Feuille d'exercices 3

***Exercice* 1 :**

(1) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ le sous-ensemble suivant est-il un sous-espaces vectoriel ?

$$E_1 = \{ (x, y) \,:\, 2x - y = 0 \}$$

(2) On considère l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. C'est un espace vectoriel réel. Le sous-ensemble suivant en est-il un sous-espaces vectoriel ?

$$E_2 = \{ f \,:\, f(0) = 1 \}$$

***Exercice* 2 :** On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$a = (1, 2, -1, -2)\ ,\ b = (2, 3, 0, -1)\ ,\ c = (1, 2, 1, 3)\ ,\ d = (1, 3, -1, 0) \text{ et } e = (4, 8, 0, 2)\ .$$

Montrer que e est une combinaison linéaire des vecteurs a, b, c, d . Le système $\{a, b, c, d\}$ est-il générateur dans $\mathbb{R}^4$? Forme-t-il une base de $\mathbb{R}^4$?

***Exercice* 3 :** Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, le vecteur $x = (2, 3, 1, 5)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs

$$a = (1, 3, 1, 2), \qquad b = (2, 5, 1, 1), \qquad c = (3, 1, 4, 2), \qquad d = (3, 2, 5, 5) \text{ ?}$$

***Exercice* 4 :** Trouver une relation de dépendance linéaire entre les quatre vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$a = (3, 1, -1), \qquad b = (-1, 1, 2), \qquad c = (1, -1, 1), \qquad d = (5, -2, 3)$$

***Exercice* 5 :** Trouver un système d'équations du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$a = (1, -1, 1, 0)\ ,\ b = (1, 1, 0, 1)\ ,\ c = (2, 0, 1, 1)\ .$$

***Exercice* 6 :** Pour chacune des suites de vecteurs suivantes, dans les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$, on indiquera s'il s'agit d'un suite libre, génératrice, d'une base ; si l'on montre que la suite est liée, on donnera une relation linéaire explicite entre les v_j. Le cas échéant, on devra discuter suivant le paramètre m.

(1) $v_1 = (2, 3, 4)\ ,\ v_2 = (-1, -5, -7)\ ,\ v_3 = (3, 1, 1)\ ,$

(2) $v_1 = (1, 2, -1, 0)\ ,\ v_2 = (4, 5, 0, 1)\ ,\ v_3 = (2, 1, 2, 1)\ ,$

(3) $v_1 = (1, -1, 2, 4)\ ,\ v_2 = (0, 3, -1, 5)\ ,\ v_3 = (-1, 0, 2, 6)\ ,$

(4) $v_1 = (4, 3, 3, 6)\ ,\ v_2 = (1, 1, -1, -2)\ ,\ v_3 = (4, 2, 10, m)\ ,$

(5) $v_1 = (1, 2, -1, -2)\ ,\ v_2 = (2, 3, 0, -1)\quad v_3 = (1, 3, -1, 0)\ ,\ v_4 = (1, 2, 1, m)\ .$

***Exercice* 7 :** Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$. On considère le sous-espace F engendré par les vecteurs $(1, 2, -1, 0)$, $(4, 8, -4, -3)$, $(0, 1, 3, 4)$ et $(2, 5, 1, 4)$. Extraire de ce système générateur de F un système de vecteurs libres.

***Exercice* 8 :** On considère l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$. Trouver une base puis donner la dimension de la partie F formée des vecteurs (x, y, z) qui vérifient l'identité $2x - y - 2z = 0$.

***Exercice* 9 :** Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, trouver une base puis donner la dimension du sous-espace vectoriel F formé des (x, y, z, t) qui vérifient $x - y = 0$ et $z - t = 0$.