Module EA4 – Éléments d'Algorithmique II
Outils pour l'analyse des algorithmes

Dominique Poulalhon
dominique.poulalhon@irif.fr

Université Paris Diderot
L2 Informatique & DL Bio-Info, Jap-Info, Math-Info
Année universitaire 2021-2022

Organisation du module

Emploi du temps

- Cours : 2h par semaine, mercredi ***14h-16h***, amphi 2A
  (naturellement) aussi obligatoire que les TD et TP
- TD : 2h par semaine
- TP : 2h par quinzaine
  à partir du 25 janvier (la semaine prochaine, donc)

Communication

Responsable du cours : Dominique Poulalhon

`dominique.poulalhon@irif.fr`

Chargés de TD-TP

- Groupe INFO 1 : Mikaël Rabie — `mikael.rabie@irif.fr`
- Groupe INFO 2 : Roberto Mantaci — `mantaci@irif.fr`
- Groupe INFO 3 : Matthieu Picantin — `picantin@irif.fr`
- Groupe INFO 4 : Arthur Jaquard — `ajaquard@irif.fr`
- Groupe INFO 5 : Vincent Cheval — `vincent.cheval@inria.fr`
- Groupe MI 1 : Yoann Dufresne — `yoann.dufresne@pasteur.fr`
- Groupe MI 2 : Anne Micheli — `anne.micheli@irif.fr`

Communication

Responsable du cours : Dominique Poulalhon

`dominique.poulalhon@irif.fr`

Chargés de TD-TP

- Groupe INFO 1 : Mikaël Rabie `mikael.rabie@irif.fr`
- Groupe INFO 2 : Roberto Mantaci `mantaci@irif.fr`
- Groupe INFO 3 : Matthieu Picantin `picantin@irif.fr`
- Groupe INFO 4 : Arthur Jaquard `ajaquard@irif.fr`
- Groupe INFO 5 : Vincent Cheval `vincent.cheval@inria.fr`
- Groupe MI 1 : Yoann Dufresne `yoann.dufresne@pasteur.fr`
- Groupe MI 2 : Anne Micheli `anne.micheli@irif.fr`

Pour nous écrire, toujours mentionner `[EA4]` dans le sujet

Communication

Responsable du cours : Dominique Poulalhon

`dominique.poulalhon@irif.fr`

Chargés de TD-TP

- Groupe INFO 1 : Mikaël Rabie `mikael.rabie@irif.fr`
- Groupe INFO 2 : Roberto Mantaci `mantaci@irif.fr`
- Groupe INFO 3 : Matthieu Picantin `picantin@irif.fr`
- Groupe INFO 4 : Arthur Jaquard `ajaquard@irif.fr`
- Groupe INFO 5 : Vincent Cheval `vincent.cheval@inria.fr`
- Groupe MI 1 : Yoann Dufresne `yoann.dufresne@pasteur.fr`
- Groupe MI 2 : Anne Micheli `anne.micheli@irif.fr`

Pour nous écrire, toujours mentionner `[EA4]` dans le sujet

Un site Moodle pour les annonces, les énoncés et les rendus de TP donc : ***Inscrivez-vous ! (dans le bon groupe)***

Modalités de contrôle des connaissances

Session 1 : Contrôle Continu Intégral, avec a priori :

- un contrôle sur table à mi-semestre,
- deux évaluations via moodle,
- un contrôle final sur table qui comptera pour 50%.

Session 2 : Examen

Thème du cours

algorithmique = « conception et analyse des algorithmes »

Thème du cours

algorithmique = « conception et analyse des *algorithmes* »

Thème du cours

algorithmique = « conception et analyse des *algorithmes* »

algorithme = « méthode (systématique) de résolution d'un problème »

Thème du cours

algorithmique = « conception et analyse des ***algorithmes*** »

algorithme = « méthode (systématique) de résolution d'un problème »

concept non limité à l'informatique – d'ailleurs, de nombreux algorithmes ont été décrits bien avant l'invention des ordinateurs :

- des algorithmes de calcul
  (opérations arithmétiques, approximation de π, de $\sqrt{2}$...)

Thème du cours

algorithmique = « conception et analyse des ***algorithmes*** »

algorithme = « méthode (systématique) de résolution d'un problème »

concept non limité à l'informatique – d'ailleurs, de nombreux algorithmes ont été décrits bien avant l'invention des ordinateurs :

- des algorithmes de calcul
  (opérations arithmétiques, approximation de π, de $\sqrt{2}$...)
- des constructions géométriques
  (milieu d'un segment, triangle équilatéral, droites parallèles, centre d'un cercle, pentagone régulier...)

algorithmique = « conception et analyse des ***algorithmes*** »

algorithme = « méthode (systématique) de résolution d'un problème »

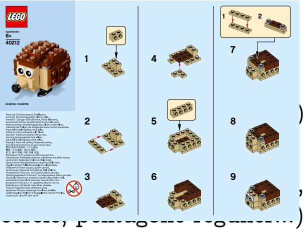
concept non limité à l'informatique – d'ailleurs, de nombreux algorithmes ont été décrits bien avant l'invention des ordinateurs :

- des algorithmes de calcul
  (opérations arithmétiques, approximation de π, de $\sqrt{2}$...)
- des constructions géométriques
  (milieu d'un segment, triangle les,
  centre d'u ...)
- des recettes de cuisine

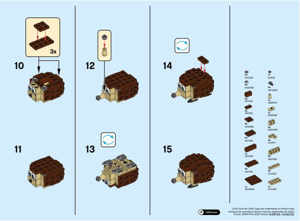
algorithmique = « conception et analyse des ***algorithmes*** »

algorithme = « méthode (systématique) de résolution d'un problème »

concept non limité à l'informatique – d'ailleurs,
ont été décrits bien avant l'invention des ordina



- des algorithmes de calcul
  (opérations arithmétiques, ap)
- des constructions géométriques
  (milieu d'un segment, triangle é ,
  centre d'un)
- des recettes de cuisine
- des manuels de construction…



Thème du cours

algorithmique = « conception et analyse des ***algorithmes*** »

algorithme = « méthode (systématique) de résolution d'un problème »

concept non limité à l'informatique – d'ailleurs, de nombreux algorithmes ont été décrits bien avant l'invention des ordinateurs :

- des algorithmes de calcul
  (opérations arithmétiques, approximation de π, de $\sqrt{2}$...)
- des constructions géométriques
  (milieu d'un segment, triangle équilatéral, droites parallèles, centre d'un cercle, pentagone régulier...)
- des recettes de cuisine
- des manuels de construction...

mais le concept a pris une importance particulière avec l'apparition de machines capables d'exécuter *fidèlement* et *rapidement* une suite d'opérations prédéfinie

algorithmique = « conception et analyse des algorithmes »

algorithme = « méthode (systématique) de ***résolution*** d'un problème »

Étymologie : Muhammad Ibn Mūsā al-Khuwārizmī

mathématicien persan du début du 9e siècle

« *Kitābu 'l-mukhtasar fī hisābi 'l-jabr wa'l-muqb̄alah* » ou « *Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison* » : considéré comme le premier manuel d'algèbre, explique comment résoudre les équations du second degré

traduit en latin et diffusé en Europe à partir du 12e siècle

(c'est aussi grâce à un de ses livres que se répand la notation positionnelle décimale venue d'Inde)

algorithmique = « conception et analyse des algorithmes »

algorithme = « méthode (systématique) de ***résolution*** d'un problème »

Étymologie : Muhammad Ibn Mūsā al-

mathématicien persan du début du 9e siècle
« *Kitābu 'l-mukhtasar fī hisābi 'l-jabr wa'l-muqb*
calcul par la restauration et la comparaison » : c
premier manuel d'algèbre, explique comment résou
second degré
traduit en latin et diffusé en Europe à partir du 12
(c'est aussi grâce à un de ses livres que se répand l
décimale venue d'Inde)

Thème du cours

algorithmique = « conception et analyse des algorithmes »

algorithme = « méthode (systématique) de ***résolution*** d'un problème »

Étymologie : Muhammad Ibn Mūsā al-Khuwārizmī

mathématicien persan du début du 9e siècle
« *Kitābu 'l-mukhtasar fī hisābi 'l-jabr wa'l-muqb̄alah* » ou « *Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison* » : considéré comme le premier manuel d'algèbre, explique comment résoudre les équations du second degré
traduit en latin et diffusé en Europe à partir du 12e siècle
(c'est aussi grâce à un de ses livres que se répand la notation positionnelle décimale venue d'Inde)

le terme ***algorithme*** est d'abord utilisé pour désigner les méthodes (de calcul) utilisant des chiffres, par opposition au ***calcul*** traditionnel (du latin *calculus*, petit caillou) avec des abaques

Thème du cours

algorithmique = « conception et analyse des algorithmes »

algorithme = « méthode (systématique) de ***résolution*** d'un problème »

Thème du cours

algorithmique = « conception et analyse des algorithmes »

algorithme = « méthode (systématique) de ***résolution*** d'un problème »

trois axes d'étude :

- conception
- preuve de correction
- étude de l'efficacité

Thème du cours

algorithmique = « conception et analyse des algorithmes »

algorithme = « méthode (systématique) de ***résolution*** d'un problème »

trois axes d'étude :

- conception
- preuve de correction : un algorithme est ***correct*** si, pour chaque entrée, il termine en produisant la bonne sortie
- étude de l'efficacité

Thème du cours

algorithmique = « conception et analyse des algorithmes »

algorithme = « méthode (systématique) de ***résolution*** d'un problème »

trois axes d'étude :

- conception
- preuve de correction : un algorithme est ***correct*** si, pour chaque entrée, il termine en produisant la bonne sortie
- étude de l'efficacité : les ressources nécessaires (temps, mémoire) sont-elles raisonnables ? Est-il possible de faire mieux ?

Thème du cours

algorithmique = « conception et analyse des algorithmes »

algorithme = « méthode (systématique) de ***résolution*** d'un problème »

trois axes d'étude :

- conception : y a-t-il des ***techniques générales*** ?
- preuve de correction : un algorithme est ***correct*** si, pour chaque entrée, il termine en produisant la bonne sortie
- étude de l'efficacité : les ressources nécessaires (temps, mémoire) sont-elles raisonnables ? Est-il possible de faire mieux ?

Thème du cours

algorithmique = « conception et analyse des algorithmes »

algorithme = « méthode (systématique) de ***résolution*** d'un problème »

trois axes d'étude :

- conception : y a-t-il des ***techniques générales*** ?
- preuve de correction : un algorithme est ***correct*** si, pour chaque entrée, il termine en produisant la bonne sortie
- étude de l'efficacité : les ressources nécessaires (temps, mémoire) sont-elles raisonnables ? Est-il possible de faire mieux ?

(et au passage, on apprendra un peu de Python, parce que c'est un joli langage particulièrement adapté à l'algorithmique)

Exemple : les opérations arithmétiques

Addition de deux entiers :

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 3 & 5 & 7 \\ + & 2 & 4 & 6 & 8 \\ \hline \end{array}$$

Exemple : les opérations arithmétiques

Addition de deux entiers :

$$\begin{array}{ccccc} & & & 1 & \\ & 1 & 3 & 5 & 7 \\ + & 2 & 4 & 6 & 8 \\ \hline & & & & 5 \end{array}$$

Exemple : les opérations arithmétiques

Addition de deux entiers :

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & 1 & \\
 & 1 & 3 & 5 & 7 \\
+ & 2 & 4 & 6 & 8 \\
\hline
 & & & 2 & 5
\end{array}
$$

Exemple : les opérations arithmétiques

Addition de deux entiers :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\
 & 1 & 3 & 5 & 7 \\
+ & 2 & 4 & 6 & 8 \\
\hline
 & & 8 & 2 & 5
\end{array}$$

Exemple : les opérations arithmétiques

Addition de deux entiers :

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\
 & 1 & 3 & 5 & 7 \\
+ & 2 & 4 & 6 & 8 \\
\hline
 & 3 & 8 & 2 & 5
\end{array}
$$

Exemple : les opérations arithmétiques

Addition de deux entiers :

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & 1 & \\ & 1 & 3 & 5 & 7 \\ + & 2 & 4 & 6 & 8 \\ \hline & 3 & 8 & 2 & 5 \end{array}$$

```
def addition(nb1, nb2) :
# nb1 et nb2 entiers représentés par des tableaux de chiffres décimaux
# (en commençant par les unités)
  res = []
  retenue = 0
  # parcours parallèle des deux tableaux :
  for (chiffre1, chiffre2) in zip(nb1, nb2) :
    tmp = chiffre1 + chiffre2 + retenue
    retenue = tmp//10   # division euclidienne (en python3)
    res.append(tmp%10)          # ajout à la fin du tableau
  return res + [retenue]      # concaténation de 2 tableaux
```

Exemple : les opérations arithmétiques

Addition de deux entiers :

$$\begin{array}{rcccc} & & 1 & 1 & \\ & 1 & 3 & 5 & 7 \\ + & 2 & 4 & 6 & 8 \\ \hline & 3 & 8 & 2 & 5 \end{array}$$

correction : en montrant l'invariant :

« après i tours de boucle, $\texttt{res} = n_1 + n_2$ *modulo* 10^i »

Exemple : les opérations arithmétiques

Addition de deux entiers :

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & 1 & \\ & 1 & 3 & 5 & 7 \\ + & 2 & 4 & 6 & 8 \\ \hline & 3 & 8 & 2 & 5 \end{array}$$

correction : en montrant l'invariant :

« après i tours de boucle, $\texttt{res} = n_1 + n_2$ *modulo* 10^i »

complexité en temps : autant d'additions ***élémentaires*** que de chiffres dans l'écriture décimale des entiers.

$\Longrightarrow$ « complexité ***linéaire*** » – sous-entendu « en la ***taille*** ℓ des données », la taille étant ici le nombre de chiffres décimaux : dire que n_1 et n_2 sont de taille ℓ signifie que $n_1, n_2 \in O(10^\ell)$, ou encore que $\ell = 1 + \lfloor \max(\log_{10} n_1, \log_{10} n_2) \rfloor$

Exemple : les opérations arithmétiques

Multiplication de deux entiers (1)

```
def multiplication_naive(nb1, nb2) :
# nb1   représenté par un tableau de chiffres
# nb2   un entier
  res = nb1[:]    # copie du tableau nb1
  for i in range(2, nb2+1) : # de i=2 à i=nb2, donc nb2-1 tours
    res = addition(res, nb1)
  return res
```

correction : en montrant l'invariant :

$$\text{« après l'étape } i\text{, } \mathtt{res} = i \times n_1 \text{ »}$$

Exemple : les opérations arithmétiques

Multiplication de deux entiers (1)

```
def multiplication_naive(nb1, nb2) :
# nb1   représenté par un tableau de chiffres
# nb2   un entier
  res = nb1[:]    # copie du tableau nb1
  for i in range(2, nb2+1) : # de i=2 à i=nb2, donc nb2-1 tours
    res = addition(res, nb1)
  return res
```

correction : en montrant l'invariant :

« après l'étape i, $\mathtt{res} = i \times n_1$ »

complexité en temps : n_2 (-1) additions ***de (grands) entiers***, chacune étant de coût linéaire ***en la taille du résultat*** $n_1 n_2$ – donc en $\log(n_1 n_2) = \log(n_1) + \log(n_2)$

$\Longrightarrow$ complexité en $O(n_2 \times \log(n_1 n_2))$,

c'est-à-dire $O(\ell \times 10^{\ell})$ si les deux entiers sont de taille ℓ

Exemple : les opérations arithmétiques

Multiplication de deux entiers (2)

```
def multiplication_par_un_chiffre(nb1, chiffre2) :
# nb1  représenté par un tableau de chiffres
  res = []
  retenue = 0
  for chiffre1 in nb1 :
    tmp = chiffre1 * chiffre2 + retenue
    retenue = tmp//10     # division euclidienne
    res.append(tmp%10)
  return res + [retenue]
```

correction : en montrant l'invariant :

« après i tours de boucle, res $\equiv n_1 \times \mathit{chiffre}_2 \mod 10^i$ »

complexité en temps : un tour de boucle par chiffre de n_1, de coût constant

$\Longrightarrow$ complexité en $O(\log(n_1)) = O(\ell)$ si les nombres sont de taille ℓ

Exemple : les opérations arithmétiques

Multiplication de deux entiers (2)

```
def multiplication(nb1, nb2) :
# nb1, nb2  représentés par des tableaux de chiffres
  res = []
  # parcours du tableau avec itération sur les couples
  # (indice, contenu) de chaque case
  for (i, chiffre2) in enumerate(nb2) :
    tmp = multiplication_par_un_chiffre(nb1, chiffre2)
    res = addition(res, [0]*i + tmp)
  return res
```

correction : en montrant l'invariant :

« après l'étape i, $\texttt{res} \equiv n_1 \times n_2 \mod 10^i$ »

complexité en temps : un tour de boucle par chiffre de n_2, chacun de complexité linéaire en la taille du résultat

$\Longrightarrow$ complexité en $O(\ell^2)$ si les nombres sont de taille ℓ

Exemple : les opérations arithmétiques

Puissance (d'un entier par exemple) (1)

```
def puissance_naive(nb1, nb2) :
# nb1 un élément supportant la multiplication, nb2 un entier
  res = 1
  for i in range(nb2) :
    res *= nb1
  return res
```

correction : en montrant l'invariant :

« après i tours de boucle, res $= n_1^i$ »

Exemple : les opérations arithmétiques

Puissance (d'un entier par exemple) (1)

```
def puissance_naive(nb1, nb2) :
# nb1 un élément supportant la multiplication, nb2 un entier
  res = 1
  for i in range(nb2) :
    res *= nb1
  return res
```

correction : en montrant l'invariant :

« après i tours de boucle, $\texttt{res} = n_1^i$ »

complexité : cet algorithme effectue n_2 multiplications *entre* n_1 *et un très grand entier* : la taille de $n_1^{n_2}$ est $n_2 \log n_1$. Donc si n_1, n_2 sont de l'ordre de 10^ℓ, les dernières multiplications ont, par la méthode précédente, une complexité en $O(\ell^2 \times 10^\ell)$

$\implies$ $O(\ell^2 \times 10^{2\ell})$ si n_1, n_2 entiers de taille ℓ

Exemple : les opérations arithmétiques

Puissance (2) : *l'exponentiation binaire*

```
def puissance(nb1, nb2) :
# nb1 un élément supportant la multiplication, nb2 un entier
  if nb2 == 0 : return 1
  tmp = puissance(nb1, nb2//2)
  carre = tmp * tmp
  if nb2%2 == 0 : return carre
  else : return nb1 * carre
```

correction ?

Exemple : les opérations arithmétiques

Puissance (2) : ***l'exponentiation binaire***

```
def puissance(nb1, nb2) :
# nb1 un élément supportant la multiplication, nb2 un entier
  if nb2 == 0 : return 1
  tmp = puissance(nb1, nb2//2)
  carre = tmp * tmp
  if nb2%2 == 0 : return carre
  else : return nb1 * carre
```

correction ? par récurrence (forte) sur n_2

Exemple : les opérations arithmétiques

Puissance (2) : ***l'exponentiation binaire***

```
def puissance(nb1, nb2) :
# nb1 un élément supportant la multiplication, nb2 un entier
  if nb2 == 0 : return 1
  tmp = puissance(nb1, nb2//2)
  carre = tmp * tmp
  if nb2%2 == 0 : return carre
  else : return nb1 * carre
```

correction ? par récurrence (forte) sur n_2

complexité ?

Exemple : les opérations arithmétiques

Puissance (2) : ***l'exponentiation binaire***

```
def puissance(nb1, nb2) :
# nb1 un élément supportant la multiplication, nb2 un entier
  if nb2 == 0 : return 1
  tmp = puissance(nb1, nb2//2)
  carre = tmp * tmp
  if nb2%2 == 0 : return carre
  else : return nb1 * carre
```

correction ? par récurrence (forte) sur n_2

complexité ? chaque appel récursif nécessite 1 ou 2 multiplications, et le nombre d'appels est égal à $\lfloor \log_2 n_2 \rfloor + 1$,
donc $O(\ell)$ ***multiplications*** si n_2 est un entier de taille ℓ