

# Handout 8

## Le Lemme de l'Étoile

### 1 Le Lemme de l'Étoile

Aussi appelé *lemme d'itération*, en anglais *pumping lemma*.

#### 1.1 L'énoncé du lemme d'étoile

On dit qu'un langage  $L \subseteq \Sigma^*$  a la propriété d'itération si :

il existe un entier  $N \geq 1$   
tel que pour tout mot  $u \in L$  avec  $|u| \geq N$   
il existe des mots  $x, y, z \in \Sigma^*$  avec  $|xy| \leq N$ ,  $|y| \geq 1$ ,  $u = xyz$   
tel que pour tout entier  $k \geq 0$  :  $xy^kz \in L$ .

Ce qu'on peut écrire dans le langage de la logique du premier ordre :

$$\exists N \geq 1 : \forall u \in L, |u| \geq N : \exists x, y, z \in \Sigma^*, |xy| \leq N, |y| \geq 1, u = xyz : \forall k \geq 0 : xy^kz \in L$$

Le lemme d'étoile dit : tout langage régulier a la propriété d'itération.

Dans la preuve de ce lemme, la valeur  $N$  correspond au nombre d'états d'un automate qui reconnaît  $L$ .

Attention, ils peuvent exister des langages qui ont la propriété d'itération et qui ne sont pas réguliers.

#### 1.2 Utiliser le lemme d'étoile pour montrer qu'un langage n'est *pas* régulier

L'utilisation la plus importante du lemme d'étoile est pour montrer qu'un langage  $L$  n'est pas régulier.

Soit  $L$  un langage. Si on arrive à montrer que  $L$  n'a pas la propriété d'itération alors on a une preuve que  $L$  n'est pas régulier.

Pour montrer que  $L$  n'a *pas* la propriété d'itération il faut montrer la négation de la propriété d'itération, c'est à dire :

pour tout entier  $N \geq 1$   
il existe un mot  $u \in L$  avec  $|u| \geq N$   
tel que pour tous mots  $x, y, z \in \Sigma^*$  avec  $|xy| \leq N$ ,  $|y| \geq 1$ ,  $u = xyz$   
il existe un entier  $k \geq 0$  tel que  $xy^kz \notin L$ .

ou encore en langage logique :

$$\forall N \geq 1 : \exists u \in L, |u| \geq N : \forall x, y, z \in \Sigma^*, |xy| \leq N, |y| \geq 1, u = xyz : \exists k \geq 0 : xy^kz \notin L$$

On peut voir une telle formule logique avec une alternance de quantificateurs  $\forall$  et  $\exists$  comme un jeu entre un joueur Existentiel qui peut choisir des valeurs des variables existentielles avec le but de montrer que ce qu'on a à la fin de la formule est vrai, et le joueur Universel qui choisit les valeurs des variables universelles avec le but d'empêcher le joueur Existentiel. Donc, pour montrer qu'un langage  $L$  n'a pas la propriété d'itération :

1. Universel choisit un  $N \geq 1$
2. Existentiel choisit un  $u \in L$  avec  $|u| \geq N$
3. Universel choisit un découpage  $u = xyz$  avec  $|xy| \leq N, |y| \geq 1$
4. Existentiel choisit  $k \geq 0$

Si à la fin  $xy^kz \notin L$  c'est Existentiel qui gagne la partie, sinon c'est Universel qui gagne. À chaque moment, les joueurs connaissent les choix précédents de leur opposant, et peuvent faire leur choix en conséquence.

Finalement, la formule est *vraie* si Existentiel a une *stratégie gagnante*, c'est à dire il a une stratégie de choisir les valeurs des variables existentielles qui le fait toujours gagner, peu importe les choix du joueur universel.

### 1.3 Utiliser les propriétés de clôture pour montrer qu'un langage n'est pas régulier

Nous avons vu jusqu'à maintenant certaines propriétés de clôture de la classe des langages réguliers : sous union, intersection, complément, concaténation, étoile de Kleene. Il y a encore des autres que nous allons voir en cours ou en TD.

Si on connaît des langages qui ne sont pas réguliers on peut s'en servir pour montrer qu'un langage donné n'est pas régulier.

Exemple : Si on a que  $L_1 \cap L_2 = L_3$ , et si on sait que  $L_2$  est régulier (par exemple quand il est donné par une expression rationnelle) et que  $L_3$  n'est pas régulier (par exemple parce qu'on a montré qu'il n'a pas la propriété d'itération) on peut conclure que  $L_1$  n'est pas régulier non plus.