaxbaum (zu beiden Ableitungen)



Nichtdeterminismus beim Ableiten

Für eine Satzform u kann es verschiedene Satzformen v_i geben mit $u \Rightarrow_G v_i$.

Quellen des Nichtdeterminismus:

- Wähle, **welche Produktion** $\ell \to r$ aus P angewendet wird
- Wähle die **Position des Teilworts** ℓ in u, das durch r ersetzt wird.

Aber: Es gibt **nur endliche viele** v_i für jeden Schritt!

Erzeugte Sprache

Erzeugte Sprache einer Grammatik

Die von einer Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ **erzeugte Sprache** $L(G)$ ist

$$L(G) := \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* w\}.$$

Beispiele

$G_1 = (\{S\}, \{a\}, \{S \to aS\}, S)$
$L(G_1) = \textbf{?}$

$G_2 = (\{S'\}, \{a, b\}, \{S' \to aS', S' \to b\}, S')$
$L(G_2) = \textbf{?}$

Beispiele

$G_1 = (\{S\}, \{a\}, \{S \to aS\}, S)$
$L(G_1) = \textbf{?}$

- $S \Rightarrow aS \Rightarrow aaS \Rightarrow \ldots$ endet nie
- Andere Ableitungen gibt es nicht
- Daher sind keine Worte aus $\{a\}^*$ ableitbar

$G_2 = (\{S'\}, \{a, b\}, \{S' \to aS', S' \to b\}, S')$
$L(G_2) = \textbf{?}$

Beispiele

$G_1 = (\{S\}, \{a\}, \{S \to aS\}, S)$
$L(G_1) = \emptyset$

- $S \Rightarrow aS \Rightarrow aaS \Rightarrow \ldots$ endet nie
- Andere Ableitungen gibt es nicht
- Daher sind keine Worte aus $\{a\}^*$ ableitbar

$G_2 = (\{S'\}, \{a, b\}, \{S' \to aS', S' \to b\}, S')$
$L(G_2) = \textbf{?}$

Beispiele

$G_1 = (\{S\}, \{a\}, \{S \to aS\}, S)$
$L(G_1) = \emptyset$

- $S \Rightarrow aS \Rightarrow aaS \Rightarrow \ldots$ endet nie
- Andere Ableitungen gibt es nicht
- Daher sind keine Worte aus $\{a\}^*$ ableitbar

$G_2 = (\{S'\}, \{a, b\}, \{S' \to aS', S' \to b\}, S')$
$L(G_2) = \textbf{?}$

- $$\begin{tikzcd} S' \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & aS' \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & aaS' \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & aaaS' \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & aaaaS' \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \cdots \\ b & ab & aab & aaab & aaaab & \end{tikzcd}$$
- Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $S \Rightarrow^i a^i S \Rightarrow a^i b$

Beispiele

$G_1 = (\{S\}, \{a\}, \{S \to aS\}, S)$
$L(G_1) = \emptyset$

- $S \Rightarrow aS \Rightarrow aaS \Rightarrow \ldots$ endet nie
- Andere Ableitungen gibt es nicht
- Daher sind keine Worte aus $\{a\}^*$ ableitbar

$G_2 = (\{S'\}, \{a, b\}, \{S' \to aS', S' \to b\}, S')$
$L(G_2) = \{a^n b \mid n \in \mathbb{N}\}$

- $$\begin{tikzcd} S' \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & aS' \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & aaS' \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & aaaS' \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & aaaaS' \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \cdots \\ b & ab & aab & aaab & aaaab & \end{tikzcd}$$
- Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $S \Rightarrow^i a^i S \Rightarrow a^i b$

Die Chomsky-Hierarchie

Noam Chomsky teilte die Grammatiken in Typen 0 bis 3:

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik.

Die Chomsky-Hierarchie

Noam Chomsky teilte die Grammatiken in Typen 0 bis 3:

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik.

G ist vom Typ 0

G ist automatisch vom Typ 0.

G ist vom Typ 1 (kontextsensitive Grammatik), wenn ...

für alle $(\ell \to r) \in P$: $|\ell| \leq |r|$.

G ist vom Typ 2 (kontextfreie Grammatik), wenn ...

G ist vom Typ 1 und für alle $(\ell \to r) \in P$ gilt: $\ell = A \in V$

G ist vom Typ 3 (reguläre Grammatik), wenn ...

G ist vom Typ 2 und für alle $(A \to r) \in P$ gilt: $r = a$ oder $r = aA'$ für $a \in \Sigma, A' \in V$ (die rechten Seiten sind Worte aus $(\Sigma \cup (\Sigma V))$)

Die Chomsky-Hierarchie

Noam Chomsky teilte die Grammatiken in Typen 0 bis 3:

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik.

G ist vom Typ 0

G ist automatisch vom Typ 0.

G ist vom Typ 1 (kontextsensitive Grammatik), wenn ...

für alle $(\ell \to r) \in P$: $|\ell| \leq |r|$.

G ist vom Typ 2 (kontextfreie Grammatik), wenn ...

G ist vom Typ 1 und für alle $(\ell \to r) \in P$ gilt: $\ell = A \in V$

G ist vom Typ 3 (reguläre Grammatik), wenn ...

G ist vom Typ 2 und für alle $(A \to r) \in P$ gilt: $r = a$ oder $r = aA'$ für $a \in \Sigma, A' \in V$
(die rechten Seiten sind Worte aus $(\Sigma \cup (\Sigma V))$)

Die Chomsky-Hierarchie

Noam Chomsky teilte die Grammatiken in Typen 0 bis 3:

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik.

G ist vom Typ 0

G ist automatisch vom Typ 0.

G ist vom Typ 1 (kontextsensitive Grammatik), wenn ...

für alle $(\ell \to r) \in P$: $|\ell| \leq |r|$.

G ist vom Typ 2 (kontextfreie Grammatik), wenn ...

G ist vom Typ 1 und für alle $(\ell \to r) \in P$ gilt: $\ell = A \in V$

G ist vom Typ 3 (reguläre Grammatik), wenn ...

G ist vom Typ 2 und für alle $(A \to r) \in P$ gilt: $r = a$ oder $r = aA'$ für $a \in \Sigma, A' \in V$
(die rechten Seiten sind Worte aus $(\Sigma \cup (\Sigma V))$)

Die Chomsky-Hierarchie

Noam Chomsky teilte die Grammatiken in Typen 0 bis 3:

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik.

G ist vom Typ 0

G ist automatisch vom Typ 0.

G ist vom Typ 1 (kontextsensitive Grammatik), wenn ...

für alle $(\ell \to r) \in P$: $|\ell| \leq |r|$.

G ist vom Typ 2 (kontextfreie Grammatik), wenn ...

G ist vom Typ 1 und für alle $(\ell \to r) \in P$ gilt: $\ell = A \in V$

G ist vom Typ 3 (reguläre Grammatik), wenn ...

G ist vom Typ 2 und für alle $(A \to r) \in P$ gilt: $r = a$ oder $r = aA'$ für $a \in \Sigma, A' \in V$ (die rechten Seiten sind Worte aus $(\Sigma \cup (\Sigma V))$)

Typ i-Sprachen

Definition

Für $i = 0, 1, 2, 3$ nennt man eine formale **Sprache** $L \subseteq \Sigma^*$ **vom Typ** i, falls es eine Typ i-Grammatik G gibt, sodass $L(G) = L$ gilt.

Hierbei wird stets der Typ eindeutig festgelegt, sodass der größtmögliche Grammatik-Typ verwendet wird.

Beispiele

- $G_1 = (\{S\}, \{a,b\}, \{S \to aS, S \to b\}, S)$ ist regulär (Typ 3)
- $G_2 = (\{E,M,Z\}, \{+,*,1,2,(,)\}, P, E)$ mit
  $P = \{E \to M,\ \ E \to E+M,\ \ M \to Z,\ \ M \to M*Z,$
  $Z \to 1,\ \ Z \to 2,\ \ Z \to (E)\}$ ist kontextfrei (Typ 2)
- $G_3 = (\{S,B,C\}, \{a,b,c\}, P, S)$ mit
  $P = \{S \to aSBC, S \to aBC, CB \to BC, aB \to ab,$
  $bB \to bb, bC \to bc, cC \to cc\}$ ist kontextsensitiv (Typ 1)

  Beachte $L(G_3) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$
- $G_4 = (\{S,T,A,B,\$\}, \{a,b\}, P, S)$ mit
  $P = \{S \to \$T\$, T \to aAT, T \to bBT, T \to \varepsilon, \$a \to a\$,$
  $\$b \to b\$, Aa \to aA, Ab \to bA, Ba \to aB, Bb \to bB,$
  $A\$ \to \$a, B\$ \to \$b, \$\$ \to \varepsilon\}$ ist vom Typ 0

Beispiele

- $G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS, S \to b\}, S)$ ist regulär (Typ 3)
- $G_2 = (\{E, M, Z\}, \{+, *, 1, 2, (,)\}, P, E)$ mit
  $P = \{E \to M,\ \ E \to E + M,\ \ M \to Z,\ \ M \to M * Z,$
  $\quad Z \to 1,\ \ Z \to 2,\ \ Z \to (E)\}$ ist kontextfrei (Typ 2)
- $G_3 = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
  $P = \{S \to aSBC, S \to aBC, CB \to BC, aB \to ab,$
  $\quad bB \to bb, bC \to bc, cC \to cc\}$ ist kontextsensitiv (Typ 1)

  Beachte $L(G_3) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$
- $G_4 = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
  $P = \{S \to \$T\$, T \to aAT, T \to bBT, T \to \varepsilon, \$a \to a\$,$
  $\quad \$b \to b\$, Aa \to aA, Ab \to bA, Ba \to aB, Bb \to bB,$
  $\quad A\$ \to \$a, B\$ \to \$b, \$\$ \to \varepsilon\}$ ist vom Typ 0

Beispiele

- $G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS, S \to b\}, S)$ ist regulär (Typ 3)
- $G_2 = (\{E, M, Z\}, \{+, *, 1, 2, (,)\}, P, E)$ mit
  $P = \{E \to M,\ \ E \to E + M,\ \ M \to Z,\ \ M \to M * Z,$
  $Z \to 1,\ \ Z \to 2,\ \ Z \to (E)\}$ ist kontextfrei (Typ 2)
- $G_3 = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
  $P = \{S \to aSBC, S \to aBC, CB \to BC, aB \to ab,$
  $bB \to bb, bC \to bc, cC \to cc\}$ ist kontextsensitiv (Typ 1)

  Beachte $L(G_3) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$
- $G_4 = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
  $P = \{S \to \$T\$, T \to aAT, T \to bBT, T \to \varepsilon, \$a \to a\$,$
  $\$b \to b\$, Aa \to aA, Ab \to bA, Ba \to aB, Bb \to bB,$
  $A\$ \to \$a, B\$ \to \$b, \$\$ \to \varepsilon\}$ ist vom Typ 0

Beispiele

- $G_1 = (\{S\}, \{a,b\}, \{S \to aS, S \to b\}, S)$ ist regulär (Typ 3)
- $G_2 = (\{E, M, Z\}, \{+, *, 1, 2, (,)\}, P, E)$ mit
  $P = \{E \to M,\ \ E \to E + M,\ \ M \to Z,\ \ M \to M * Z,$
  $\quad Z \to 1,\ \ Z \to 2,\ \ Z \to (E)\}$ ist kontextfrei (Typ 2)
- $G_3 = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
  $P = \{S \to aSBC, S \to aBC, CB \to BC, aB \to ab,$
  $\quad bB \to bb, bC \to bc, cC \to cc\}$ ist kontextsensitiv (Typ 1)

  Beachte $L(G_3) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$
- $G_4 = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
  $P = \{S \to \$T\$, T \to aAT, T \to bBT, T \to \varepsilon, \$a \to a\$,$
  $\quad \$b \to b\$, Aa \to aA, Ab \to bA, Ba \to aB, Bb \to bB,$
  $\quad A\$ \to \$a, B\$ \to \$b, \$\$ \to \varepsilon\}$ ist vom Typ 0