L2 Informatique

Boughattas Sedki

U-Paris

17 Novembre 2021

Table des matières

Théorème 1

Pour tout $n \geq 1$, il existe une unique application déterminant notée $\det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(c$_1$) $\det(I_n) = 1$.

(c$_2$) det est une application linéaire par rapport à chaque colonne de la matrice.

(c$_3$) Si deux colonnes consécutives de la matrice A sont égales, alors $\det(A) = 0$.

Remarque 1

La condition (c_2) implique en particulier que si une colonne de A est nulle, alors $\det(A) = 0$.

Prouvons ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

1) Commençons par l'initialisation. Pour $n = 1$ en posant

$$\det A = a$$

si $A = (a)$.

2) Pour $n = 2$ avec la définition usuelle : $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \ ad - bc.$

- Pour la condition (c_1) , on a $\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1.$
- Pour la condition (c_2) , si $A = \begin{pmatrix}\alpha a_1 + \mu b_1 & c_1\\ \alpha a_2 + \mu b_2 & c_2\end{pmatrix}$, on a

$$\begin{aligned}\det(A) &= (\alpha a_1 + \mu b_1)\cdot c_2 - c_1(\alpha a_2 + \mu b_2)\\ &= \alpha(a_1 c_2 - c_1 a_2) + \mu(b_1 c_2 - b_2 c_1)\end{aligned}$$

$$\det(A) = \alpha \det\begin{pmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{pmatrix} + \mu \det\begin{pmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{pmatrix}$$

- Pour la condition (c_3) : $\det\begin{pmatrix}a & a\\ b & b\end{pmatrix} = ab - ab = 0.$

3) Pour $n = 3$.
4) Pour $n = 4$.

Proposition 1

Si $T \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire supérieure, alors

$$\det(T) = \prod_{i=1}^{n} t_{ii}.$$

Démonstration.

On le démontre par récurrence, en utilisant le développement par rapport à la première colonne. $\square$

Corollaire 1

Si $D \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice diagonale alors $\det(D) = \prod_{i=1}^{n} d_{ii}$.

Proposition 2

Si det est une application de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ qui vérifie les trois conditions mentionnées dans le théorème 1 alors :

(P_1) si on échange deux colonnes consécutives dans une matrice, alors $\det(A)$ est multiplié par (-1).

(P_2) si deux colonnes sont égales dans une matrice A, alors $\det(A) = 0$.

(P_3) si on échange deux colonnes dans une matrice A, alors $\det(A)$ est multiplié par (-1).

(P_4) si on multiplie une colonne dans une matrice A par λ, $\det(A)$ est multiplié par λ.

(P_5) si on ajoute à une colonne d'une matrice A une combinaison linéaire des autres colonnes de la matrice, alors $\det(A)$ reste inchangé.

Démonstration.

(P_1) **D'après** (c_3)**, on sait que :** $\det(C_1, ..., C_k + C_{k+1}, C_k + C_{k+1}, C_{k+2}, ..., C_n) = \ 0$ **car les** k**-ième et** $k+1$**-ième colonnes de cette matrice sont égales. Par ailleurs, on a aussi, pour la même raison,** $\det(C_1, ..., C_{k+1}, C_{k+1}, C_{k+2}, ..., C_n) = \det(C_1, ..., C_k, C_k, C_{k+2}, ..., C_n) = 0.$

$\square$

(P_1) **En utilisant la linéarité, on obtient alors :**

$0 = \det(C_1, ..., C_k + C_{k+1}, C_k + C_{k+1}, C_{k+2}, ..., C_n) =$
$\det(C_1, ..., C_k, C_k + C_{k+1}, ..., C_n) +$
$\det(C_1, ..., C_{k+1}, C_k + C_{k+1}, ..., C_n) =$
$\det(C_1, ..., C_k, C_k, C_n) +$
$\det(C_1, ..., C_k, C_{k+1}, C_n) +$
$\det(C_1, ... C_{k+1}, C_k, C_n) +$
$\det(C_1, ..., C_{k+1}, C_{k+1}, C_n) =$
$\det(C_1, ..., C_k, C_{k+1}, ..., C_n) +$
$\det(C_1, ..., C_{k+1}, C_k, ..., C_n)$

On a donc bien :

$\det(C_1, ..., C_{k+1}, C_k, ..., C_n) =$
$-\det(C_1, ..., C_k, C_{k+1}, ..., C_n).$

□

Démonstration.

(P_2) **Supposons que les colonnes C_i et C_j sont égales. On a**

$$\det(C_1, ..., C_i, C_{i+1}, ..., C_j, ..., C_n) =$$

$$(-1)\det(C_1, ..., C_{i+1}, C_i, C_{i+2}, ..., C_j, ..., C_n) =$$

$$(-1)^2\det(C_1, ..., C_{i+1}, C_{i+2}, C_i, ..., C_j, ..., C_n) =$$

$$(-1)^{j-i-1}\det(C_1, ..., C_{i+1}, C_{i+2}, ..., C_{j-1}, C_i, C_j, ..., C_n) = 0$$

d'après la propriété (P_1) et la condition (c_3).

$\square$

Démonstration.

(P_3) **D'après la propriété** (P_2)**, on sait que** $\det(C_1, ..., C_{i-1}, C_i + C_j, ..., C_{i+1}, ..., C_{j-1}, C_i + C_j, C_{j+1}, ..., C_n) = 0.$
En utilisant la linéarité de $\det$ **par rapport à chaque colonne :**

$0 = \det(C_1, ..., C_{i-1}, C_i + C_j, C_{i+1}, ..., C_{j-1}, C_i + C_j, C_{j+1}, ..., C_n) =$
$\det(C_1, ..., C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, ..., C_{j-1}, C_i, C_{j+1}, ..., C_n)+$
$\det(C_1, ..., C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, ..., C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, ..., C_n)+$
$\det(C_1, ..., C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, ..., C_{j-1}, C_i, C_{j+1}, ..., C_n)+$
$\det(C_1, ..., C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, ..., C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, ..., C_n)$

Démonstration.

(P_3) **Donc**

$0 = \det(C_1, ..., C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, ..., C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, ..., C_n) + \det(C_1, ..., C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, ..., C_{j-1}, C_i, C_{j+1}, ..., C_n)$

d'où l'on déduit $(P3)$**.**

$\square$

Démonstration.

(P_4) **C'est une conséquence directe de la linéarité (condition** (c_2) **) de** det **par rapport aux colonnes**

$\square$

Démonstration.

(P_5) **Par linéatité par rapport à la j-ième colonne, on a**

$$\det\left(C_1, \dots, \underbrace{C_j + \sum_{i \neq j} \lambda_i C_i}_{j}, \dots, C_n\right) =$$

$$\det(C_1, \dots., \underbrace{C_j}_{j}, \dots., C_n) +$$

$$\sum \lambda_i \det(C_1, \dots., \underbrace{C_i}_{i}, \dots., \underbrace{C_i}_{j}, \dots., C_n) =$$

$$\det(C_1, \dots., \underbrace{C_j}_{j}, \dots., C_n) \quad \textbf{D'après } (P_2).$$

L'unicité est admise.

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 11 & 5 \\ 7 & -4 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 11 & 5 \\ 7 & -4 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 11 & 1 \\ 7 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \ +1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 7 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 7 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$+(-1) \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = \ 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = \ -16$$

Proposition 3

1. $\det(C_1, ..., C_i, ..., \alpha C_j + \beta C_i, ..., C_n) = \alpha \det(C_1, ..., C_i, ..., C_j, ..., C_n)$.
2. $\det(C_1, ..., C_i, ..., \alpha C_j + \gamma C_i, ..., \beta C_k + \delta C_i, ... C_n) = \alpha\beta \det(C_1, ..., C_i, ..., C_j, ..., C_k, ..., C_n)$

Corollaire 2

Si la matrice A' est le résultat d'un pivot en colonne appliqué à la matrice A alors

$$\det A' = \lambda \det A$$

avec $\lambda \neq 0$.

Proposition 4

Une matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Théorème 2

Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$, $\det(M) = \det({}^tM)$.

Théorème 3

Les propriétés $(c_1), (c_2), (c_3), (P_1), (P_2), (P_3), (P_4), (P_5)$ sont vérifiées lorsque dans l'énoncé on remplace "colonnes de la matrice" par "lignes de la matrice"

Le déterminant est donc multilinéaire par rapport aux lignes, et plus généralement toutes les propriétés relatives aux colonnes sont vraies pour les lignes.

Proposition 5

Si la matrice A' est le résultat d'un pivot (en ligne ou en colonne) appliqué à la matrice A alors

$$\det A' = \lambda \det A$$

avec $\lambda \neq 0$.

Théorème 4

$$\det(M \cdot N) = \det(M) \cdot \det(N)$$

(le déterminant est multiplicatif).

Proposition 6

Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice, on note $m_{i,j}$ les coefficients de M et $M_{i,j} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de la matrice M. On a alors :

1. **pour tout j fixé,**
$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{i,j} \det(M_{i,j})$$
("développement/colonne j").

2. **pour tout i fixé,**
$$\det(M) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{i,j} \det(M_{i,j})$$
("développement/ligne i") ;

Proposition 7

M **inversible** $\Leftrightarrow det(M) \neq 0$ **et**

$$\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}.$$

Démonstration.

$M \times M^{-1} = I_n.$

$\det(M) \cdot \det(M^{-1}) = \det(I_n) = 1.$ $\square$

Définition 1

On appelle comatrice de M la matrice :
$\mathrm{Com}(M) = [(-1)^{i+j}\det(M_{i,j})]$

Théorème 5

${}^t\mathrm{Com}(M) \times M = M \times {}^t\mathrm{Com}(M) = \det(M) I_n$.
Si M est inversible, alors

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \times {}^t\mathrm{Com}(M)$$

Calcul pratique de déterminant.

1) Jamais par les formules "brutes" de développement.
2) Utiliser le pivot.

Exemples 1

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 11 & 5 \\ 7 & -4 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 11 & 5 \\ 7 & -4 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 11 & 1 \\ 7 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \quad +1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 7 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 7 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$+(-1) \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = \ 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = \ -16$$

Nous pouvons étudier d'autres déterminants, soit :

– le déterminant d'un système de n vecteurs de E ($\dim_{\mathbb{K}} E = n$).

– le déterminant d'un endomorphisme de E ($\dim_{\mathbb{K}} E = n$).

Définition 2

Soit $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ une base de E, un espace vectoriel de dimension n. Soit $\{v_1, ..., v_n\} \in E$, un ensemble de n vecteurs de E, on note $v_j = \sum_{i=1}^{n} v_{i,j}\varepsilon_i$ l'écriture de chaque vecteur dans la base $\mathscr{B}$. On note V la matrice dont les coefficients sont les $v_{i,j}$ et

$\det_{\mathscr{B}}(v_1, v_2, \cdots, v_n) = \det(V)$.

Proposition 8

Les propriétés $(c_1), (c_2), (c_3)$ sont vérifiées par $\det_{\mathscr{B}}$.

Corollaire 3

Les propriétés $(P_1), (P_2), (P_3), (P_4), (P_5)$ sont vérifiées par $\det_{\mathscr{B}}$.

Proposition 9

1. $\det_{\mathscr{B}}(v_1, v_2, \cdots, v_n) = 0 \Leftrightarrow \ (v_1, v_2, \cdots v_n)$ n'est pas une base de E ($\mathrm{rg}(v_1, v_2, \cdots v_n) < n$).
2. $\det_{\mathscr{B}}(v_1, v_2, \cdots v_n) \neq 0 \Leftrightarrow \ (v_1, v_2, \cdots v_n)$ est une base de E.

Définition 3

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme et $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une base de E. On définit le déterminant de u dans la base $\mathscr{B}$ par

$$\det_{\mathscr{B}}(u) = \det(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)).$$

Proposition 10

$\det_{\mathscr{B}}(u)$ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$!

Démonstration.

Soit $\mathscr{B}' = (\varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon'_n)$ une autre base de E. Alors on a
$\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = P^{-1}\,\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u)P$
avec P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\det_{\mathscr{B}'}(u) &= \det\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)\right)\\
&= \det\left(P^{-1}\,\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u)P\right)\\
&= \det(P)\det\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\right)\det(P^{-1})\\
&= \det\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\right) = \det_{\mathscr{B}}(u).
\end{aligned}$$

□

Proposition 11

Soient u et v deux endomorphismes de E.

1. On a $\det(u) \neq 0$ si et seulement si u est bijectif.
2. On a $\det(u \circ v) = \det(u) \cdot \det(v)$.

Démonstration.

1. Soit $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$, une base de E. On a $\det(u) = \det_{\mathscr{B}}(u(\varepsilon_1), ..., u(\varepsilon_n)) \neq 0$ si et seulement si $(u(\varepsilon_1), ..., u(\varepsilon_n))$ est une base de E si et seulement si $Im\ u = E$ si et seulement si u est surjective si et seulement si u est bijective.
2. On a : $\det(u \circ v) = \det \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u \circ v) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)) = \det \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \det \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \det(u)\det(v)$

$\square$