Université de Paris | UFR Informatique
Automates et Analyse Lexicale | Année 2021–2022

Handout Cours 4

Automates avec ϵ-transitions, Algorithme de Thompson

1 Automates avec ϵ-transitions

Un *automate fini non déterministe avec ϵ-transitions* (AFNDE) est un quintuplet $(\Sigma, Q, I, F, \delta)$ tel que

- Σ est un alphabet fini ;
- Q est un ensemble fini, appelé l'ensemble des *états* ;
- $I \subseteq Q$, appelé *ensemble des états initiaux* ;
- $F \subseteq Q$, appelé *ensemble des états acceptants* ;
- $\delta\colon Q \times \Sigma \cup \{\epsilon\} \mapsto 2^Q$ est une fonction, appelée la *fonction de transition.*

La seule différence avec les AFND est qu'on a maintenant aussi des transitions qui ne consomment pas une lettre de Σ. Ces transitions permettent de se "téléporter" d'un état vers un autre.

Attention un AFNDE peut avoir des cycles de flèches qui sont toutes étiquetées par ϵ, ce qui permet de tourner en rond sans d'avancer dans la lecture du mot.

Étant donné un AFNDE $(\Sigma, Q, I, F, \delta)$, et $P \subseteq Q$, l'ϵ-*clôture* de P est

$$\{q \in Q \mid \text{existe } p_1, \ldots, p_n \in Q \text{ t.q. pour tout } 1 \leq i < n : p_{i+1} \in \delta(p_i, \epsilon), p_1 \in P, q = p_n\}$$

Étant donné un AFNDE $(\Sigma, Q, I, F, \delta)$, on définit une fonction $\delta^*\colon Q\times\Sigma^* \mapsto 2^Q$ par récurrence sur le deuxième argument :

$$\begin{array}{rcl} \delta^*(q, \epsilon) & = & \{q\} \\ \delta^*(q, aw) & = & \displaystyle\bigcup_{p\in\delta(q,a)} \epsilon\text{-clôture de } \delta^*(p, w) \end{array}$$

Le langage *reconnu* par l'AFNDE A est

$$\mathcal{L}(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \text{il existe } q_0 \text{ dans } \epsilon\text{-clôture de } I \text{ tel que } \delta^*(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

L'AFNDE A *accepte* un mot w si $w \in \mathcal{L}(A)$.

2 Élimination des ϵ-transitions

Pour tout AFNDE $A = (\Sigma, Q, I, F, \delta)$ il existe un AFND $A' = (\Sigma, Q', I', F', \delta')$ tel que $\mathcal{L}(A') = \mathcal{L}(A)$.

La construction de A' est comme suit :

- $Q' = Q$,
- $I' = \epsilon$-clôture de I,
- $F' = F$,
- $\delta'(q, a) = \epsilon$-clôture de $\delta(q, a)$.

3 L'algorithme de Thompson

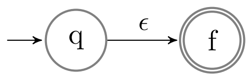
L'algorithme de Thompson transforme une expression rationnelle r en un automate A tel que $\mathcal{L}(r) = \mathcal{L}(A)$.

Dans un premier temps on construit un AFNDE par induction sur la structure de l'expression rationnelle. L'algorithme maintient un invariant, c-à-d tous les automates construits par cet algorithme satisfont ces propriétés :

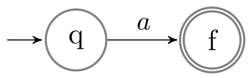
- un seul état initial
- un seul état acceptant
- aucune transition entre dans l'état initial
- aucune transition sort de l'état acceptant

Construction d'un AFNDE $N(s)$ pour une expression rationnelle s :

- $N(\epsilon)$:

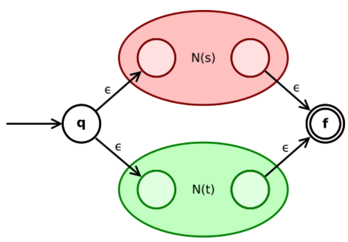


- $N(a)$ pour $a \in \Sigma$:

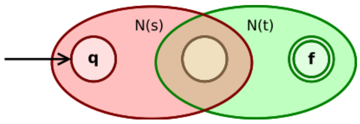


- $N(\emptyset)$:

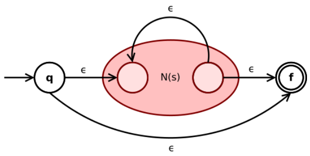
- $N(s + t)$:



- $N(st)$:



- $N(s^*)$:



Finalement on transforme cet AFNDE en un AFND (élimination des ϵ-transitions), puis en un AFD (déterminisation).

Diagrammes : Trapmoth / wikipedia