

Feuille d'exercices 4

Exercice 1 : Dans \mathbb{R}^4 on considère $a_1 = (2, -2, 3, 1)$ et $a_2 = (-1, 4, -6, -2)$.

Trouver des vecteurs a_3 et a_4 tels que $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ est une base de \mathbb{R}^4 .

Exercice 2 : On considère dans \mathbb{R}^4 les vecteurs $e_1 = (1, 0, 1, 0)$, $e_2 = (-1, 1, 1, 1)$, $e_3 = (2, 3, 4, 0)$ ainsi que $f_1 = (-1, 2, -3, 1)$, $f_2 = (-1, 2, 1, 3)$, $f_3 = (-1, 2, 5, -1)$.

Extraire de $\{e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3\}$ une base de \mathbb{R}^4 .

Exercice 3 : Trouver une base de l'espace vectoriel défini par le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Exercice 4 : Pour chacun des sev suivants, donner une base parmi la famille génératrice donnée, la dimension et un système d'équations minimal. Compléter la base de chaque sev, s'il y a lieu, en une base de \mathbb{R}^n ($n = 3$ pour les questions 1, 2, 3, $n = 4$ pour les questions 4, 5).

- (1) $E = \text{Vect}((-1, 1, 1), (-1, 1, 2))$.
- (2) $F = \text{Vect}((2, -3, 1), (1, 2, -3), (3, -1, -2))$.
- (3) $G = \text{Vect}((1, 1, -2))$.
- (4) $H = \text{Vect}((2, -1, 2, 1), (-1, 3, 0, 1), (1, 2, 2, 2))$.
- (5) $K = \text{Vect}((-3, 1, 2, -1), (-3, 1, 2, 0))$.

Exercice 5 : Pour chacun des sev suivants de \mathbb{R}^3 , donner une base puis la dimension.

- (1) $E = \{(2x - y, x + y, -x + y), x, y \in \mathbb{R}\}$.
- (2) $F = \{(x + 2y, y - 2x, y - x), x, y \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 6 : Soit E_1 le sous-espace de \mathbb{R}^4 engendré par $\{(1, 3, 0, 4), (2, 0, 1, 2)\}$ et E_2 le sous-espace engendré par $\{(1, 1, 2, 3), (4, -1, 0, 2)\}$. E_1 et E_2 sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^4 ?

Exercice 7 : Soit E_1 et E_2 les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^4 engendrés respectivement par les vecteurs $\{(1, -1, 0, 1), (0, 2, 1, 0)\}$ et les vecteurs $\{(0, 6, -1, 4), (3, 3, 1, 5)\}$.

- (1) Donner une base de $E_1 + E_2$.
- (2) Déterminer un supplémentaire de $E_1 + E_2$ dans \mathbb{R}^4 .

Exercice 8 : Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 on considère l'ensemble E des (x, y, z, t) tels que $x + y + z + t = 0$ et l'ensemble F des (x, y, z, t) tels que $x = y = z = t$.

- (1) Montrer que E et F sont des sous-espaces supplémentaires dans \mathbb{R}^4 .
- (2) Déterminer des bases de E et de F .

Exercice 9 : Soit E le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par les vecteurs $(1, -1, 2, 3)$, $(1, 1, 2, 0)$ et $(3, -1, 6, -6)$, et F le sous-espace engendré par $(0, -2, 0, -3)$, $(1, 0, 1, 0)$.

- (1) Trouver des bases de $E, F, E \cap F, E + F$.
- (2) E et F sont-ils des sous-espaces supplémentaires dans \mathbb{R}^4 ?

Exercice 10 : Soit F le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par les vecteurs $(1, 1, 1, 1)$, $(1, -1, 1, -1)$ et $(1, 3, 1, 3)$ et G le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par les vecteurs $(1, 2, 0, 2)$, $(1, 2, 1, 2)$ et $(3, 1, 3, 1)$.

- (1) Trouver des bases de $F, G, F \cap G$ et $F + G$.
- (2) F et G sont-ils des sous-espaces supplémentaires dans \mathbb{R}^4 ?