Université de Paris – UFR d'Informatique — Automates et analyse lexicale
L2 Informatique, Math-Info, Bio-Info, Japonais-Info — Année 2021-2022

TD n°2

Expressions rationnelles et automates

Exercice 1 *Soit* $\Sigma = \{a, b, c\}$. *Donner des expressions rationnelles décrivant les langages ci-dessous :*

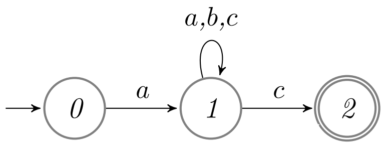
$L_1 = \{u \in \Sigma^* :$ *toute occurrence de b est immédiatement suivie de deux occurrences de a*$\}$,
$L_2 = \{u \in \Sigma^* :$ *le nombre d'occurrences de a dans u est multiple de 3*$\}$,
$L_3 = \{u \in \Sigma^* :$ *le nombre d'occurrences de a dans u est congru à* 3 *modulo 4*$\}$,
$L_4 = \{u \in \Sigma^* :$ *les blocs de a dans u sont alternativement de longueur paire et impaire et le premier bloc de a, s'il existe, est de longueur paire, le dernier aussi*$\}$.

Exercice 2 *Dans cet énoncé, a et b désignent des lettres.*

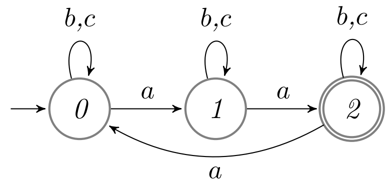
1. *Simplifier les expressions rationnelles suivantes :*
   (a) $(aa)^*a + (aa)^*$;
   (b) $(a + \varepsilon)a^*b$;
   (c) $(a + \varepsilon)(\varepsilon + aa)^+a$.
2. *Montrer les égalités suivantes :*
   (a) $(a^2 + a^3)^* = (a^2a^*)^*$;
   (b) $a^*(a + b)^* = (a + ba^*)^*$;
   (c) $(ba)^+(a^*b^* + a^*) = (ba)^*ba^+b^*$.

Exercice 3 *Soient les deux automates :*

$\mathcal{A}_1$:



$\mathcal{A}_2$:



1. *Décrire pour chacun, les ensembles d'états initiaux/acceptants et la fonction de transition.*
2. *Les mots abc, abbbc et abacabcc sont-ils reconnus par l'automate* $\mathcal{A}_1$ *? Sont-ils reconnus par l'automate* $\mathcal{A}_2$ *?*
3. *Décrire les langages reconnus par ces automates, en français et par une expression rationnelle.*

Exercice 4 *Pour chacun des langages suivants, dessiner un automate déterministe le reconnaissant.*

1. *Le langage* $\{car, bar, or\}$ *(faire en sorte qu'il y ait le moins possible d'états).*
2. *Le langage donné par l'expression rationnelle* $a^*(a + b)c^*$.
3. *Le langage des mots de longueur paire sur l'alphabet* $\{a\}$.

Exercice 5 *Montrer que les langages suivants sont reconnaissables en donnant pour chacun un automate le reconnaissant.*

1. $\mathcal{L}_1 = \{u \in \{a,b\}^* :$ *toute occurrence de b dans u est immédiatement suivie d'au moins deux occurrences de a*$\}$,
2. $\mathcal{L}_2 = \{u \in \{a,b\}^* :$ *u ne contient pas deux a successifs*$\}$,
3. $\mathcal{L}_3 = \{u \in \{a,b\}^* :$ *le nombre d'occurrences de a dans u est pair*$\}$,
4. $\mathcal{L}_4 = \{u \in \{a,b\}^* :$ *les blocs de a dans u sont alternativement de longueur paire et impaire*$\}$.

Exercice 6 *Montrer que les langages suivants sont reconnaissables en donnant pour chacun un automate le reconnaissant. Pour cet exercice, une représentation binaire d'un nombre commence avec le bit de poids fort, et se termine sur le bit de poids faible : par exemple,* 001100 *et* 1100 *sont des représentations binaires du nombre douze.*

1. $\mathcal{L}_5 = \{u \in \{0,1\}^* :$ *u est la représentation binaire d'une puissance de 2*$\}$,
2. $\mathcal{L}_6 = \{u \in \{0,1\}^* :$ *u est la représentation binaire d'un multiple de 4*$\}$,
3. $\mathcal{L}_7 = \{u \in \{0,1\}^* :$ *u est la représentation binaire d'un multiple de 3*$\}$,