Université de Paris Campus Grands Moulins **Département de Sciences Exactes**
Licence L2 (S3) Algèbre et analyse élémentaires III
2020-2021 MI3

Examen Terminal

17 décembre 2020
Durée : 2 heures.

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables. Les exercices sont indépendants entre eux. Une attention particulière sera portée à la rédaction.

1. **Exercice 1**. Quel est la limite de
$$\frac{x^2 - \sin(x^2)}{x^6}$$
lorsque x tend vers 0 ?

2. **Exercice 2**.
   (a) Rappeler quel est le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\exp(u)$.
   (b) Montrer que l'expression $(x^2 - x + 1)\exp\left(-\frac{1}{x}\right)$ est équivalente à x^2 lorsque x tend vers $+\infty$.
   (c) Donner un développement asymptotique de l'expression
   $$(x^2 - x + 1)\exp\left(-\frac{1}{x}\right) - x^2$$
   lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire qu'elle admet une asymptote oblique lorsque x tend vers $+\infty$.
   (d) Quel est la position de $(x^2 - x + 1)\exp\left(-\frac{1}{x}\right) - x^2$ vis à vis de son asymptote lorsque x tend vers $+\infty$?

3. **Exercice 3**. On considère le système de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ donné par
$$u_1 = (1, -1, 0, 1)\ ,\ u_2 = (-1, 0, 1, 1)\ ,\ u_3 = (-1, 1, -1, 0) \text{ et } u_4 = (0, 1, -3, 0)\ .$$
Soit F le sous-espace vectoriel engendré par ces quatre vecteurs.
   (a) Donner le rang de ce système de vecteur. En déduire la dimension de F .
   (b) Trouver toutes les combinaisons linéaires de ces 4 vecteurs qui soient nulles.
   (c) Donner une base de F .

(d) À quelle condition sur (x, y, z, t) le vecteur $u = (x, y, z, t)$ de $\mathbb{R}^4$ appartient-il à F ? Qu'en est-il pour le vecteur $(1, -1, 1, -1)$?

(e) Trouver un supplémentaire (dans $\mathbb{R}^4$) du sous-espace F .

4. **Exercice 4**. On considère l'application linéaire L de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

On notera e_1 , e_2 et e_3 les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(a) Déterminer $L(e_1)$, $L(e_2)$ et $L(e_3)$.

(b) Calculer le rang de L . Donner une base de l'image de L et déterminer un système d'équation définissant ce sous-espace vectoriel.

(c) Donner la dimension du noyau de L . En déterminer une base.

(d) La matrice $A + \mathrm{I}_3$ où I_3 désigne la matrice Identité est-elle injective ? surjective ? bijective ? Existe-t-il des vecteurs non nuls u tel que

$$L(u) = -u \text{ ?}$$

Barême indicatif : Exercice 1 (2 points). Exercice 2 (5=1+2+2 points). Exercice 3 (7=1+2+1+2+1 points). Exercice 4 (7=1+2+2+2 points).