TD n°8

Lemme de l'Étoile & Propriétés de Clôture

Exercice 1 (Lemme de l'étoile) *On rappelle le lemme de l'étoile :*

> *Soit $\mathcal{L}$ un langage reconnaissable. Il existe un entier N tel que tout mot $u \in \mathcal{L}$ de taille supérieure ou égale à N admet une factorisation $u = xyz$ satisfaisant :*
> — $y \neq \epsilon$ *et* $|xy| \leq N$
> — $xy^kz \in \mathcal{L}$ *pour tout entier* $k \geq 0$.

Pour chacun des langages suivants, montrer s'il est reconnaissable ou non.

1. $\{a^m b^n : m, n \in \mathbb{N}\}$
2. $\{a^m b^n : m < n\}$
3. $\{a^m b^n : m \neq n\}$
4. $\{u^2 : u \in \{a, b\}^*\}$
5. $\{a^{2n} : n \in \mathbb{N}\}$
6. $\{a^{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$
7. $\{a^p : p \text{ premier}\}$

Exercice 2 (Propriétés de Clôture de *Rec*) *Montrer que les langages reconnaissables sont clos sous les opérations suivantes :*

1. *Différence ensembliste :* $X - Y = \{x \mid x \in X \text{ et } x \notin Y\}$
2. *Différence symétrique :* $X \triangle Y = \{x \mid x \in X \text{ et } x \notin Y, \text{ ou } x \in Y \text{ et } x \notin X\}$

Exercice 3 (Clôture par préfixes, suffixes...) *La* clôture sous préfixe *d'un langage L est définie comme*

$$Pref(L) = \{u \mid \text{il existe } v \text{ tel que } u \cdot v \in L\}$$

Il s'agit de l'ensemble des préfixes des mots de L.

1. *Montrer que si L est reconnaissable, alors $Pref(L)$ est également reconnaissable. On pourra par exemple donner un algorithme pour transformer un automate pour L en un automate pour $Pref(L)$.*
2. *La réciproque est-elle est vraie ?*
3. *Montrer que si L est reconnaissable, alors l'ensemble des suffixes de L, l'ensemble des facteurs de L et l'ensemble des sous-mots de L sont également reconnaissables. On pourra procéder de manière similaire à la question 1, ou également utiliser de manière astucieuse les propriétés de clôture de Rec.*

Exercice 4 ((*) Langage miroir) *Le langage miroir d'un langage $\mathcal{L}$ est le langage $\widetilde{\mathcal{L}} = \{\widetilde{u} \mid u \in \mathcal{L}\}$, avec $\widetilde{u} = x_{n-1} \cdots x_0$ pour $u = x_0 \cdots x_{n-1}$. Par exemple pour le langage*

$$\mathcal{L}_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{la troisième lettre de } w \text{ est un } b\}.$$

on a

$$\widetilde{\mathcal{L}_1} = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{la troisième lettre de } w \text{ à partir de la fin est un } b\}.$$

1. *Donner une expression rationnelle pour* $\mathcal{L}_1$ *et une pour* $\widetilde{\mathcal{L}_1}$.
2. *Décrire un procédé permettant de construire en général une expression rationnelle pour* $\widetilde{\mathcal{L}}$ *à partir de l'expression rationnelle pour* $\mathcal{L}$.
3. *Décrire un procédé permettant de construire l'automate qui reconnaît le langage* $\widetilde{\mathcal{L}}$ *étant donné celui de* $\mathcal{L}$. *Est-ce qu'en commençant avec un automate déterministe pour* $\mathcal{L}$ *on obtient toujours un automate déterministe pour* $\widetilde{\mathcal{L}}$ *?*

Pour aller plus loin dans la non-rationalité...

Démontrer la non-rationalité d'un langage en utilisant les propriétés de fermeture de $Rat = Rec$**.**

Le lemme d'itération n'est pas le seul outil pour montrer qu'un langage n'est pas rationnel. Pour cela on peut aussi utiliser les propriétés de fermeture de la famille $Rat = Rec$ à condition de connaître déjà quelques langages non rationnels.

Vous connaissez déjà beaucoup de ces propriétés dont certaines dérivent de la définition même de $Rat = Rec$ alors que d'autres ont été démontrées ou indiquées en cours ou en TD.
On sait notamment que $Rat = Rec$ est fermée relativement à : $\cup, \cdot, ^*, \cap, \mathcal{C}$ (complémentaire), $\setminus$ (différence d'ensembles), Δ (différence symétrique), $\sim$ (miroir), par préfixes, ...

Vous connaissez déjà également certains langages non rationnels vus dans les TD précédents dont vous pourrez vous servir, par exemple le langage $L_0 = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$. On a déjà montré que ce langage n'est pas rationnel (par exemple par le lemme de l'étoile).

Exemple d'application.
On veut montrer que $L_1 = \{w \in \{a,b\}^* | |w|_a = |w|_b\}$ n'est pas rationnel.
On a : $L_0 = L_1 \cap a^*b^*$. Si L_1 était rationnel alors son intersection avec un autre rationnel (dans ce cas a^*b^*) le serait aussi car $Rat = Rec$ est fermée relativement à $\cap$. Mais on sait que cette intersection est L_0, qui n'est pas rationnel, donc L_1 ne peut pas l'être.

Note. On remarque que pour appliquer cette technique il faut exprimer un langage dont on a déjà montré la non-rationnalité (dans l'exemple L_0) en fonction du langage dont on veut montrer la non-rationnalité (dans l'exemple L_1), de langages rationnels (dans l'exemple a^*b^*) et d'opérations relativement auxquelles $Rat = Rec$ est fermée (dans l'exemple $\cap$, mais parfois on a besoin d'utiliser plusieurs opérations).

Exercice 5 *Reprenez ces langages des exercices des TD précédents et essayez de trouver une preuve du fait qu'ils ne sont pas rationnels en utilisant les propriétés de fermeture.*

1. $\{a^p : p \text{ non premier}\}$
2. $\{a^m b^n : m + n \text{ est un carré}\}$
3. $\{a^m b^n : m \neq n\}$
4. $\{u \in \{a,b,c\}^* : |u|_a = |u|_b\}$
5. $\{a^m b^n c^{m+n} : m, n \in \mathbb{N}\}$
6. $\{a^{n+2} b^n : n \in \mathbb{N}\}$
7. $\{uav : u, v \in \{a,b\}^*, |u| = |v|\}$
8. $\{u\widetilde{u} : u \in \{a,b\}^*\}$
9. $\{u^2 : u \in \{a,b\}^*\}$
10. $\{a^m b^n : m \geq n\}$
11. $\{a^m b^n : m < n\}$