Université de Paris

L2 informatique - Année 2020–2021

TD d'Éléments d'Algorithmique n° 5

Dans ce TD, "trié" signifie "trié par ordre croissant".
* Les exercices marqués d'une étoile sont à faire à la maison.

Exercice 1. *Dichotomie.*

1. Exécutez l'algorithme de dichotomie récursif vu en cours sur la valeur 42 et chacun des tableaux suivants :

   $$[1, 2, 42, 57, 99] \qquad [1, 2, 3, 4, 42] \qquad [1, 2, 3, 57, 99]$$

   (1) (5) (4)

   Combien de comparaisons a-t-il fallu faire dans chaque cas ?
2. Même question avec l'algorithme itératif. même réponse

Exercice 2. *Recherche dans un tableau arbitraire.*
Dans cet exercice, on suppose qu'un test d'égalité qui implique des éléments d'un tableau a le même coût qu'une comparaison qui implique des éléments du tableau et on appelle les deux opérations des "comparaisons". On a un tableau de taille n dans lequel on veut effectuer m recherches. Combien de comparaisons faut-il faire dans le pire des cas :

1. si on effectue m recherches séquentielles ; m.n comparaisons
2. si on effectue un tri par insertion suivi de m recherches par dichotomie. O(n²) + (log n) · m (pour le tri ; m recherches ; pour chaque recherche)
3. si on effectue un tri faisant $n \log n$ comparaisons (par exemple le tri fusion) suivi de m recherches par dichotomie ? n log n + log n · m = (m + n) · log n

Exercice 3. *Diviser pour régner.*
On dispose d'un tas de n pièces $p_0, p_1 \ldots p_{n-1}$ dont exactement une est fausse ; toutes les pièces ont le même poids sauf la pièce fausse, qui est plus légère. On dispose d'une balance à deux plateaux.

1. Combien de pesées sont nécessaires pour déterminer la pièce fausse lorsque $n = 4$? $n = 8$? $n = 9$? Si 3 gauches == 3 droites alors compare les 3 restes → 2
2. Écrivez un algorithme récursif qui permet de déterminer la pièce fausse lorsque le nombre de pièces est une puissance de deux. Combien de pesées fait-il ?
3. Même question lorsque le nombre de pièces est une puissance de trois.
4. Et dans le cas général ?

(Note manuscrite : 2 pèses avec répartition (3,3), 2. On compare 3 gauches et 3 droites si égaux on compare les deux restes si non on compare les trois plus legères.)

Exercice 4. *Recherche dans un tableau bi-dimensionel.*
Dans cet exercice, on considère un tableau bi-dimensionel T de taille $n \times m$ d'entiers dont les lignes et les colonnes sont triées. On veut effectuer une recherche d'un élément x dans ce tableau.

1. Écrivez un algorithme qui fait une recherche séquentielle. Combien de comparaisons effectue votre algorithme au pire de cas ? n · m
2. Écrivez un algorithme qui fait n recherches dichotomiques (une par ligne). Combien de comparaisons effectue cet algorithme au pire de cas ? 2 · n log m (dans chaque boucle on effectue 2)
3. Écrivez un algorithme qui fait m recherches dichotomiques (une par colonne). Combien de comparaisons effectue l'algorithme dans ce cas ? 2 · m log n

par ligne ; par colonne

4. Enfin, proposer un algorithme *efficace* qui n'effectue qu'au plus $m+n$ comparaisons au pire de cas.
5. Exécuter les algorithmes proposés pour l'élément $x = 14$ sur le tableau T suivant :

1	4	6	7	9
2	7	8	9	11
3	9	10	13	15
6	10	15	17	20
14	18	19	21	22

Exercice 5. *Point fixe*.*
Cet exercice est à faire à la maison. Répondez aux deux premieres questions dans un commentaire que vous insèrerez dans le fichier source que vous utilisez pour la dernière question.
On considère un tableau trié T d'entiers relatifs tous distincts. On dit qu'un indice i est un *point fixe* de T si $T[i] = i$, un *pré-point fixe* si $T[i] \leq i$, et *post-point fixe* si $T[i] \geq i$.

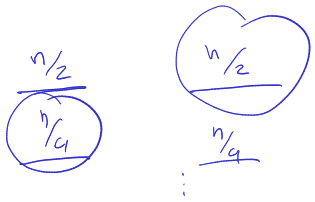
1. Quels sont les pré- et post-points fixes du tableau $T = [-1, 0, 1, 3, 4, 8]$?
2. Quelle propriété satisfont les ensembles de pré- et post-points fixes d'un tel tableau ?
3. Déduisez-en un algorithme itératif efficace qui prend en entrée un tableau trié T d'entiers relatifs tous distincts et retourne vrai si et seulement s'il existe un indice i tel que $T[i] = i$. Combien votre algorithme fait-il de comparaisons dans le cas pire ?

Exo 3.

2.

```
PeseDicho ( T, l, r )
  si l==r retourne T[l].
  si PeseDich(T, 0, n/2 - 1) < PeseDicho(T, n/2, n-1)
    retourne PeseDicho(T, 0, n/2 - 1)
  sinon
    retourne PeseDicho(T, n/2, n-1)
```

$r - l + 1 = 2^t$
longueur de $T = 2^t$

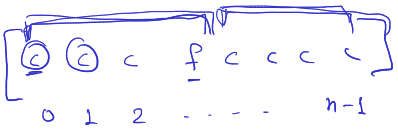


de Pèses $\sim \log_2 |T|$

3.

$r - l + 1 = 3^t$
longueur de $T = 3^t$

```
PeseTricho ( T, l, r )
  si l==r retourne T[l]
  si PeseTricho(T, 0, n/3 - 1) < PeseTricho(n/3, 2.n/3 - 1)
    retourne PeseTricho(T, 0, n/3 - 1)
  si PeseTricho(T, 0, n/3 - 1) > PeseTricho(n/3, 2.n/3 - 1)
    retourne PeseTricho(T, n/3, 2.n/3 - 1)
  sinon
    retourne PeseTricho(2.n/3, n-1)
```



de Pèses $\sim \log_3 |T|$

4. Il faut tester T.longueur % 3 

Attention au cas de base!!!

Logarithme $\log_2 x$: combien de fois est-ce qu'il faut diviser x par 2 pour que cela fait 1.

Ex. $\log_2 64$

$64/2 \to 32$ (1)

$32/2 \to 16$ (2)

$16/2 \to 8$ (3)

$8/2 \to 4$ (4)

$4/2 \to 2$ (5)

$2/2 \to 1$ (6)

$\log_2 64 = 6$

Autre définition du logarithme : $\log_2 x$ est $\sim$ le # de bits dans x si x est un nombre binaire.

$2^0 = 1$	$2^6 = 64$
$2^1 = 2$	$2^7 = 128$
$2^2 = 4$	$2^8 = 256$
$2^3 = 8$	$2^9 = 512$
$2^4 = 16$	$2^{10} = 1024$
$2^5 = 32$	$2^{11} = 2048$

Alors, $\log_2 512 = 9$

Le logarithme est une fonction qui s'augmente très lentement !

$10^3 \simeq 10$

$10^6 \simeq 20$

$10^9 \simeq 30$

$10^{12} \simeq 40$

Si on assume qu'on effectue $\sim 10^9$ $\frac{\text{opérations}}{\text{seconde}}$

n	$\log n$		n		$n \log n$		n^2	
10^3	10	instantané	10^3	instantané	10^4	instantané	10^6	instantané
10^4	13	—"—	10^4	—"—	$1{,}3 \cdot 10^5$	—"—	10^8	—"—
10^5	16,5	—"—	10^5	—"—	$1{,}6 \cdot 10^6$	—"—	10^{10}	10 sec
10^6	20	—"—	10^6	—"—	$2 \cdot 10^7$	—"—	10^{12}	15 min
10^7	23	—"—	10^7	—"—	$2{,}3 \cdot 10^8$	—"—	10^{14}	1 jour
10^8	26,5	—"—	10^8	—"—	$2{,}6 \cdot 10^9$	2,6 sec	10^{16}	4 mois
10^9	30	—"—	10^9	1 sec	$3 \cdot 10^{10}$	5 min	10^{18}	31 ans
10^{10}	33	—"—	10^{10}	10 sec	$3{,}3 \cdot 10^{11}$	1 h	10^{20}	...
10^{11}	36,5	—"—	10^{11}	1,5 min	$3{,}6 \cdot 10^{12}$	10 h	10^{22}	...
10^{12}	40	—"—	10^{12}	15 min	$4 \cdot 10^{13}$	4,5 jour	10^{24}	...