Université de Paris — UFR Informatique
Automates et Analyse Lexicale — Année 2021–2022

Handout 9

Résiduels

1 Résiduels

1.1 Définition et propriétés élémentaires

Soit $L \subseteq \Sigma^*$ un langage et $u \in \Sigma^*$ un mot. Le *résiduel de* L *par rapport à* u, noté $u^{-1}L$, est défini comme suit :

$$u^{-1}L = \{w \in \Sigma^* \mid u \cdot w \in L\}$$

Autrement dit, on a pour tout mot $w \in \Sigma^*$:

$$w \in u^{-1}L \text{ si et seulement si } u \cdot w \in L$$

On a donc on particulier pour tout langage $L \in \Sigma^*$:

1. $\epsilon^{-1}L = L$
2. $(xy)^{-1}L = y^{-1}(x^{-1}L)$

1.2 Calculer les résiduels d'un langage rationnel

Quand le langage est donné par une expression rationnelle on peut directement calculer les résiduels. On donne des règles de calcul pour le résiduel par rapport à une lettre ; pour calculer les résiduels par rapport à un mot plus long on utilise les équations de la section 1.1. La fonction *eps* est définie dans le handout sur Glushkov.

$$
\begin{array}{rcll}
a^{-1}\epsilon & = & \emptyset & \\
a^{-1}a & = & \epsilon & \\
a^{-1}b & = & \emptyset & b \in \Sigma, a \neq b \\
a^{-1}\emptyset & = & \emptyset & \\
a^{-1}(r_1 + r_2) & = & a^{-1}r_1 + a^{-1}r_2 & \\
a^{-1}(r_1 r_2) & = & \left\{ \begin{array}{ll} (a^{-1}r_1)r_2 & \text{si } \neg eps(r_1) \\ (a^{-1}r_1)r_2 \cup a^{-1}r_2 & \text{si } eps(r_1) \end{array} \right. & \\
a^{-1}r^* & = & (a^{-1}r)r^* &
\end{array}
$$

1.3 L'automate des résiduels pour un langage rationnel

Il s'agit d'une construction directe d'un automate déterministe pour une expression rationnelle, due à Brzozowski. Cette construction ne passe pas par l'étape intermédiaire des automates non déterministes, comme les constructions de Thompson (qui en plus utilise des ϵ-transitons) ou de Glushkov.

Étant donnée l'expression rationnelle r sur l'alphabet Σ, l'automate qui reconnait $\mathcal{L}(r)$ est $(\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ donné par

- Q est l'ensemble de tous les résiduels de L, c'est-à-dire $\{w^{-1}L \mid w \in \Sigma^*\}$, calculé par la méthode donné selon les règles de la section 1.2. Quand on obtient par le calcul d'un résiduel une expression rationnelle r' alors il faut simplifier r' afin de reconnaître le cas où une expression rationnelle équivalente à r' a déjà été calculée avant.

- $q_0 = r$

- $F = \{r' \in Q \mid \epsilon \in \mathcal{L}(r')\}$

- $\delta(r', a) = a^{-1}r'$