

Feuille d'exercices 1

Exercice 1:

Montrer que si $f \underset{x_0}{\sim} \varphi$ et $g \underset{x_0}{\sim} \psi$ et si φ et ψ sont de même signe au voisinage de x_0 (strictement positives ou strictement négatives), alors $f + g \underset{x_0}{\sim} \varphi + \psi$.

Par exemple, au voisinage de $+\infty$, les fonctions $f: x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ et $g: x \mapsto x$ sont strictement positives et on a $\sqrt{1+x^2} \underset{+\infty}{\sim} x$. On en déduit que

$$x + \sqrt{1+x^2} \underset{+\infty}{\sim} 2x.$$

Exercice 2:

1. Montrer que s'il existe deux réels c_1 et c_2 tels que $c_1 + c_2 \neq 0$, $f \underset{x_0}{\sim} c_1\varphi$ et $g \underset{x_0}{\sim} c_2\varphi$, alors $f + g \underset{x_0}{\sim} (c_1 + c_2)\varphi$.
2. Montrer que s'il existe deux réels c_1 et c_2 tels que $c_1 + c_2 = 0$, $f \underset{x_0}{\sim} c_1\varphi$ et $g \underset{x_0}{\sim} c_2\varphi$, alors $f + g = o_{x_0}(\varphi)$.

Par exemple, on a $x^2 - 3x \underset{0}{\sim} -3x$ et $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ donc $x^2 - 3x + \sin(x) \underset{0}{\sim} 2x$ et $x^2 - 3x + 3\sin(x) = o_0(x)$.

Exercice 3:

1. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \ln(x^2 + 1) - \ln(x)$.
2. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \ln(x^2 + 1) - 2\ln(x)$.

Exercice 4:

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{1/\sin(x)}$.

Exercice 5:

Quels sont les équivalents corrects parmi les propositions suivantes?

- | | | |
|--|---|--|
| 1. $n \sim_{+\infty} n + 1$ | 2. $n^2 \sim_{+\infty} n^2 + n$ | 3. $\ln(n) \sim_{+\infty} \ln(10^6 n)$ |
| 4. $\exp(n) \sim_{+\infty} \exp(n + 10^{-6})$ | 5. $\exp(n) \sim_{+\infty} \exp(2n)$ | 6. $\ln(n) \sim_{+\infty} \ln(n + 1)$. |

Exercice 6:

Trouver un équivalent le plus simple possible aux suites suivantes :

- | | |
|---|---|
| 1. $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$ | 2. $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ |
| 3. $w_n = \frac{n^3 - \sqrt{1+n^2}}{\ln n - 2n^2}$ | 4. $z_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$. |

Exercice 7:

Déterminer un équivalent le plus simple possible des fonctions suivantes :

- | | |
|---|--|
| 1. $x + 1 + \ln x$ en 0 et en $+\infty$ | 2. $\cos(\sin x)$ en 0 |
| 3. $\cosh(\sqrt{x})$ en $+\infty$ | 4. $\frac{\sin x \ln(1+x^2)}{x \tan x}$ en 0 |
| 5. $\ln(\sin x)$ en 0 | 6. $\ln(\cos x)$ en 0 |

Exercice 8:

Classer les suites suivantes par ordre de "négligeabilité" :

$$\begin{array}{lll} a_n = \frac{1}{n} & b_n = \frac{1}{n^2} & c_n = \frac{\ln n}{n} \\ e_n = n & f_n = 1 & g_n = \sqrt{n e^n}. \end{array}$$

Exercice 9:

Classer les fonctions suivantes par ordre de négligeabilité en $+\infty$:

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \exp(x), \quad f_3(x) = \frac{1}{x}, \quad f_4(x) = 2, \quad f_5(x) = \ln(x), \quad f_6(x) = \sqrt{x} \ln x, \quad f_7(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}}.$$

Exercice 10:

Application des équivalents pour déterminer des limites

1. Démontrer que

$$\ln(1+x) + x^2 \sim_0 x \text{ et } x^2 + x^3 \sim_0 x^2.$$

En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) + x^2}{x^2 + x^3}$.

2. Démontrer que

$$\sin(2x) \sim_0 2x \text{ et } \tan(3x) \sim_0 3x.$$

En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2x)}{\tan(3x)}$.

Exercice 11:

En utilisant (éventuellement) des équivalents, déterminer les limites suivantes :

- | | |
|---|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + 2x)}{x^2 - x^4}$ | 2. $\lim_{x \rightarrow 0} x(3 + x) \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x} \sin(\sqrt{x})}$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\tan(6x)}$ | 4. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln(\sin^2 x)}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{1 - \cos 2x}$ | 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x+1} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right)$ |
| 7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{1}{x^2}\right) - \exp\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)$ | 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$ |
| 9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \arctan x}{x \tan x}$ | |

Exercice 12:

Comparer les fonctions suivantes (o ou O ?):

1. $x \ln x$ et $\ln(1 + 2x)$ au voisinage de 0;
2. $x \ln x$ et $\sqrt{x^2 + 3x} \ln(x^2) \sin x$ au voisinage de $+\infty$;

Exercice 13:

Pour chacune des fonctions suivantes déterminer un équivalent et la limite au point indiqué.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 + x - 2})$
2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 2x - 3}$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6}{x^2 - 4}$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2^x)^{\frac{1}{2}}$
5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 8}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\sqrt{1 + x + x^2} - 1 \right)$,
7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x}$
8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + e^x}{3x^3 + 1}$
9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$
10. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(\sqrt{1+x} - 1)$
11. $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \ln(x + \sqrt{x})$
12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x \ln x}$
13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}$
14. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(3x+1)}{2x}$
15. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{\ln(x+1)}$
16. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x+1} \ln\left(\frac{x^3+4}{1-x^2}\right)$
17. $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)^2 \ln(x^3 - 8)$
18. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x^x - 1)}{\ln(x+1)}$
19. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - x \ln(x+2))$
20. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2 - x}$
21. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\ln x}$
22. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x$
23. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3+5}{x^2+2}\right)^{\frac{x+1}{x^2+1}}$
24. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x+1}}$
25. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(1+x))^{\frac{1}{\ln x}}$
26. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{(x^{-1})}}{x^{(x^x)}}$
27. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^x}{x^{x+1}}$
28. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{\ln(x^2+1)}}{1+e^{x-3}}$
29. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{x^2 \ln x}$
30. $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^2 - 1) \ln(7x^3 + 4x^2 + 3)$