L2 Informatique

Boughattas Sedki

U-Paris

20 octobre 2021

Table des matières

Table des matières

Table des matières

Définition 1

Un ensemble E non vide est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$

- s'il est muni d'une loi de composition interne notée $+$ et d'une loi de composition externe notée $\cdot$ qui pour tout $\lambda \in K$ et $u \in E$ elle associe un élément E noté $\lambda \cdot u$.

S'il vérifie les axiomes suivants : $\forall (u, v, w) \in E^3\, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$:

- Associativité : $(u + v) + w = u + (v + w)$.

- Élément neutre : $u + 0_E = 0_E + u = u$.
- Existence d'un inverse : $\exists u'$ tel que $u + u' = u' + u = 0_E$ (c'est-à-dire $u' = -u$).
- Commutativité : $u + v = v + u$.
- $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$ et $1 \cdot u = u$.
- $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$.
- Distributivité : $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$.

Exercice

Montrer que pour tout vecteur $u \in E$on a :

$$0 \cdot u = 0_E$$

Exemples 1

1. $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
2. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel et aussi un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
3. $E = \mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.
4. $\mathbb{K}^X = \{f : X \to \mathbb{K}\}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ pour tout ensemble X.
5. $M_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition 2

Soit $F \subset E$ avec E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si, muni des lois de E, F est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, on dit que c'est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 1

Si E est un espace vectoriel et $F \subset E$ alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :
1) $0_E \in F$.
2) $\forall (u, v) \in F^2$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \lambda u + \mu v \in F$.

Exemples 2

- $\{0_E\}$ et E sont toujours des sous-espaces vectoriels de E.
- $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$ sont des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{C}$.
- $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$. De même pour $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$, $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$.

- L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
- $Diag_n(\mathbb{K}) \subset M_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices diagonales, est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$. De même, $T_n(\mathbb{K}) \subset M_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$.

Attention ! *Si* $GL_n(\mathbb{K}) \subset M_n(\mathbb{K})$ *désigne l'ensemble des matrices inversibles de taille* n *à coefficients dans* $\mathbb{K}$*, ce n'est pas un sous-espace vectoriel de* $M_n(\mathbb{K})$ *car, par exemple, la matrice nulle n'est pas inversible.*

Proposition 2

Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F_1 \cap F_2$ est encore un sous-espace vectoriel de E. De même, si $(F_i)_{i \in F}$ est une famille de sous-espace vectoriel de E, l'ensemble $\bigcap_{i \in I} F_i$ est encore un sous-espace vectoriel de E.

Définition 3

Soit $A \subset E$ une partie d'un espace vectoriel E. Le sous-espace vectoriel engendré par A est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient A. On le notera $\mathrm{Vect}(A)$. C'est le sous-espace vectoriel qui est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent A.

$$\mathrm{Vect}(A) = \bigcap_{A \subset F} F$$

Définition 4

Soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une famille (finie) de vecteurs d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E. On appelle combinaison linéaire de ces vecteurs toute somme de la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ où les λ_i sont dans $\mathbb{K}$.

Une combinaison linéaire de vecteurs est par définition toujours une somme finie de vecteurs.

Proposition 3

Vect(A) est le sous-espace vectoriel de E formé par les combinaisons linéaires d'éléments de A.

Proposition 4

La réunion de deux sous-espace vectoriels F et G d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Définition 5

On appelle somme de F et G, deux sous-espaces vectoriels de E et on note $F+G$ le sous-espace vectoriel de E : $F+G=\{u+v, u\in F, v\in G\}$.

Proposition 5

$$F + G = \mathbf{Vect}(F \cup G).$$

Définition 6

Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme de ces sous-espaces vectoriels est directe et on note $F_1 \oplus F_2$ au lieu de $F_1 + F_2$ si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

Proposition 6

F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si
$\forall u \in F_1 + F_2$, $\exists! \ (u_1, u_2) \in F_1 \times F_2$ *tel que*
$u = u_1 + u_2$

Définition 7

Si $F_1, F_2, \ldots., F_n$ sont n sous-espaces vectoriels de E, on dit que la somme $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est une somme directe si

$$\forall u \in F_1 + F_2 + \ldots + F_n,\ \exists!\ (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in F_1 \times \ldots \times F_n \text{ tel que } u = \sum_{i=1}^{n} u_i.$$

On note la somme $\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ si les F_i sont en somme directe.

Caractérisation équivalente :

$\sum_{i=1}^{n} F_i = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ si pour toute combinaison linéaire nulle $u_1 + u_2 + ... + u_n = 0_E$ avec $u_i \in F_i$, on a nécessairement $u_i = 0_E$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Attention ! *C'est une condition beaucoup plus forte que de demander seulement que* $F_i \cap F_j = \{0_E\}\ \forall i \neq j$.

Définition 8

Si F est un sous-espace vectoriel de E, un sous-espace vectoriel de G de E est un supplémentaire de F dans E si :
– F et G sont en somme directe.
– $F \bigoplus G = E$.

Attention ! *Ne pas confondre le complémentaire $E \setminus F$ (qui n'est jamais un sous-espace vectoriel) et un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel.*

Définition 9

On dit qu'une famille (finie) de vecteurs $(u_1, \cdots, u_n)$ d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E est une famille libre si toute combinaison linéaire nulle de ces vecteurs est à coefficients tous nuls :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \forall i \in \{1, \cdots, n\}, \lambda_i = 0.$$

Définition 10

On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est libre si toute partie finie de cette famille est libre.

Une famille $(u_i)_{i\in I}$ qui n'est pas libre est dite *liée*.

Lemme 1

Soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel E. Alors :
$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i \Rightarrow \ \alpha_i = \beta_i$ pour tout i dans $\{1, \cdots, n\}$.

Définition 11

On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est génératrice de E si tout élément de E s'écrit comme une combinaison linéaire d'une partie finie de cette famille :
$\forall u \in E, \exists\ (\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ dans $\mathbb{K}$ et une partie finie $(u_{i_1}, \cdots, u_{i_p})$ de la famille $(u_i)_{i\in I}$ tels que $u = \lambda_1 u_{i_1} + \cdots + \lambda_p u_{i_p}$.

(p dépendant de u.)

Proposition 7

1. Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
2. Toute famille contenant une sous-famille liée est liée.
3. Toute famille contenant une sous-famille génératrice de E est encore une famille génératrice de E.

Lemme 2

Soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une famille de vecteurs libre dans E et v un vecteur de E. Alors $(u_1, \cdots, u_n, v)$ est libre si et seulement si $v \notin Vect(u_1, \cdots, u_n)$.

Autrement dit : $(u_1, \cdots, u_n, v)$ est liée si et seulement si $v \in Vect(u_1, \cdots, u_n)$

Corollaire 1

Une famille $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si pour tout $u \in \mathcal{F}$, $u \notin Vect\left(\mathcal{F} - \{u\}\right)$.

Corollaire 2

Toute partie libre maximale d'un espace E est génératrice de E.

Définition 12

On dit qu'une famille de vecteur d'un $\mathbb{K}$- espace vectoriel, E est une base de E si tout élément de E s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs $(u_i)_{i\in I}$:
$\forall u \in E, \exists!\ (\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ dans $\mathbb{K}$ et une famille finie $(u_{i_1}, \cdots, u_{i_p})$ de $(u_i)_{i\in I}$ tels que $u = \lambda_1 u_{i_1} + \cdots + \lambda_p u_{i_p}$.

Exemples 3

- $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- $\{X^n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.
- $\{1; X; \ldots, X^n\}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Lemme 3

- Si v est combinaison linéaire de $(u_1, \cdots, u_p)$ alors $Vect(u_1, \cdots, u_p, v) = Vect(u_1, \cdots, u_p)$.
- Si $(v_1, \cdots, v_m)$ sont combinaisons linéaire de $(u_1, \cdots, u_p)$ alors $Vect(u_1, \cdots, u_p, v_1, \cdots, v_m) = Vect(u_1, \cdots, u_p)$.

Proposition 8

1. $(u_i)_{i\in I}$ est libre $\Leftrightarrow$ $\mathbf{Vect}((u_i)_{i\in I}) = \bigoplus_{i\in I} \mathbf{Vect}(u_i)$.
2. $(u_i)_{i\in I}$ est génératrice de $E \Leftrightarrow$ $\mathbf{Vect}((u_i)_{i\in I}) = E$.
3. $(u_i)_{i\in I}$ est une base de $E \Leftrightarrow$ $\mathbf{Vect}((u_i)_{i\in I}) = \bigoplus_{i\in I} Vect(u_i) = E$.
4. $(u_i)_{i\in I}$ est une base de $E \Leftrightarrow (u_i)_{i\in I}$ est libre maximale dans E.
5. $(u_i)_{i\in I}$ est une base $\Leftrightarrow \begin{cases} (u_i)_{i\in I} \text{ est libre.} \\ (u_i)_{i\in I} \text{ est génératrice de } E. \end{cases}$

Définition 13

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, on appelle dimension de E la quantité finie ou infinie suivante :
$\dim_{\mathbb{K}} E = \sup\{n \in \mathbb{N}$ il existe une famille libre de n vecteurs dans $E\}$.

Exemples 4

1. $\dim_{\mathbb{K}}\{0\} = 0.$
2. $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n.$
3. $\dim \mathbb{K}[X] = +\infty.$
4. $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[X] = n + 1.$
5. $\dim_{\mathbb{K}} M_n[\mathbb{K}] = n^2.$
6. $\dim_{\mathbb{K}} D_n(\mathbb{K}) = n.$
7. $\dim_{\mathbb{K}} T_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n^2 - n}{2} + n = \dfrac{n(n+1)}{2}.$

Définition 14

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs. On appelle rang de la famille $(u_i)_{i\in I}$ et on note $\mathrm{rg}(u_i)_{i\in I}$ la dimension du sous-espace vectoriel engendré par la famille $(u_i)_{i\in I}$:
$\mathrm{rg}((u_i)_{i\in I}) = \dim(\mathrm{Vect}(u_i)_{i\in I})$.

Lemme 4

Si $(u_1, u_2, \cdots, u_p, u_{p+1})$ est une famille de vecteurs libre dans E alors $(\alpha_1 u_1 + \beta_1 u_{p+1}, \alpha_2 u_2 + \beta_2 u_{p+1} \ldots, \alpha_p u_p + \beta_p u_{p+1})$ est libre pour tous $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ non nuls dans $\mathbb{K}$.

Lemme 5

En particulier, si $(u_1, u_2, \cdots, u_p, u_{p+1})$ est une famille de vecteurs libre dans E alors $(\alpha u_1 + \beta_1 u_{p+1}, \alpha u_2 + \beta_2 u_{p+1} \ldots, \alpha u_p + \beta_p u_{p+1})$ est libre pour tous α non nul dans $\mathbb{K}$.

Lemme Fondamental

Lemme 6

Un espace engendré par p vecteurs ne peut contenir une famille libre de $p+1$ vecteurs.

Autrement dit :

– Si un espace E est engendré par p vecteurs alors tout famille libre de E contient au maximum p vecteurs,

– Si E contient une famille libre de p vecteurs alors toute famille génératrice de E contient au moins p vecteurs.

Corollaire 3

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Alors :

$(u_1, \cdots, u_n)$ base de E ssi $(u_1, \cdots, u_n)$ libre ssi $(u_1, \cdots, u_n)$ générateur.

Preuve : Lemme fondamental.

$\square$

Par récurrence sur p. • $p = 1$. Soit(u_1) libre $(u_1 \neq 0)$ et (v_1, v_2) dans $Vect(u_1)$. Par l'absurde, supposons que (v_1, v_2) est libre. Alors v_1 et v_2 sont non nuls et il existe λ_1 et λ_2 non nuls tels que $v_1 = \lambda_1 u_1$ et $v_2 = \lambda_2 u_1$.

On a λ_1 et λ_2 non nuls tels que $v_1 = \lambda_1 u_1$ et $v_2 = \lambda_2 u_1$. Alors $\lambda_2 v_1 - \lambda_1 v_2 = \lambda_2\lambda_1 u_1 - \lambda_1\lambda_2 u_1 = 0$, d'où $\lambda_2 v_1 - \lambda_1 v_2 = 0$ avec λ_1, λ_2 non tous deux nuls, ce qui contredit le fait que la famille (v_1, v_2) est libre.

• $p-1 \to p$. Supposons que le lemme soit vrai pour $p-1$. C-à-d : tout espace engendré par $p-1$ vecteurs ne peut contenir une famille libre de p vecteurs.

Montrons le lemme pour la valeur p. Soit $(v_1, \cdots, v_{p+1})$ $p+1$ des vecteurs dans l'espace $Vect(u_1, \cdots, u_p)$ (engendré par p vecteurs). Par l'absurde, supposons que $(v_1, \cdots, v_{p+1})$ est libre.

Les $(v_1, \cdots, v_{p+1})$ sont combinaisons linéaire des vecteurs $(u_1, \cdots, u_p)$:

Quitte à ré-indexer les vecteurs $(u_1, \cdots, u_p)$, on peut supposer que :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
\alpha_{1,1}u_1 & + & \dots & + & \alpha_{1,p-1}u_{p-1} & + & \alpha_{1,p}u_p & = & v \\
\alpha_{2,1}u_1 & + & \dots & + & \alpha_{2,p-1}u_{p-1} & + & \alpha_{2,p}u_p & = & v \\
\alpha_{3,1}u_1 & + & \dots & + & \alpha_{3,p-1}u_{p-1} & + & \alpha_{3,p}u_p & = & v \\
 & & & & \vdots & & & & \\
\alpha_{p,1}u_1 & + & \dots & + & \alpha_{p,p-1}u_{p-1} & + & \alpha_{p,p}u_p & = & v \\
\alpha_{p+1,1}u_1 & + & \dots & + & \alpha_{p+1,p-1}u_{p-1} & + & \alpha_{p+1,p}u_p & = & v
\end{array}\right.$$

avec $\alpha_{p+1,p} \neq 0$. Utilisons la méthode du pivot pour éliminer le vecteur u_p dans toutes les lignes sauf la dernière.

Remplaçons chaque ligne L_i, $i \leq p$:

$$\{ \ \alpha_{i,1} u_1 \ + \ \alpha_{i,2} u_2 \ + \ \dots \ + \ \alpha_{i,p-1} u_{p-1} \ + \ \alpha_{i,p} u_p \ = \ v_i$$

par $\alpha_{p+1,p} L_i - \alpha_{i,p} L_{p+1}$ alors on obtient :

$$(\alpha_{p+1,p}\alpha_{i,1} - \alpha_{i,p}\alpha_{p+1,1}) u_1 + \dots +$$

$$(\alpha_{p+1,p}\alpha_{i,p-1} - \alpha_{i,p}\alpha_{p+1,p-1}) u_{p-1} =$$

$$\alpha_{p+1,p} v_i - \alpha_{i,p} v_{p+1}$$

À part la dernière ligne, le système devient

$$\left\{\begin{array}{ll} \beta_{1,1}u_1+\cdots+\beta_{1,p-1}u_{p-1} & =\alpha_{p+1,p}v_1-\alpha_{1,p}v_{p+1} \\ \beta_{2,1}u_1+\cdots+\beta_{2,p-1}u_{p-1} & =\alpha_{p+1,p}v_2-\alpha_{2,p}v_{p+1} \\ & \\ \beta_{p,1}u_1+\cdots+\beta_{p,p-1}u_{p-1} & =\alpha_{p+1,p}v_p-\alpha_{p,p}v_{p+1} \end{array}\right.$$

avec $\alpha_{p+1,p}\neq 0$.

$$\left\{\begin{array}{ll} \beta_{1,1}u_1+\cdots+\beta_{1,p-1}u_{p-1} & =\alpha_{p+1,p}v_1-\alpha_{1,p}v_{p+1} \\ \beta_{2,1}u_1+\cdots+\beta_{2,p-1}u_{p-1} & =\alpha_{p+1,p}v_2-\alpha_{2,p}v_{p+1} \\ & \\ \beta_{p,1}u_1+\cdots+\beta_{p,p-1}u_{p-1} & =\alpha_{p+1,p}v_p-\alpha_{p,p}v_{p+1} \end{array}\right.$$

$\alpha_{p+1,p}\neq 0$ et $(v_1,\cdots,v_p,v_{p+1})$ libre, alors d'après le lemme 3 les p vecteurs $((\alpha_{p+1,p}v_1-\alpha_{1,p}v_{p+1}),(\alpha_{p+1,p}v_2-\alpha_{2,p}v_{p+1}),\ldots(\alpha_{p+1,p}v_p-\alpha_{p,p}v_{p+1}))$ sont libres. De plus ces p vecteurs libres sont dans $Vect(u_1,u_2,\cdots,u_{p-1})$ engendrée par $p-1$ vecteurs , contradiction avec l'hypothèse de récurrence.

Corollaire 4

Si E est un espace vectoriel de dimension n, toute famille génératrice a au moins n vecteurs.

Proposition 9

Si un ensemble $\mathcal{E}$ contient une famille $\mathcal{F}$ libre maximale alors :

1. $\mathcal{E} \subset \ Vect(\mathcal{F})$.
2. $Vect(\mathcal{E}) = \ Vect(\mathcal{F})$

   Si $\mathcal{F}$ contient ℓ vecteurs alors :
3. **toute famille de $Vect(\mathcal{E})$ contenant $\ell + 1$ vecteurs est liée.**
4. **toute famille de $\mathcal{E}$ contenant $\ell + 1$ vecteurs est liée.**
5. $rg(\mathcal{E}) = rg(\mathcal{F}) = \ell$.
6. **Toute famille libe maximale de $Vect(\mathcal{E})$ contient ℓ vecteurs.**

Démonstration.

1) **Supposons que** $\mathcal{F} = \{u_1, \ldots, u_\ell\}$**. Comme** $(u_1, \ldots, u_\ell)$ **est libre maximale dans** $\mathcal{E}$**, alors pour tout** $v \in \mathcal{E}$ **la famille** $(u_1, \ldots, u_\ell, v)$ **est liée, donc, d'après le Lemme 1,** $v \in Vect(u_1, \ldots, u_\ell)$ **. Ainsi** $\mathcal{E} \subset Vect(u_1, \ldots, u_\ell)$**.**
2) **Les vecteurs** $(u_1, \ldots, u_\ell)$ **sont dans** $\mathcal{E}$**, donc** $Vect(u_1, \ldots, u_\ell) \subset Vect(\mathcal{E})$**.**
Or d'après (1) **on a** $\mathcal{E} \subset Vect(u_1, \ldots, u_\ell)$**, donc** $Vect(\mathcal{E}) \subset Vect(u_1, \ldots, u_\ell)$**, d'où** $Vect(\mathcal{E}) = Vect(u_1, \ldots, u_\ell)$**.**

$\square$

3) D'après le lemme 4, le sous-espace $Vect(u_1, \ldots, u_\ell)$ ne peut contenir une famille libre de $\ell + 1$ vecteurs.
4) Donc $\mathcal{E}$ ne peut contenir une famille libre de $\ell + 1$ vecteurs

Proposition 10

Si $(u_1, \ldots, u_p)$ sont p vecteurs dans E, alors $\mathrm{rg}(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \ell \ \leq p$. De plus :

- Il existe une sous-famille de ℓ vecteurs $(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_\ell})$ libre maximale dans $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.
- Toute sous-famille à $\ell + 1$ vecteurs de $(u_1, \ldots, u_p)$ est liée.

Théorème 1

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. E est un espace vectoriel de dimension n.
2. Toute base de E a exactement n vecteurs.

Proposition 11

Si E est un espace vectoriel de dimension finie et $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E, alors la dimension de F est finie et de dimension $\dim F \leq \dim E$. Si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.

Théorème 2

Théorème de la base incomplète. Soit $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille libre dans E un espace vectoriel de dimension n, alors si $p < n$, il existe des vecteurs $(u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_n)$ tels que $(u_1, \dots, u_n)$ soit une base de E. De plus, si $(v_1, v_2, \dots., v_q)$ est une famille génératrice, on peut choisir $u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_n$ parmi les vecteurs de la famille $(v_1, v_2, \dots, v_q)$.

Corollaire 5

1. Si $(v_1, ..., v_q)$ est une famille génératrice de E alors il existe une sous-famille $\left(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n}\right)$ qui est une base de E.
2. Tout sous-espace vectoriel de E admet au moins un supplémentaire (en fait une infinité).

Proposition 12

Soient F_1 et F_2 deux sous-espace vectoriels de dimension finie de E, alors $F_1 + F_2$ est de dimension finie et :

$$\dim(F_1+F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2).$$

Corollaire 6

Si F_1 et F_2 sont en somme directe alors :

$$\dim(F_1 \oplus F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2).$$

Remarque 1

Supposons que $(e_1, ..., e_n)$ est une base de F_1 et $(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_m)$ est une base de F_2. Alors : F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si $(e_1, \cdots, e_n, \epsilon_1, \cdots, \epsilon_m)$ est une base de $F_1 + F_2$.

Proposition 13

Si $F_1, F_2, \cdots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E, de dimensions finies n_i qui sont en somme directe, et si $(\varepsilon_1(i), \cdots, \varepsilon_{n_i}(i))$ est une base de F_i, alors :

$$\dim(F_1 \oplus \cdots \oplus F_p) = \dim(F_1) + \ldots + \dim(F_p)$$

et $(\varepsilon_1(1), \ldots., \varepsilon_{n_1}(1), \cdots, \varepsilon_1(p), \cdots, \varepsilon_{n_p}(p))$ est une base de $F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$.

Définition 15

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels, on appelle application linéaire de E dans F une application $f : E \to F$ tel que $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$ pour tous $(u, v) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. C'est un sous-espace vectoriel de F^E (l'ensemble de toute les applications de E dans F).

On appelle également *morphisme d'espaces vectoriels* une telle application linéaire.

- Une application linéaire bijective est appelée isomorphisme.
- Une application linéaire d'un espace vectoriel E dans lui-même est appelée endormorphisme.
- Un endomorphisme bijectif est appelé automorphisme.
- Une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est appelée forme linéaire.

Exemples 5

1. L'application nulle

$$\begin{array}{rccc} 0: & E & \to & F \\ & x & \mapsto & 0_F \end{array}$$

   est un morphisme d'espace vectoriel.

1. $p_i\left(\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}\right)\left(a_1, \ldots, a_n\right) \mapsto a_i$ est une forme linéaire.
2. L'application suivante est linéaire

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ u & \mapsto & uv = \left(u_n v_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

3. Si $Q \in \mathbb{K}[X]$ est fixé, l'application suivante est linéaire :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & PQ \end{array}$$

1. Soit $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ alors $\forall n \geq 1$, l'application
$$\begin{array}{ccc} M_{n,p}(\mathbb{K}) & \rightarrow & M_{n,p}(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & AB \end{array}$$
est linéaire et l'application
$$\begin{array}{ccc} M_{q,n} & \rightarrow & M_{p,n} \\ A & \mapsto & BA \end{array}$$
également.

2. Les applications
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \rightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} D^1(I) & \rightarrow & \mathbb{R}^I \\ f & \mapsto & f' \end{array}$$
sont linéaires.

1. Si $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ l'application suivante est une forme linéaire.

$$\begin{array}{rcl} C^0([a,b],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_a^b f(x)dx \end{array}$$

2. L'application de transposition est un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$\begin{array}{rcl} M_{n,p}(\mathbb{K}) & \to & M_{n,p}(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & {}^tA \end{array}$$

Proposition 14

Si f et g sont des applications linéaires de E dans F et $(\lambda, \mu) \in bbK^2$:

- $\lambda f + \mu g$ est encore une application linéaire.
- Si f est un isomorphisme, sa bijection réciproque f^{-1} est également linéaire.
- Si $f \circ g$ est bien définie, alors $f \circ g$ est linéaire.

Proposition 15

- Si, de plus, $h : F \to G$ est linéaire, alors on a :
  - $(f+g)\circ h = \; f\circ h + g\circ h$ et $f\circ(g+h) = \; f\circ g + f\circ h$;
  - $(\lambda f)\circ h = \; \lambda(f\circ h)$ et $f\circ(\lambda h) = \; \lambda(f\circ h)$.
- Si f est un endomorphisme, on peut définir f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $f^n = \underbrace{f\circ f\circ \ldots\ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

Définition 16

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On pose :
$\mathrm{Im}(f) = \{f(x), x \in E\} = f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F.
$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E, f(x) = 0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 16

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors

- $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.
- $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 17

$f \in \mathscr{L}(E, F)$ est :

- injective si et seulement si $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$;
- surjective si et seulement si $\mathrm{Im} f = F$.

Définition 17

Soit $f : E \to F$ une application linéaire, on appelle rang de f et on note $\mathrm{rg}(f)$ la quantité $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im} f)$

$\mathrm{Im} f = \{y \in F, \exists x \in E$ avec $f(x) = y\}$.

Si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E, alors $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(u_i))_{i \in I}$.

Le rang de l'application linéaire est le rang de la famille de vecteurs $(f(u_i))_{i \in I}$ où $(u_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E.

On suppose dorénavant E et F de dimensions finies.

Théorème 3

Théorème du rang.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors

$$\dim(E) = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f)$$

Autrement :

$$dim(E) = \dim(\,\mathrm{Ker} f\,) + \mathbf{rg}(f)$$

Corollaire 7

1) Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est injective, alors $\dim(F) \geq \dim(E)$.
2) Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est surjective, alors $\dim(F) \leq \dim(E)$.
3) Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est bijective, alors $\dim(E) = \dim(F)$.

Proposition 18

Pour déterminer une application linéaire $f : E \to F$, il suffit de connaître l'image directe d'une base par f.
Autrement dit, si $\mathscr{B} = (u_1, ..., u_n)$ est une base de E, alors $\forall\ (v_1, ..., v_n) \in F^n$, il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ tel que $\forall i \in \{1, ..., n\},\ f(u_i) = v_i$.

Proposition 19

$\dim(E) = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\Im(f))$. En particulier :
f bijective $\Leftrightarrow$ f est injective $\Leftrightarrow$ f est surjective $\Leftrightarrow$ f est de rang maximal.

Attention ! *En général, $Kerf$ et Imf ne sont pas en somme directe.*

Exemples 6

bf

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \to (y, 0) \end{array}$$

Nous avons $Kerf = Imf$ avec
$Kerf = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ *et*
$Imf = \{(y, 0), y \in \mathbb{R}\}$

Proposition 20

$f \in \mathscr{L}(E)$ est bijectif si et seulement si l'image d'une base par f est une base.

Proposition 21

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs. Alors $\operatorname{rg}(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_p)) \leq \operatorname{rg}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$

Proposition 22

$f \in \mathscr{L}(E, F)$ alors $\mathrm{rg}(f(u_1), \ldots, f(u_p)) = \mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_p)$ pour toute famille $(u_1, \ldots, u_p)$ de E si et seulement si f est injective.

Proposition 23

Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$, alors $\mathbf{rg}(g \circ f) \leq \min(\mathbf{rg}(f), \mathbf{rg}(g))$

Démonstration.

Soit $\mathscr{B} = (u_1, ..., u_n)$ une base de E.
$\mathbf{rg}(g \circ f) = \mathbf{rg}(g \circ f(u_1), ..., g \circ f(u_n))$ donc

$$\mathbf{rg}(g \circ f) = \mathbf{rg}(g(f(u_1)), ..., g(f(u_n))) \leq$$

$$\mathbf{rg}(f(u_1), ..., f(u_n)) = \mathbf{rg}(f).$$

Par ailleurs, on a $\mathbf{Im}(g \circ f) \subset \mathbf{Im}(g)$, donc

$$\mathbf{rg}(g \circ f) = \dim(\mathbf{Im}(g \circ f)) \leq \dim(\mathbf{Im} g) = \mathbf{rg}(g).$$