Université de Paris | **Département de Sciences Exactes**
Licence L2 (S3) | Algèbre et analyse élémentaires III
2021-2022 | MI3

Examen Partiel

20 Novembre 2021

Durée : 3 heures.
Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices, téléphones portables et montres connectées.
Les exercices sont indépendants entre eux. Une attention particulière sera portée sur la rédaction. Toute affirmation doit être justifiée.

***Exercice* 1 :** Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(1-\cos(x))\sqrt{1+x} - x\ln(1+x)}{\sin(x)-x}$ (2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x - x^2 \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ pour $u_n = n^3\, \dfrac{\cos(\frac{1}{n})-1}{\sqrt{n^2+2n}}$

***Exercice* 2 :** On considère les vecteurs $u_1 = (-2;1;0), u_2 = (-1;1;0), u_3 = (-2;0;1)$, $u_4 = (1,-2,2)$.

On considère F le sous-espace engendré par u_1 et G le sous-espace engendré par u_2, u_3.

(1) Montrer que (u_1, u_2, u_3) forment un système libre de $\mathbb{R}^3$.

(2) Trouver une relation de dépendance linéaire entre les quatre vecteurs (u_1, u_2, u_3, u_4).

(3) Le vecteur u_4 appartient-il à F ? Appartient-il à G ?

(4) La famille $(u_1+u_2, u_2-u_3, u_3+u_1)$ est-elle libre ?

***Exercice* 3 :** On considère les vecteurs $u_1 = (0;4;1;0); u_2 = (-3;-3;0;1), v_1 = (-3;1;1;1)$, $v_2 = (6;2;-1;-2), v_3 = (3;11;2;-1)$

On considère $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + 4z + 3t = 0\}$, G le sous-espace engendré par u_1, u_2 et H le sous-espace engendré par v_1, v_2, v_3.

(1) Donner les dimensions de G et H.

(2) Donner une base de F puis sa dimension.

(3) Compléter la base trouvée de F en une base de $\mathbb{R}^4$.

(4) Donner un système d'équations de G.

(5) Montrer que $H \subset G$. A-t-on $H = G$?

***Exercice* 4 :** On considère les fonctions $f(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2+x} - \sqrt{x^2+x+1}$ et $g(x) = (1+x+x^2)^\alpha$ avec α un réel quelconque.

(1) Donner le développement limité de g en 0 à l'ordre 2.

(2) En déduire l'équation d'une droite asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

(3) Donner la position de la courbe de f par rapport à l'asymptote en $+\infty$.

Barème indicatif : Exercice 1 (1,5+1,5+1,5=4,5 points). Exercice 2 (1+1,5+1+1=4,5 points). Exercice 3 (2+1+1+2+1= 7 points). Exercice 4 (1+2+1=4 points)