L2 Informatique

Boughattas Sedki

U-Paris

10 Novembre 2021

Table des matières

Table des matières

Table des matières

Définition 1

Soit E et F des espaces vectoriels de dimension finie. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots e_n)$ une base de E et $\mathcal{C}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m)$ une base de F. Alors si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, il existe, pour chaque $j \in \{1, \cdots, n\}$ des coefficients $a_{i,j}$ tels que $f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\varepsilon_i$ (ce sont les coefficients du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$). On note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ la matrice de $M_{m,n}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont les $(a_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$.

Si $\dim(E) = 4$ et $\dim(F) = 3$ alors :

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & f(e_4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{array}$$

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{pmatrix}$$

$$f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$$
$$(x, y, z) \mapsto (x + y - z, -x + z)$$

est une application linéaire.

Par exemple, si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^2$ alors :

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{array} \end{array}$$

On a : $f(x,y,z) = (x+y-z, -x+z)$.
Donc $f(e_1) = f(1,0,0) = (1,-1)$,
$f(e_2) = f(0,1,0) = (1,0)$ et
$f(e_3) = f(0,0,1) = (-1,1)$.

d'où

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{array} \end{array}$$

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 1

Si $(x_1, \cdots, x_n)$ sont les coordonnées du vecteur $u \in E$ dans la base $\mathcal{B}$ et $(y_1, \cdots, y_m)$ sont les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{C}$ alors

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$$
$$(x, y, z) \mapsto (x + y - z, -x + z)$$

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculons $f(u) = (\cdot, \cdot)$ **pour** $u = (2, -1, 7)$. **On a :**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Donc $f(u) = (-6, 5)$.

Réciproquement, pour toute matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ il existe une unique application linéaire notée $Lin(A) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ tel que

$$A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(Lin(A))$$

avec $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, respectivement, les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$

Ainsi, si $u = (x_1, \cdots, x_n)$ alors $Lin(A)(u) = (y_1, \cdots, y_m)$ est donné par

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Par exemple si

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

alors $Lin(A) : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$ avec $Lin(A)(x,y,z) = (-2x+y+2z, x+2y-3z)$. Puisque les coordonnées en colonne de $Lin(A)(x,y,z)$ dans la base canonique sont données par

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + y + 2z \\ x + 2y \end{pmatrix}$$

Proposition 2

Supposons que $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ et $B = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)$, alors

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\alpha f + \beta g) = \alpha A + \beta B.$$

Proposition 3

Supposons que $A = Mat_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)$ et $B = Mat_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(g)$, alors

$$Mat_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}(g \circ f) = B\,A.$$

Noyau, image, rang d'une matrice

Définition 2

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.

- On appelle noyau de la matrice A, et on note $\mathrm{Ker}(A)$ l'ensemble :
$$\mathrm{Ker}(A) = \{X \in M_{p,1}(\mathbb{K}), AX = 0\}.$$
- On appelle image de la matrice A, et on note $\mathrm{Ker}(A)$ l'ensemble : $\mathrm{Im}(A) = \{Y \in M_{n,1}(\mathbb{K}), \exists X \in M_{p,1}(\mathbb{K}), AX = Y\}$.

Proposition 4

On a $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(\text{Lin}(A))$ et $\text{Im}(A) = \text{Im}((\text{Lin}(A))$, à condition d'identifier un vecteur de $\mathbb{K}^p$ et un vecteur colonne dans $M_{p,1}(\mathbb{K})$.

Définition 3

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle rang de la matrice A et on note $\mathrm{rg}(A)$ le rang du système de vecteurs $(C_1(A), C_2(A), \cdots C_p(A))$.

Où $C_i(A)$ est la i-ème colonne de A.

On rappelle que si $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ alors ${}^tA = (b_{i,j}) \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ avec $b_{i,j} = (a_{j,i})$.

Exemples 1

Par exemple si $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

alors ${}^tA = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

On rappelle que le pivot en colonne est justifié par la proposition suivante.

Proposition 5

Le sous-espace engendré par les vecteurs $(u_1, \cdots, u_{i_0}, \cdots, u_p)$ est le même que celui engendré par $(\alpha_1 u_1 + \beta_1 u_{i_0}, \cdots, u_{i_0}, \cdots, \alpha_p u_p + \beta_p u_{i_0})$ pour tous α_k non nuls.

Proposition 6

1. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\mathrm{Lin}(A))$;
2. $\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A)$;
3. $\mathrm{rg}(AB) \leq \min(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B))$;
4. Si $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ alors $\mathrm{rg}(A) + \dim(\mathrm{Ker}(A)) = n$.

Définition 4

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est **inversible** s'il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$ et $BA = I_n$.

Proposition 7

La matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si l'application $\mathrm{Lin}(A)$ est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$.

Définition 5

Soit $\mathscr{B} = (u_1, \cdots, u_n)$ une base d'un espace vectoriel E. Soit $u \in E$, si $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ alors $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ sont appelés les coefficients (ou coordonnées) de u dans la base $\mathscr{B}$.

Définition 6

Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases d'un même espace vectoriel. La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est la matrice obtenue en écrivant, dans chaque colonne, les coefficients de chaque vecteur de la "nouvelle" base $\mathscr{B}'$ dans "l'ancienne base" $\mathscr{B}$.

Exemples 2

On considère $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une deuxième base avec $\varepsilon_1 = (-1, 0, 1)$, $\varepsilon_2 = (1, 1, 0)$ et $\varepsilon_3 = (1, 1, 1)$.

La matrice de passage P de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$ est données par :

$$P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

Proposition 8

Toute matrice de passage est inversible.

Proposition 9

Toute matrice inversible est une matrice de passage.

Proposition 10

Soit P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Soit u un vecteur. On considère $u_{\mathscr{B}}$ la colonne des coordonnés de u dans la base $\mathscr{B}$ et $u_{\mathscr{B}'}$ la colonne des coordonnés de u dans la base $\mathscr{B}'$. Alors

$$u_{\mathscr{B}} = Pu_{\mathscr{B}'}$$

Corollaire 1

$$u_{\mathscr{B}'} = P^{-1}u_{\mathscr{B}}$$

Exemples 3

On considère $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une deuxième base avec
$\varepsilon_1 = (-1, 0, 1)$, $\varepsilon_2 = (1, 1, 0)$ et
$\varepsilon_3 = (1, 1, 1)$.
Soit u qui a pour coordonnées $(-1, 1, 0)$ dans $\mathscr{B}$ et $v = (2, -1, 1)$.
Donner les coordonnées de e_1 et v dans $\mathscr{B}$ et ceux de u dans $\mathscr{C}$.

Exemples 4

$\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique et $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ avec $\varepsilon_1 = (-1, 0, 1)$, $\varepsilon_2 = (1, 1, 0)$ et $\varepsilon_3 = (1, 1, 1)$. La matrice de passage P de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$ est données par :

$$P = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

$$u_{\mathscr{C}} = P u_{\mathscr{B}} \quad \text{et} \quad u_{\mathscr{B}} = P^{-1} u_{\mathscr{C}}.$$

• Coordonnées de e_1 dans $\mathscr{B}$?
On a : $e_{1_{\mathscr{B}}} = P^{-1} e_{1_{\mathscr{C}}}$. Or
$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Donc

$$e_{1_{\mathscr{B}}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• u qui a pour coordonnées $(-1, 1, 0)$ dans $\mathscr{B}$. Calculons les coordonnées de u dans $\mathscr{C}$? On a : $u_{\mathscr{C}} = Pu_{\mathscr{B}}$.
Donc

$$u_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Remarquons que $u = (2, 1, -1)$.

• $v = (2, -1, 1)$ a pour coordonnées $(2, -1, 1)$ dans la base canonique $\mathscr{C}$. Calculons les coordonnées de v dans $\mathscr{B}$? On a : $v_{\mathscr{B}} = P^{-1} v_{\mathscr{C}}$. Donc

$$v_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Proposition 11

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et P la matrice de passage de $\mathscr{B}_E$ à $\mathscr{B}'_E$ deux bases de E. Soit F un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et Q la matrice de passage de $\mathscr{B}_F$ à $\mathscr{B}'_F$ deux bases de F. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ une application linéaire. Alors, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'_E, \mathscr{B}'_F}(f) = \; Q^{-1} \; \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f) \; P.$$

On a la formule de changement de base suivante pour les endomorphismes :

Proposition 12

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie, et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ deux bases de E, et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme. Alors, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P^{-1} \, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \, P.$$

Matrices carrées particulières

Matrices diagonales

Définition 7

On dit qu'une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonale si tous ses coefficients en dehors de la diagonale sont nuls. On note $\mathrm{Diag}_n(\mathbb{K})$ ou $D_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales et on note $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$la matrice diagonale dont les coefficients sont $d_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $d_{i,i} = a_i$.

Exemples 5

1. La matrice nulle est diagonale.
2. La matrice identité I_n est diagonale.
3. Les matrices d'homothéties λI_n sont diagonales.

- $D_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$ de dimension n.
- La matrice identité $I_n \in D_n(\mathbb{K})$.
- Si A et B sont diagonales, AB est diagonale.
- Si A et B sont diagonales, $AB = BA$.

Proposition 13

1. Le rang d'une matrice diagonale est donné par le nombre de coefficients non nuls.
2. En particulier, une matrice diagonale $D =$diag$(d_1, d_2, \cdots d_n)$ est inversible si et seulement si $\forall i \in \{1, \cdots, n\}, d_i \neq 0$. Dans ce cas, l'inverse de D est la matrice $D^{-1} =$ diag$(d_1^{-1}, d_2^{-1}, \cdots d_n^{-1})$

Matrices triangulaires

Définition 8

Soit $T = (t_{i,j})$ une matrice dans $M_n(\mathbb{K})$. On dit que :

- T est triangulaire supérieure si $t_{i,j} = 0$ dès que $i > j$.
- T est triangulaire supérieure stricte si $t_{i,j} = 0$ dès que $i \geq j$.

On note $T_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures et $T_n^s(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes.

Définition 9

On appelle trace d'une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$, et on note $\mathrm{Tr}(A)$ la somme de ses coefficients diagonaux : $\mathrm{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Proposition 14

Pour toutes matrices $A, B, P \in M_n(\mathbb{K})$, on a :

1. $\textbf{Tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \textbf{Tr}(A) + \beta \textbf{Tr}(B)$.
2. $\textbf{Tr}(AB) = \textbf{Tr}(BA)$.
3. Si P est inversible alors $Tr(P^{-1}AP) = Tr(A)$.

Corollaire 2

Si $f \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme, on peut définir $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))$, où $\mathscr{B}$ est une base quelconque de E.

Démonstration.

Soit $\mathscr{B}'$ une deuxième base et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
Alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P^{-1}\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\ P$.
Donc $Tr(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)) =$
$Tr(P^{-1}\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\ P) = Tr(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))$ □