L2 Informatique

Boughattas Sedki

U-Paris

13 Octobre 2021

Table des matières

Table des matières

Définition 1

Un ensemble E non vide est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$

- s'il est muni d'une loi de composition interne notée $+$ et d'une loi de composition externe notée $\cdot$ qui pour tout $\lambda \in K$ et $u \in E$ elle associe un élément E noté $\lambda \cdot u$.

S'il vérifie les axiomes suivants : $\forall(u, v, w) \in E^3\, \forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$:

- Associativité : $(u+v)+w = u+(v+w)$.

- Élément neutre : $u + 0_E = 0_E + u = u$.
- Existence d'un inverse : $\exists u'$ tel que $u + u' = u' + u = 0_E$ (c'est-à-dire $u' = -u$).
- Commutativité : $u + v = v + u$.
- $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$ et $1 \cdot u = u$.
- $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$.
- Distributivité : $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$.

Exercice

Montrer que pour tout vecteur $u \in E$ on a :

$$0 \cdot u = 0_E$$

Exemples 1

1. $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
2. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel et aussi un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
3. $E = \mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.
4. $\mathbb{K}^X = \{f : X \to \mathbb{K}\}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ pour tout ensemble X.
5. $M_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition 2

Soit $F \subset E$ avec E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si, muni des lois de E, F est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, on dit que c'est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 1

Si E est un espace vectoriel et $F \subset E$ alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :
1) $0_E \in F$.
2) $\forall (u, v) \in F^2$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \lambda u + \mu v \in F$.

Exemples 2

- $\{0_E\}$ et E sont toujours des sous-espaces vectoriels de E.
- $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$ sont des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{C}$.
- $\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$. De même pour $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$, $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{K})$.

- L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
- $Diag_n(\mathbb{K}) \subset M_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices diagonales, est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$. De même, $T_n(\mathbb{K}) \subset M_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$.

Attention ! *Si $GL_n(\mathbb{K}) \subset M_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$, ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$ car, par exemple, la matrice nulle n'est pas inversible.*

Proposition 2

Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F_1 \cap F_2$ est encore un sous-espace vectoriel de E.
De même, si $(F_i)_{i \in F}$ est une famille de sous-espace vectoriel de E, l'ensemble $\bigcap\limits_{i \in I} F_i$ est encore un sous-espace vectoriel de E.

Définition 3

Soit $A \subset E$ une partie d'un espace vectoriel E. Le sous-espace vectoriel engendré par A est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient A. On le notera $\text{Vect}(A)$. C'est le sous-espace vectoriel qui est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent A.

$$\text{Vect}(A) = \bigcap_{A \subset F} F$$

Définition 4

Soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une famille (finie) de vecteurs d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E. On appelle combinaison linéaire de ces vecteurs toute somme de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ où les λ_i sont dans $\mathbb{K}$.

Une combinaison linéaire de vecteurs est par définition toujours une somme finie de vecteurs.

Exemples 3

Le vecteurs $v = (-1, 2, 1, 1)$ est-il combinaison linéaire des trois vecteurs $u_1 = (1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (-1, 0, 1, 0)$ et $u_3 = (-1, 0, 0, 1)$?

Le vecteur $v = (-1, 2, 1, 1)$ est combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3 si et seulement si il existe α_1, α_2 et α_3 tels que
$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$ **si et seulement si**
$(-1, 2, 1, 1) =$
$(\alpha_1, \alpha_1, 0, 0) + (-\alpha_2, 0, \alpha_2, 0) + (-\alpha_3, 0, 0, 1)$

$(-1,2,1,1) =$
$(\alpha_1,\alpha_1,0,0)+(-\alpha_2,0,\alpha_2,0)+(-\alpha_3,0,0,)\alpha_3$ **si et seulement si** $\begin{cases} \alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & = -1 \\ \alpha_1 & & & = 2 \\ & \alpha_2 & & = 1 \\ & & \alpha_3 & = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} \alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & = -1 \\ \alpha_1 & & & = 2 \\ & \alpha_2 & & = 1 \\ & & \alpha_3 & = 1 \end{cases}$$

Les lignes 2, 3 **et** 4 **donnent** $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 1$. **En remplaçant ces valeurs dans la ligne** 1 **on obtient** $\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 2 - 1 - 1 = 0$, **ce qui contredit la ligne** 1 **:** $\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = -1$.

Donc le système n'a pas de solution, ce qui veut dire qu'on ne peut avoir $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$, et donc v n'est pas combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3.

Exemples 4

Le vecteurs $v = (-5, 1, 2, 4)$ est-il combinaison linéaire des trois vecteurs $u_1 = (-1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (-1, 0, 1, 0)$ et $u_3 = (-1, 0, 0, 1)$? Si oui donner une combinaison linéaire.

$v = (-5, 1, 2, 4)$ **est combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3 si et seulement si il existe α_1, α_2 et α_3 tel que $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$ si et seulement si** $(-5, 1, 2, 4) =$
$(-\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_1) + (-\alpha_2, 0, \alpha_2, 0) + (-\alpha_3, 0, 0, \alpha_3)$
si et seulement si

$$(-5,1,2,4) = (-\alpha_1,\alpha_1,\alpha_1,\alpha_1) + (-\alpha_2,0,\alpha_2,0) + (-\alpha_3,0,0,\alpha_3)$$

si et seulement si
$$\begin{cases} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & = -5 \\ \alpha_1 & & & = 1 \\ \alpha_1 & +\alpha_2 & & = 2 \\ \alpha_1 & & +\alpha_3 & = 4 \end{cases}$$

si et seulement si
$$\begin{cases} & -\alpha_2 & -\alpha_3 & = -4 \\ \alpha_1 & & & = 1 \\ & \alpha_2 & & = 1 \\ & & \alpha_3 & = 3 \end{cases}$$

Donc
$$v = u_1 + u_2 + 3u_3$$

Exemples 5

Le vecteurs $v = (3, 1, 2, -4)$ est-il combinaison linéaire des trois vecteurs $u_1 = (-1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (-1, 0, 1, 0)$, $u_3 = (-1, 0, 0, 1)$ et $u_4 = (1, -1, 0, -2)$? Si oui donner une combinaison linéaire.

$v = (3, 1, 2, -4)$ **est combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3 si et seulement si il existe α_1, α_2, α_3 et α_4 tel que** $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 v_4$

si et seulement si $(3,1,2,-4) = (-\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_1) + (-\alpha_2, 0, \alpha_2, 0) + (-\alpha_3, 0, 0, \alpha_3) + (\alpha_4, -\alpha_4, 0, -2\alpha_4)$ **si et seulement si**

$$\begin{cases} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & +\alpha_4 & = 3 \\ \alpha_1 & & & -\alpha_4 & = 1 \\ \alpha_1 & +\alpha_2 & & & = 2 \\ \alpha_1 & & +\alpha_3 & -2\alpha_4 & = -4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \\ L_2 + L_1 \\ L_3 + L_1 \\ L_4 + L_1 \end{array} \begin{cases} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & +\alpha_4 & = 3 \\ & -\alpha_2 & -\alpha_3 & & = 4 \\ & & -\alpha_3 & +\alpha_4 & = 5 \\ & -\alpha_2 & & -\alpha_4 & = -1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_4 \\ L_3 \end{array}\left\{\begin{array}{rrrrl} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & +\alpha_4 & = 3 \\ & -\alpha_2 & -\alpha_3 & & = 4 \\ & -\alpha_2 & & -\alpha_4 & = -1 \\ & & -\alpha_3 & +\alpha_4 & = 5 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_3 - L_2 \\ L_3 \end{array}\left\{\begin{array}{rrrrl} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & +\alpha_4 & = 3 \\ & -\alpha_2 & -\alpha_3 & & = 4 \\ & & \alpha_3 & -\alpha_4 & = -5 \\ & & -\alpha_3 & +\alpha_4 & = 5 \end{array}\right.$$

$$L_4 - L_3 \begin{cases} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & +\alpha_4 & = 3 \\ & -\alpha_2 & -\alpha_3 & & = 4 \\ & & \alpha_3 & -\alpha_4 & = -5 \\ & & & 0 & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & +\alpha_4 & = 3 \\ & -\alpha_2 & -\alpha_3 & & = 4 \\ & & \alpha_3 & -\alpha_4 & = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & +\alpha_4 & = 3 \\ & -\alpha_2 & -\alpha_3 & & = 4 \\ & & \alpha_3 & -\alpha_4 & = -5 \end{cases}$$

Système échelonné, plus d'inconnues que d'équations, alors il existe une infinité de solutions. La troisième ligne donne $\alpha_3 = \alpha_4 - 5$. Après remplacement, la deuxième ligne donne $\alpha_2 = \alpha_4 + 1$ et la première donne $\alpha_1 = \alpha_4 + 1$. En particulier, pour $\alpha_4 = 0$ on a $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$ et $\alpha_3 = -5$, donc

$$v = u_1 + u_2 - 5u_3$$

Proposition 3

$\mathrm{Vect}(A)$ est le sous-espace vectoriel de E formé par les combinaisons linéaires d'éléments de A.

Proposition 4

La réunion de deux sous-espace vectoriels F et G d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Définition 5

On appelle somme de F et G, deux sous-espaces vectoriels de E et on note $F+G$ le sous-espace vectoriel de E : $F+G=\{u+v, u\in F, v\in G\}$.

Proposition 5

$$F + G = \mathbf{Vect}(F \cup G).$$

Définition 6

Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme de ces sous-espaces vectoriels est directe et on note $F_1 \oplus F_2$ au lieu de $F_1 + F_2$ si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

Proposition 6

F_1 *et* F_2 *sont en somme directe si et seulement si*
$\forall u \in F_1 + F_2, \exists! \ (u_1, u_2) \in F_1 \times F_2$ *tel que* $u = u_1 + u_2$

Définition 7

Si $F_1, F_2, ..., F_n$ sont n sous-espaces vectoriels de E, on dit que la somme $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est une somme directe si

$$\forall u \in F_1 + F_2 + \ldots + F_n,\ \exists!\ (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in F_1 \times \ldots \times F_n \text{ tel que } u = \sum_{i=1}^{n} u_i.$$

On note la somme $\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ si les F_i sont en somme directe.

Caractérisation équivalente :
$\sum_{i=1}^{n} F_i = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ si pour toute combinaison linéaire nulle $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 0_E$ avec $u_i \in F_i$, on a nécessairement $u_i = 0_E$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Attention ! *C'est une condition beaucoup plus forte que de demander seulement que* $F_i \cap F_j = \{0_E\} \, \forall i \neq j$.

Définition 8

Si F est un sous-espace vectoriel de E, un sous-espace vectoriel de G de E est un supplémentaire de F dans E si :

- F et G sont en somme directe.
- $F \bigoplus G = E$.

Attention ! *Ne pas confondre le complémentaire $E \setminus F$ (qui n'est jamais un sous-espace vectoriel) et un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel.*

Définition 9

On dit qu'une famille (finie) de vecteurs $(u_1, \cdots, u_n)$ d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E est une famille libre si toute combinaison linéaire nulle de ces vecteurs est à coefficients tous nuls :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \forall i \in \{1, \cdots, n\}, \lambda_i = 0.$$

Définition 10

On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est libre si toute partie finie de cette famille est libre.

Une famille $(u_i)_{i\in I}$ qui n'est pas libre est dite *liée*.

Exemples 6

La famille de vecteurs $u_1 = (-1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (-1, 0, 1, 0)$, $u_3 = (1, 1, 0, 0)$, $u_4 = (-1, 1, 1, 2)$ est-elle libre ?

Supposons que $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0$. A-t-on tous les α_i nuls ? Si oui, alors la famille est libre, sinon elle est liée.

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0$ **si et seulement si** $(-\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_2, 0, \alpha_2, 0) + (\alpha_3, \alpha_3, 0, 0) + (-\alpha_4, \alpha_4, \alpha_4, 2\alpha_4) = (0, 0, 0, 0)$ **si et seulement si**

$$\begin{cases} -\alpha_1 & -\alpha_2 & +\alpha_3 & -\alpha_4 & = 0 \\ \alpha_1 & & +\alpha_3 & +\alpha_4 & = 0 \\ \alpha_1 & +\alpha_2 & & +\alpha_4 & = 0 \\ \alpha_1 & & & +2\alpha_4 & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \\ L_2 + L_1 \\ L_3 + L_1 \\ L_4 + L_1 \end{array} \begin{cases} -\alpha_1 & -\alpha_2 & +\alpha_3 & -\alpha_4 & = 0 \\ & -\alpha_2 & +2\alpha_3 & & = 0 \\ & & \alpha_3 & & = 0 \\ & -\alpha_2 & +\alpha_3 & +\alpha_4 & = 0 \end{cases}$$

$$
\begin{array}{r}
\\ \\
L_4 - L_2 \\
L_3
\end{array}
\left\{
\begin{array}{rrrrl}
-\alpha_1 & -\alpha_2 & +\alpha_3 & -\alpha_4 & = 0 \\
 & -\alpha_2 & +2\alpha_3 & & = 0 \\
 & & -\alpha_3 & +\alpha_4 & = 0 \\
 & & \alpha_3 & & = 0
\end{array}
\right.
$$

$$
\begin{array}{r}
\\ \\
L_4 - L_2 \\
L_4 + L_3
\end{array}
\left\{
\begin{array}{rrrrl}
-\alpha_1 & -\alpha_2 & +\alpha_3 & -\alpha_4 & = 0 \\
 & -\alpha_2 & +2\alpha_3 & & = 0 \\
 & & -\alpha_3 & +\alpha_4 & = 0 \\
 & & & \alpha_4 & = 0
\end{array}
\right.
$$

Ce qui donne $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Donc c'est une famille libre.

Exemples 7

La famille de vecteurs $u_1 = (2,1,0,0)$, $u_2 = (-1,0,1,0)$, $u_3 = (-2,0,0,1)$, $u_4 = (-1,1,-1,2)$ est-elle libre ? Si non, donner une relation entre les vecteurs. En déduire une famille libre maximale dans (u_1, u_2, u_3, u_4).

Supposons que $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0$. A-t-on tous les α_i nuls ? Si oui, alors la famille est libre, sinon elle est liée.

$u_1 = (2,1,0,0)$, $u_2 = (-1,0,1,0)$,
$u_3 = (-2,0,0,1)$, $u_4 = (-1,1,-1,2)$
$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0$ **si et seulement si**

$$\begin{cases} 2\alpha_1 & -\alpha_2 & -2\alpha_3 & -\alpha_4 & = 0 \\ \alpha_1 & & & +\alpha_4 & = 0 \\ & +\alpha_2 & & -\alpha_4 & = 0 \\ & & \alpha_3 & +2\alpha_4 & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 & -\alpha_2 & -2\alpha_3 & -\alpha_4 & = 0 \\ \alpha_1 & & & +\alpha_4 & = 0 \\ & +\alpha_2 & & -\alpha_4 & = 0 \\ & & \alpha_3 & +2\alpha_4 & = 0 \end{cases}$$

$$2L_2 - L_1 \begin{cases} 2\alpha_1 & -\alpha_2 & -2\alpha_3 & -\alpha_4 & = 0 \\ & \alpha_2 & +2\alpha_3 & +3\alpha_4 & = 0 \\ & \alpha_2 & & -\alpha_4 & = 0 \\ & & \alpha_3 & +2\alpha_4 & = 0 \end{cases}$$

$$2L_2 - L_1 \left\{\begin{array}{rrrrl} 2\alpha_1 & -\alpha_2 & -2\alpha_3 & -\alpha_4 & = 0 \\ & \alpha_2 & +2\alpha_3 & +3\alpha_4 & = 0 \\ & \alpha_2 & & -\alpha_4 & = 0 \\ & & \alpha_3 & +2\alpha_4 & = 0 \end{array}\right.$$

$$\frac{1}{2}(L_3 - L_2) \left\{\begin{array}{rrrrl} 2\alpha_1 & -\alpha_2 & -2\alpha_3 & -\alpha_4 & = 0 \\ & \alpha_2 & +2\alpha_3 & +3\alpha_4 & = 0 \\ & & -\alpha_3 & -2\alpha_4 & = 0 \\ & & \alpha_3 & +2\alpha_4 & = 0 \end{array}\right.$$

$$\frac{1}{2}(L_3 - L_2)\left\{\begin{array}{rrrrl} 2\alpha_1 & -\alpha_2 & -2\alpha_3 & -\alpha_4 & = 0 \\ & \alpha_2 & +2\alpha_3 & +3\alpha_4 & = 0 \\ & & -\alpha_3 & -2\alpha_4 & = 0 \\ & & \alpha_3 & +2\alpha_4 & = 0 \end{array}\right.$$

$$L_4 + L_3\left\{\begin{array}{rrrrl} 2\alpha_1 & -\alpha_2 & -2\alpha_3 & -\alpha_4 & = 0 \\ & \alpha_2 & +2\alpha_3 & +3\alpha_4 & = 0 \\ & & -\alpha_3 & -2\alpha_4 & = 0 \\ & & & 0 & = 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 & -\alpha_2 & -2\alpha_3 & -\alpha_4 & = 0 \\ & \alpha_2 & +2\alpha_3 & +3\alpha_4 & = 0 \\ & & -\alpha_3 & -2\alpha_4 & = 0 \end{cases}$$

Il y a plus d'inconnues que d'équations homogènes, alors le système admet une infinité de solutions, en particulier il y a au moins une solution $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \neq (0, 0, 0, 0)$, c-à-d l'un au moins des α_i est non nul. Donc il existe une relation $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0$ avec l'un au moins des α_i est non nul, d'où la famille n'est pas libre.

Toutes les relations $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0$

En fait on peut trouver toutes les relations possibles $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0$.

$$\begin{cases} 2\alpha_1 & -\alpha_2 & -2\alpha_3 & -\alpha_4 & = 0 \\ & \alpha_2 & +2\alpha_3 & +3\alpha_4 & = 0 \\ & & -\alpha_3 & -2\alpha_4 & = 0 \end{cases}$$

L_3 **donne** $\alpha_3 = -2\alpha_4$. **En remplaçant dans** L_2, α_3 **par** $-2\alpha_4$ **on obtient** $\alpha_2 = \alpha_4$. **En remplaçant dans** L_1, α_3 **par** $-2\alpha_4$ **et** α_2 **par** α_4 **on obtient** $\alpha_1 = -\alpha_4$.

$\alpha_1 = -\alpha_4$, $\alpha_2 = \alpha_4$ et $\alpha_3 = -2\alpha_4$.

Donc $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0$ si et seulement si

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (-\alpha_4, \alpha_4, -2\alpha_4, \alpha_4)$$

En particulier pour $\alpha_4 = 1$ on a $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (-1, 1, -2, 1)$ et

$$-u_1 + u_2 - 2u_3 + u_4 = 0 \ (*)$$

Donc u_4 est combinaison linéaire de u_1, u_2, u_3.

Sous-famille libre maximale

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccccl} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \\ \end{array}$$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 & -\alpha_2 & -2\alpha_3 & -\alpha_4 & = 0 \\ & \alpha_2 & +2\alpha_3 & +3\alpha_4 & = 0 \\ & & -\alpha_3 & -2\alpha_4 & = 0 \end{cases}$$

implique que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.
En effet, $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0$ si et seulement si
$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (-\alpha_4, \alpha_4, -2\alpha_4, \alpha_4)$.

En particulier $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$ ssi $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + 0 \cdot u_4 = 0$ si et seulement si $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0) = (0, 0, 0, 0)$.

Ainsi $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$ entraîne que tous les α_i sont nuls. Donc (u_1, u_2, u_3) est une famille libre.

D'autre part, on a vu que $-u_1 + u_2 - 2u_3 + u_4 = 0$ $(*)$, donc $u_4 = u_1 - u_2 + 2u_3$. Ainsi (u_1, u_2, u_3) est une famille libre et (u_1, u_2, u_3, u_4) est liée, ce qui veut dire que (u_1, u_2, u_3) est une famille libre maximale dans la famille (u_1, u_2, u_3, u_4).

Ainsi avec un système de ce type :

$$\begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{cccccc} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \\ \left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right. & 2\alpha_1 & -\alpha_2 & -2\alpha_3 & -\alpha_4 & = 0 \\ & & \alpha_2 & +2\alpha_3 & +3\alpha_4 & = 0 \\ & & & -\alpha_3 & -2\alpha_4 & = 0 \end{array}$$

en scrutant le premier cœfficient présent de chaque ligne et les vecteurs correspondant on peut conclure que (u_1, u_2, u_3) est une famille libre maximale dans la famille (u_1, u_2, u_3, u_4).

Exemples 8

Donner une famille libre maximale dans la famille de vecteurs $u_1 = (1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (-1, 0, 1, 0)$, $u_3 = (0, 1, 1, 0,)$, $u_4 = (-1, 0, 0, 1)$, $u_5 = (-1, 1, 1, 1)$.

En cherchant toutes les relations possibles entre les vecteurs d'une famille on pourra en extraire une famille libre maximale.

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 v_4 + \alpha_5 u_5 = 0$ **si et seulement si** $(\alpha_1, \alpha_1, 0, 0) + (-\alpha_2, 0, \alpha_2, 0) + (0, \alpha_3, \alpha_3, 0) + (-\alpha_4, 0, 0, \alpha_4) + (-\alpha_5, \alpha_5, \alpha_5, \alpha_5) = (0, 0, 0, 0)$ **si et seulement si**

$$\begin{cases} \alpha_1 & -\alpha_2 & & -\alpha_4 & -\alpha_5 & = 0 \\ \alpha_1 & & +\alpha_3 & & +\alpha_5 & = 0 \\ & \alpha_2 & +\alpha_3 & & +\alpha_5 & = 0 \\ & & & \alpha_4 & +\alpha_5 & = 0 \end{cases}$$

$$L_2 - L_1 \begin{cases} \alpha_1 & -\alpha_2 & & -\alpha_4 & -\alpha_5 & = 0 \\ & \alpha_2 & +\alpha_3 & +\alpha_4 & +2\alpha_5 & = 0 \\ & \alpha_2 & +\alpha_3 & & +\alpha_5 & = 0 \\ & & & \alpha_4 & +\alpha_5 & = 0 \end{cases}$$

$$L_3 - L_2 \begin{cases} \alpha_1 & -\alpha_2 & & -\alpha_4 & -\alpha_5 & = 0 \\ & \alpha_2 & +\alpha_3 & +\alpha_4 & +2\alpha_5 & = 0 \\ & & & -\alpha_4 & -\alpha_5 & = 0 \\ & & & \alpha_4 & +\alpha_5 & = 0 \end{cases}$$

$$
\begin{array}{l}
\begin{array}{cccccc}
\quad u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & \\
\end{array} \\
\left\{\begin{array}{cccccc}
\alpha_1 & -\alpha_2 & & -\alpha_4 & -\alpha_5 & =0 \\
 & \alpha_2 & +\alpha_3 & +\alpha_4 & +2\alpha_5 & =0 \\
 & & & -\alpha_4 & -\alpha_5 & =0
\end{array}\right.
\end{array}
$$

en scrutant le premier cœfficient présent de chaque ligne et les vecteurs correspondant on peut conclure que (u_1, u_2, u_4) est une famille libre maximale dans la famille $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$.

Pour montrer cette affirmation, donnons d'abord toutes les relations possibles.

$$\begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & \\ \end{array}$$
$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} \alpha_1 & -\alpha_2 & & -\alpha_4 & -\alpha_5 & =0 \\ & \alpha_2 & +\alpha_3 & +\alpha_4 & +2\alpha_5 & =0 \\ & & & -\alpha_4 & -\alpha_5 & =0 \end{array}\right.$$

La dernière ligne donne $\alpha_4 = -\alpha_5$, et par remplacement la deuxième donne $\alpha_2 = -\alpha_3 - \alpha_5$ et la première donne $\alpha_1 = -\alpha_3 - \alpha_5$. Donc $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 v_4 + \alpha_5 u_5 = 0$ si et seulement si

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = (-\alpha_3 - \alpha_5, -\alpha_3 - \alpha_5, \alpha_3, -\alpha_5, \alpha_5) \ (*$$

• (u_1, u_2, u_4) **libre.**
$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 v_4 + \alpha_5 u_5 = 0$ **si et seulement si**

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = (-\alpha_3 - \alpha_5, -\alpha_3 - \alpha_5, \alpha_3, -\alpha_5, \alpha_5)(*$$

Donc $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_4 u_4 = 0$ **si et seulement si** $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + 0 \cdot u_3 + \alpha_4 v_4 + 0 \cdot u_5 = 0$ **si et seulement si** $(\alpha_1, \alpha_2, 0, \alpha_4, 0) = (0, 0, 0, 0, 0)$ $(*)$ **si et seulement si** $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) = (0, 0, 0)$ $(*)$
Donc $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_4 u_4 = 0$ **implique que** $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = 0,$ **d'où** (u_1, u_2, u_4) **libre.**

- (u_1, u_2, u_4) **libre maximal. En effet,** u_3 **et** u_5 **sont combinaisons linéaires de** (u_1, u_2, u_4)**, donc** (u_1, u_2, u_3, u_4) **et** (u_1, u_2, u_4, u_5) **sont liées.**

D'après $(*)$:

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 v_4 + \alpha_5 u_5 = 0$ **si et seulement si**

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = (-\alpha_3 - \alpha_5, -\alpha_3 - \alpha_5, \alpha_3, -\alpha_5, \alpha_5)$ $(*$

1. **Si** $\alpha_5 = 0$ **et** $\alpha_3 = 1$ **alors** $\alpha_1 = -1$**,** $\alpha_2 = -1$ **et** $\alpha_4 = 0$**, donc** $-u_1 - u_2 + u_3 = 0$**, ce qui donne**
$$u_3 = u_1 + u_2$$
2. **Si** $\alpha_3 = 0$ **et** $\alpha_5 = 1$ **alors** $\alpha_1 = -1$**,** $\alpha_2 = -1$ **et** $\alpha_4 = -1$**, donc** $-u_1 - u_2 - u_4 + u_5 = 0$**, ce qui donne**
$$u_5 = u_1 + u_2 + u_4$$

Définition 11

On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est génératrice de E si tout élément de E s'écrit comme une combinaison linéaire d'une partie finie de cette famille :
$\forall u \in E, \exists\ (\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ dans $\mathbb{K}$ et une partie finie $(u_{i_1}, \cdots, u_{i_p})$ de la famille $(u_i)_{i\in I}$ tels que $u = \lambda_1 u_{i_1} + \cdots + \lambda_p u_{i_p}$.

(p dépendant de u.)

Proposition 7

1. Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
2. Toute famille contenant une sous-famille liée est liée.
3. Toute famille contenant une sous-famille génératrice de E est encore une famille génératrice de E.

Lemme 1

Soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une famille de vecteurs libre dans E et v un vecteur de E. Alors $(u_1, \cdots, u_n, v)$ est libre si et seulement si $v \notin Vect(u_1, \cdots, u_n)$.

Autrement dit : $(u_1, \cdots, u_n, v)$ est liée si et seulement si $v \in Vect(u_1, \cdots, u_n)$

Corollaire 1

Une famille $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si pour tout $u \in \mathcal{F}$, $u \notin Vect\left(\mathcal{F} - \{u\}\right)$.

Corollaire 2

Toute partie libre maximale d'un espace E est génératrice de E.

Définition 12

On dit qu'une famille de vecteur d'un $\mathbb{K}$- espace vectoriel, E est une base de E si tout élément de E s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs $(u_i)_{i\in I}$:
$\forall u \in E, \exists! \; (\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ dans $\mathbb{K}$ et une famille finie $(u_{i_1}, \cdots, u_{i_p})$ de $(u_i)_{i\in I}$ tels que $u = \lambda_1 u_{i_1} + \cdots + \lambda_p u_{i_p}$.