Module EA4 – Éléments d'Algorithmique II

Outils pour l'analyse des algorithmes

Dominique Poulalhon
dominique.poulalhon@irif.fr

Université Paris Diderot
L2 Informatique & DL Bio-Info, Jap-Info, Math-Info
Année universitaire 2021-2022

Points à retenir du cours précédent

algorithme = méthode systématique pour résoudre un problème

Points à retenir du cours précédent

algorithme = méthode systématique pour résoudre un problème

nécessite une preuve de correction : pour chaque entrée, l'algorithme doit terminer en produisant la bonne sortie

Points à retenir du cours précédent

algorithme = méthode systématique pour résoudre un problème

nécessite une preuve de correction : pour chaque entrée, l'algorithme doit terminer en produisant la bonne sortie

il peut exister plusieurs algorithmes pour le même problème

Points à retenir du cours précédent

algorithme = méthode systématique pour résoudre un problème

nécessite une preuve de correction : pour chaque entrée, l'algorithme doit terminer en produisant la bonne sortie

il peut exister plusieurs algorithmes pour le même problème

pour les comparer, il faut étudier leur complexité, à la fois en temps et en espace

Exemple : comment calculer le 1 000 000e terme de la suite de Fibonacci ?

suite définie par : $F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Exemple : comment calculer le 1 000 000e terme de la suite de Fibonacci ?

suite définie par : $F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad$ et $\quad \forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Préambule : à quel point est-ce gros ? 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Exemple : comment calculer le 1 000 000e terme de la suite de Fibonacci ?

suite définie par : $F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad$ et $\quad \forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Préambule : à quel point est-ce gros ? 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

- la suite (F_n) est positive, *(preuve par récurrence)*

Exemple : comment calculer le 1 000 000e terme de la suite de Fibonacci ?

suite définie par : $F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad$ et $\quad \forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Préambule : à quel point est-ce gros ? 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

- la suite (F_n) est positive, *(preuve par récurrence)*
- donc croissante : $\forall n \geqslant 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ et $F_{n-2} \geqslant 0$ donc $F_n \geqslant F_{n-1}$

Exemple : comment calculer le 1 000 000e terme de la suite de Fibonacci ?

suite définie par : $F_0 = 0,\quad F_1 = 1\quad$ et $\quad\forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Préambule : à quel point est-ce gros ? 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

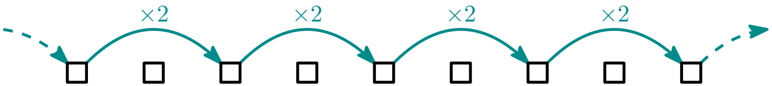
- la suite (F_n) est positive, *(preuve par récurrence)*
- donc croissante : $\forall n \geqslant 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ et $F_{n-2} \geqslant 0$ donc $F_n \geqslant F_{n-1}$
- donc : $\forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \geqslant 2F_{n-2}$

Exemple : comment calculer le 1 000 000e terme de la suite de Fibonacci ?

suite définie par : $F_0 = 0,\quad F_1 = 1\quad$ et $\quad \forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Préambule : à quel point est-ce gros ? 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

- la suite (F_n) est positive, *(preuve par récurrence)*
- donc croissante : $\forall n \geqslant 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ et $F_{n-2} \geqslant 0$ donc $F_n \geqslant F_{n-1}$
- donc : $\forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \geqslant 2F_{n-2}$

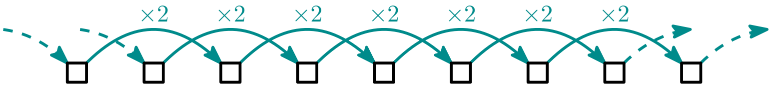


Exemple : comment calculer le 1 000 000e terme de la suite de Fibonacci ?

suite définie par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Préambule : à quel point est-ce gros ? 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

- la suite (F_n) est positive, *(preuve par récurrence)*
- donc croissante : $\forall n \geqslant 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ et $F_{n-2} \geqslant 0$ donc $F_n \geqslant F_{n-1}$
- donc : $\forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \geqslant 2F_{n-2}$

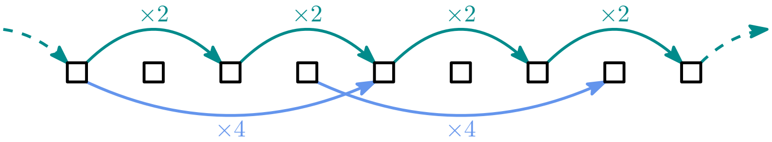


Exemple : comment calculer le 1 000 000e terme de la suite de Fibonacci ?

suite définie par : $F_0 = 0,$ $F_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Préambule : à quel point est-ce gros ? 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

- la suite (F_n) est positive, *(preuve par récurrence)*
- donc croissante : $\forall n \geqslant 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ et $F_{n-2} \geqslant 0$ donc $F_n \geqslant F_{n-1}$
- donc : $\forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \geqslant 2F_{n-2}$

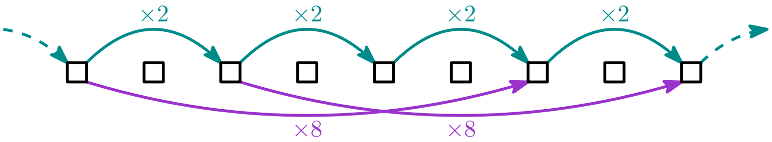


Exemple : comment calculer le 1 000 000e terme de la suite de Fibonacci ?

suite définie par : $F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad$ et $\quad \forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Préambule : à quel point est-ce gros ? 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

- la suite (F_n) est positive, *(preuve par récurrence)*
- donc croissante : $\forall n \geqslant 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ et $F_{n-2} \geqslant 0$ donc $F_n \geqslant F_{n-1}$
- donc : $\forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \geqslant 2F_{n-2}$

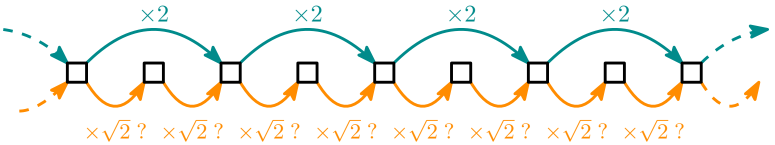


Exemple : comment calculer le 1 000 000^{e} terme de la suite de Fibonacci ?

suite définie par : $F_0 = 0,\quad F_1 = 1\quad$ et $\quad\forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Préambule : à quel point est-ce gros ? 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

- la suite (F_n) est positive, *(preuve par récurrence)*
- donc croissante : $\forall n \geqslant 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ et $F_{n-2} \geqslant 0$ donc $F_n \geqslant F_{n-1}$
- donc : $\forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \geqslant 2F_{n-2}$

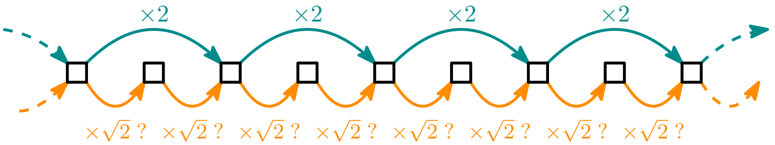


Exemple : comment calculer le 1 000 000e terme de la suite de Fibonacci ?

suite définie par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Préambule : à quel point est-ce gros ? 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

- la suite (F_n) est positive, *(preuve par récurrence)*
- donc croissante : $\forall n \geqslant 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ et $F_{n-2} \geqslant 0$ donc $F_n \geqslant F_{n-1}$
- donc : $\forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \geqslant 2F_{n-2}$
- (or $F_6 = 8 = 2^{6/2}$ et $F_7 = 13 \geqslant 2^{7/2}$) donc : $\forall n \geqslant 6,\ F_n \geqslant 2^{n/2}$

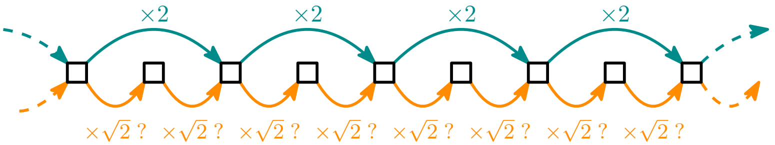


Exemple : comment calculer le 1 000 000e terme de la suite de Fibonacci ?

suite définie par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Préambule : à quel point est-ce gros ? 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

- la suite (F_n) est positive, *(preuve par récurrence)*
- donc croissante : $\forall n \geqslant 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ et $F_{n-2} \geqslant 0$ donc $F_n \geqslant F_{n-1}$
- donc : $\forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \geqslant 2F_{n-2}$
- (or $F_6 = 8 = 2^{6/2}$ et $F_7 = 13 \geqslant 2^{7/2}$) donc : $\forall n \geqslant 6,\ F_n \geqslant 2^{n/2}$
- donc $\forall n \geqslant 6,\ F_n$ a ***au moins*** $\frac{n}{2}$ ***chiffres*** (en binaire)

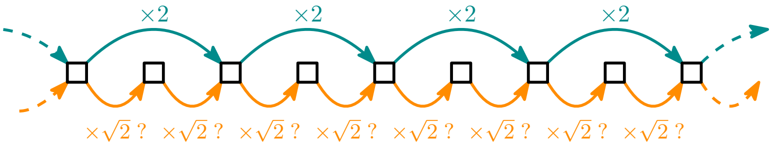


Exemple : comment calculer le 1 000 000e terme de la suite de Fibonacci ?

suite définie par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Préambule : à quel point est-ce gros ? 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

- la suite (F_n) est positive, *(preuve par récurrence)*
- donc croissante : $\forall n \geqslant 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ et $F_{n-2} \geqslant 0$ donc $F_n \geqslant F_{n-1}$
- donc : $\forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \geqslant 2F_{n-2}$
- (or $F_6 = 8 = 2^{6/2}$ et $F_7 = 13 \geqslant 2^{7/2}$) donc : $\forall n \geqslant 6,\ F_n \geqslant 2^{n/2}$
- donc $\forall n \geqslant 6,\ F_n$ a ***au moins*** $\frac{n}{2}$ ***chiffres*** (en binaire)
- similairement, $F_n \leqslant 2^n$, donc a ***au plus*** n ***chiffres*** (en binaire)



Exemple : comment calculer le 1 000 000e terme de la suite de Fibonacci ?

suite définie par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Préambule : à quel point est-ce gros ? 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

- la suite (F_n) est positive, *(preuve par récurrence)*
- donc croissante : $\forall n \geqslant 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ et $F_{n-2} \geqslant 0$ donc $F_n \geqslant F_{n-1}$
- donc : $\forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \geqslant 2F_{n-2}$
- (or $F_6 = 8 = 2^{6/2}$ et $F_7 = 13 \geqslant 2^{7/2}$) donc : $\forall n \geqslant 6,\ F_n \geqslant 2^{n/2}$
- donc $\forall n \geqslant 6,\ F_n$ a ***au moins*** $\frac{n}{2}$ ***chiffres*** (en binaire)
- similairement, $F_n \leqslant 2^n$, donc a ***au plus*** n ***chiffres*** (en binaire)

Donc $F_{1\,000\,000}$ a entre 500 000 et 1 000 000 chiffres en binaire, soit (environ) entre 150 000 et 300 000 chiffres en décimal

Exemple : comment calculer le 1 000 000e terme de la suite de Fibonacci ?

suite définie par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Préambule : à quel point est-ce gros ? 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

- la suite (F_n) est positive, *(preuve par récurrence)*
- donc croissante : $\forall n \geqslant 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ et $F_{n-2} \geqslant 0$ donc $F_n \geqslant F_{n-1}$
- donc : $\forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \geqslant 2F_{n-2}$
- (or $F_6 = 8 = 2^{6/2}$ et $F_7 = 13 \geqslant 2^{7/2}$) donc : $\forall n \geqslant 6,\ F_n \geqslant 2^{n/2}$
- donc $\forall n \geqslant 6,\ F_n$ a ***au moins*** $\frac{n}{2}$ ***chiffres*** (en binaire)
- similairement, $F_n \leqslant 2^n$, donc a ***au plus*** n ***chiffres*** (en binaire)

Donc $F_{1\,000\,000}$ a entre 500 000 et 1 000 000 chiffres en binaire, soit (environ) entre 150 000 et 300 000 chiffres en décimal

Plus précisément, on peut montrer *(admis)* :

$$F_n \sim \varphi^n, \text{ avec } \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \text{ (« \textit{nombre d'or} »)}$$

Exemple : comment calculer le 1 000 000^{e} terme de la suite de Fibonacci ?

suite définie par : $F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad$ et $\quad \forall n \geqslant 2, \; F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Exemple : comment calculer le 1 000 000e terme de la suite de Fibonacci ?

suite définie par : $F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

1. utiliser directement la définition par récurrence

```
def fibo_1(n) :
  if n <= 0 : return 0
  if n <= 2 : return 1
  return fibo_1(n-1) + fibo_1(n-2)
```

Exemple : comment calculer le 1 000 000e terme de la suite de Fibonacci ?

suite définie par : $F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad$ et $\quad \forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

1. utiliser directement la définition par récurrence

```
def fibo_1(n) :
  if n <= 0 : return 0
  if n <= 2 : return 1
  return fibo_1(n-1) + fibo_1(n-2)
```

Preuve de terminaison : par récurrence (forte)

- cas de base : si $n \leqslant 2$, `fibo_1`(n) termine
- hérédité : soit $n \geqslant 2$ t.q. `fibo_1`(k) termine pour tout $k < n$
  alors `fibo_1`$(n-1)$ et `fibo_1`$(n-2)$ terminent, donc `fibo_1`(n) termine

donc `fibo_1`(n) termine pour tout n

Exemple : comment calculer le 1 000 000^{e} terme de la suite de Fibonacci ?

suite définie par : $F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad$ et $\quad \forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

1. utiliser directement la définition par récurrence

```
def fibo_1(n) :
  if n <= 0 : return 0
  if n <= 2 : return 1
  return fibo_1(n-1) + fibo_1(n-2)
```

Preuve de correction : par récurrence (forte)

- cas de base : si $n \leqslant 2$, `fibo_1`(n) retourne F_n
- hérédité : soit $n \geqslant 2$ t.q. `fibo_1`(k) retourne F_k pour tout $k < n$
  alors `fibo_1`(n) retourne
  `fibo_1`$(n-1)$ + `fibo_1`$(n-2) = F_{n-1} + F_{n-2} = F_n$

donc `fibo_1`(n) retourne F_n pour tout n

Exemple : comment calculer le 1 000 000e terme de la suite de Fibonacci ?

suite définie par : $F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

1. utiliser directement la définition par récurrence

```
def fibo_1(n) :
  if n <= 0 : return 0
  if n <= 2 : return 1
  return fibo_1(n-1) + fibo_1(n-2)
```

(gros) inconvénient : recalcul permanent de valeurs déjà calculées

Exemple : comment calculer le 1 000 000e terme de la suite de Fibonacci ?

suite définie par : $F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad$ et $\quad \forall n \geqslant 2, \; F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

1. utiliser directement la définition par récurrence
2. garder un tableau de toutes les premières valeurs

```
def fibo_2(n) :
  if n <= 0 : return 0
  liste = [0, 1] + [0] * (n-1)
  for i in range(2, n+1) :
    liste[i] = liste[i-1] + liste[i-2]
  return liste[n]
```

(on appelle cette technique « *programmation dynamique* »)

Exemple : comment calculer le 1 000 000e terme de la suite de Fibonacci ?

suite définie par : $F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad$ et $\quad \forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

1. utiliser directement la définition par récurrence
2. garder un tableau de toutes les premières valeurs
3. garder seulement les deux dernières valeurs

```
def fibo_3(n) :
  if n <= 0 : return 0
  previous, last = 0, 1
  for i in range(2, n+1) :
    previous, last = last, previous + last
  return last
```

Exemple : comment calculer le 1 000 000e terme de la suite de Fibonacci ?

suite définie par : $F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad$ et $\quad \forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

1. utiliser directement la définition par récurrence
2. garder un tableau de toutes les premières valeurs
3. garder seulement les deux dernières valeurs

```
def fibo_3(n) :
  if n <= 0 : return 0
  previous, last = 0, 1
  for i in range(2, n+1) :
    previous, last = last, previous + last
  return last
```

Preuve de terminaison : $n - 1$ tours de boucle

Exemple : comment calculer le 1 000 000e terme de la suite de Fibonacci ?

suite définie par : $F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad$ et $\quad \forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

1. utiliser directement la définition par récurrence
2. garder un tableau de toutes les premières valeurs
3. garder seulement les deux dernières valeurs

```
def fibo_3(n) :
  if n <= 0 : return 0
  previous, last = 0, 1
  for i in range(2, n+1) :
    previous, last = last, previous + last
  return last
```

Preuve de correction : à l'aide de l'invariant :

« *après le tour de boucle d'indice* i, *previous* $= F_{i-1}$ *et last* $= F_i$ »

Exemple : comment calculer le 1 000 000e terme de la suite de Fibonacci ?

suite définie par : $F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad$ et $\quad \forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

1. utiliser directement la définition par récurrence
2. garder un tableau de toutes les premières valeurs
3. garder seulement les deux dernières valeurs
4. utiliser :

$$\forall n \geqslant 1, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

```
def fibo_4(n) :
  M = puissance_matrice_2_2 ([ [1, 1], [1, 0] ], n-1)
  return M[0][0]
```

Exemple : comment calculer le 1 000 000^{e} terme de la suite de Fibonacci ?

suite définie par : $F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

1. utiliser directement la définition par récurrence
2. garder un tableau de toutes les premières valeurs
3. garder seulement les deux dernières valeurs
4. utiliser :

$$\forall n \geqslant 1, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

Exemple : comment calculer le 1 000 000^{e} terme de la suite de Fibonacci ?

suite définie par : $F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad$ et $\quad \forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

1. utiliser directement la définition par récurrence
2. garder un tableau de toutes les premières valeurs
3. garder seulement les deux dernières valeurs
4. utiliser :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

Lemme : les 4 algorithmes sont corrects

Exemple : comment calculer le 1 000 000e terme de la suite de Fibonacci ?

suite définie par : $F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad$ et $\quad \forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

1. utiliser directement la définition par récurrence
2. garder un tableau de toutes les premières valeurs
3. garder seulement les deux dernières valeurs
4. utiliser :

$$\forall n \geqslant 1, \ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

Lemme : les 4 algorithmes sont corrects

Quelle est la meilleure méthode ?

Complexité en espace

= quantité de mémoire nécessaire pour effectuer le calcul

Complexité en espace

= quantité de mémoire nécessaire pour effectuer le calcul

mémoire *incompressible* : nécessaire pour stocker les données et le résultat

mémoire *auxiliaire* : pour les calculs intermédiaires

Complexité en espace

= quantité de mémoire nécessaire pour effectuer le calcul

mémoire *incompressible* : nécessaire pour stocker les données et le résultat

mémoire *auxiliaire* : pour les calculs intermédiaires

pour comparer entre eux des algorithmes résolvant le même problème, seule la mémoire *auxiliaire* est pertinente

Complexité en espace – exemple

```
def fibo_2(n) :
  if n <= 0 : return 0
  liste = [0, 1] + [0] * (n-1)
  for i in range(2, n+1) :
    liste[i] = liste[i-1] + liste[i-2]
  return liste[n]
```

utilise un ***tableau de*** n ***(grands) entiers*** pour en calculer un seul (plus un (petit [1]) entier comme indice de boucle)

1. petit = ***valeur*** de l'ordre de n *vs* grand = de l'ordre de n ***chiffres***

Complexité en espace – exemple

```
def fibo_2(n) :
  if n <= 0 : return 0
  liste = [0, 1] + [0] * (n-1)
  for i in range(2, n+1) :
    liste[i] = liste[i-1] + liste[i-2]
  return liste[n]
```

utilise un ***tableau de n (grands) entiers*** pour en calculer un seul (plus un (petit [1]) entier comme indice de boucle)

donc la place nécessaire est (à peu près) la somme des tailles des n valeurs calculées, donc (supérieure à) $\sum_{i=0}^{n} \frac{i}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$ bits

(soit à peu près 250 000 000 000 bits pour $n = 1\,000\,000$, c'est-à-dire ***30 Go***)

1. petit = ***valeur*** de l'ordre de n *vs* grand = de l'ordre de n ***chiffres***

Complexité en espace – exemple

```
def fibo_3(n) :
  if n <= 0 : return 0
  previous, last = 0, 1
  for i in range(2, n+1) :
    previous, last = last, previous + last
  return last
```

utilise seulement une variable auxiliaire de type (grand) entier
(plus un (petit) entier comme indice de boucle)

Complexité en espace – exemple

```
def fibo_3(n) :
  if n <= 0 : return 0
  previous, last = 0, 1
  for i in range(2, n+1) :
    previous, last = last, previous + last
  return last
```

utilise seulement une variable auxiliaire de type (grand) entier (plus un (petit) entier comme indice de boucle)

$\Longrightarrow$ on peut envisager d'utiliser `fibo_3` pour calculer F_{10^6}, contrairement à `fibo_2`

Complexité en temps

= temps nécessaire pour mener le calcul à son terme

Complexité en temps

= temps nécessaire pour mener le calcul à son terme

plus difficile à quantifier précisément, essentiellement car ce temps dépend de la machine utilisée

Complexité en temps

= temps nécessaire pour mener le calcul à son terme

plus difficile à quantifier précisément, essentiellement car ce temps dépend de la machine utilisée

convention : on estime ce temps par le ***nombre d'opérations élémentaires effectuées*** : sur une machine donnée, le temps d'exécution sera (à peu près) proportionnel à ce nombre

opération élémentaire = opération dont le temps d'exécution peut être considéré comme constant

exemple : affectation, comparaison, opération arithmétique (sur des nombres de taille bornée)...

Complexité et ordres de grandeur

Nombre de cycles effectués par un processeur monocœur à 1 GHz :

en 1 seconde	10^9
en 1 heure	$3 \cdot 10^{12}$
en 1 jour	$9 \cdot 10^{13}$
en 1 an	$3 \cdot 10^{16}$
en $13,8 \cdot 10^9$ années	$4 \cdot 10^{26}$

(pour un quadricœur à 2.5GHz, rajouter juste un zéro)

Complexité et ordres de grandeur

n	10	100	10^3	10^6	10^9	10^{12}
$\log_2 n$	4	7	10	20	30	40
$10n$	100	10^3	10^4	10^7	10^{10}	10^{13}
$n \log_2 n$	34	665	10^4	$2 \cdot 10^7$	$3 \cdot 10^{10}$	$4 \cdot 10^{13}$
n^2	100	10^4	10^6	10^{12}	10^{18}	10^{24}
n^3	10^3	10^6	10^9	10^{18}	10^{27}	10^{36}
2^n	10^3	10^{30}	10^{301}	...	...	...

(rappel : en 1 an, un processeur à 1 GHz effectue $3 \cdot 10^{16}$ cycles)

Complexité et ordres de grandeur

n	10	100	10^3	10^6	10^9	10^{12}
$\log_2 n$	4	7	10	20	30	40
$10n$	100	10^3	10^4	10^7	10^{10}	10^{13}
$n \log_2 n$	34	665	10^4	$2 \cdot 10^7$	$3 \cdot 10^{10}$	$4 \cdot 10^{13}$
n^2	100	10^4	10^6	10^{12}	10^{18}	10^{24}
n^3	10^3	10^6	10^9	10^{18}	10^{27}	10^{36}
2^n	10^3	10^{30}	10^{301}	...	...	...

(rappel : en 1 an, un processeur à 3.2 GHz effectue 10^{17} cycles)

Complexité et ordres de grandeur

n	10	100	10^3	10^6	10^9	10^{12}
$\log_2 n$	4	7	10	20	30	40
$10n$	100	10^3	10^4	10^7	10^{10}	10^{13}
$n \log_2 n$	34	665	10^4	$2 \cdot 10^7$	$3 \cdot 10^{10}$	$4 \cdot 10^{13}$
n^2	100	10^4	10^6	10^{12}	10^{18}	10^{24}
n^3	10^3	10^6	10^9	10^{18}	10^{27}	10^{36}
2^n	10^3	10^{30}	10^{301}	...	...	...

(rappel : en 1 an, un processeur à 3.2 GHz effectue 10^{17} cycles)

Notations utilisées

$f \in O(g) \iff$ f « ne grandit *pas plus vite* que » g (« *grand O* »)

$f \in \Omega(g) \iff$ f « grandit *au moins aussi vite* que » g (« *Oméga* »)

$f \in \Theta(g) \iff$ f et g « grandissent à la même vitesse » (« *Théta* »)

Notations utilisées

$f \in O(g) \iff f$ « ne grandit *pas plus vite* que » g (« *grand O* »)

« (pour $m \leqslant n$ assez grands) si $g(n) \leqslant \alpha g(m)$, alors $f(n) \leqslant \alpha f(m)$ »

$f \in \Omega(g) \iff f$ « grandit *au moins aussi vite* que » g (« *Oméga* »)

$f \in \Theta(g) \iff f$ et g « grandissent à la même vitesse » (« *Théta* »)

Notations utilisées

$f \in O(g) \iff f$ « ne grandit *pas plus vite* que » g (« *grand O* »)

« (pour $m \leqslant n$ assez grands) si $g(n) \leqslant \alpha g(m)$, alors $f(n) \leqslant \alpha f(m)$ »

$f \in \Omega(g) \iff f$ « grandit *au moins aussi vite* que » g (« *Oméga* »)

« (pour $m \leqslant n$ assez grands) si $g(n) \geqslant \alpha g(m)$, alors $f(n) \geqslant \alpha f(m)$ »

$f \in \Theta(g) \iff f$ et g « grandissent à la même vitesse » (« *Théta* »)

Définition (grand O, grand Oméga, grand Théta)

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On dit que :

- $f \in O(g)$ (ou $f(n) \in O(g(n))$, ou $f(n) = O(g(n))$) si :

$$\exists c > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\quad \forall n \geqslant n_0,\quad f(n) \leqslant c \cdot g(n)$$

- $f \in \Omega(g)$ (ou $f(n) \in \Omega(g(n))$) si :

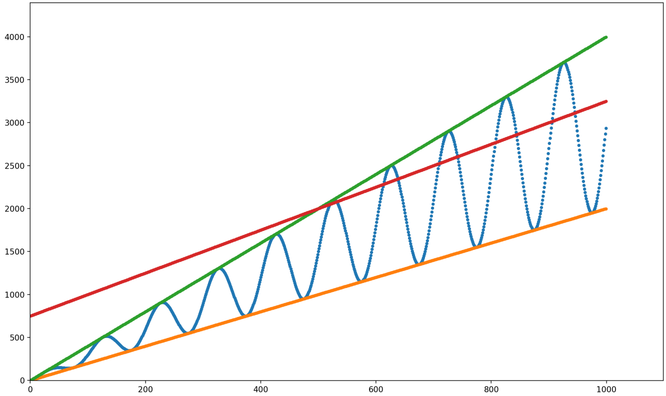
$$\exists c > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\quad \forall n \geqslant n_0,\quad f(n) \geqslant c \cdot g(n)$$

- $f \in \Theta(g)$ (ou $f(n) \in \Theta(g(n))$) si :

$$f \in O(g) \quad \text{et} \quad f \in \Omega(g)$$

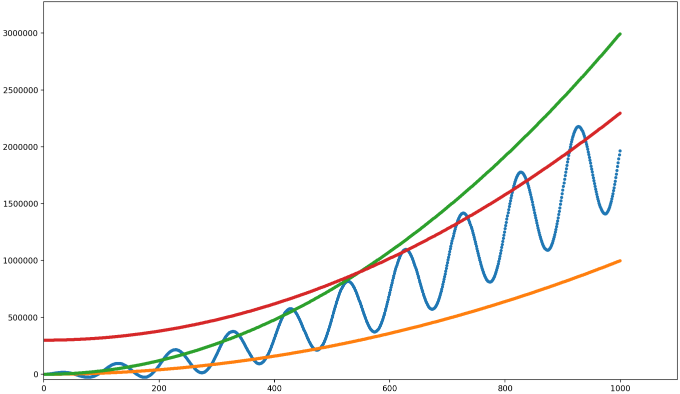
autrement dit :

$$\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\quad \forall n \geqslant n_0,\quad c_1 \cdot g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 \cdot g(n)$$



Fonctions appartenant à $\Theta(n)$

Exemples



Fonctions appartenant à $\Theta(n^2)$

Complexité des calculs de F_n

utilisation naïve de la récurrence $\Longrightarrow$ $\Theta(\varphi^n)$ additions

```
def fibo_1(n) :
  if n <= 2 : return 1
  return fibo_1(n-1) + fibo_1(n-2)
```

Complexité des calculs de F_n

utilisation naïve de la récurrence $\Longrightarrow$ $\Theta(\varphi^n)$ additions

calcul itératif des n premières valeurs $\Longrightarrow$ $\Theta(n)$ additions

```
def fibo_3(n) :
  previous, last = 1, 1
  for i in range(2, n+1) :
    previous, last = last, previous + last
  return last
```

Complexité de l'exponentiation binaire

```
def puissance(a, n) :   # version récursive
  if n == 0 : return 1         # une comparaison
  tmp = puissance(a, n//2)     # une division par 2, un appel récursif
  carre = tmp * tmp            # une multiplication
  if n%2 == 0 : return carre   # une comparaison modulo 2
  else : return a * carre      # une multiplication
```

Complexité de l'exponentiation binaire

```
def puissance(a, n) :   # version récursive
  if n == 0 : return 1        # une comparaison
  tmp = puissance(a, n//2)    # une division par 2, un appel récursif
  carre = tmp * tmp           # une multiplication
  if n%2 == 0 : return carre  # une comparaison modulo 2
  else : return a * carre     # une multiplication
```

Preuve de correction : par récurrence (forte) sur n

- cas de base : si $n = 0$, $\texttt{puissance}(a, n)$ retourne $a^n = 1$ pour tout a (convention usuelle pour 0^0)
- hérédité : soit $n \geqslant 1$ t.q. $\texttt{puissance}(a, k)$ retourne a^k pour tout $k < n$
  comme $n//2 < n$, $\texttt{puissance}(a, n//2)$ retourne $a^{n//2}$, donc :
  - si n est pair : $\texttt{puissance}(a, n)$ retourne $a^{n/2} \times a^{n/2} = a^n$
  - si n est impair : $\texttt{puissance}(a, n)$ retourne $a^{(n-1)/2} \times a^{(n-1)/2} \times a = a^n$

donc $\texttt{puissance}(a, n)$ retourne a^n pour tout n

Complexité de l'exponentiation binaire

```
def puissance(a, n) :   # version récursive
  if n == 0 : return 1         # une comparaison
  tmp = puissance(a, n//2)     # une division par 2, un appel récursif
  carre = tmp * tmp            # une multiplication
  if n%2 == 0 : return carre   # une comparaison modulo 2
  else : return a * carre      # une multiplication
```

Calcul de complexité :

- chaque appel récursif effectue (au plus) 2 multiplications, une division par 2, une comparaison et une comparaison modulo 2
- à chaque appel récursif, le paramètre n est divisé par 2 (avec arrondi inférieur), avec $n = 0$ comme cas terminal ; donc le nombre total d'appels est $h + 2$ si $n = 2^h$, et plus généralement si $2^h \leqslant n < 2^{h+1}$, c'est-à-dire si $h = \lfloor \log_2 n \rfloor$.

$\Longrightarrow$ $\Theta(\log_2 n)$ multiplications de la forme $a^k \cdot a^\ell$, $k \in \{1, \ell\}$

Complexité de l'exponentiation binaire

```
def puissance(a, n) :   # version itérative
  res = 1
  while n != 0 :          # une comparaison
    if n%2 == 1 :         # une comparaison modulo 2
      res *= a            # une multiplication
    a *= a                # une multiplication
    n //= 2               # une division par 2
  return res
```

Preuve de correction : en montrant « `res * a**n` est constant »
Considérons un tour de boucle, et notons r_d, a_d, n_d les valeurs des variables au début du tour, et r_f, a_f, n_f leurs valeurs à la fin du tour.

- si n_d est pair, $r_f = r_d$, $a_f = a_d^2$ et $n_f = n_d/2$, donc $a_f^{n_f} = a_d^{2 \times n_d/2} = a_d^{n_d}$, et $r_f \times a_f^{n_f} = r \times a_d^{n_d}$;
- si n_d est impair, $r_f = r_d \times a_d$, $a_f = a_d^2$ et $n_f = (n_d - 1)/2$, donc $a_f^{n_f} = a_d^{n_d - 1}$, et $r_f \times a_f^{n_f} = r \times a \times a_d^{n_d - 1} = r \times a_d^{n_d}$;

Donc `res * a**n` est un invariant de la boucle. Notons a et n les valeurs initiales des paramètres. En début de boucle, `res` vaut 1, donc `res * a**n` vaut a^n. En fin de boucle, la variable `n` vaut 0, donc `a**n` vaut 1, et `res` contient donc a^n.

Complexité de l'exponentiation binaire

```
def puissance(a, n) :   # version itérative
  res = 1
  while n != 0 :         # une comparaison
    if n%2 == 1 :        # une comparaison modulo 2
      res *= a           # une multiplication
    a *= a               # une multiplication
    n //= 2              # une division par 2
  return res
```

Calcul de complexité :

- chaque tour de boucle effectue (au plus) 2 multiplications, une division par 2, une comparaison et une comparaison modulo 2
- à chaque tour de boucle, le paramètre n est divisé par 2 (avec arrondi inférieur), avec $n = 1$ comme dernier cas ; donc le nombre total de tours est $h + 1$ si $n = 2^h$, et plus généralement si $2^h \leqslant n < 2^{h+1}$, c'est-à-dire si $h = \lfloor \log_2 n \rfloor$.

$\Longrightarrow$ $\Theta(\log_2 n)$ multiplications de la forme $a^k \cdot a^\ell$, $k \in \{1, \ell\}$

Complexité de l'exponentiation binaire

Complexité

$\Theta(\log_2 n)$ multiplications de la forme $a^k \cdot a^\ell$

Complexité de l'exponentiation binaire

Complexité

$\Theta(\log_2 n)$ multiplications de la forme $a^k \cdot a^\ell$

si ces multiplications ont un coût constant, *i.e.* si les opérandes ont une taille constante, complexité en $\Theta(\log_2 n)$

c'est le cas avec l'arithmétique modulaire ou l'arithmétique flottante utilisées usuellement : tous les nombres sont codés sur exactement 32 (ou 64) bits, donc le coût d'une multiplication est constant

Complexité de l'exponentiation binaire

Complexité

$\Theta(\log_2 n)$ multiplications de la forme $a^k \cdot a^\ell$

si ces multiplications ont un coût constant, *i.e.* si les opérandes ont une taille constante, complexité en $\Theta(\log_2 n)$

sinon il faut tenir compte du coût de ces multiplications ; par exemple en arithmétique exacte sur des entiers :

valeur	taille (en bits)	coût du calcul naïf du carré
a	$\log_2 a$	$\Theta((\log_2 a)^2)$
a^k	$k \cdot \log_2 a$	$\Theta(k^2 \cdot (\log_2 a)^2)$

Complexité des calculs de F_n

utilisation naïve de la récurrence $\Longrightarrow \Theta(\varphi^n)$ additions

calcul itératif des n premières valeurs $\Longrightarrow \Theta(n)$ additions

calcul de $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1}$ $\Longrightarrow \Theta(\log_2 n)$ multiplications...
de matrices 2×2
(chacune impliquant 4 additions et 8 multiplications d'entiers)

Complexité des calculs de F_n

utilisation naïve de la récurrence $\Longrightarrow$ $\Theta(\varphi^n)$ additions

calcul itératif des n premières valeurs $\Longrightarrow$ $\Theta(n)$ additions

calcul de $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1}$ $\Longrightarrow$ $\Theta(\log_2 n)$ multiplications… *de matrices* 2×2

(chacune impliquant 4 additions et 8 multiplications d'entiers)

MAIS… comme $F_n \in \Theta(\varphi^n)$, les opérations arithmétiques se font sur des entiers de ***taille*** $\Theta(n)$ (c'est-à-dire de $\Theta(n)$ chiffres)

$\Longrightarrow$ additions en $\Theta(n)$ opérations élémentaires, multiplications en $O(n^2)$ (coût de l'algo naïf)