L2 Informatique

Boughattas Sedki

U-Paris

31 Mars 2021

Table des matières

Table des matières

Soient $f, g :]a-\delta; a+\delta[- \{a\} \to \mathbb{R}$, "voisinage épointé de a" avec $a \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$

Soient $f, g\ :\ ]a-\delta; a+\delta[-\{a\} \to \mathbb{R}$, "voisinage épointé de a" avec $a \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$

$$ou\ ]a-\delta; a[\to \mathbb{R},$$

Soient $f, g\ :\ ]a-\delta; a+\delta[-\{a\} \to \mathbb{R}$, "voisinage épointé de a" avec $a \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$

$$ou\ ]a-\delta; a[\to \mathbb{R},$$

$$ou\ ]a, a+\delta[\to \mathbb{R},$$

Soient $f, g :]a-\delta; a+\delta[-\{a\} \to \mathbb{R}$, "voisinage épointé de a" avec $a \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$

$$ou\ ]a-\delta; a[\to \mathbb{R},$$

$$ou\ ]a, a+\delta[\to \mathbb{R},$$

On notera I l'un de ces intervalles.

Définition 1

On dit que f est **négligeable devant g au point a**

Définition 1

On dit que f est négligeable devant g au point a s'il existe une fonction ε définie sur un voisinage J de a telles que

Définition 1

On dit que f est **négligeable devant g au point a** s'il existe une fonction ε définie sur un voisinage J de a telles que :

- $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$

Définition 1

On dit que f est négligeable devant g au point a s'il existe une fonction ε définie sur un voisinage J de a telles que :

- $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ pour tout $x \neq a$ appartenant à $I \cap J$.

Définition 1

On dit que f est **négligeable devant g au point a** s'il existe une fonction ε définie sur un voisinage J de a telles que :

- $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ pour tout $x \neq a$ appartenant à $I \cap J$.
- $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Définition 1

On dit que f est **négligeable devant g au point a** s'il existe une fonction ε définie sur un voisinage J de a telles que :

- $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ pour tout $x \neq a$ appartenant à $I \cap J$.
- $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

On note $f = o_a(g)$.

Définition 2

Si f et g sont définies sur $I =]A; +\infty[$

Définition 2

Si f et g sont définies sur $I =]A; +\infty[$ (resp. $I =]-\infty, A[$),

Définition 2

Si f et g sont définies sur $I =]A; +\infty[$ (resp. $I =]-\infty, A[$), on dit que $f = o_{+\infty}(g)$

Définition 2

Si f et g sont définies sur $I =]A; +\infty[$ (resp. $I =]-\infty, A[$), on dit que $f = o_{+\infty}(g)$ (resp. $f = o_{-\infty}(g)$)

Définition 2

Si f et g sont définies sur $I =]A; +\infty[$ (resp. $I =]-\infty, A[$), on dit que $f = o_{+\infty}(g)$ (resp. $f = o_{-\infty}(g)$) si
$\exists$ ε définie sur un voisinage J de a tel que :

Définition 2

Si f et g sont définies sur $I =]A; +\infty[$ (resp. $I =]-\infty, A[$), on dit que $f = o_{+\infty}(g)$ (resp. $f = o_{-\infty}(g)$) si $\exists$ ε définie sur un voisinage J de a tel que :

- $f(x) = \varepsilon(x) g(x)$

Définition 2

Si f et g sont définies sur $I =]A; +\infty[$ (resp. $I =]-\infty, A[$), on dit que $f = o_{+\infty}(g)$ (resp. $f = o_{-\infty}(g)$) si $\exists\ \varepsilon$ définie sur un voisinage J de a tel que :

- $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ pour tout $x \neq a$ appartenant à $I \cap J$.

Définition 2

Si f et g sont définies sur $I =]A; +\infty[$ (resp. $I =]-\infty, A[$), on dit que $f = o_{+\infty}(g)$ (resp. $f = o_{-\infty}(g)$) si
$\exists$ ε définie sur un voisinage J de a tel que :

- $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ pour tout $x \neq a$ appartenant à $I \cap J$.
- $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Remarque 1

Supposons que $a \in \mathbb{R}$

Remarque 1

Supposons que $a \in \mathbb{R}$ou bien $a = +\infty$

Remarque 1

Supposons que $a \in \mathbb{R}$ou bien $a = +\infty$ ou bien $a = -\infty$.

Remarque 1

Supposons que $a \in \mathbb{R}$ou bien $a = +\infty$ ou bien $a = -\infty$. Si g ne s'annule pour aucun $x \neq a$ appartenant à un voisinage de a,

Remarque 1

Supposons que $a \in \mathbb{R}$ou bien $a = +\infty$ ou bien $a = -\infty$. Si g ne s'annule pour aucun $x \neq a$ appartenant à un voisinage de a, alors nous avons :

Remarque 1

Supposons que $a \in \mathbb{R}$ou bien $a = +\infty$ ou bien $a = -\infty$. Si g ne s'annule pour aucun $x \neq a$ appartenant à un voisinage de a, alors nous avons :

$$f = o_a(g)$$

Remarque 1

Supposons que $a \in \mathbb{R}$ou bien $a = +\infty$ ou bien $a = -\infty$. Si g ne s'annule pour aucun $x \neq a$ appartenant à un voisinage de a, alors nous avons :

$$f = o_a(g) \Leftrightarrow$$

Remarque 1

Supposons que $a \in \mathbb{R}$ou bien $a = +\infty$ ou bien $a = -\infty$. Si g ne s'annule pour aucun $x \neq a$ appartenant à un voisinage de a, alors nous avons :

$$f = o_a(g) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0.$$

Définition 3

On dit que la suite (u_n) est négligeable devant (v_n)

Définition 3

On dit que la suite (u_n) est négligeable devant (v_n) et on note
$u_n = o(v_n)$

Définition 3

On dit que la suite (u_n) est négligeable devant (v_n) et on note
$u_n = o(v_n)$ s'il existe une suite w_n telle que

Définition 3

On dit que la suite (u_n) est négligeable devant (v_n) et on note
$u_n = o(v_n)$ s'il existe une suite w_n telle que

- $u_n = w_n v_n$

Définition 3

On dit que la suite (u_n) est négligeable devant (v_n) et on note
$u_n = o(v_n)$ s'il existe une suite w_n telle que

- $u_n = w_n v_n$
- $\lim_{n \to +\infty} w_n = 0.$

Remarque 2

Soit N un entier. Supposons que $\boldsymbol{v_n} \neq 0$ pour tout $n > N$ alors

Remarque 2

Soit N un entier. Supposons que $v_n \neq 0$ pour tout $n > N$ alors nous avons

$$u_n = o(v_n)$$

Remarque 2

Soit N un entier. Supposons que $v_n \neq 0$ pour tout $n > N$ alors nous avons

$$u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Exemples 1

1. $f = o_a(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = 0.$
2. Échelle des puissances en 0, $x^{n+1} = o_0(x^n)$ si $n \in \mathbb{N}$.
3. Échelle des puissances en $+\infty$, $x^n = o_{+\infty}(x^{n+1})$.

1. Nous allons voir très régulièrement la notation $o_0(x^n)$. Dire que $f = o_0(x^n)$ signifie que $f(x) = x^n\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
2. Croissances comparées : Si α et β sont des nombres strictement positifs, alors $x^\alpha = o_{+\infty}\left(e^{x^\beta}\right)$; $\ln^\alpha(x) = o_{+\infty}\left(x^\beta\right)$; $\ln^\alpha(x) = o_{0^+}\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$.

Proposition 1

1) Si $f = o_a(g)$ alors

Proposition 1

1) Si $f = o_a(g)$ alors $\lambda f = o_a(g)$

Proposition 1

1) Si $f = o_a(g)$ alors $\lambda f = o_a(g)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposition 1

1) Si $f = o_a(g)$ alors $\lambda f = o_a(g)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) Si $f = o_a(g)$ et $g = o_a(h)$, alors

Proposition 1

1) Si $f = o_a(g)$ alors $\lambda f = o_a(g)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2) Si $f = o_a(g)$ et $g = o_a(h)$, alors $f = o_a(h)$.

Proposition 1

1) Si $f = o_a(g)$ alors $\lambda f = o_a(g)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2) Si $f = o_a(g)$ et $g = o_a(h)$, alors $f = o_a(h)$.
3) Si $f_1 = o_a(g)$ et $f_2 = o_a(g)$, alors

Proposition 1

1) Si $f = o_a(g)$ alors $\lambda f = o_a(g)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2) Si $f = o_a(g)$ et $g = o_a(h)$, alors $f = o_a(h)$.
3) Si $f_1 = o_a(g)$ et $f_2 = o_a(g)$, alors $f_1 + f_2 = o_a(g)$.

4) Si $f_1 = o_a(g_1)$ et $f_2 = o_a(g_2)$, alors

4) Si $f_1 = o_a(g_1)$ et $f_2 = o_a(g_2)$, alors $f_1 f_2 = o_a(g_1 g_2)$.

4) Si $f_1 = o_a(g_1)$ et $f_2 = o_a(g_2)$, alors $f_1 f_2 = o_a(g_1 g_2)$.

5) Si $f = o_a(g)$ alors

4) Si $f_1 = o_a(g_1)$ et $f_2 = o_a(g_2)$, alors $f_1 f_2 = o_a(g_1 g_2)$.

5) Si $f = o_a(g)$ alors $f \cdot h = o_a(g \cdot h)$.

4) Si $f_1 = o_a(g_1)$ et $f_2 = o_a(g_2)$, alors $f_1 f_2 = o_a(g_1 g_2)$.

5) Si $f = o_a(g)$ alors $f \cdot h = o_a(g \cdot h)$.

6) Si $f = o_a(g)$

4) Si $f_1 = o_a(g_1)$ et $f_2 = o_a(g_2)$, alors $f_1 f_2 = o_a(g_1 g_2)$.
5) Si $f = o_a(g)$ alors $f \cdot h = o_a(g \cdot h)$.
6) Si $f = o_a(g)$ et h est bornée au voisinage de a, alors

4) Si $f_1 = o_a(g_1)$ et $f_2 = o_a(g_2)$, alors $f_1 f_2 = o_a(g_1 g_2)$.
5) Si $f = o_a(g)$ alors $f \cdot h = o_a(g \cdot h)$.
6) Si $f = o_a(g)$ et h est bornée au voisinage de a, alors $f\,h = o_a(g)$.

4) Si $f_1 = o_a(g_1)$ et $f_2 = o_a(g_2)$, alors $f_1 f_2 = o_a(g_1 g_2)$.

5) Si $f = o_a(g)$ alors $f \cdot h = o_a(g \cdot h)$.

6) Si $f = o_a(g)$ et h est bornée au voisinage de a, alors $f\,h = o_a(g)$.

7) Si $g = o_a(f)$

4) Si $f_1 = o_a(g_1)$ et $f_2 = o_a(g_2)$, alors $f_1 f_2 = o_a(g_1 g_2)$.

5) Si $f = o_a(g)$ alors $f \cdot h = o_a(g \cdot h)$.

6) Si $f = o_a(g)$ et h est bornée au voisinage de a, alors $f\,h = o_a(g)$.

7) Si $g = o_a(f)$ et $h = o_a(f)$

4) Si $f_1 = o_a(g_1)$ et $f_2 = o_a(g_2)$, alors $f_1 f_2 = o_a(g_1 g_2)$.

5) Si $f = o_a(g)$ alors $f \cdot h = o_a(g \cdot h)$.

6) Si $f = o_a(g)$ et h est bornée au voisinage de a, alors $f\,h = o_a(g)$.

7) Si $g = o_a(f)$ et $h = o_a(f)$ alors

4) Si $f_1 = o_a(g_1)$ et $f_2 = o_a(g_2)$, alors $f_1 f_2 = o_a(g_1 g_2)$.

5) Si $f = o_a(g)$ alors $f \cdot h = o_a(g \cdot h)$.

6) Si $f = o_a(g)$ et h est bornée au voisinage de a, alors $f\, h = o_a(g)$.

7) Si $g = o_a(f)$ et $h = o_a(f)$ alors $h = o_a(f + g)$.

Démonstration.

$\square$

Montrons la troisième propriété pour $a \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

□

Montrons la troisième propriété pour $a \in \mathbb{R}$.
$f_1(x) = \varepsilon_1(x) g(x)$ pour $x \in]a - \delta_1; a + \delta_1[- \{a\}$ et $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon_1(x) = 0$.

Démonstration.

□

Montrons la troisième propriété pour $a \in \mathbb{R}$.

$f_1(x) = \varepsilon_1(x)g(x)$ pour $x \in]a-\delta_1; a+\delta_1[-\{a\}$ et $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon_1(x) = 0$.

$f_2(x) = \varepsilon_2(x)g(x)$ pour $x \in]a-\delta_2; a+\delta_2[-\{a\}$ et $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon_2(x) = 0$.

Posons $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$, Posons $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$, si $x \in]a - \delta; a + \delta[- \{a\}$:

Posons $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$, si $x \in \left]a-\delta; a+\delta\right[- \{a\}$:

$$f_1(x) + f_2(x) = \underbrace{(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x))}_{\varepsilon(x)} g(x),$$

c-à-d

Posons $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$, si $x \in \,]a-\delta;\ a+\delta[\, - \{a\}$:

$$f_1(x) + f_2(x) = \underbrace{(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x))}_{\varepsilon(x)} g(x),$$

c-à-d $f_1(x) + f_2(x) = \varepsilon(x) g(x)$, Posons $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$, si $x \in]a-\delta; a+\delta[- \{a\}$:

$$f_1(x) + f_2(x) = \underbrace{(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x))}_{\varepsilon(x)} g(x),$$

c-à-d $f_1(x) + f_2(x) = \varepsilon(x) g(x)$, or

Posons $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$, si $x \in \left]a-\delta; a+\delta\right[- \{a\}$:

$$f_1(x) + f_2(x) = \underbrace{(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x))}_{\varepsilon(x)} g(x),$$

c-à-d $f_1(x) + f_2(x) = \varepsilon(x) g(x)$, or $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = \lim\limits_{x \to a} (\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)) = 0.$

Posons $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$, si $x \in]a-\delta; a+\delta[- \{a\}$:
$$f_1(x) + f_2(x) = \underbrace{(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x))}_{\varepsilon(x)} g(x),$$
c-à-d $f_1(x) + f_2(x) = \varepsilon(x) g(x)$, or $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = \lim\limits_{x \to a} (\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)) = 0.$

Donc

Posons $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$, si $x \in \left]a-\delta;\ a+\delta\right[- \{a\}$:

$$f_1(x) + f_2(x) = \underbrace{(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x))}_{\varepsilon(x)} g(x),$$

c-à-d $f_1(x) + f_2(x) = \varepsilon(x) g(x)$, or $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = \lim_{x \to a} (\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)) = 0$.

Donc $f_1 + f_2 = o_a(g)$.

Lien entre équivalents et la notion de fonction négligeable devant une autre :

Proposition 2

$f \underset{a}{\sim} g$

Lien entre équivalents et la notion de fonction négligeable devant une autre :

Proposition 2

$f \underset{a}{\sim} g$ *ssi*

Lien entre équivalents et la notion de fonction négligeable devant une autre :

Proposition 2

$$f \underset{a}{\sim} g \quad ssi \quad f = g + o_a(f)$$

Lien entre équivalents et la notion de fonction négligeable devant une autre :

Proposition 2

$f \underset{a}{\sim} g \quad ssi \quad f = g + o_a(f) \quad ssi$

Lien entre équivalents et la notion de fonction négligeable devant une autre :

Proposition 2

$$f \underset{a}{\sim} g \quad \text{ssi} \quad f = g + o_a(f) \quad \text{ssi} \quad f = g + o_a(g).$$

En pratique :

$$g + o_a(g) \underset{a}{\sim} g$$

Si $h_1 = o_a(g), \cdots, h_n = o_a(g)$ **alors**

$$g + h_1 + \cdots + h_n \underset{a}{\sim} g$$

Proposition 3

1. Si $u_n = o(v_n)$ alors

Proposition 3

1. Si $u_n = o(v_n)$ alors $\lambda u_n = o(v_n)$

Proposition 3

1. Si $u_n = o(v_n)$ alors $\lambda u_n = o(v_n)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposition 3

1. Si $u_n = o(v_n)$ alors $\lambda u_n = o(v_n)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors

Proposition 3

1. Si $u_n = o(v_n)$ alors $\lambda u_n = o(v_n)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.

Proposition 3

1. Si $u_n = o(v_n)$ alors $\lambda u_n = o(v_n)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
3. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors

Proposition 3

1. Si $u_n = o(v_n)$ alors $\lambda u_n = o(v_n)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
3. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = o(w_n)$.

Proposition 3

1. Si $u_n = o(v_n)$ alors $\lambda u_n = o(v_n)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
3. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = o(w_n)$.
4. Si $u_n = o(a_n)$ et $v_n = o(b_n)$, alors

Proposition 3

1. Si $u_n = o(v_n)$ alors $\lambda u_n = o(v_n)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
3. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = o(w_n)$.
4. Si $u_n = o(a_n)$ et $v_n = o(b_n)$, alors $u_n v_n = o(a_n b_n)$.

1. Si $u_n = o(v_n)$ alors

1. Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$.

1. Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$.
2. Si $u_n = o(v_n)$ et w_n est bornée, alors

1. Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$.
2. Si $u_n = o(v_n)$ et w_n est bornée, alors $u_n w_n = o(v_n)$.

Proposition 4

$u_n \sim v_n$

Proposition 4

$u_n \sim v_n$ **ssi**

Proposition 4

$$u_n \sim v_n \quad \text{ssi} \quad u_n = v_n + o(u_n)$$

Proposition 4

$u_n \sim v_n$ ssi $u_n = v_n + o(u_n)$ ssi

Proposition 4

$$u_n \sim v_n \quad \text{ssi} \quad u_n = v_n + o(u_n) \ \text{ssi} \quad u_n = v_n + o(v_n).$$

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ tel que

Soient f, g : $D \to \mathbb{R}$ tel que D est une réunion d'un nombre fini d'intervalles.

Soient f, g : $D \to \mathbb{R}$ tel que D est une réunion d'un nombre fini d'intervalles. On considère a tel que

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ tel que D est une réunion d'un nombre fini d'intervalles. On considère a tel que ou bien $a \in D$ ou bien

Soient f, g : $D \to \mathbb{R}$ tel que D est une réunion d'un nombre fini d'intervalles. On considère a tel que ou bien $a \in D$ ou bien a est une extrémité de l'un des intervalles de D.

Soient f, g : $D \to \mathbb{R}$ tel que D est une réunion d'un nombre fini d'intervalles. On considère a tel que ou bien $a \in D$ ou bien a est une extrémité de l'un des intervalles de D.

Remarquons qu'on peut avoir

Soient f, $g : D \to \mathbb{R}$ tel que D est une réunion d'un nombre fini d'intervalles. On considère a tel que ou bien $a \in D$ ou bien a est une extrémité de l'un des intervalles de D.

Remarquons qu'on peut avoir $a \in \mathbb{R}$

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ tel que D est une réunion d'un nombre fini d'intervalles. On considère a tel que ou bien $a \in D$ ou bien a est une extrémité de l'un des intervalles de D.

Remarquons qu'on peut avoir $a \in \mathbb{R}$ ou bien

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ tel que D est une réunion d'un nombre fini d'intervalles. On considère a tel que ou bien $a \in D$ ou bien a est une extrémité de l'un des intervalles de D.

Remarquons qu'on peut avoir $a \in \mathbb{R}$ ou bien $a = +\infty$

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ tel que D est une réunion d'un nombre fini d'intervalles. On considère a tel que ou bien $a \in D$ ou bien a est une extrémité de l'un des intervalles de D.

Remarquons qu'on peut avoir $a \in \mathbb{R}$ ou bien $a = +\infty$ ou bien

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ tel que D est une réunion d'un nombre fini d'intervalles. On considère a tel que ou bien $a \in D$ ou bien a est une extrémité de l'un des intervalles de D.

Remarquons qu'on peut avoir $a \in \mathbb{R}$ ou bien $a = +\infty$ ou bien $a = -\infty$.

Définition 4

On dit que f est dominée par g en a

Définition 4

On dit que f est dominée par g en a et on note $f = O_a(g)$

Définition 4

On dit que f est dominée par g en a et on note $f = O_a(g)$ lorsqu'il existe une fonction c définie sur un voisinage V de a telle que :

Définition 4

On dit que f est dominée par g en a et on note $f = O_a(g)$ lorsqu'il existe une fonction c définie sur un voisinage V de a telle que :

- $f(x) = c(x)g(x)$

Définition 4

On dit que f est dominée par g en a et on note $f = O_a(g)$ lorsqu'il existe une fonction c définie sur un voisinage V de a telle que :

- $f(x) = c(x)g(x)$ pour tout $x \neq a$ appartenant à $D \cap V$.

Définition 4

On dit que f **est dominée par** g en a et on note $f = O_a(g)$ lorsqu'il existe une fonction c définie sur un voisinage V de a telle que :

- $f(x) = c(x)g(x)$ pour tout $x \neq a$ appartenant à $D \cap V$.
- c est une fonction bornée sur D.

Remarque 3

1. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, nous avons

Remarque 3

1. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, nous avons

$$f = O_a(g)$$

Remarque 3

1. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, nous avons

$$f = O_a(g) \iff$$

Remarque 3

1. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, nous avons
$$f = O_a(g) \Leftrightarrow \frac{f}{g} \text{ est bornée}$$
au voisinage de a.

Remarque 3

1. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, nous avons
$$f = O_a(g) \Leftrightarrow \frac{f}{g} \text{ est bornée}$$
au voisinage de a.
2. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors

Remarque 3

1. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, nous avons
$$f = O_a(g) \Leftrightarrow \frac{f}{g} \text{ est bornée}$$
au voisinage de a.
2. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f = O_a(g)$.

Remarque 3

1. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, nous avons $$f = O_a(g) \iff \frac{f}{g} \text{ est bornée}$$ au voisinage de a.
2. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f = O_a(g)$.
3. Si $f = o_a(g)$, alors

Remarque 3

1. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, nous avons $$f = O_a(g) \iff \frac{f}{g} \text{ est bornée}$$ au voisinage de a.
2. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f = O_a(g)$.
3. Si $f = o_a(g)$, alors $f = O_a(g)$.

1. La terminologie peut-être trompeuse, car elle paraît sous-entendre que si f est dominée par g au voisinage de a, alors

1. La terminologie peut-être trompeuse, car elle paraît sous-entendre que si f est dominée par g au voisinage de a, alors $f \leq g$ au voisinage de a,

1. La terminologie peut-être trompeuse, car elle paraît sous-entendre que si f est dominée par g au voisinage de a, alors $f \leq g$ au voisinage de a, ce qui est loin d'être le cas.

1. La terminologie peut-être trompeuse, car elle paraît sous-entendre que si f est dominée par g au voisinage de a, alors $f \leq g$ au voisinage de a, ce qui est loin d'être le cas. Par exemple,

1. La terminologie peut-être trompeuse, car elle paraît sous-entendre que si f est dominée par g au voisinage de a, alors $f \leq g$ au voisinage de a, ce qui est loin d'être le cas. Par exemple, pour toute fonction, $2f$ est dominée par

1. La terminologie peut-être trompeuse, car elle paraît sous-entendre que si f est dominée par g au voisinage de a, alors $f \leq g$ au voisinage de a, ce qui est loin d'être le cas. Par exemple, pour toute fonction, $2f$ est dominée par f !

Définition 5

Soit f définie sur $I - \{a\}$.

Définition 5

Soit f définie sur $I - \{a\}$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au point a

Définition 5

Soit f définie sur $I - \{a\}$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au point a s'il existe un polynôme de degré $\leq n$

Définition 5

Soit f définie sur $I - \{a\}$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au point a s'il existe un polynôme de degré $\leq n$ noté $\mathrm{PP}_n(f)$

Définition 5

Soit f définie sur $I - \{a\}$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au point a s'il existe un polynôme de degré $\leq n$ noté $PP_n(f)$ tel que :

Définition 5

Soit f définie sur $I - \{a\}$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au point a s'il existe un polynôme de degré $\leq n$ noté $PP_n(f)$ tel que :

$$f(x) = PP_n(x-a) + o_a((x-a)^n)$$

C'est-à-dire

C'est-à-dire

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \ldots + \alpha_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$$

C'est-à-dire

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \ldots + \alpha_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$$

$$PP_n(f) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \ldots + \alpha_n(x-a)^n$$

C'est-à-dire

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \ldots + \alpha_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$$

$$PP_n(f) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \ldots + \alpha_n(x-a)^n$$

et

C'est-à-dire

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \ldots + \alpha_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$$

$$PP_n(f) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \ldots + \alpha_n(x-a)^n$$

et $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0.$

C'est-à-dire

$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + ... + \alpha_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$

$$PP_n(f) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + ... + \alpha_n(x-a)^n$$

et $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0.$

$PP_n(f)$ s'appelle la partie principale du développement limité d'ordre n en a.

Remarque 4

En faisant le changement de fonction

Remarque 4

En faisant le changement de fonction $g : x \to f(x+a)$

Remarque 4

En faisant le changement de fonction $g : x \to f(x+a)$ on se ramène toujours

Remarque 4

En faisant le changement de fonction $g : x \to f(x+a)$ on se ramène toujours au développement limité au point 0.

Soient $f :]a - \delta; a + \delta[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$

Soient $f :]a-\delta; a+\delta[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$

ou

Soient $f :]a-\delta; a+\delta[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$

$$ou \quad]a-\delta; a] \rightarrow \mathbb{R},$$

Soient $f :]a-\delta; a+\delta[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$

$$ou \quad]a-\delta; a] \to \mathbb{R},$$

ou

Soient $f :]a-\delta ; a+\delta[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$

$$ou \quad]a-\delta ; a] \to \mathbb{R},$$

$$ou \quad [a, a+\delta[\to \mathbb{R},$$

Soient $f :]a-\delta; a+\delta[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$

$$ou \quad]a-\delta; a] \to \mathbb{R},$$

$$ou \; [a, a+\delta[\to \mathbb{R},$$

On notera I l'un de ces intervalles.

Proposition 5

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que

Proposition 5

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o_a((x-a)^n),$$

Proposition 5

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o_a((x-a)^n), \quad \text{alors}$$

Proposition 5

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o_a((x-a)^n), \quad \text{alors}$$

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o_a((x-a)^{n+1}).$$

Taylor-Young

Soit $f : I \to \mathbb{R}$,

Taylor-Young

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, si f est n fois dérivable en a,

Taylor-Young

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, si f est n fois dérivable en a, alors on peut écrire :

Taylor-Young

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, si f est n fois dérivable en a, alors on peut écrire :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o_a((x-a)^n).$$

Taylor-Young

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, si f est n fois dérivable en a, alors on peut écrire :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o_a((x-a)^n).$$

pour x qui varie dans I

Première source de développements limités,

Première source de développements limités, la formule de Taylor-Young :

Première source de développements limités, la formule de Taylor-Young : si f est n fois dérivable en 0,

Première source de développements limités, la formule de Taylor-Young : si f est n fois dérivable en 0, alors f admet un développement limité à l'ordre n en 0 donné par

Première source de développements limités, la formule de Taylor-Young : si f est n fois dérivable en 0, alors f admet un développement limité à l'ordre n en 0 donné par

$$f(x) =$$

Première source de développements limités, la formule de Taylor-Young : si f est n fois dérivable en 0, alors f admet un développement limité à l'ordre n en 0 donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

Exemples 2

1. e^x **admet un développement limité à l'ordre** n **en** 0 **pour tout** $n \in \mathbb{N}$ **donné par**

$$e^x =$$

Exemples 2

1. e^x **admet un développement limité à l'ordre** n **en** 0 **pour tout** $n \in \mathbb{N}$ **donné par**

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

Exemples 2

1. e^x **admet un développement limité à l'ordre** n **en** 0 **pour tout** $n \in \mathbb{N}$ **donné par**

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

car $x \to e^x$ **est de classe** C^∞ **sur** $\mathbb{R}$

Exemples 2

1. e^x **admet un développement limité à l'ordre** n **en** 0 **pour tout** $n \in \mathbb{N}$ **donné par**

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

car $x \to e^x$ **est de classe** C^∞ **sur** $\mathbb{R}$ **et de dérivées** e^x**.**

1. $(1+x)^{\alpha}$ **est dérivable en** 0 **de dérivée** $\alpha(1+X)^{\alpha-1}$

1. $(1+x)^{\alpha}$ **est dérivable en** 0 **de dérivée** $\alpha(1+X)^{\alpha-1}$ **et est dérivable à l'ordre** k **au voisinage de** 0**, pour tout** $k \in \mathbb{N}$**, de dérivée k-ième :**

1. $(1+x)^{\alpha}$ **est dérivable en** 0 **de dérivée** $\alpha(1+X)^{\alpha-1}$ **et est dérivable à l'ordre** k **au voisinage de** 0**, pour tout** $k \in \mathbb{N}$**, de dérivée k-ième :**
$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$

1. $(1+x)^{\alpha}$ **est dérivable en** 0 **de dérivée** $\alpha(1+X)^{\alpha-1}$ **et est dérivable à l'ordre** k **au voisinage de** 0**, pour tout** $k \in \mathbb{N}$**, de dérivée k-ième :**
   $\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$
   Donc $(1+x)^{\alpha}$ **admet un développement limité à l'ordre** n **en** 0**,** $\forall n \in \mathbb{N}$**,**

1. $(1+x)^\alpha$ **est dérivable en** 0 **de dérivée** $\alpha(1+X)^{\alpha-1}$ **et est dérivable à l'ordre** k **au voisinage de** 0**, pour tout** $k \in \mathbb{N}$**, de dérivée k-ième :**
$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$
Donc $(1+x)^\alpha$ **admet un développement limité à l'ordre** n **en** 0**,** $\forall n \in \mathbb{N}$**, donné par :**

1. $(1+x)^{\alpha}$ **est dérivable en** 0 **de dérivée** $\alpha(1+X)^{\alpha-1}$ **et est dérivable à l'ordre** k **au voisinage de** 0**, pour tout** $k \in \mathbb{N}$**, de dérivée k-ième :**
   $\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$
   Donc $(1+x)^{\alpha}$ **admet un développement limité à l'ordre** n **en** 0**,** $\forall n \in \mathbb{N}$**, donné par :**

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-k+1)}{k!} x^{k} + o(x^{n}).$$

1. Si $\alpha = -1$,

1. Si $\alpha = -1$, on obtient
$$\frac{1}{1+x} =$$

1. **Si $\alpha = -1$, on obtient**

$$\frac{1}{1+x} = 1 + \frac{-1}{1!}x + \frac{(-1)(-2)x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)(-2)\ldots(-n)x^n}{n!} + o(x^n) =$$

1. **Si $\alpha = -1$, on obtient**
$$\frac{1}{1+x} = 1 + \frac{-1}{1!}x + \frac{(-1)(-2)x^2}{2!} + ... + \frac{(-1)(-2)...(-n)x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n).$$

1. **Si** $\alpha = -1$, **on obtient** $\dfrac{1}{1+x} = 1 + \dfrac{-1}{1!}x + \dfrac{(-1)(-2)x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{(-1)(-2)\ldots(-n)x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + o(x^n)$.
2. **Si** $\alpha = \frac{1}{2}$,

1. Si $\alpha = -1$, on obtient
$$\frac{1}{1+x} = 1 + \frac{-1}{1!}x + \frac{(-1)(-2)x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)(-2)\ldots(-n)x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + o(x^n).$$
2. Si $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient

1. **Si** $\alpha = -1$, **on obtient** $\dfrac{1}{1+x} = 1 + \dfrac{-1}{1!}x + \dfrac{(-1)(-2)x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{(-1)(-2)\ldots(-n)x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + o(x^n)$.
2. **Si** $\alpha = \frac{1}{2}$, **on obtient** $\sqrt{1+x} =$

1. **Si** $\alpha = -1$, **on obtient** $\dfrac{1}{1+x} = 1 + \dfrac{-1}{1!}x + \dfrac{(-1)(-2)x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{(-1)(-2)\ldots(-n)x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + o(x^n)$.
2. **Si** $\alpha = \frac{1}{2}$, **on obtient** $\sqrt{1+x} = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}x^k + o(x^n)$

1. De même, en dérivant on a

1. **De même, en dérivant on a**

$$\cos(x) =$$

1. De même, en dérivant on a

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k!} + o(x^{2n})$$

1. **De même, en dérivant on a**

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k!} + o(x^{2n})$$

et

$$\sin(x) =$$

1. **De même, en dérivant on a**

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k!} + o(x^{2n})$$

et

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

Notation. $o(x^k)$ *signifie* $o_0(x^k)$.

Notation. $o(x^k)$ *signifie* $o_0(x^k)$.

Définition 6

Si $n \in \mathbb{N}$,

Notation. $o(x^k)$ *signifie* $o_0(x^k)$.

Définition 6

Si $n \in \mathbb{N}$, l'application $\mathrm{Tronc}_n : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}_n[X]$

Notation. $o(x^k)$ *signifie* $o_0(x^k)$.

Définition 6

Si $n \in \mathbb{N}$, l'application $\mathrm{Tronc}_n : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ est l'application qui à un polynôme P elle associe le polynôme Q

Notation. $o(x^k)$ *signifie* $o_0(x^k)$.

Définition 6

Si $n \in \mathbb{N}$, l'application $\mathrm{Tronc}_n : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ est l'application qui à un polynôme P elle associe le polynôme Q qui ne contient que les monômes de P

Notation. $o(x^k)$ *signifie* $o_0(x^k)$.

Définition 6

Si $n \in \mathbb{N}$, l'application $\mathrm{Tronc}_n : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ est l'application qui à un polynôme P elle associe le polynôme Q qui ne contient que les monômes de P de degré inférieur ou égal à n.

Proposition 6

1. Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0,

Proposition 6

1. Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, il est unique

Proposition 6

1. Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, il est unique ($\mathbf{PP}_n(f)$ est uniquement déterminé).

Proposition 6

1. Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, il est unique ($\mathbf{PP}_n(f)$ est uniquement déterminé).
2. Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0,

Proposition 6

1. Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, il est unique ($\mathbf{PP}_n(f)$ est uniquement déterminé).
2. Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, alors

Proposition 6

1. Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, il est unique ($\mathbf{PP}_n(f)$ est uniquement déterminé).
2. Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, alors f admet un développement limité à l'ordre k en 0

Proposition 6

1. Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, il est unique ($PP_n(f)$ est uniquement déterminé).
2. Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, alors f admet un développement limité à l'ordre k en 0 pour tout $k \leq n$,

Proposition 6

1. Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, il est unique ($\mathbf{PP}_n(f)$ est uniquement déterminé).
2. Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, alors f admet un développement limité à l'ordre k en 0 pour tout $k \leq n$, et $\mathbf{PP}_k(f) = \mathbf{Tronc}_k(\mathbf{PP}_n(f))$.

1. $\lim\limits_{x \to a} f = \ell$

1. $\lim\limits_{x \to a} f = \ell$ si et seulement si

1. $\lim_{x \to a} f = \ell$ si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 0 au point 0

1. $\lim\limits_{x \to a} f = \ell$ si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 0 au point 0 dont le premier terme est ℓ.

1. $\lim\limits_{x \to a} f = \ell$ si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 0 au point 0 dont le premier terme est ℓ.
2. f est continue en 0

1. $\lim_{x \to a} f = \ell$ si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 0 au point 0 dont le premier terme est ℓ.
2. f est continue en 0 $\Leftrightarrow$

1. $\lim_{x \to a} f = \ell$ si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 0 au point 0 dont le premier terme est ℓ.
2. f est continue en 0 $\Leftrightarrow$ f

1. $\lim\limits_{x \to a} f = \ell$ si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 0 au point 0 dont le premier terme est ℓ.
2. f est continue en 0 $\Leftrightarrow$ f admet un développement limité d'ordre 0 au point 0

1. $\lim\limits_{x \to a} f = \ell$ si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 0 au point 0 dont le premier terme est ℓ.
2. f est continue en 0 $\Leftrightarrow$ f admet un développement limité d'ordre 0 au point 0 dont le premier terme est $f(0)$.

1. f est dérivable en 0

1. f est dérivable en 0 $\Leftrightarrow$

1. f est dérivable en 0 $\Leftrightarrow$ f

1. f est dérivable en 0 $\Leftrightarrow$ f admet un développement limité à l'ordre 1 au point 0.

1. f est dérivable en 0 $\Leftrightarrow$ f admet un développement limité à l'ordre 1 au point 0.
2. Reformulation de Taylor-Young :

1. f est dérivable en 0 $\Leftrightarrow$ f admet un développement limité à l'ordre 1 au point 0.
2. Reformulation de Taylor-Young : si f est n fois dérivable en 0,

1. f est dérivable en 0 $\Leftrightarrow$ f admet un développement limité à l'ordre 1 au point 0.
2. Reformulation de Taylor-Young : si f est n fois dérivable en 0, alors

1. f est dérivable en 0 $\Leftrightarrow$ f admet un développement limité à l'ordre 1 au point 0.
2. Reformulation de Taylor-Young : si f est n fois dérivable en 0, alors f admet un développement limité d'ordre n en 0.

1. f est dérivable en 0 $\Leftrightarrow$ f admet un développement limité à l'ordre 1 au point 0.
2. Reformulation de Taylor-Young : si f est n fois dérivable en 0, alors f admet un développement limité d'ordre n en 0. Attention : si $n > 1$ la réciproque est fausse.

Proposition 7

Si f et g admettent un DL_n :

Proposition 7

Si f et g admettent un DL_n :
$f(x) = P(x) + o(x^n)$

Proposition 7

Si f et g admettent un DL_n :
$f(x) = P(x) + o(x^n)$ et
$g(x) = Q(x) + o(x^n)$

Proposition 7

Si f et g admettent un DL_n :
$f(x) = P(x) + o(x^n)$ et
$g(x) = Q(x) + o(x^n)$ avec degré de P et $Q \leq n$,

Proposition 7

Si f et g admettent un DL_n :
$f(x) = P(x) + o(x^n)$ et
$g(x) = Q(x) + o(x^n)$ avec degré de P et $Q \leq n$, alors :

Proposition 7

Si f et g admettent un DL_n :
$f(x) = P(x) + o(x^n)$ et
$g(x) = Q(x) + o(x^n)$ avec degré de P et $Q \leq n$, alors :

1. $f + g$ admet le DL_n :

Proposition 7

Si f et g admettent un DL_n :
$f(x) = P(x) + o(x^n)$ et
$g(x) = Q(x) + o(x^n)$ avec degré de P et $Q \leq n$, alors :

1. $f + g$ admet le DL_n :
$f(x) + g(x) = P(x) + Q(x) + o(x^n)$.

Proposition 7

Si f et g admettent un DL_n :
$f(x) = P(x) + o(x^n)$ et
$g(x) = Q(x) + o(x^n)$ avec degré de P et $Q \leq n$, alors :

1. $f + g$ admet le DL_n :
   $f(x) + g(x) = P(x) + Q(x) + o(x^n)$.
2. $f \cdot g$ admet le DL_n :

Proposition 7

Si f et g admettent un DL_n :
$f(x) = P(x) + o(x^n)$ et
$g(x) = Q(x) + o(x^n)$ avec degré de P et $Q \leq n$, alors :

1. $f + g$ admet le DL_n :
$f(x) + g(x) = P(x) + Q(x) + o(x^n)$.
2. $f \cdot g$ admet le DL_n :
$f(x) \cdot g(x) = \mathbf{Tronc}_n(P(x) \cdot Q(x)) + o(x^n)$.

1. Si $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$,

1. Si $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, alors

1. Si $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, alors
$g \circ f(x) = \text{Tronc}_n[Q(P(x))] + o(x^n)$.

Exemples 3

Posons $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \sqrt{1+x}$.

Exemples 3

Posons $f(x) = \sin(x)$ **et** $g(x) = \sqrt{1+x}$.

On a $f(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.

Exemples 3

Posons $f(x) = \sin(x)$ **et** $g(x) = \sqrt{1+x}$.

On a $f(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.

et

Exemples 3

Posons $f(x) = \sin(x)$ **et** $g(x) = \sqrt{1+x}$.

On a $f(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.

et $g(x) = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} + o(x^3)$

Exemples 3

Posons $f(x) = \sin(x)$ **et** $g(x) = \sqrt{1+x}$**.**

On a $f(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

et $g(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$ **alors :**

Exemples 3

Posons $f(x) = \sin(x)$ **et** $g(x) = \sqrt{1+x}$.

On a $f(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.

et $g(x) = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} + o(x^3)$ **alors :**

- $\sin(x) +$

Exemples 3

Posons $f(x) = \sin(x)$ **et** $g(x) = \sqrt{1+x}$.

On a $f(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

et $g(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$ **alors :**

- $\sin(x) + \sqrt{1+x} =$

Exemples 3

Posons $f(x) = \sin(x)$ **et** $g(x) = \sqrt{1+x}$.

On a $f(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

et $g(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$ **alors :**

- $\sin(x) + \sqrt{1+x} =$

$$x - \frac{x^3}{6} + 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3) =$$

Exemples 3

Posons $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \sqrt{1+x}$.

On a $f(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.

et $g(x) = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} + o(x^3)$ alors :

- $\sin(x) + \sqrt{1+x} =$

$$x - \frac{x^3}{6} + 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3) =$$

$$1 + \frac{3x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{5x^3}{48} + o(x^3)\,;$$

- • $\sin(x)\ \sqrt{1+x} =$

$\bullet\bullet$ $\sin(x)\ \sqrt{1+x} =$

$$\mathrm{\mathbf{Tronc}}_3\left(\left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}\right)\right) + o(x^3) =$$

$\bullet\bullet$ $\sin(x)\ \sqrt{1+x} =$
$\textbf{Tronc}_3((x-\frac{x^3}{6})(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16})) + o(x^3) =$
$\textbf{Tronc}_3(x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{16}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{48}-\frac{x^6}{96}) +$
$o(x^3) =$

•• $\sin(x)\ \sqrt{1+x} =$

$$\mathbf{Tronc}_3\left(\left(x-\frac{x^3}{6}\right)\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}\right)\right)+o(x^3) =$$

$$\mathbf{Tronc}_3\left(x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{16}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{48}-\frac{x^6}{96}\right)+ o(x^3) =$$

$$x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{8}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

•• $\sin(x)\ \sqrt{1+x} =$

$$\mathrm{Tronc}_3\left(\left(x-\frac{x^3}{6}\right)\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}\right)\right)+o(x^3) =$$

$$\mathrm{Tronc}_3\left(x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{16}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{48}-\frac{x^6}{96}\right)+$$

$$o(x^3) =$$

$$x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{8}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

$$= x+\frac{x^2}{2}-\frac{7x^3}{24}+o(x^3)\,;$$

Une autre rédaction :

$$\left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}\right) =$$

Une autre rédaction :

$$\left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}\right) =$$

$$x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} - \frac{x^3}{6} +$$

Une autre rédaction :

$$(x - \frac{x^3}{6})(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}) =$$

$$x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) =$$

Une autre rédaction :

$$\left(x-\frac{x^3}{6}\right)\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}\right)=$$

$$x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{8}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)=$$

$$=x+\frac{x^2}{2}-\frac{7x^3}{24}+o(x^3).$$

Une autre rédaction :

$$\left(x-\frac{x^3}{6}\right)\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}\right)=$$

$$x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{8}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)=$$

$$=x+\frac{x^2}{2}-\frac{7x^3}{24}+o(x^3).$$

Donc $\sin(x)\,\sqrt{1+x}=$

Une autre rédaction :

$$(x - \frac{x^3}{6})(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}) =$$
$$x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) =$$
$$= x + \frac{x^2}{2} - \frac{7x^3}{24} + o(x^3).$$

Donc $\sin(x)\ \sqrt{1+x} = x + \frac{x^2}{2} - \frac{7x^3}{24} + o(x^3)$

$\bullet\bullet\bullet\sqrt{1+\sin(x)} = g(f(x)),$

• • • $\sqrt{1+\sin(x)} = g(f(x))$, **avec**

$\bullet\bullet\bullet\sqrt{1+\sin(x)} = g(f(x))$, **avec**
$g(x) = \sqrt{1+x}$

$\bullet\bullet\bullet\sqrt{1+\sin(x)} = g(f(x))$, **avec** $g(x) = \sqrt{1+x}$ **et** $f(x) = \sin(x)$.

$\bullet\bullet\bullet \sqrt{1+\sin(x)} = g(f(x))$, **avec** $g(x) = \sqrt{1+x}$ **et** $f(x) = \sin(x)$.

On a : $\lim\limits_{0} f = 0$,

$\bullet\bullet\bullet \sqrt{1+\sin(x)} = g(f(x))$, **avec** $g(x) = \sqrt{1+x}$ **et** $f(x) = \sin(x)$.

On a : $\lim_0 f = 0$, $f(x) = \underbrace{x - \frac{x^3}{6}}_{P(x)} + o(x^3)$

$\bullet\bullet\bullet\sqrt{1+\sin(x)} = g(f(x))$, **avec** $g(x) = \sqrt{1+x}$ **et** $f(x) = \sin(x)$.

On a : $\lim_0 f = 0$, $f(x) = \underbrace{x - \frac{x^3}{6}}_{P(x)} + o(x^3)$

• • • $\sqrt{1+\sin(x)} = g(f(x))$, **avec** $g(x) = \sqrt{1+x}$ **et** $f(x) = \sin(x)$.

On a : $\lim\limits_{0} f = 0$, $f(x) = \underbrace{x - \frac{x^3}{6}}_{P(x)} + o(x^3)$

et $g(x) = \underbrace{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}}_{Q(x)} + o(x^3)$

• • • $\sqrt{1+\sin(x)} = g(f(x))$, **avec** $g(x) = \sqrt{1+x}$ **et** $f(x) = \sin(x)$.

On a : $\lim\limits_{0} f = 0$, $f(x) = \underbrace{x - \frac{x^3}{6}}_{P(x)} + o(x^3)$

et $g(x) = \underbrace{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}}_{Q(x)} + o(x^3)$

Donc $\sqrt{1+\sin(x)} =$

$\bullet\bullet\bullet \sqrt{1+\sin(x)} = g(f(x))$, **avec** $g(x) = \sqrt{1+x}$ **et** $f(x) = \sin(x)$.

On a : $\lim\limits_{0} f = 0$, $f(x) = \underbrace{x - \frac{x^3}{6}}_{P(x)} + o(x^3)$

et $g(x) = \underbrace{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}}_{Q(x)} + o(x^3)$

Donc $\sqrt{1+\sin(x)} = Tronc_3(Q(P(x))) + o(x^3)$.

Calculons $Tronc_3(Q(P(x)))$.

Calculons $Tronc_3(Q(P(x)))$.

$$P(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

Calculons $Tronc_3(Q(P(x)))$.

$$P(x) = x - \frac{x^3}{6} \text{ et } Q(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$$

Calculons $Tronc_3(Q(P(x)))$.

$$P(x) = x - \frac{x^3}{6} \textbf{ et } Q(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$$

$$Q(P(x)) = 1 + \frac{P(x)}{2} - \frac{P(x)^2}{8} + \frac{P(x)^3}{16} =$$

Calculons $Tronc_3(Q(P(x)))$.

$$P(x) = x - \frac{x^3}{6} \textbf{ et } Q(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$$

$$Q(P(x)) = 1 + \frac{P(x)}{2} - \frac{P(x)^2}{8} + \frac{P(x)^3}{16} =$$

$$1 + \frac{(x - \frac{x^3}{6})}{2} - \frac{(x - \frac{x^3}{6})^2}{8} + \frac{(x - \frac{x^3}{6})^3}{16} =$$

Calculons $Tronc_3(Q(P(x)))$.

$$P(x) = x - \frac{x^3}{6} \textbf{ et } Q(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$$

$$Q(P(x)) = 1 + \frac{P(x)}{2} - \frac{P(x)^2}{8} + \frac{P(x)^3}{16} =$$

$$1 + \frac{(x - \frac{x^3}{6})}{2} - \frac{(x - \frac{x^3}{6})^2}{8} + \frac{(x - \frac{x^3}{6})^3}{16} =$$

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} +$$

Calculons $Tronc_3(Q(P(x)))$.

$$P(x) = x - \frac{x^3}{6} \text{ et } Q(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$$

$$Q(P(x)) = 1 + \frac{P(x)}{2} - \frac{P(x)^2}{8} + \frac{P(x)^3}{16} =$$

$$1 + \frac{(x - \frac{x^3}{6})}{2} - \frac{(x - \frac{x^3}{6})^2}{8} + \frac{(x - \frac{x^3}{6})^3}{16} =$$

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + o(x^3)$$

$$Tronc_3(Q(P(x))) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48}$$

$$Tronc_3(Q(P(x))) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48}$$ **Donc**

$$Tronc_3(Q(P(x))) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48}$$ **Donc**

$$\sqrt{1+\sin(x)} =$$

$$Tronc_3(Q(P(x))) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} \textbf{ Donc}$$

$$\sqrt{1+\sin(x)} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + o(x^3)$$