

TD n°9

Résiduels

Exercice 1 On considère le langage $L = ba^* + ab$.

1. Calculer les résiduels $a^{-1}L$ et $b^{-1}L$.
2. Calculer $(ab)^{-1}L$, $(aa)^{-1}L$, $(bb)^{-1}L$ et $(ba)^{-1}L$.
3. Calculer les résiduels de L par rapport aux mots sur $\{a, b\}$ de longueur 3. Est-il nécessaire de calculer les résiduels par rapport aux mots de longueur 4 ?
4. Construire l'automate des résiduels pour L .

Exercice 2 Pour chacun des langages suivants, calculer tous les résiduels et construire l'automate des résiduels.

- $L_1 = a^*b^*$
- $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = 1\}$
- $L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \geq 2\}$
- $L_4 = b(ab)^* + (ab)^*a$
- $L_5 = a(b + ab)^* + b^*(a + bb)$
- $L_6 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ contient le facteur } ab\}$
- $L_7 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \text{ est pair}\}$
- $L_8 = \{u \in \{a, b\}^* \mid |u|_a + 2|u|_b \equiv 0 \pmod{3}\}$
- $L_9 = a^+b^+$
- le langage L_{10} des mots de longueur au moins 2 sur l'alphabet $\{a, b\}$ pour lesquels la première et la dernière lettre sont différentes.

Exercice 3 Soit M le langage des mots sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ dont la longueur est un carré :

$$M = \{u \in \{a, b, c\}^* \mid \exists k \in \mathbb{N}, |u| = k^2\}.$$

Soient i et j des entiers vérifiant $i < j$.

1. Donner un mot non vide de taille minimale dans $(a^{i^2})^{-1}M$.
2. Montrer que ce mot n'est pas dans $(a^{j^2})^{-1}M$.
3. Combien M a-t-il de résiduels distincts ?