L2 Informatique

Boughattas Sedki

U-Paris

6 Octobre 2021

Nous allons présenter ici différents exemples d'application des développements limités :

- Étude de limites ou de formes indéterminées.
- Recherche d'équivalents.
- Position d'une courbe vis à vis de sa tangente.
- Recherche de courbes asymptotes et position respective de la courbe et de son asymptote.

DL Somme, Produit

Si f et g admettent un DL_n :
$f(x) = P(x) + o(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + o(x^n)$
avec degré de P et $Q \leq n$, alors :

1. $f + g$ admet le DL_n :
$f(x) + g(x) = P(x) + Q(x) + o(x^n)$.
2. $f \cdot g$ admet le DL_n :
$f(x) \cdot g(x) = \mathbf{Tronc}_n(P(x) \cdot Q(x)) + o(x^n)$.

DL Composition

1. Si $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, alors $g \circ f(x) = \textbf{Tronc}_n[Q(P(x))] + o(x^n)$.

Question : Donner le DL d'ordre n en 0 de la fonction $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

- Étape 1 : Déterminer p tel que $g(x) \sim \lambda x^p$ avec $\lambda \neq 0$
- Étape 2 : Utiliser les DL à l'ordre $n + p$ de f et g.
- Étape 3 : Transformer $\dfrac{f(x)}{g(x)} = F(x)\dfrac{1}{1+G(x)}$ avec $G(x)$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0.

...

Exemple 1

Déterminer le DL d'ordre 3 en 0 de la fonction

$$\frac{\ln(1+x) - \mathrm{sh}(x)}{\sin(x)}$$

- Étape 1 : $\sin(x) \sim x^{1}$.
- Étape 2 : Utilisons les DL à l'ordre $3 + 1$ des $NUM = \ln(1+x) - \mathrm{sh}(x)$ et $DEN = \sin(x)$.

- $NUM = \ln(1+x) - \mathrm{sh}(x) =$
$x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 \;\; - x - x^3/6 + o(x^4) =$
$-1/2x^2 + x^3/6 - x^4/4 + o(x^3)$.
- $DEN = \sin(x) = \;\; x - x^3/6 + o(x^4)$

$$\frac{\ln(1+x) - \mathrm{sh}(x)}{\sin(x)} =$$

$$\frac{-1/2x^2 + x^3/6 - x^4/4 + o(x^4)}{x - x^3/6 + o(x^4)}$$

- **Étape 3 : Transformer** $\dfrac{f(x)}{g(x)} = F(x)\dfrac{1}{1+G(x)}$ **avec** $G(x)$ **qui tend vers** 0 **quand** x **tend vers** 0. $\cdots$

$$\frac{\ln(1+x)-\mathrm{sh}(x)}{\sin(x)} = \frac{-1/2x^2+x^3/6-x^4/4+o(x^4)}{x-x^3/6+o(x^4)} = \frac{-1/2x+x^2/6-x^3/4+o(x^3)}{1-x^2/6+o(x^3)} = (-1/2x+x^2/6-x^3/4+o(x^3))\frac{1}{1-x^2/6+o(x^3)}.$$

$$\frac{\ln(1+x)-\mathrm{sh}(x)}{\sin(x)} =$$

$$(-1/2x+x^2/6-x^3/4+o(x^3))\frac{1}{1-x^2/6+o(x^3)} =$$

$$(-1/2x+x^2/6-x^3/4)(1+x^2/6)+o(x^3) =$$

$$-1/2x+x^2/6-x^3/3+o(x^3).$$

car

$$\frac{1}{1-x^2/6+o(x^3)} = 1+x^2/6+o(x^3)$$

$$\frac{\ln(1+x)-\mathrm{sh}(x)}{\sin(x)} = -1/2x+x^2/6-x^3/3+o(x^3)$$

On a : $\dfrac{1}{1-x^2/6+o(x^3)} = 1+x^2/6+o(x^3)$.

En effet : $\dfrac{1}{1-x^2/6+o(x^3)} = \dfrac{1}{1+u}$ **avec** $u=(-x^2/6)$ **et** $\lim\limits_{0} u(x)=0$.

On a $\dfrac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+o(x^3)$, **donc**

$$\frac{1}{1-x^2/6+o(x^3)} = 1 - (-x^2/6) + (-x^2/6)^2 - (-x^2/6)^3 + o(x^3) = 1+x^2/6+o(x^3)$$

Question : La fonction $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ admet-elle une limite lorsque x tend vers 0 ?
Ça revient à voir si la fraction admet un DL en 0 d'ordre 0.

- **Étape 1 : Déterminer p tel que $g(x) \sim \lambda x^p$ avec $\lambda \neq 0$**
- **Étape 2 : Trouver un équivalent à f en utilisant le DL à l'ordre p (de f).**
- **Étape 3 : Passer aux équivalents, ce qui donne la limite (finie ou infinie).**

Exemple 2

Déterminer la limite en 0 de la fonction $\dfrac{\sin(x^2) - \mathrm{sh}(x^2)}{\ln(1+x)^6}$

- Étape 1 : $DEN \sim x^6$. Donc $DEN = x^6 + o(x^6)$.
- Étape 2 : Trouver un équivalent au NUM en utilisant le DL à l'ordre 6 du NUM.
  Ici l'ordre 6 du DL pour le NUM est le minimum possible pour avoir la limite.

• $\sin(x) = x - x^3/6 + o(x3) \to$
$\sin(x^2) = x^2 - x^6/6 + o(x^6)$.
$\mathrm{sh}(x) = x + x^3/6 + o(x^3) \to$.
$\mathrm{sh}(x^2) = x^2 + x^6/6 + o(x^6)$.
Ce qui donne
$NUM = \sin(x^2) - \mathrm{sh}(x^2) = -\frac{1}{3}x^6 + o(x^6)$

Donc $\dfrac{\sin(x^2) - \mathrm{sh}(x^2)}{\ln(1+x)^6} \sim \dfrac{-\frac{1}{3}x^6}{x^6} \sim -\dfrac{1}{3}$, **donc**
$\lim\limits_{0} f(x) = -\dfrac{1}{3}$.

Remarque

Le DL d'ordre 5 du NUM ne permet pas de donner une limite.

- $NUM = \sin(x^2) - \text{sh}(x^2) = -\frac{1}{3}x^6 + o(x^6)$.

Donc DL d'ordre 5 du NUM :
$NUM = 0 + o(x^5)$

Donc $\dfrac{\sin(x^2) - \text{sh}(x^2)}{\ln(1+x)^6} = \dfrac{0 + o(x^5)}{x^6 + o(x^6)} = \dfrac{o(x^5)}{x^6 + o(x^6)} \sim \dfrac{o(x^5)}{x^6} = \dfrac{x^5\varepsilon(x)}{x^6} = \dfrac{\varepsilon(x)}{x}$ ne permet pas de donner une limite.

Exemple 3

La fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ admet-elle une limite lorsque x tend vers 1 ?

Les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}-1$ et $x \mapsto \sqrt[3]{x}-1$ sont dérivables à tous les ordres, respectivement, sur $]0,+\infty[$ et $\mathbb{R}^*$. Donc elles admettent un développement limité à tous les ordres, respectivement, en tout point de $]0,+\infty[$ et en tout point de $\mathbb{R}^*$.

Donc les fonctions $x \mapsto \sqrt{x} - 1$ et $x \mapsto \sqrt[3]{x} - 1$ admettent un développement limité à tout ordre au point 1. Nous poserons $x = 1 + h$ de façon à introduire une variable tendant vers 0 . Alors

$$\sqrt{x} = \sqrt{1+h} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1} h + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{1 \times 2} h^2 + o(h^2)$$

$$\text{soit } \sqrt{x} = \sqrt{1+h} = 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o(h^2) \ .$$

Remarque.

On a :
$\sqrt{x} = \sqrt{1+h} = 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o(h^2)$. Cela donne le DL de $\sqrt{x}$ en 1 à l'ordre 2 :

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + o((x-1)^2)$$

puisque $h = x - 1$

De plus $(\sqrt{x})''(1) = -\frac{1}{4}$.

De même

$$\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{1+h} = 1 + \frac{\frac{1}{3}}{1}\, h + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1\times 2}\, h^2 + o(h^2)$$

$$\text{et } \sqrt[3]{x} = 1 + \frac{h}{3} - \frac{h^2}{9} + o(h^2) \ .$$

Remarque.

On a : $\sqrt[3]{x} = 1 + \frac{h}{3} - \frac{h^2}{9} + o(h^2)$. Cela donne le DL de $\sqrt[3]{x}$ en 1 à l'ordre 2 :

$$\sqrt[3]{x} = 1 + \frac{(x-1)}{3} - \frac{(x-1)^2}{9} + o((x-1)^2) \ .$$

puisque $h = x - 1$.

De plus $(\sqrt[3]{x})''(1) = -\frac{2}{9}$.

Alors

$$\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{\frac{h}{2}-\frac{h^2}{8}+o(h^2)}{\frac{h}{3}-\frac{h^2}{9}+o(h^2)} = \frac{3}{2}\,\frac{1-\frac{h}{4}+o(h)}{1-\frac{h}{9}+o(h)}$$

On retrouve donc bien que

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{3}{2}\ .$$

Remarque.

On note que nous aurions pu nous contenter de faire un développement limité à l'ordre 1 (au point 1) de chaque fonction puisque nous aurions alors obtenu

$$\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{\frac{h}{2}+o(h)}{\frac{h}{3}+o(h)} = \frac{3}{2}\,\frac{1+o(1)}{1+o(1)}$$

.

Exemple 4

Déterminer la limite de $x(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2+x-2})$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi que l'asymptote et la position de la courbe par rapport à celle-ci.

On peut traiter cette forme indéterminée en utilisant les quantités conjuguées. Mais la notion de développement asymptotique permet de retrouver le résultat d'une façon plus efficace. Nous posons donc $h=\dfrac{1}{x}$ et h tend vers 0^+ si x tend vers $+\infty$.

Alors, comme x est positif,

$$\sqrt{x^2+x+2} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} =$$

$$x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}\ .$$

Mais l'expression $u = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} = h + 2h^2$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0 donc on peut utiliser que

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \ .$$

On a donc

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = \sqrt{1+u} = 1 + \frac{h+2h^2}{2} - \frac{h^2\,(1+2h)^2}{8} + o(h^2)$$

soit

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} = \sqrt{1+u} = 1+\frac{h}{2}+\frac{7}{8}h^2+o(h^2)$$

$$\text{et } \sqrt{x^2+x+2} = x+\frac{1}{2}+\frac{7}{8}\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x}) \ .$$

puisque $h = \dfrac{1}{x}$.

Comme
$$\sqrt{x^2+x-2} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)} = x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\ ,$$
on trouve de façon analogue
$$\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = \sqrt{1+u} =$$
$$1+\frac{h-2h^2}{2}-\frac{h^2\,(1-2h)^2}{8}+o(h^2) =$$
$$1+\frac{h}{2}-\frac{9}{8}h^2+o(h^2)$$ soit
$$\sqrt{x^2+x-2} = x+\frac{1}{2}-\frac{9}{8}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\ .$$

Donc

$$x\left(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2+x-2}\right)=$$

$$x\left(x+\frac{1}{2}+\frac{7}{8}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-x-\frac{1}{2}+\frac{9}{8}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=2+o(1) .$$

Soit

$$\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2+x-2})=2 .$$

Remarque.

On voit ici qu'un développement limité à un ordre inférieur n'aurait pas permis de conclure. On voit également que, si l'on souhaite positionner la fonction vis à vis de son asymptote horizontale ($y=2$), il est indispensable de faire un développement limité à un ordre supérieur.

Pour déterminer la position de la courbe par rapport à l'asymptote on considère l'ordre 3 en 0 ($o(h^3)$) :

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=\sqrt{1+u}=1+\frac{h}{2}+\frac{7}{8}h^2-\frac{7}{16}h^3+o(h^3)$$

$$\text{et } \sqrt{x^2+x+2}=x+\frac{1}{2}+\frac{7}{8}\frac{1}{x}-\frac{7}{16}\frac{1}{x^2}+o(\frac{1}{x^2}) \ .$$

puisque $h=\frac{1}{x}$.

De façon analogue

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = \sqrt{1+u} = 1+\frac{h}{2}-\frac{9}{8}h^2+\frac{9}{16}h^3+o(h^3)$$

soit

$$\sqrt{x^2+x-2} = x+\frac{1}{2}-\frac{9}{8}\frac{1}{x}+\frac{9}{16}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right) \; .$$

Limite, asymptote, position $+\infty$.

Donc

$$x\left(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2+x-2}\right)=$$

$$x\left(x+\frac{1}{2}+\frac{7}{8}\frac{1}{x}-\frac{7}{16}\frac{1}{x^2}\right.$$

$$\left.-x-\frac{1}{2}+\frac{9}{8}\frac{1}{x}-\frac{9}{16}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \quad .$$

Soit

$$x(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2+x-2})=2-\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad .$$

Remarque.

Ainsi la courbe est en-dessous de son asymptote horizontale ($y=2$), puisque

Exemple 5

Étudions la fonction $\operatorname{sh}(x) - \sin(\tan(x))$ lorsque x tend vers 0.

Bien sûr $\lim_{x\to 0} \operatorname{sh}(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0} \sin(\tan(x)) = 0$. Donc cette fonction tend vers 0 si x tend vers 0 . Mais peut-on trouver un équivalent à cette fonction lorsque x tend vers 0 ? Toutes ces fonctions sont impaires donc, seuls apparaîtront des termes d'ordre impair. Or

$$\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6) \ .$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6) \ .$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6) \ .$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)\ .$$
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\ .$$

Mais $u = \tan(x)$ **tend vers** 0 **quand** x **tend vers** 0**, d'où**

$$\sin(\tan(x)) = \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\right) -$$

$$\frac{\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\right)^3}{6} + \frac{\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\right)^5}{120} + o(x^6)\ .$$

.

Mais

$$\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}\right)^2=\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}\right)\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}\right)=$$

$$x^2+\frac{2}{3}x^4+\frac{17}{45}x^6+o(x^6)$$

$$\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}\right)^3=\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}\right)^2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}\right)=$$

$$\left(x^2+\frac{2}{3}x^4+\frac{17}{45}x^6\right)\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^6)\right)=x^3+x^5+o(x^6)$$

Recherche d'équivalent (suite).

$$\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}\right)^5=\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}\right)^2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}\right)^3=$$

$$\left(x^2+\frac{2}{3}x^4+\frac{17}{45}x^6\right)\ \left(x^3+x^5\right)+o(x^6)=$$

$$x^5+o(x^6)$$

Au final on a donc

$$\sin(\tan(x)) = \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} +\right) -$$

$$\frac{\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\right)^3}{6} + \frac{\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\right)^5}{120} + o(x^6) =$$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$$

soit $\sin(\tan(x)) = x + \frac{x^3}{6} + \left(\frac{2}{15} - \frac{1}{6} + \frac{1}{120}\right) x^5 + o(x^6)$.

Recherche d'équivalent (suite).

Donc

$$\sin(\tan(x)) = x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + o(x^6)\ .$$

Finalement

$$\mathrm{sh}(x) - \sin(\tan(x)) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} + o(x^6)$$

soit

$$\mathrm{sh}(x) - \sin(\tan(x)) = \frac{x^5}{30} + o(x^6)$$

Remarque.

Donc nous devions travailler à cet ordre. Et la courbe traverse sa tangente (horizontale :$y = 0$).

Remarque.

La courbe traverse sa tangente (horizontale :$y = 0$).
En effet, la courbe est au dessus de la tangente ($y = 0$) en 0^+ puisque $f(x) - 0 = \dfrac{x^5}{30} + o(x^6) > 0$ quand x tend vers 0^+ et la courbe est en-dessous de la tangente ($y = 0$) en 0^- puisque $f(x) - 0 = \frac{x^5}{30} + o(x^6) < 0$ quand x tend vers 0^-

Exemple 6

Donner un développement limité à l'ordre 6 **en** 0 **de la fonction**

$$\ln\left(1-\frac{x^2}{3}\right).$$

Déterminer l'entier naturel a **pour que**

$$\frac{\ln\left(1-\frac{x^2}{3}\right)+\frac{x^2}{3}}{x^a}$$

ait une limite finie non nulle lorsque x **tend vers** 0. **Déterminer cette limite finie.**

Comparaison **locale** de fonctions.

Exemple 7

Donner le développement limité de $f : x \mapsto \ln(\sin(x))$ en $\pi/3$ à l'ordre 3 et en déduire le positionnement du graphe vis à vis de sa tangente en ce point.

On pose donc $x = \frac{\pi}{3} + h$. **Puis**

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + h\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(h) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(h)$$

soit
$\sin\left(\frac{\pi}{3} + h\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(h) + \frac{1}{2}\sin(h)$.

Comparaison **locale** de fonctions.

Bref

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+h\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{h^2}{2}\right)+$$
$$\frac{1}{2}\left(h-\frac{h^3}{6}\right)+o(h^3)\ .$$

Donc

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+h\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{h}{2}-\frac{\sqrt{3}h^2}{4}-\frac{h^3}{12}+o(h^3)\ .$$

Il reste maintenant à composer avec la fonction logarithme. On a

$$\ln(\sin(x))=\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{h}{2}-\frac{\sqrt{3}h^2}{4}-\frac{h^3}{12}+o(h^3)\right)\ .$$

En mettant $\frac{\sqrt{3}}{2}$ en facteur :

$$\ln(\sin(x))=\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{h}{\sqrt{3}}-\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{6\sqrt{3}}+o(h^3)\right.$$

Donc $\ln(\sin(x)) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \ln(1+u)$ **avec**

$$u = \frac{h}{\sqrt{3}} - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6\sqrt{3}} + o(h^3)\ ,$$

on a

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\ .$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \ .$$

$$u = \frac{h}{\sqrt{3}} - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6\sqrt{3}} + o(h^3) \ ,$$

D'où $\ln(\sin(x)) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \ln(1+u) =$

$$\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{h}{\sqrt{3}} - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6\sqrt{3}}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{h}{\sqrt{3}} - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{h^3}{9\sqrt{3}} + o(h^3)$$

.

Bref

$$\ln(\sin(x)) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{h}{\sqrt{3}} - \frac{2h^2}{3} + \frac{4h^3}{9\sqrt{3}} + o(h^3) \ .$$

c-à-d

$$\ln(\sin(x)) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{x - \frac{\pi}{3}}{\sqrt{3}} - \frac{2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2}{3} +$$

$$\frac{4\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3}{9\sqrt{3}} + o(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3) \ .$$

$$\ln(\sin(x)) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{x-\frac{\pi}{3}}{\sqrt{3}} - \frac{2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2}{3} + \frac{4\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3}{9\sqrt{3}} + o\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3\right).$$

Remarque

Donc cette courbe a bien une tangente en $\frac{\pi}{3}$ d'équation $y = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{x-\frac{\pi}{3}}{\sqrt{3}}$ et elle est située en dessous de sa tangente au voisinage de ce point.

Remarque

La courbe est située en dessous de sa tangente au voisinage de ce point puisque

$$\ln(\sin(x)) - \left(\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{x - \frac{\pi}{3}}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2}{3} + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2\right) < 0 \ .$$

Exemple 8

Branche infinie

Soit la courbe $f(x) = \ln\left(\sqrt[3]{x^3 - x^2 + x - 1}\right)$ **. Étudier sa branche infinie en** $+\infty$ **. On introduit donc** $h = 1/x$ **. Puis**

$$g(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2 + x - 1} = x\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = x\sqrt[3]{1+u}$$

où $u = -h + h^2 - h^3$ **. Mais**

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + o(x^2) .$$

Recherche d'asymptote

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + o(x^2) \ .$$

$$u = -h + h^2 - h^3$$

En considérons le DL à l'ordre 2**, on a**

$$\sqrt[3]{1+u} = 1 + \left(-\frac{h}{3} + \frac{h^2}{3}\right) - \frac{h^2}{9} + o(h^2)$$

Recherche d'asymptote (suite)

Donc

$$g(x) = x\sqrt[3]{1+u} = \ x\left(1 - \frac{h}{3} + \frac{2h^2}{9} + o(h^2)\right).$$

Or $f(x) = \ln(g(x)) =$

$\ln(x) + \ \ln\left(1 - \frac{h}{3} + \frac{2h^2}{9} + o(h^2)\right)$ **En considérant le DL à l'ordre** 1 **on a :**

$$f(x) = \ln(x) + \ln\left(1 - \frac{h}{3} + o(h)\right)$$

soit $f(x) = \ln(x) - \frac{h}{3} + o(h) =$

$\ln(x) - \frac{1}{3x} + o(1/x)$

Position

$$f(x) = \ln(x) - \frac{1}{3x} + o(1/x)$$

La courbe de f est asymptote en $+\infty$ à la courbe de $\ln$ puisque $\lim_{+\infty}(f(x) - \ln(x)) = 0$. De plus, la courbe de f est en-dessous de $\ln$ en $+\infty$ puisque

$$f(x) - \ln(x) = -\frac{1}{3x} + o(1/x) < 0.$$