Université de Paris — UFR de Mathématiques
Licence L2 Informatique — 2021-2022

Feuille d'exercices 2

Exercice 1:

Calculer les développements limités suivants :

1. $\dfrac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3 en 0 **2**. $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 en 0
3. $\sin x \cos(2x)$ à l'ordre 6 en 0 **4**. $\cos(x)\ln(1+x)$ à l'ordre 4 en 0
5. $(x^3+1)\sqrt{1-x}$ à l'ordre 3 en 0 **6**. $\big(\ln(1+x)\big)^2$ à l'ordre 4 en 0

Exercice 2:

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4 en 0 **2**. $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0
3. $\dfrac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$ à l'ordre 2 en 0 **4**. $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$ à l'ordre 3 en 0.

Exercice 3:

Calculer les développements limités suivants :

1. $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4 en 0 **2**. $\exp(\sin x)$ à l'ordre 4 en 0
3. $e^{\cos(x)}$ à l'ordre 5 en 0 **3**. $(\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5 en 0.
5. $x\big(\cosh x\big)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 4 en 0.

Exercice 4:

Calculer les développements limités suivants :

1. $\arccos x$ à l'ordre 5 en 0 **2**. $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$ à l'ordre 5 en 0.

Exercice 5:

Calculer les développements limités suivants :

1.$\frac{1}{x}$ à l'ordre 3 en 2 **2**. $\ln(x)$ à l'ordre 3 en 2

Exercice 6:

Montrer que la fonction $x \mapsto x + \ln(1+x)$ admet au voisinage de zéro une fonction réciproque et en donner un développement limité en 0 à l'ordre 3.

Exercice 7:

Calculer les développements limités suivants :

$$\mathbf{1}.\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} \text{ à l'ordre 3 en } +\infty \qquad \mathbf{2}.\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \ln x \text{ à l'ordre 4 en } +\infty$$

Exercice 8:

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{x^2 - \sin(x^2)}{x^6}$ en 0; **2.** $\dfrac{1+\ln(1+x) - e^x}{1-\cos x}$ en 0; **3.** $\left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}$ en 0;

4. $\dfrac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$ en 0; **5.** $\dfrac{\exp(\sin x) - \exp(\tan x)}{\sin x - \tan x}$ en 0; **6.** $\dfrac{x^{x^x}\ln x}{x^x - 1}$ en 0^+;

7. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}$ en 0; **8.** $\dfrac{\ln(x)}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x-1}$ en 1 **9.** $\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ en 0

10. $\dfrac{\cos(x) - 1}{\sin(x^2)}$ en 0; **11.** $\dfrac{1-\exp(-x^2)}{x(\exp(x) - \exp(-x))}$ en 0 **12.** $\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$ en $+\infty$

Exercice 9:

Déterminer la limite de la suite :

$$u_n = \sqrt{n^2 + n - 1} - \sqrt[4]{n^4 + n^3 + n + 2}$$

Exercice 10:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 et étudier la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de ce point.

Exercice 11:

A l'aide des développements limités, déterminer les asymptotes éventuelles et la position relative par rapport aux asymptotes de la courbe représentative de la fonction :

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}.$$

Exercice 12:

Prouver qu'au voisinage de $+\infty$, les courbes représentatives des fonctions suivantes admettent une asymptote dont on donnera l'équation. On précisera aussi la position de la courbe par rapport à son asymptote.

1. $f(x) = \dfrac{x\cosh(x) - \sinh(x)}{\cosh x - 1}$ **2**. $g(x) = x^2 \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

3. $h(x) = \dfrac{x+1}{1+\exp(1/x)}$ **4**. $u(x) = x\exp\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right)$

Exercice 13:

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^3}$. Déterminer $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(4)}(0)$ et $f^{(8)}(0)$.