

## Feuille d'exercices 4

**Exercice 1 :** Dans  $\mathbb{R}^4$  on considère  $a_1 = (2, -2, 3, 1)$  et  $a_2 = (-1, 4, -6, -2)$ .

Trouver des vecteurs  $a_3$  et  $a_4$  tels que  $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .

**Exercice 2 :** On considère dans  $\mathbb{R}^4$  les vecteurs  $e_1 = (1, 0, 1, 0)$ ,  $e_2 = (-1, 1, 1, 1)$ ,  $e_3 = (2, 3, 4, 0)$  ainsi que  $f_1 = (-1, 2, -3, 1)$ ,  $f_2 = (-1, 2, 1, 3)$ ,  $f_3 = (-1, 2, 5, -1)$ .

Extraire de  $\{e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3\}$  une base de  $\mathbb{R}^4$ .

**Exercice 3 :** Trouver une base de l'espace vectoriel défini par le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

**Exercice 4 :** Pour chacun des sev suivants, donner une base parmi la famille génératrice donnée, la dimension et un système d'équations minimal. Compléter la base de chaque sev, s'il y a lieu, en une base de  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 3$  pour les questions 1, 2, 3,  $n = 4$  pour les questions 4, 5).

- (1)  $E = \text{Vect}((-1, 1, 1), (-1, 1, 2))$ .
- (2)  $F = \text{Vect}((2, -3, 1), (1, 2, -3), (3, -1, -2))$ .
- (3)  $G = \text{Vect}((1, 1, -2))$ .
- (4)  $H = \text{Vect}((2, -1, 2, 1), (-1, 3, 0, 1), (1, 2, 2, 2))$ .
- (5)  $K = \text{Vect}((-3, 1, 2, -1), (-3, 1, 2, 0))$ .

**Exercice 5 :** Pour chacun des sev suivants de  $\mathbb{R}^3$ , donner une base puis la dimension.

- (1)  $E = \{(2x - y, x + y, -x + y), x, y \in \mathbb{R}\}$ .
- (2)  $F = \{(x + 2y, y - 2x, y - x), x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**Exercice 6 :** Soit  $E_1$  le sous-espace de  $\mathbb{R}^4$  engendré par  $\{(1, 3, 0, 4), (2, 0, 1, 2)\}$  et  $E_2$  le sous-espace engendré par  $\{(1, 1, 2, 3), (4, -1, 0, 2)\}$ .  $E_1$  et  $E_2$  sont-ils supplémentaires dans  $\mathbb{R}^4$  ?

**Exercice 7 :** Soit  $E_1$  et  $E_2$  les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^4$  engendrés respectivement par les vecteurs  $\{(1, -1, 0, 1), (0, 2, 1, 0)\}$  et les vecteurs  $\{(0, 6, -1, 4), (3, 3, 1, 5)\}$ .

- (1) Donner une base de  $E_1 + E_2$ .
- (2) Déterminer un supplémentaire de  $E_1 + E_2$  dans  $\mathbb{R}^4$ .

**Exercice 8 :** Dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^4$  on considère l'ensemble  $E$  des  $(x, y, z, t)$  tels que  $x + y + z + t = 0$  et l'ensemble  $F$  des  $(x, y, z, t)$  tels que  $x = y = z = t$ .

- (1) Montrer que  $E$  et  $F$  sont des sous-espaces supplémentaires dans  $\mathbb{R}^4$ .
- (2) Déterminer des bases de  $E$  et de  $F$ .

**Exercice 9 :** Soit  $E$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  engendré par les vecteurs  $(1, -1, 2, 3)$ ,  $(1, 1, 2, 0)$  et  $(3, -1, 6, -6)$ , et  $F$  le sous-espace engendré par  $(0, -2, 0, -3)$ ,  $(1, 0, 1, 0)$ .

- (1) Trouver des bases de  $E, F, E \cap F, E + F$ .
- (2)  $E$  et  $F$  sont-ils des sous-espaces supplémentaires dans  $\mathbb{R}^4$  ?

**Exercice 10 :** Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  engendré par les vecteurs  $(1, 1, 1, 1)$ ,  $(1, -1, 1, -1)$  et  $(1, 3, 1, 3)$  et  $G$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  engendré par les vecteurs  $(1, 2, 0, 2)$ ,  $(1, 2, 1, 2)$  et  $(3, 1, 3, 1)$ .

- (1) Trouver des bases de  $F, G, F \cap G$  et  $F + G$ .
- (2)  $F$  et  $G$  sont-ils des sous-espaces supplémentaires dans  $\mathbb{R}^4$  ?