Feuille d'exercices 5

Exercice 1 : Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{cases} f(e_1) &= e_1 + 2e_2 \\ f(e_2) &= e_1 + 6e_2 + 2e_3 \\ f(e_3) &= e_1 - e_3 \end{cases}$$

Donner sa matrice dans la base canonique. Déterminer une base pour $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$, préciser leurs dimension et donner un système d'équations pour $\mathrm{Im} f$.

Exercice 2 : On considère l'application $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ telle que, pour tout $p \in \mathbb{R}_3[X]$, $u(p)$ soit le polynôme $x \mapsto p(x+1) - p(x)$.

(1) Montrer que u est une application linéaire.

(2) Donner sa matrice dans la base canonique.

(3) Déterminer une base pour $\ker u$ et $\mathrm{Im} u$, préciser leurs dimension et donner un système d'équations pour $\mathrm{Im} u$.

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par :

$$f(x,y,z,t) = (2x + y + 4z, x + y + 3z + t, 3x + 2y + 7z + t, x - y - z - 3t)\,.$$

(1) Donner sa matrice dans la base canonique.

(2) Déterminer une base pour $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$, préciser leurs dimension et donner un système d'équations pour $\mathrm{Im} f$.

Exercice 4 :

On considère $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X],\ P \mapsto P - XP'$.

(1) Montrer que f est une application linéaire.

(2) Donner sa matrice dans dans la base canonique de $R_3[X]$.

(3) Déterminer son noyau et son image.

Exercice 5 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x,y) = (x + y, x - y, x + y).$$

Déterminer le noyau de f, son image. f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 6 : On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x,y,z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z).$$

(1) Donner sa matrice dans la base canonique.

(2) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

(3) Déterminer une base de $\ker(f)$.

(4) L'application f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 7 : On considère l'application $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (-3x - y + z,\ 8x + 3y - 2z,\ -4x - y + 2z).$$

(1) Donner sa matrice dans la base canonique.

(2) Déterminer une base du noyau de f et sa dimension.

(3) L'application f est-elle injective ?

(4) Donner le rang de f. L'application f est-elle surjective ?

(5) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

***Exercice* 8 :** Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3 \ , u(e_2) = 3e_2 \ , u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

(1) Donner sa matrice dans la base canonique.
(2) Déterminer une base de ker u. u est-il injectif ? peut-il être surjectif ? Pourquoi ?
(3) Déterminer une base de Im u. Quel est le rang de u ?
(4) Montrer que $E = \ker\ u \bigoplus \mathrm{Im}\ u$.

***Exercice* 9 :** Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \mathbb{R}^2$. On considère $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x = y = z = t\}$. Existe-t-il des applications linéaires de E dans F dont le noyau est H ?

***Exercice* 10 :** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(1) On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ représentée, dans les bases canoniques, par la matrice A. Calculer l'image par f du vecteur $(2, -1)$.
(2) On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ représentée, dans les bases canoniques, par la matrice A. Calculer l'image par f du polynôme $p(x) = 3x + 4$.

***Exercice* 11 :** On considère un espace vectoriel réel E de dimension 3 . Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E . Soit l l'application linéaire dont la matrice dans cette base est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer le noyau et l'image de l . Calculer le rang de l .
(2) Calculer la matrice de l^2 et montrer que $l^2 - 3l = 0$.

***Exercice* 12 :** On considère l'endomorphisme f_a de $\mathbb{R}^3$ représenté, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, par la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

(1) Discuter suivant le paramètre a, le rang de f_a.
(2) Déterminer le noyau et l'image de f_a.

***Exercice* 13 :** On considère un espace vectoriel réel E de dimension 3 . Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E . Soit l l'application linéaire dont la matrice dans cette base est donnée par

$$\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs $f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$ et $f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ forment un système libre dans E . Écrire dans cette nouvelle base la matrice de l'application l .

***Exercice* 14 :** Dans $\mathbb{R}^4$ on considère la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) et la suite

$$(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4).$$

(1) Montrer que cette dernière suite est une base de $\mathbb{R}^4$. Écrire les matrices de passage de la base canonique à cette nouvelle base et de cette nouvelle base à la base canonique.
(2) Soit $v = (1, -1, 3, -2)$. Calculer les coordonnées de v dans la nouvelle base.
(3) Calculer le vecteur w dont les coordonnées, dans la nouvelle base, sont : $-2, 0, 4, 1$.