MI3 Analyse

Sedki Boughattas

Année 2020-2021

Table des matières

Chapitre 1

Développements limités

1 Fonction équivalente, négligeable, par rapport à une autre fonction au voisinage d'un point

1.1 Équivalents

Définition 1.1.
- Soit $a \in \mathbb{R}$, un voisinage de a est une partie de $\mathbb{R}$ qui contient $]a-\alpha, a+\alpha[$ avec $\alpha > 0$.
- Un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) est une partie de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle $]A, +\infty[$ (resp. $]-\infty, A[$) avec $A \in \mathbb{R}$.

Soient $f, g :]a-\delta; a+\delta[- \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$, "voisinage épointé de a" avec $a \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$
ou $]a-\delta; a[\longrightarrow \mathbb{R}$,
ou $]a, a+\delta[\longrightarrow \mathbb{R}$,

On notera I l'un de ces intervalles.

Définition 1.2. On dit que f et g sont équivalentes au point a et on note $f \underset{a}{\sim} g$ s'il existe une fonction u définie sur un voisinage J de a telles que :
- $f(x) = u(x)g(x)$ pour tout x appartenant à I et $J - \{a\}$.
- $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 1$.

Définition 1.3. Si f et g sont définies sur $I =]A; +\infty[$ (resp. $]-\infty, A[$), on dit que $f \underset{+\infty}{\sim} g$ (resp. $f \underset{-\infty}{\sim} g$) si $\exists u$ définie sur un voisinage J de $+\infty$ (resp. $-\infty$) tel que :
- $f(x) = u(x)g(x)$ pour tout x appartenant à I et J.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 1$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = 1$).

Remarque 1.4. Supposons que $a \in \mathbb{R}$ ou bien $a = +\infty$ ou bien $a = -\infty$. Si g ne s'annule pour aucun $x \neq a$ appartenant à un voisinage de a, alors nous avons

$$f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1.$$

Définition 1.5. On dit que les deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes et on note $u_n \sim v_n$ s'il existe une suite w_n telle que

— $u_n = w_n v_n$

— $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 1$.

Remarque 1.6. Soit N un entier. Supposons que $v_n \neq 0$ pour tout $n > N$ alors nous avons

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Proposition 1.7.

1. $\underset{a}{\sim}$ *est une relation d'équivalence :*
   — *réflexive :* $f \underset{a}{\sim} f$;
   — *symétrique :* $f \underset{a}{\sim} g$ *alors* $g \underset{a}{\sim} f$;
   — *transitive :* $f \underset{a}{\sim} g$ *et* $g \underset{a}{\sim} h$ *alors* $f \underset{a}{\sim} h$.
2. *Soit* $\ell \neq 0$*, alors :* $\lim_a f(x) = \ell$ *ssi* $f \underset{a}{\sim} \ell$.
3. *Si* $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ *et* $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ *alors* $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$
4. *Si* f *ne s'annule pour aucun* $x \neq a$ *appartenant à un voisinage de* a*, et si* $f \underset{a}{\sim} g$ *alors il existe un voisinage de* a *sur lequel* g *ne s'annule pour aucun* $x \neq a$*, et de plus* $\frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g}$.
5. *Il est possible de composer* ***à gauche*** *des équivalents par une fonction :*
   Supposons qu'il existe un voisinage V *de* b *tel que* $h(x) \neq a$ *pour tout* $x \neq b$ *et* $x \in V$*. Si* $f \underset{a}{\sim} g$ *et si* $\lim_b h(x) = a$*, alors* $f \circ h \underset{b}{\sim} g \circ h$.

On a des propriétés analogues pour les suites.

Proposition 1.8.

1. $\sim$ *est une relation d'équivalence :*
2. *Si* $\lim u_n = \ell$ *avec* $\ell \neq 0$ *alors* $u_n \sim \ell$.
3. *Si* $a_n \sim b_n$ *et* $u_n \sim v_n$ *alors* $a_n u_n \sim b_n v_n$
4. *Si* u_n *ne s'annule à partir d'un certain rang et* $u_n \sim v_n$ *alors* v_n *ne s'annule pas à partir d'un certain rang et* $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$.
5. *Il est possible de composer* ***à gauche*** *des équivalents par une fonction :*
   S'il existe N *tel que* $x_n \neq a$ *pour* $n > N$*, si* $f \underset{a}{\sim} g$ *et si* $\lim x_n = a$*, alors* $f(x_n) \sim g(x_n)$.

Exemples 1.9.

1. Échelles des puissances en 0 :
   Pour un polynôme, l'équivalent en 0 est donné par le terme de plus bas degré du polynôme.
   — $x^2 + x + 1 \underset{0}{\sim} 1$ car $\underbrace{(x^2 + x + 1)}_{u(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1} . \underset{g(x)}{\underset{\|}{1}}$;
   — $x^2 + 3x \underset{0}{\sim} 3x$ car $\underbrace{(1 + \frac{x}{3})}_{u(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1} . \underset{g(x)}{\underset{\|}{3x}}$;
2. $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ car $\dfrac{\sin(x)}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$;
3. $1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$;
4. $tan(x) \underset{0}{\sim} x$ car $\dfrac{\sin(x)}{x} \times \dfrac{1}{\cos(x)} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$;
5. $\sqrt{|x|} + x + x^2 \underset{0}{\sim} \sqrt{|x|}$ car $\dfrac{\sqrt{|x|} + x + x^2}{\sqrt{|x|}} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$;
6. $x + x\ln(x) \underset{0^+}{\sim} x\ln(x)$ car $\dfrac{x + x\ln(x)}{x\ln(x)} = \dfrac{1}{\ln(x)} + 1 \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 1$;
7. Échelle des puissances en $\pm\infty$:
   Pour un polynôme, c'est le terme de plus haut degré qui donne un équivalent en $\pm\infty$
   $$x^2 + x + 1 \underset{\pm\infty}{\sim} x^2 \text{ et } \sqrt{x} + x + x^2 \underset{\pm\infty}{\sim} x^2$$
8. Exemple de composition à gauche : $\tan(\cos(x) - 1) \sim_0 \cos(x) - 1 \sim_0 -\frac{x^2}{2}$.

Proposition 1.10.
Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a et telles que $f \underset{a}{\sim} g$, alors soit :

— *f et g admettent la même limite (finie ou infinie) en a.*
— *aucune des deux n'admet de limite en a.*

De plus, si f admet une limite finie non nulle ℓ en a, alors $f \underset{a}{\sim} \ell$, (où ℓ désigne la fonction constante égale à ℓ).

Proposition 1.11.
Soient u_n et v_n deux suites équivalentes, alors soit :

— *u_n et v_n admettent la même limite (finie ou infinie).*

— *aucune des deux n'admet de limite.*

De plus, si u_n admet une limite finie non nulle ℓ, alors u_n est équivalente à la suite constante égale à ℓ.

ATTENTION !

1. *Nous n'avons pas le droit, en général, d'additionner les équivalents.*
   $f_1(x) = 1 + x$ *et* $f_2(x) = 1 + x^2$
   $g_1(x) = -1$ *et* $g_2(x) = -1$
   Nous avons $f_1 \underset{0}{\sim} f_2$ *et* $g_1 \underset{0}{\sim} g_2$, *et :*
   $$\begin{cases} f_1 + g_1 = x \\ f_2 + g_2 = x^2 \end{cases} \quad \text{et } x \underset{0}{\nsim} x^2.$$
2. "$f \underset{a}{\sim} 0$" signifie que f est **identiquement nulle** sur un voisinage épointé de a, ce qui est un cas peu fréquent ...
3. *Nous n'avons pas le droit, en général, de composer* ***à droite*** *des équivalents par une fonction.*
   Si $f_1 \underset{+\infty}{\sim} g_1$, *alors* $f_1^2 \underset{+\infty}{\sim} g_1^2$, *mais en général* $h \circ f_1 \underset{+\infty}{\nsim} h \circ g_1$.
   Par exemple, on a $x^2 + x \underset{+\infty}{\sim} x^2$ *mais* $e^{x^2+x} \underset{+\infty}{\nsim} e^{x^2}$ *car* $\dfrac{e^{x^2+x}}{e^{x^2}} = e^x \underset{+\infty}{\not\longrightarrow} 1$.
4. Il est par contre possible de composer **à gauche** des équivalents par une fonction : Si h ne prend pas la valeur a sur un "voisinage épointé" de b, si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $\lim_b h(x) = a$, alors $f \circ h \underset{b}{\sim} g \circ h$.

Equivalents des fonctions usuelles

Si f est une fonction dérivable au point a, alors, par définition $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} f'(a)$.
On en déduit que, si $f'(a) \neq 0$, alors $f(x) - f(a) \sim_a f'(a)(x - a)$.
Cela permet de donner des équivalents des fonctions usuelles :

$$\begin{array}{lll} \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x & e^x - 1 \underset{0}{\sim} x & (1+x)^\alpha \underset{0}{\sim} \alpha x \quad (\alpha \neq 0) \\ \sin(x) \underset{0}{\sim} x & \tan(x) \underset{0}{\sim} x & \arcsin(x) \underset{0}{\sim} x \\ \mathrm{sh}(x) \underset{0}{\sim} x & \mathrm{th}(x) \underset{0}{\sim} x & \mathrm{argsh}(x) \underset{0}{\sim} x \\ \arctan(x) \underset{0}{\sim} x & \mathrm{argth}(x) \underset{0}{\sim} x & \end{array}$$

En utilisant les formules trigonométriques

$$1 - \cos(x) = 2\left(\sin(\frac{x}{2})\right)^2 \text{ et } \mathrm{ch}(x) - 1 = 2\left(\mathrm{sh}(\frac{x}{2})\right)^2,$$

on obtient
$$1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} \text{ et } \operatorname{ch}(x) - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$
L'intérêt des équivalents est de permettre le calcul rapide de certaines limites

Exemples 1.12.

1. Déterminons la limite en 0 de la fonction $f(x) = \dfrac{\ln(1 + 2\tan(x))}{\sin(x)}$.
   On utilise les équivalents
   $$\ln(1 + 2\tan(x)) \underset{0}{\sim} 2\tan(x) \underset{0}{\sim} 2x \text{ et } \sin(x) \underset{0}{\sim} x,$$
   et on en conclut $f \underset{0}{\sim} 2$, soit $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$.
2. Déterminons la limite en $+\infty$ de la fonction $g(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.
   On a $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ et $x \times \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} x \times \frac{1}{x} = 1$. Par continuité de la fonction exponentielle, on en déduit donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = e$.

1.2 Fonction négligeable devant une autre au voisinage d'un point

Soient $f, g :]a - \delta; a + \delta[- \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$, "voisinage épointé de a" avec $a \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$
ou $]a - \delta; a[\longrightarrow \mathbb{R}$,
ou $]a, a + \delta[\longrightarrow \mathbb{R}$,

On notera I l'un de ces intervalles.

Définition 1.13. On dit que f est négligeable devant g au point a s'il existe une fonction ε définie sur un voisinage J de a telles que :
- $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ pour tout x appartenant à I et $J - \{a\}$.
- $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

On note $f = o_a(g)$.