Université de Paris – UFR d'Informatique
L2 Informatique, Math-Info, Bio-Info, Japonais-Info

Automates et analyse lexicale
Année 2021-2022

TD n°5

Algorithme de Glushkov et Lemme d'Arden

De l'Expression Rationnelle à l'Automate - Algorithme de Glushkov

Exercice 1 *Utiliser l'algorithme de Glushkov pour trouver des automates reconnaissant les langages décrits par les expressions rationnelles suivantes.*

— $E_1 = (a + ba + bba)^*$,
— $E_2 = (a + ba + bba)^*(\epsilon + b + bb)$,
— $E_3 = (aa + b)^*$,
— $E_4 = (aa + b)^*(a + bb)^*$,
— $E_5 = (aa + bb + (ab + ba)(aa + bb)^*(ab + ba))^*$.
— $E_6 = (a^*b^*)^*$,
— $E_7 = b(ab)^* + (ba)^*b$,
— $E_8 = (a + bb)^*(b + aa)^*$.

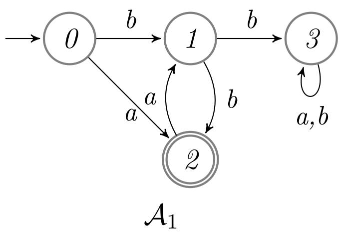
De l'Automate à l'Expression Rationnelle - Lemme d'Arden

Exercice 2 (Lemme d'Arden) *Utiliser le lemme d'Arden pour résoudre le système d'équations suivant :*

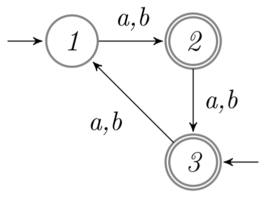
$$\begin{cases} L_1 = aL_2 + bL_4 \\ L_2 = aL_4 + bL_3 \\ L_3 = (a+b)L_3 + \epsilon \\ L_4 = aL_4 + \epsilon \end{cases}$$

Exercice 3 (De l'Automate à l'Expression Rationnelle) *Pour chacun des trois automates donnés au-dessous :*

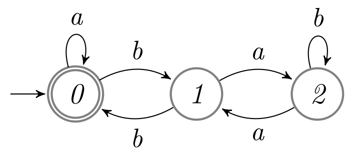
1. *Déterminer le système d'équations associé à $\mathcal{A}_i$.*
2. *Résoudre ce système en utilisant le lemme d'Arden. En déduire une expression rationnelle pour le langage $\mathcal{L}(\mathcal{A}_i)$.*



$\mathcal{A}_1$



$\mathcal{A}_2$



$\mathcal{A}_3$

Compléments - Rappels

Exercice 4 *On considère l'alphabet* $\Sigma = \{a, b\}$. *Prouver l'égalité suivante :*

$$(ab)^+ = (a\Sigma^* \cap \Sigma^* b) \ \setminus \ (\Sigma^* aa \Sigma^* + \Sigma^* bb \Sigma^*).$$

Exercice 5 (Propriétés de Clôture de *Rec*) *Montrer que les langages reconnaissables sont clos sous les opérations suivantes :*

1. *Différence ensembliste :* $X \setminus Y = \{x \mid x \in X \text{ et } x \notin Y\}$
2. *Différence ensembliste symmétrique :* $X \triangle Y = \{x \mid x \in X \text{ et } x \notin Y, \text{ ou } x \in Y \text{ et } x \notin X\}$

Exercice 6 (Clôture par Morphisme) *Un morphisme de mot est une fonction* $\varphi : \Sigma_1^* \mapsto \Sigma_2^*$ *qui envoie un mot sur l'alphabet* Σ_1^* *vers un mot sur l'alphabet* Σ_2^* *telle que pour tout* $u, v \in \Sigma_1^*$, $\varphi(u \cdot v) = \varphi(u) \cdot \varphi(v)$.
Montrer que si $\mathcal{L}$ *est un langage reconnaissable, alors* $\phi(\mathcal{L})$ *est reconnaissable.*