L2 Informatique

Boughattas Sedki

U-Paris

27 Octobre 2021

Table des matières

Table des matières

Table des matières

Définition 1

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels, on appelle application linéaire de E dans F une application $f : E \to F$ tel que $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$ pour tous $(u, v) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. C'est un sous-espace vectoriel de F^E (l'ensemble de toute les applications de E dans F).

On appelle également *morphisme d'espaces vectoriels* une telle application linéaire.

- Une application linéaire bijective est appelée isomorphisme.
- Une application linéaire d'un espace vectoriel E dans lui-même est appelée endormorphisme.
- Un endomorphisme bijectif est appelé automorphisme.
- Une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est appelée forme linéaire.

Exemples 1

1. L'application nulle

$$\begin{array}{rccc} 0: & E & \to & F \\ & x & \mapsto & 0_F \end{array}$$

   est un morphisme d'espace vectoriel.

2. $$\begin{array}{l} f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y - 3z, -2x - y + z) \end{array}$$

   est une application linéaire.

1.
$$\begin{aligned} p_i : \mathbb{K}^n &\to \mathbb{K} \\ (a_1, \ldots, a_n) &\mapsto a_i \end{aligned}$$
est une forme linéaire.

2. L'application suivante est linéaire
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ u & \mapsto & uv = (u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

3. Si $Q \in \mathbb{K}[X]$ est fixé, l'application suivante est linéaire :
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & PQ \end{array}$$

1. Soit $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ alors $\forall n \geq 1$, l'application

$$\begin{array}{ccc} M_{n,p}(\mathbb{K}) & \to & M_{n,q}(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & AB \end{array}$$

est linéaire et l'application

$$\begin{array}{ccc} M_{q,n} & \to & M_{p,n} \\ A & \mapsto & BA \end{array}$$

également.

2. Les applications
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} D^1(I) & \to & \mathbb{R}^I \\ f & \mapsto & f' \end{array}$$
sont linéaires.

1. Si $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ l'application suivante est une forme linéaire.

$$\begin{array}{lcl} C^0([a,b],\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_a^b f(x)dx \end{array}$$

2. L'application de transposition est un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$\begin{array}{lcl} M_{n,p}(\mathbb{K}) & \rightarrow & M_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & {}^tA \end{array}$$

Définition 2

Soit E et F des espaces vectoriels de dimension finie. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots e_n)$ une base de E et $\mathcal{C}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m)$ une base de F. Alors si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, il existe, pour chaque $j \in \{1, \cdots, n\}$ des coefficients $a_{i,j}$ tels que $f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\varepsilon_i$ (ce sont les coefficients du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$). On note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ la matrice de $M_{m,n}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont les $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$.

Si $\dim(E) = 4$ et $\dim(F) = 3$ alors :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & f(e_4) \end{array} \\ Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = & \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{array} \end{array}$$

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}^3 &\to \mathbb{K}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x + y - z, -x + z) \end{aligned}$$

est une application linéaire.

Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^2$ alors :

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{array}$$

En effet, $f(x,y,z) = (x+y-z, -x+z)$.
Donc $f(e_1) = f(1,0,0) = (1,-1)$,
$f(e_2) = f(0,1,0) = (1,0)$ **et**
$f(e_3) = f(0,0,1) = (-1,1)$.

d'où

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{array} \end{array}$$

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 1

Si $(x_1, \cdots, x_n)$ sont les coordonnées du vecteur $u \in E$ dans la base $\mathcal{B}$ et $(y_1, \cdots, y_m)$ sont les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{C}$ alors

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$$
$$(x, y, z) \mapsto (x + y - z, -x + z)$$

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $u = (2, -1, 7)$ **alors** $f(u) = (-6, 5)$
puisque

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Définition 3

Si f est une application d'un ensemble E dans un ensemble F et G est une partie de E alors la restriction de f à G notée $f_{/G}$ est l'application de G dans F telle que $f_{/G}(x) = f(x)$ pour tout $x \in G$.

Proposition 2

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et G un sous espace vectoriel de E alors $f_{/G}$ la restriction de f à G est une application linéaire.

Proposition 3

Si f et g sont des applications linéaires de E dans F et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$:

- $\lambda f + \mu g$ est encore une application linéaire.
- Si f est un isomorphisme, sa bijection réciproque f^{-1} est également linéaire.
- Si $f \circ g$ est bien définie, alors $f \circ g$ est linéaire.

- Si, de plus, $h : F \to G$ est linéaire, alors on a :
  - $(f+g) \circ h = \ f \circ h + g \circ h$ et $f \circ (g+h) = \ f \circ g + f \circ h$;
  - $(\lambda f) \circ h = \ \lambda (f \circ h)$ et $f \circ (\lambda h) = \ \lambda (f \circ h)$.
- Si f est un endomorphisme, on peut définir f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots\ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

Définition 4

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. **On pose :**

$\mathbf{Im}(f) = \{f(x), x \in E\} = f(E)$.

$\mathbf{Ker}(f) = \{x \in E, f(x) = 0_F\}$.

Remarque 1

$\mathbf{Im} f = \{y \in F, \exists x \in E$ **avec** $f(x) = y\}$.

Proposition 4

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, alors

- $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.
- $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 5

$f \in \mathscr{L}(E,F)$ est :

- injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$;
- surjective si et seulement si $\mathrm{Im} f = F$.

Proposition 6

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

1. Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E, alors $\mathrm{Im} f = f(E) = \mathrm{Vect}(f(u_i))_{i\in I}$.
2. Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice d'un sous espace vectoriel G de E, alors $Im\, f_{/G} = f(G) = \mathrm{Vect}(f(u_i))_{i\in I}$.

Définition 5

Soit $f : E \to F$ **une application linéaire, on appelle rang de** f **et on note** $\mathrm{rg}(f)$ **la quantité** $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbf{Im} f)$

Remarque 2

Si $(u_i)_{i\in I}$ **est une famille génératrice de** E**, on a vu que** $\mathbf{Im} f = \mathbf{Vect}\left((f(u_i))_{i\in I}\right)$**, donc** $rg(f) = rg\,(f(u_i))_{i\in I}$.

On suppose dorénavant E et F de dimensions finies.

Théorème 1

Théorème du rang.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Im} f)$$

Autrement :

$$dim(E) = \dim(\,\mathbf{Ker} f\,) + \mathbf{rg}(f)$$

Corollaire 1

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ **alors :**

1. $\dim(Im\, f) \leq \dim(E)$.
2. $rg(f) \leq \dim(E)$.
3. $\mathbf{rg}(f(u_1), f(u_2), ..., f(u_p)) \leq \ \mathbf{rg}(u_1, u_2, ..., u_p)$ **pour toute famille** $(u_1, u_2, ..., u_p)$.

Démonstration.

1. $\dim(E) = \dim(\textbf{Ker}f) + \dim(\textbf{Im}f)$ **donc** $\dim(Im\, f) \leq \dim(E)$.
2. $rg(f) = \dim(\textbf{Im}f) \leq \dim(E)$.
3. **Soit** $G = Vect(u_1, u_2, ..., u_p)$. **Alors** $f_{/G} : G \to F$, **de plus on a vu que** $Im\, f_{/G} = f(G) = Vect(f(u_1), f(u_2), ..., f(u_p))$. **Donc** $\textbf{rg}(f(u_1), f(u_2), ..., f(u_p)) = \dim(Vect(f(u_1), f(u_2), ..., f(u_p)) = dim(Im\, f_{/G}) \leq dim(G) = \dim(Vect(u_1, u_2, ..., u_p)) = \textbf{rg}(u_1, u_2, ..., u_p)$.

$\square$

Corollaire 2

1) Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est injective, alors $\dim(F) \geq \dim(E)$.
2) Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est surjective, alors $\dim(F) \leq \dim(E)$.
3) Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est bijective, alors $\dim(E) = \dim(F)$.

Proposition 7

Pour déterminer une application linéaire $f : E \to F$, il suffit de connaître l'image directe d'une base par f.
Autrement dit, si $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ est une base de E, alors $\forall\ (v_1, \dots, v_n) \in F^n$, il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ tel que $\forall i \in \{1, \dots, n\},\ f(u_i) = v_i$.

Proposition 8

Si $dim(E) = dim(F)$ alors on a les équivalences :
f bijective $\Leftrightarrow$ f injective $\Leftrightarrow$ f surjective.

Attention ! *En général, Ker$f$ et Imf ne sont pas en somme directe.*

Exemples 2

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \to (y, 0) \end{array}$$

Nous avons Ker$f$ = Imf avec
Ker$f = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ et
Im$f = \{(y, 0), y \in \mathbb{R}\}$

Proposition 9

$f \in \mathscr{L}(E)$ est bijectif si et seulement si l'image d'une base par f est une base.

Proposition 10

Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$, alors $\mathbf{rg}(g \circ f) \leq \min(\mathbf{rg}(f), \mathbf{rg}(g))$

Démonstration.

Soit $\mathscr{B} = (u_1, ..., u_n)$ une base de E.
$\mathbf{rg}(g \circ f) = \mathbf{rg}(g \circ f(u_1), ..., g \circ f(u_n))$ donc

$$\mathbf{rg}(g \circ f) = \mathbf{rg}(g(f(u_1)), ..., g(f(u_n))) \leq$$

$$\mathbf{rg}(f(u_1), ..., f(u_n)) = \mathbf{rg}(f).$$

Par ailleurs, on a $\mathbf{Im}(g \circ f) \subset \mathbf{Im}(g)$, donc

$$\mathbf{rg}(g \circ f) = \dim(\mathbf{Im}(g \circ f)) \leq \dim(\mathbf{Im} g) = \mathbf{rg}(g).$$

$\square$