**Université de Paris Campus Grands Moulins** **Département de Sciences Exactes**
Licence L2 (S3) Algèbre et analyse élémentaires III
2020-2021 MI3

# Examen Terminal Session 2

20 janvier 2021

*Durée : 2 heures.*

*Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables. Les exercices sont indépendants entre eux. Une attention particulière sera portée à la rédaction. Rappeler les définitions ou les résultats utilisés est toujours utile en cas d'erreur de calcul.*

1. **Exercice 1**. Quel est la limite de

$$\frac{x^2 + \ln(1 - x^2)}{x^4}$$

lorsque $x$ tend vers $0$ ?

2. **Exercice 2**.
   (a) Montrer que l'expression $(x^2 - 1)\ln\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)$ est équivalente à $-x$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ . *On pourra utiliser le développements de* $\ln(1+u)$ *en* $0$ *à l'ordre* $3$*).*
   (b) Donner un développement asymptotique de l'expression

$$(x^2 - 1)\ln\left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2}\right)$$

   lorsque $x$ tend vers $+\infty$ . En déduire qu'elle admet une asymptote oblique lorsque $x$ tend vers $+\infty$ .
   (c) Quel est la position de $(x^2 - 1)\ln\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)$ vis à vis de son asymptote lorsque $x$ tend vers $+\infty$ ?

3. **Exercice 3**.
   (a) On considère le système d'équations homogènes

$$\begin{cases} x + z + 3t & = & 0 \\ -x + y + z - 3t & = & 0 \\ x - y + z + 5t & = & 0 \\ y + z - t & = & 0 \end{cases}$$

   Déterminer son rang et donner l'ensemble de ses solutions dans $\mathbb{R}^4$ .

(b) On considère le système de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ donné par

$$u_1 = (1, -1, 1, 0)\ ,\ u_2 = (0, 1, -1, 1)\ ,\ u_3 = (1, 1, 1, 1) \text{ et } u_4 = (3, -3, 5, -1)\ .$$

Soit $F$ le sous-espace vectoriel engendré par ces quatre vecteurs. Déterminer le rang du système de vecteur et la dimension de $F$ .

(c) Donner une base de $F$ .

(d) À quelle(s) condition(s) sur $(x, y, z, t)$ , le vecteur $u = (x, y, z, t)$ de $\mathbb{R}^4$ appartient-il à $F$ ?

(e) Trouver toutes les combinaisons linéaires des 4 vecteurs $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ qui soient nulles.

4. **Exercice 4**. On considère l'application linéaire $L$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ donnée (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

On note $e_1$ , $e_2$ et $e_3$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ .

(a) Déterminer $L(e_1)$ , $L(e_2)$ et $L(e_3)$ .

(b) Calculer le rang de $L$ . Donner une base de l'image de $L$ et déterminer un système d'équation définissant ce sous-espace vectoriel.

(c) Donner la dimension du noyau de $L$ . En déterminer une base.

(d) Montrer que $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$ est un supplémentaire du noyau de $L$ dans $\mathbb{R}^3$ .

(e) Quelle est la matrice $B$ de l'application $L$ dans la base $\{e_1, e_2, f\}$ où

$$f = -e_1 + 2e_2 + e_3\ ?$$

**Barème indicatif : Exercice 1 (2 points). Exercice 2 (5=3+2 points). Exercice 3 (7=2+2+1+1+1 points). Exercice 4 (7=1+2+2+1+1 points).**