TD 2 - L2 Info

Ex 1.

1) On a $\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$ et

$-e^x \underset{0}{=} -1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - o(x^3)$ donc

$$\frac{1}{1-x} - e^x \underset{0}{=} \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$$

2) On a $(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2 - \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{6}x^3 +$

$+ \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{24}x^4 + o(x^4)$ et

$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{6}x^3 +$

$+ \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{24}x^4 + o(x^4)$ donc

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 2 - \frac{x^2}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$= 2 - \frac{x^2}{4} - \frac{5}{64}x^4 + o(x^4)$$

3) On a $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$ et

$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{45}x^6 + o(x^6)$ donc

$$\sin(x)\cos(2x) = x - \frac{13}{6}x^3 + \frac{121}{120}x^5 + o(x^6)$$

4) On a $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ et $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$

d'où

$$\cos(x)\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

5) On a $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$ et $1+x^3 = 1+x^3$

donc $(x^3+1)\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{15}{16}x^3 + o(x^3)$

6) On a $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$ donc

$$\left\{\ln(1+x)\right]^2 = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4).$$

Ex 2.

1) $$\frac{1}{1+\underbrace{x+x^2}_{X}} = 1 - \underbrace{(x+x^2)}_{X} + \underbrace{(x+x^2)}_{X}^2 - \underbrace{(x+x^2)}_{X}^3 + \underbrace{(x+x^2)}_{X}^4 + o\left(\underbrace{(x+x^2)}_{X}^4\right)$$

$$= 1 - x - \cancel{x^2} + \cancel{x^2} + 2x^3 + x^4 - x^3 - 3x^4 + x^4 + o(x^4) =$$

$$= 1 - x + x^3 - x^4 + o(x^4)$$

2) On a $\tan(x) = \sin(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)}$ et $\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-(1-\cos x)}$ et

$$\frac{1}{1-X} \underset{0}{=} 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + o(X^5)$$

On $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ d'où $X = 1 - \cos x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)$

d'où

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^5) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5).$$

Et comme $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$ on a

$$\tan(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)\right) =$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6) + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{5}{24}x^5 =$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{16}{120}x^5 + o(x^5) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

3) On a $1+\cos x = 2 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ donc

$$\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2\left(1 - \frac{x^2}{4} + o(x^3)\right)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x^2}{4} + o(x^3)\right).$$

Et comme $\sin x - 1 = -1 + x + o(x^2)$, on trouve

$$\frac{\sin x - 1}{1+\cos x} = (-1+x+o(x^2))\,\frac{1}{2}\left(1+\frac{x^2}{4}+o(x^3)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-1+x+o(x^2) - \frac{x^2}{4}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$

Remarque :

4) Cette fonction n'est pas définie en 0 mais se prolonge par continuité en 0 car $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} = 1$

On a
$$\frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)}{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^4)}{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)}$$

et
$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)} \underset{0}{=} \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right)} \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^5}{120} + o(x^3) = 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)$$

d'où
$$\frac{\ln(1+x)}{\sin x} \underset{0}{=} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right) =$$

$$\underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3) + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{12} \underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Ex3.

1) On a $\frac{\sin x}{x} \underset{0}{=} \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{x} = \underbrace{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5)}_{X}$

et $\ln(1+X) \underset{0}{=} X - \frac{X^2}{2} + o(X^2) \underset{0}{=} -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5)\right)^2$

$+ o(X^2) = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^4}{72} + o(x^4) = -\frac{x^2}{6} - \frac{1}{180}x^4 + o(x^4)$

2) On a $\sin x \underset{0}{=} \underbrace{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}_{X}$ et $\sin 0 = 0$.

On a $e^X \underset{0}{=} 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6} + \frac{X^4}{24} + o(X^4)$ d'où

$e^{\sin x} \underset{0}{=} 1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^3 +$

$+ \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 = 1 + x - \cancel{\frac{x^3}{6}} + o(x^4) + \frac{1}{2}x^2 - \frac{x^4}{6} + \cancel{\frac{1}{6}x^3} + \frac{1}{24}x^4 =$

$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$

3) On a $\cos x = \underbrace{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)}_{X}$ et $\cos 0 = 1$.

On $e^X \underset{1}{=} e \cdot e^{X-1} = e\left(1 + (X-1) + \frac{(X-1)^2}{2} + \frac{(X-1)^3}{6} + \frac{(X-1)^4}{24} + \frac{(X-1)^5}{120} + o\left((X-1)^5\right)\right)$

et $X - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ d'où

$e^{\cos x} \underset{0}{=} e\Bigg[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^3 +$

$+ \frac{1}{24}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^4 + \frac{1}{120}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^5\Bigg] =$

$= e\left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) + \frac{x^4}{8}\right] = e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^5)$

On a

4) $(\cos x)^{\sin x} = \exp(\sin x \ln(\cos x))$ ce qui nous ramène à calculer le DL de

$\sin x \ln(\cos x)$ en 0, à l'ordre 5, avec $\sin 0 \ln(\cos 0) = 0$.

On a

$$\sin x \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$$

$$\cos x \underset{0}{=} \underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}_{X}$$ et $X = 0$ quand $x = 0$.

$$\ln(1+X) \underset{0}{=} X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} + \frac{X^5}{5} + o(X^5).$$

Alors $\ln(\cos x) \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^2 =$

$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^5) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5)$$

et $\sin x \ln(\cos x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right)\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5)\right) =$

$$= -\frac{x^3}{2} - \cancel{\frac{x^5}{12}} + \cancel{\frac{x^5}{12}} + o(x^5) = \underbrace{-\frac{x^3}{2} + o(x^5)}_{X}$$

Enfin $e^X \underset{0}{=} 1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2) = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^5) \underset{0}{=} (\cos x)^{\sin x}$

5) On a $(\cosh x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{\ln(\cosh x)}{x}\right)$

avec $\cosh x \underset{0}{=} 1 + \underbrace{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}_{X}$ et

$\ln(1+X) \underset{0}{=} X - \frac{X^2}{2} + o(X^2)$ d'où $\ln(\cosh x) \underset{0}{=} \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) - \frac{x^4}{8} =$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5)$$

et $\frac{\ln(\cosh x)}{x} \underset{0}{=} \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^4)$ et $e^{\frac{\ln(\cosh x)}{x}} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}\right)^2 +$

$$+\frac{1}{6}\left(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}\right)^3+\frac{1}{24}\left(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}\right)^4+o(x^4)=$$

$$=1+\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{48}+\frac{x^4}{16\cdot 24}+o(x^4)=$$

$$=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\frac{5}{128}x^4+o(x^4)$$

Finalement $\quad x(\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{x}}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{8}-\frac{x^4}{16}+o(x^4).$

Ex 4.

1) Puisque $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=-(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ et que

$(1-x)^{-\frac{1}{2}}\underset{0}{=}1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}+o(x^2)$ on a

$-(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=-1-\frac{x^2}{2}-\frac{3}{8}x^4+o(x^4)$ et par intégration

$$\arccos x=\arccos(0)-x-\frac{x^3}{6}-\frac{3}{40}x^5+o(x^5)=\frac{\pi}{2}-x-\frac{x^3}{6}-\frac{3}{40}x^5+o(x^5)$$

2) On a $e^{t^2}\underset{0}{=}1+t^2+\frac{t^4}{2}+o(t^4)$ et donc par intégration

$$\int_0^x e^{t^2}\,dt=\int_0^x\left(1+t^2+\frac{t^4}{2}+o(t^4)\right)dt=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}+o(x^5)$$

Ex 5

1) Si $X=x-2$ on a $x=X+2$ et

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2+X}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{X}{2}\right)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{X}{2}+\frac{X^2}{4}-\frac{X^3}{8}+o(X^3)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{(x-2)}{4}+\frac{(x-2)^2}{8}-\frac{(x-2)^3}{16}+o((x-2)^3)$$

2) De même $\ln(2+x) \underset{0}{=} \ln\left(2\left(1+\frac{x}{2}\right)\right) \underset{0}{=} \ln(2) + \ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$

$\underset{0}{=} \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)$ d'où

$$\ln(x) \underset{2}{=} \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(x-2)^3}{24} + o\left((x-2)^3\right)$$

Ex 6.

Regardons $f :]-1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x + \ln(1+x)$, $f(x) = \underbrace{2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}_{P(x)} + o(x^3)$.

On a $f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x} > 0$ donc f est strictement croissante et

$\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ donc, vu que f est continue,

on a que f est bijective et admet une fonction réciproque

$g : \mathbb{R} \to]-1,+\infty[$ c-à-d $g(f(x)) = x \quad \forall x \in]-1,+\infty[$

On a aussi que $\begin{cases} f(0) = 0 \text{ et que } f \text{ est } C^\infty \\ f'(0) = 2 \neq 0 \end{cases}$. Donc f admet

un DL_n en 0 $\forall n \in \mathbb{N}$ et g aussi.

Écrivons le DL_3 de g en 0 :

$$g(x) \underset{0}{=} \underbrace{ax + bx^2 + cx^3}_{Q(x)} + o(x^3).$$

Alors $g(f(x)) = \mathrm{Tronc}_3\left(Q(P(x))\right) + o(x^3) = x$.

On a encore $g(f(x)) = aP(x) + bP(x)^2 + cP(x)^3 + o(x^3) =$

$= a\left(2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + b\left(2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)^2 + c\left(2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)^3 + o(x^3) =$

$= 2ax - a\frac{x^2}{2} + a\frac{x^3}{3} + 4bx^2 - 2bx^3 + 8cx^3 + o(x^3) =$

$= 2ax + \left(4b - \frac{a}{2}\right)x^2 + \left(\frac{a}{3} - 2b + 8c\right)x^3 + o(x^3) = x$

Par unicité du DL on a $2a = 1$, $4b = \frac{a}{2} = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{16}$

$\frac{a}{3} - 2b + 8c = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + 8c = 0$, $c = -\frac{1}{192}$.

Finalement $g(x) \underset{0}{=} \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{192}x^3 + o(x^3)$.

Ex 7.

1) $\sqrt{\frac{x+2}{x}} = \sqrt{1 + \frac{2}{x}} = \sqrt{1+2y}$ pour $y = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

On $\sqrt{1+2y} \underset{0}{=} 1 + \frac{2y}{2} - \frac{(2y)^2}{8} + \frac{(2y)^3}{16} + o(y^3) =$

$= 1 + y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{2} + o(y^3)$.

Donc $\sqrt{\frac{x+2}{x}} \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$

2) $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \ln x = \ln\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x}\right) =$

$= \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right) = \ln\left(1 + \sqrt{1+y^2}\right)$ pour $y = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

On $\sqrt{1+y^2} = 1 + \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{8} + o(y^4)$ et $\sqrt{1+0} = 1$

Comme

$\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} + o(X^4)$

on a $\ln(2+X) = \ln(2(1+\frac{X}{2})) = \ln 2 + \ln(1+\frac{X}{2})$

Donc pour $X = \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{8} + o(y^4)$

$\ln(1+\sqrt{1+y^2}) \underset{0}{=} \ln 2 + \frac{X}{2} - \frac{X^2}{8} + \frac{X^3}{24} - \frac{X^4}{64} + o(y^4) =$

$$= \ln 2 + \frac{y^2}{4} - \frac{y^4}{16} - \frac{1}{8}\frac{y^4}{4} + o(y^4)$$

$$= \ln 2 + \frac{y^2}{4} - \frac{3}{32}y^4 + o(y^4)$$

D'où $\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \ln x = \operatorname{argsh}(x) - \ln x \underset{+\infty}{=}$

$$= \ln 2 + \frac{1}{4x^2} - \frac{3}{32x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

Ex 8.

1) On doit faire un DL en 0. à l'ordre 6 au moins pour $x^2 - \sin(x^2)$ pour trouver la limite.

On a $\sin(x^2) \underset{0}{=} x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^8)$ d'où

$x^2 - \sin(x^2) \underset{0}{=} \frac{x^6}{6} + o(x^8)$ et $\frac{x^2 - \sin(x^2)}{x^6} \underset{0}{=} \frac{1}{6} + o(x^2)$

Par conséquent $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin(x^2)}{x^6} = \frac{1}{6}$.

2) On a $1 + \ln(1+x) - e^x \underset{0}{=} 1 + x - \frac{x^2}{2} - 1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$= -x^2 + o(x^2)$$

et $1 - \cos x \underset{0}{=} 1 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

Alors $\frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos x} = \frac{-x^2 + x^2\varepsilon_1(x)}{\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x)} = \frac{-1 + \varepsilon_1(x)}{\frac{1}{2} + \varepsilon_2(x)}$

avec $\varepsilon_1(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $\varepsilon_2(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Alors la limite recherchée est $\frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$.

3) $$\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right)$$

Et $$a^x = e^{x\ln a} \underset{0}{=} 1 + x\ln a + \frac{x^2\ln^2 a}{2} + o(x^2)$$
$$b^x = e^{x\ln b} \underset{0}{=} 1 + x\ln b + \frac{x^2\ln^2 b}{2} + o(x^2)$$

d'où $$\frac{a^x+b^x}{2} \underset{0}{=} 1 + \underbrace{\frac{x}{2}\ln(ab) + \frac{x^2}{4}(\ln^2 a + \ln^2 b) + o(x^2)}_{X}$$

Et $\ln(1+X) \underset{0}{=} \frac{x}{2}\ln(ab) + o(x)$ d'où

$$\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right) = \frac{\ln(ab)}{2} + \varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Et $$\exp\left(\ln(\sqrt{ab}) + \varepsilon(x)\right) \xrightarrow[x\to 0]{} \exp(\ln\sqrt{ab}) = \sqrt{ab}$$

Donc $$\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} \sqrt{ab}$$

4) On a $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln\left(\frac{1-x+2x}{1-x}\right) = \ln\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)$ avec

$\frac{2x}{1-x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Donc $\ln\left(1+\frac{2x}{1-x}\right) = \frac{2x}{1-x} + o(x)$

et $$\frac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = \frac{2x(1-x)}{2x + (1-x)x\,\varepsilon(x)} = \frac{2(1-x)}{2+(1-x)\varepsilon(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

car $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

5) On a

$$\exp(\sin x) - \exp(\tan x) = 1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3(x)}{6} + o(\sin^3 x)$$
$$- 1 - \tan x - \frac{\tan^2 x}{2} - \frac{\tan^3(x)}{6} + o(\tan^3 x)$$
$$= \cancel{1} + \cancel{x} - \cancel{\frac{x^3}{6}} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \cancel{\frac{x^3}{6}} + o(x^3) - \cancel{1} - \cancel{x} - \frac{x^3}{3} - \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) =$$
$$= -\frac{x^3}{2} + o(x^3) \quad \text{et}$$

$$\sin x - \tan x = \cancel{x} - \frac{x^3}{6} - \cancel{x} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) = -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

Alors
$$\frac{\exp(\sin x) - \exp(\tan x)}{\sin x - \tan x} = \frac{-\frac{x^3}{2} + x^3 \varepsilon_1(x)}{-\frac{x^3}{2} + x^3 \varepsilon_2(x)} = \frac{-\frac{1}{2} + \varepsilon_1(x)}{-\frac{1}{2} + \varepsilon_2(x)}$$
$$\xrightarrow[x \to 0]{} 1 \quad \text{car} \quad \varepsilon_1(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon_2(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0.$$

6) On a $x^x = e^{x \ln x} = 1 + x \ln x + o(x \ln x)$

et
$$x^{x^x} = x^{(x^x)} = e^{x^x \ln x} = e^{\ln x + x \ln^2 x + o(x \ln^2 x)} = x\, e^{x \ln^2 x + o(x \ln^2 x)} =$$
$$= x \left(1 + x \ln^2 x + o(x \ln^2 x) + o\left(x \ln^2 x + x \ln^2 x\, \varepsilon_1(x)\right)\right)$$
$$= x + x^2 \ln^2 x + o(x^2 \ln^2 x) + x \cdot x \ln^2 x\, (1 + \varepsilon_1(x))\, \varepsilon_2(x)$$
$$= x + x^2 \ln^2 x + o(x^2 \ln^2 x) \quad \text{car} \quad (1 + \varepsilon_1(x))\, \varepsilon_2(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0.$$

Donc
$$\frac{x^{x^x} \ln x}{x^x - 1} = \frac{x \ln(x) + x^2 \ln^3(x) + o(x^2 \ln^3 x)}{x \ln(x) + o(x \ln x)} =$$
$$= \frac{1 + x \ln^2(x) + o(x \ln^2 x)}{1 + \varepsilon(x)} \xrightarrow[x \to 0]{} 1 \quad \text{car} \quad \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$
$$\text{et} \quad x \ln^2(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

7) On a $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x}{x \sin x}$ et

$$\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{et} \quad x \sin x = x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

d'où
$$\frac{\sin x - x}{x \sin x} = \frac{-\frac{x}{6} - o(x)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

8) On pose $y = x-1$ d'où $x = y+1$ et

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} = g(y) = \frac{\ln(y+1)}{y^2} - \frac{1}{y}$$

Or $\ln(1+y) \underset{0}{=} y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)$ d'où

$$\frac{\ln(1+y)}{y^2} = \frac{1}{y} - \frac{1}{2} + \frac{y}{3} + o(y) \text{ et } \frac{\ln(1+y)}{y^2} - \frac{1}{y} = -\frac{1}{2} + \frac{y}{3} + o(y)$$

Alors $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x-1}{3} + o(x-1) \xrightarrow[x \to 1]{} -\frac{1}{2}$

9) $$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$$

On $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ d'où $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)$

et $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln\Big(1 \underbrace{- \frac{x^2}{6} + o(x^3)}_{X}\Big) = -\frac{x^2}{6} + o(x^3) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)^2 + o(x^4) =$

$= -\frac{x^2}{6} + o(x^3)$

Alors $\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^2} = -\frac{1}{6} + o(x)$ et $e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt[6]{e}} e^{o(x)}$

qui tend vers $\frac{1}{\sqrt[6]{e}}$ quand $x \to 0$.

On a

10) $\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ et

$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^8)$

Alors $$\frac{\cos x - 1}{\sin(x^2)} = \frac{-\frac{1}{2} + o(x^3)}{1 - o(x^3)} \xrightarrow[x \to 0]{} -\frac{1}{2}$$

On a

11) $1-\exp(-x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$

car $\exp(-x^2) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$

et $x(e^x - e^{-x}) = x\left(\cancel{1}+x+\cancel{\frac{x^2}{2}}+o(x^2) - \cancel{1} + x - \cancel{\frac{x^2}{2}} + o(x^2)\right) =$

$= x(2x + o(x^2)) = 2x^2 + o(x^3)$

Alors $\dfrac{1-\exp(-x^2)}{x(e^x - e^{-x})} = \dfrac{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{2 + o(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$

12) On a pour $y = \frac{1}{x}$ que

$f(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2-1} - \sqrt{x^2-x+1} = g(y) = \sqrt[3]{\frac{1}{y^3}+\frac{1}{y^2}-1} -$

$- \sqrt{\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y} + 1} = \dfrac{\sqrt[3]{1+y-y^3} - \sqrt{1-y+y^2}}{y}$

On $(1+y-y^3)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{y-y^3}{3} + o(y)$ et

$(1-y+y^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{-y+y^2}{2} + o(y)$

d'où $\sqrt[3]{1+y-y^3} - \sqrt{1-y+y^2} = \frac{y}{3} + \frac{y}{2} + o(y)$ et

$\dfrac{\sqrt[3]{1+y-y^3} - \sqrt{1-y+y^2}}{y} = \dfrac{5}{6} + \varepsilon(y) \xrightarrow[y\to 0]{} \dfrac{5}{6}$

Par conséquent $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \dfrac{5}{6}$

Ex 9.

On a pour $f(x) = \sqrt{x^2+x-1} - \sqrt[4]{x^4+x^3+x+2}$

que $(y = \frac{1}{x})$

$$f(x) = g(y) = \sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y}-1} - \sqrt[4]{\frac{1}{y^4}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{y}+2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+y-y^2} - \sqrt[4]{1+y+y^3+2y^4}}{y}$$

On $(1+y-y^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{y-y^2}{2} + o(y)$ et

$(1+y+y^3+2y^4)^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{y+y^3}{4} + o(y)$ donc

$$g(y) = \frac{\frac{y-y^2}{2} - \frac{y+y^3}{4} + o(y)}{y} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \varepsilon(y) = \frac{1}{4} + \varepsilon(y)$$

Donc $g(y) \xrightarrow[y\to 0]{} \frac{1}{4}$. Alors $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{4}$.

Finalement $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{4}$.

<u>Ex 10</u>:

On a $f(x) = \ln\left(2\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)\right) =$

$$= \ln 2 + \ln\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right) = \ln 2 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)^3 + o(x^3)$$

$$= \ln 2 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) = \ln 2 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Donc $y = \ln 2 + x$ est l'équation de la tangente à la courbe C_f représentative de f au point d'abscisse 0 et $f(x) - y$ a le signe de $-\frac{x^3}{6}$ au voisinage de 0. Cela signifie que la courbe C_f est d'abord au-dessus de la tangente et ensuite au-dessous de la tangente et 0 est un point d'inflexion.

Ex 11.

On pose $y = \frac{1}{x} > 0$ pour $x > 0$ et $f(x) = g(y) = \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}$

$= \frac{\sqrt{1+y^2} + \sqrt{1-y^2}}{y}$. Alors $g(y) = \frac{1 + \cancel{\frac{y^2}{2}} - \frac{y^4}{8} + 1 - \cancel{\frac{y^2}{2}} - \frac{y^4}{8} + o(y^4)}{y} =$

$\underset{0^+}{=} \frac{2}{y} - \frac{y^3}{4} + o(y^3)$. On a donc $f(x) = 2x - \frac{1}{4x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$

et $f(x) - 2x = -\frac{1}{4x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

On voit que f admet $y = 2x$ comme asymptote en $+\infty$ et que la courbe C_f est en dessous de l'asymptote car $f(x) - 2x$ a le signe de $-\frac{1}{4x^3}$ au voisinage de $+\infty$.

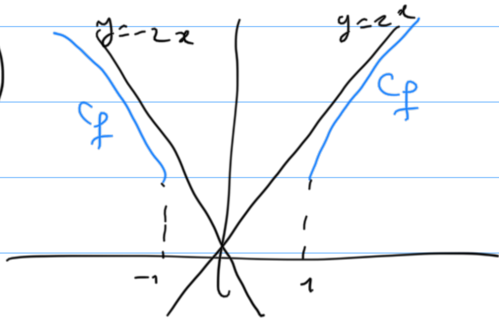
La fonction étant paire on a C_f symétrique par rapport à l'axe Oy et donc C_f admet $y = -2x$ comme asymptote en $-\infty$ et la courbe C_f est en dessous de cette asymptote aussi.

Par le calcul en $-\infty$ on obtient le même resultat :

Pour $y = \frac{1}{x} < 0$ on a en 0^- pour g :

$$f(x) = g(y) = -\frac{\sqrt{1+y^2} + \sqrt{1-y^2}}{y} = -\frac{2}{y} + \frac{y^3}{4} + o(y^3)$$

et $f(x) = -2x + \frac{1}{4x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$



Ex 12

1) On a $f(x) = \dfrac{x\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right) - \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}}{\frac{e^{x}+e^{-x}}{2} - 1} =$

$$= \frac{xe^{x}+xe^{-x}-e^{x}+e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}-2} = \frac{x+xe^{-2x}-1+e^{-2x}}{1+e^{-2x}-2e^{-x}} =$$

$$= \frac{x-1}{1-2e^{-x}+e^{-2x}} + \frac{e^{-2x}(x+1)}{(e^{-x}-1)^2} =$$

$$= (x-1)\frac{1}{1-(2e^{-x}-e^{-2x})} + \frac{e^{-2x}(x+1)}{(e^{-x}-1)^2} =$$

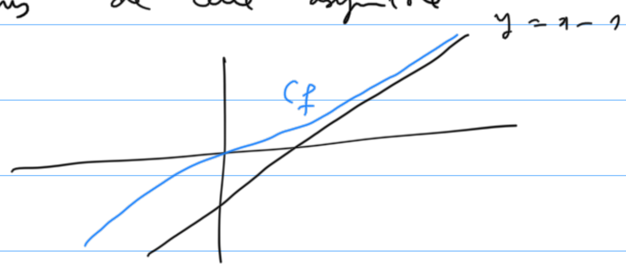
$$= (x-1)\left(1+2e^{-x}-e^{-2x}+o(e^{-x})\right)\Big) + \frac{e^{-2x}(x+1)}{(e^{-x}-1)^2}$$

$$= x-1 + (x-1)\,e^{-x}(2-e^{-x}) + x\,o(e^{-x}) + o(e^{-x}) + \frac{e^{-2x}(x+1)}{(e^{-x}-1)^2}$$

On a donc $f(x)-(x-1) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ ce qui signifie que

$y = x-1$ est asymptote de C_f au voisinage de $+\infty$.

Comme $f(x) - (x-1) = 2xe^{-x} + x\,o(e^{-x})$ qui est du signe de $2xe^{-x}$ en $+\infty$ on a que C_f est au-dessus de cette asymptote.



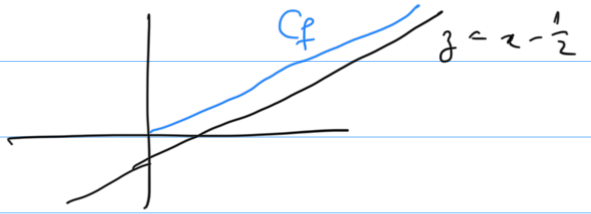
2) On pose à $y = \frac{1}{x}$ et $f(x) = x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = g(y) =$

$= \frac{1}{y^2} \ln(1+y) = \frac{y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)}{y^2} = \frac{1}{y} - \frac{1}{2} + \frac{y}{3} + o(y)$

$= x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ avec pour asymptote

$\mathcal{Y} = x - \frac{1}{2}$ en $+\infty$ et $f(x) - \mathcal{Y} = \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ qui

a le signe de $\frac{1}{3x}$ en $+\infty$, c.à.d avec $\mathcal{C}_f$ au-dessus de $\mathcal{Y}$ en $+\infty$:



3) On a pour $y = \frac{1}{x}$, $h(x) = \frac{x+1}{1+\exp(1/x)} = \frac{\frac{1}{y}+1}{1+e^y} =$

$= \frac{1+y}{y+e^y} = \left(1+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{1+e^y}\right) = \left(1+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{1+1+y+\frac{y^2}{2}+o(y^2)}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{1+\frac{y}{2}+\frac{y^2}{4}+o(y^2)} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1 - \frac{y}{2} - \cancel{\frac{y^2}{4}} + \cancel{\frac{y^2}{4}} + o(y^2)\right)$

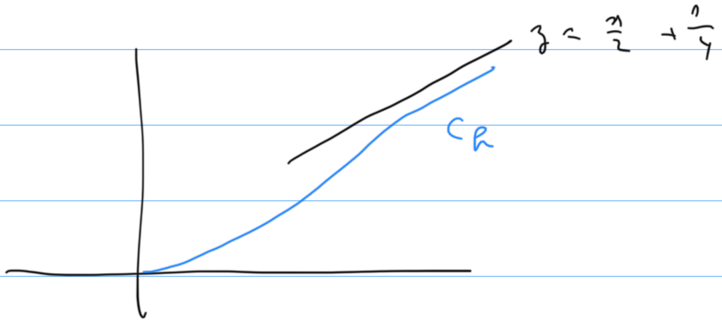
$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2y} - \frac{y}{4} - \frac{1}{4} + o(y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2y} - \frac{y}{4} + o(y)$

$= \underbrace{\frac{x}{2} + \frac{1}{4}}_{\mathcal{Y}} - \frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

Par conséquent $\mathcal{Y} = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ est asymptote de C_h en $+\infty$

et comme $h(x) - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ qui est du signe

de $-\frac{1}{4x}$ en $+\infty$ on a que C_h est au-dessous de $\mathcal{Y}$ en $+\infty$



4) Pour $y = \frac{1}{x}$ on a $u(x) = v(y) = x \exp\left(\frac{2}{x - \frac{1}{x}}\right) =$

$$= \frac{1}{y} \exp\left(\frac{2}{\frac{1}{y} - y}\right) = \frac{1}{y} \exp\left(\frac{2y}{1-y^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{y} \exp\left(2y\,(1+y^2+o(y^2))\right) = \frac{1}{y} \exp\left(2y + 2y^3 + o(y^3)\right)$$

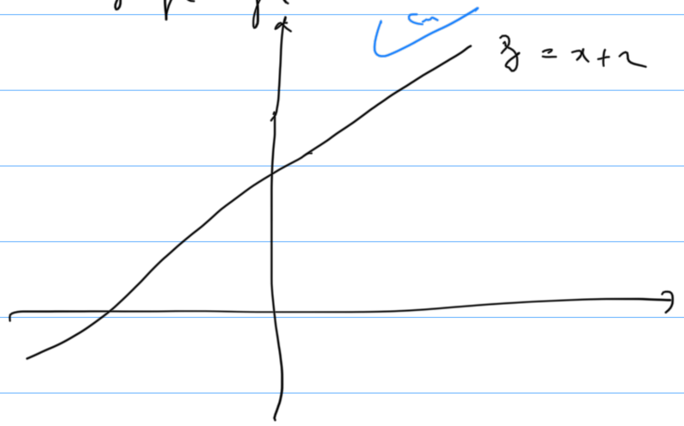
$$= \frac{1}{y}\left(1 + 2y + 2y^3 + \frac{1}{2}(2y+2y^3)^2 + o(y^2)\right) =$$

$$= \frac{1}{y} + 2 + 2y + o(y) = x + 2 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc $z = x+2$ est asymptote en $+\infty$ et

$u(x) - z = \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ est du signe de $\frac{2}{x}$ en $+\infty$, ce

qui signifie que C_u est au-dessus de z en $+\infty$



Ex 13.

On a $f(x) = x^2 \dfrac{1}{1+x^3} = x^2(1 - x^3 + x^6 + o(x^6)) =$

$= x^2 - x^5 + x^8 + o(x^8) = \dfrac{f''(0)}{2} x^2 + \dfrac{f^{(5)}(0)}{5!} x^5 + \dfrac{f^{(8)}(0)}{8!} x^8 + o(x^8)$

d'après la formule de Taylor-Young appliquée à la fonction C^∞ f.

Par unicité de la partie régulière d'un développement limité on a

$f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$, $f^{(4)}(0) = 0$, $f^{(5)}(0) = -5!$ et $f^{(8)}(0) = 8!$.