

TD n°1

Langages et expressions rationnelles

Exercice 1 (Occurrences, facteurs et sous-mots)

1. Compter les occurrences des lettres a et b dans les mots suivants : a^3cbbca , $aabgjdd$, $titi$, $babc$.
2. Donner l'ensemble des couples de mots (u, v) tels que $u \cdot v = abaac$ (remarque : on peut ne pas écrire la concaténation “.”, si c'est clair à partir du contexte : par exemple, ici on peut écrire juste $uv = abaac$).
3. Un mot u est un facteur d'un mot v si u apparaît à l'intérieur de v : v s'écrit $w_1 \cdot u \cdot w_2$ pour certains mots w_1 et w_2 (qui peuvent être vides). Un mot u est un sous-mot d'un mot v si on peut obtenir u à partir de v par « effacement » de certaines lettres (pas forcément consécutives) de v . Le nombre d'occurrences d'un facteur (respectivement sous-mot) u dans le mot v est le nombre de façons de voir u comme facteur (resp. sous-mot) de v .
Donner le nombre d'occurrences du facteur aba dans le mot $v = ababab$. Donner le nombre d'occurrences du sous-mot aba dans le même mot v .

Exercice 2 (Opérations sur les langages)

1. Calculer $\mathcal{L} \cdot \mathcal{M}$ pour les ensembles suivants :
 - (a) $\mathcal{L} = \{a, ab, bb\}$ et $\mathcal{M} = \{\varepsilon, b, a^2\}$;
 - (b) $\mathcal{L} = \emptyset$ et $\mathcal{M} = \{a, ba, bb\}$;
 - (c) $\mathcal{L} = \{\varepsilon\}$ et $\mathcal{M} = \{a, ba, bb\}$;
 - (d) $\mathcal{L} = \{aa, ab, ba\}$ et $\mathcal{M} = \{a, b\}^*$.
2. Montrer que le produit est une opération distributive par rapport à l'union, c'est-à-dire que, pour tous langages \mathcal{L} , \mathcal{M} et \mathcal{N} , on a : $\mathcal{L} \cdot (\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) = (\mathcal{L} \cdot \mathcal{M}) \cup (\mathcal{L} \cdot \mathcal{N})$. Montrer que le produit n'est pas distributif par rapport à l'intersection.
3. Parmi les égalités suivantes, lesquelles sont correctes (justifiez, ou donnez un contre-exemple) ?
 - (a) $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}^* \cdot \mathcal{M}^*$
 - (b) $\mathcal{M}^* = (\mathcal{M} \cdot \mathcal{M})^*$
 - (c) $\mathcal{M}^* = \mathcal{M} \cdot \mathcal{M}^*$
 - (d) $\mathcal{M}^* = (\mathcal{M}^*)^*$
 - (e) $\mathcal{M} \cdot (\mathcal{N} \cdot \mathcal{M})^* = (\mathcal{M} \cdot \mathcal{N})^* \cdot \mathcal{M}$
 - (f) $(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})^* = \mathcal{M}^* \cup \mathcal{N}^*$
 - (g) $(\mathcal{M} \cap \mathcal{N})^* = \mathcal{M}^* \cap \mathcal{N}^*$
 - (h) $(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})^* = (\mathcal{M}^* \cdot \mathcal{N}^*)^*$
 - (i) $(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})^* = (\mathcal{M}^* \cdot \mathcal{N})^* \cdot \mathcal{M}^*$

Exercice 3 (Écriture d'expressions rationnelles) Donner une expression rationnelle pour le langage (sur l'alphabet $\{a, b\}$) des mots :

1. contenant exactement un a ;
2. contenant exactement deux a ;
3. contenant au moins deux a ;
4. contenant au moins un a et un b ;
5. contenant un nombre pair de a ;
6. qui contiennent le facteur aa ;
7. qui ne contiennent pas le facteur aa ;
8. qui ne contiennent pas le facteur ab ;
9. qui ne contiennent pas le facteur aba ;
10. contenant le même nombre de a que de b .

Exercice 4 (Commutation) (exercice optionnel)

Soient u et v deux mots. On dit que u et v commutent si l'on a $u \cdot v = v \cdot u$.

Montrer que u et v commutent si et seulement s'il existe un mot w et deux entiers positifs ou nuls m et n vérifiant $u = w^m$ et $v = w^n$.

Pour le sens \Rightarrow , on pourra procéder par récurrence sur $|u| + |v|$.