L2 Informatique

Boughattas Sedki

U-Paris

31 Mars 2021

Table des matières

Table des matières

Soient $f, g :]a-\delta; a+\delta[- \{a\} \to \mathbb{R}$, "voisinage épointé de a" avec $a \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$

Soient $f, g \ : \ ]a-\delta; a+\delta[-\{a\} \to \mathbb{R}$, "voisinage épointé de a" avec $a \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$

$$ou \ ]a-\delta; a[\to \mathbb{R},$$

Soient $f, g \; : \;]a-\delta; a+\delta[- \{a\} \to \mathbb{R}$, "voisinage épointé de a" avec $a \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$

$$ou \;]a-\delta; a[\to \mathbb{R},$$

$$ou \;]a, a+\delta[\to \mathbb{R},$$

Soient
$f, g\ :\ ]a-\delta; a+\delta[-\{a\} \to \mathbb{R}$,
"voisinage épointé de a" avec
$a \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$

$$ou\ ]a-\delta; a[\to \mathbb{R},$$

$$ou\ ]a, a+\delta[\to \mathbb{R},$$

On notera I l'un de ces intervalles.

Définition 1

On dit que f est négligeable devant g au point a

Définition 1

On dit que f est négligeable devant g au point a s'il existe une fonction ε définie sur un voisinage J de a telles que

Définition 1

On dit que f est **négligeable devant g au point a** s'il existe une fonction ε définie sur un voisinage J de a telles que :

- $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$

Définition 1

On dit que f est négligeable devant g au point a s'il existe une fonction ε définie sur un voisinage J de a telles que :

- $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ pour tout $x \neq a$ appartenant à $I \cap J$.

Définition 1

On dit que f est négligeable devant g au point a s'il existe une fonction ε définie sur un voisinage J de a telles que :

- $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ pour tout $x \neq a$ appartenant à $I \cap J$.
- $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Définition 1

On dit que f est négligeable devant g au point a s'il existe une fonction ε définie sur un voisinage J de a telles que :

- $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ pour tout $x \neq a$ appartenant à $I \cap J$.
- $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

On note $f = o_a(g)$.

Définition 2

Si f et g sont définies sur $I =]A; +\infty[$

Définition 2

Si f et g sont définies sur $I =]A ; +\infty[$ (resp. $I =]-\infty, A[$),

Définition 2

Si f et g sont définies sur $I =]A; +\infty[$ (resp. $I =]-\infty, A[$), on dit que $f = o_{+\infty}(g)$

Définition 2

Si f et g sont définies sur $I =]A; +\infty[$ (resp. $I =]-\infty, A[$), on dit que $f = o_{+\infty}(g)$ (resp. $f = o_{-\infty}(g)$)

Définition 2

Si f et g sont définies sur $I =]A; +\infty[$ (resp. $I =]-\infty, A[$), on dit que $f = o_{+\infty}(g)$ (resp. $f = o_{-\infty}(g)$) si
$\exists$ ε définie sur un voisinage J de a tel que :

Définition 2

Si f et g sont définies sur $I =]A; +\infty[$ (resp. $I =]-\infty, A[$), on dit que $f = o_{+\infty}(g)$ (resp. $f = o_{-\infty}(g)$) si $\exists$ ε définie sur un voisinage J de a tel que :

- $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$

Définition 2

Si f et g sont définies sur $I =]A; +\infty[$ (resp. $I =]-\infty, A[$), on dit que $f = o_{+\infty}(g)$ (resp. $f = o_{-\infty}(g)$) si

$\exists$ ε définie sur un voisinage J de a tel que :

- $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ pour tout $x \neq a$ appartenant à $I \cap J$.

Définition 2

Si f et g sont définies sur $I =]A; +\infty[$ (resp. $I =]-\infty, A[$), on dit que $f = o_{+\infty}(g)$ (resp. $f = o_{-\infty}(g)$) si

$\exists$ ε définie sur un voisinage J de a tel que :

- $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ pour tout $x \neq a$ appartenant à $I \cap J$.
- $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Remarque 1

Supposons que $a \in \mathbb{R}$

Remarque 1

Supposons que $a \in \mathbb{R}$ou bien $a = +\infty$

Remarque 1

Supposons que $a \in \mathbb{R}$ou bien $a = +\infty$ ou bien $a = -\infty$.

Remarque 1

Supposons que $a \in \mathbb{R}$ou bien $a = +\infty$ ou bien $a = -\infty$. Si g ne s'annule pour aucun $x \neq a$ appartenant à un voisinage de a,

Remarque 1

Supposons que $a \in \mathbb{R}$ou bien $a = +\infty$ ou bien $a = -\infty$. Si g ne s'annule pour aucun $x \neq a$ appartenant à un voisinage de a, alors nous avons :

Remarque 1

Supposons que $a \in \mathbb{R}$ou bien $a = +\infty$ ou bien $a = -\infty$. Si g ne s'annule pour aucun $x \neq a$ appartenant à un voisinage de a, alors nous avons :

$$f = o_a(g)$$

Remarque 1

Supposons que $a \in \mathbb{R}$ou bien $a = +\infty$ ou bien $a = -\infty$. Si g ne s'annule pour aucun $x \neq a$ appartenant à un voisinage de a, alors nous avons :

$$f = o_a(g) \Leftrightarrow$$

Remarque 1

Supposons que $a \in \mathbb{R}$ou bien $a = +\infty$ ou bien $a = -\infty$. Si g ne s'annule pour aucun $x \neq a$ appartenant à un voisinage de a, alors nous avons :

$$f = o_a(g) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0.$$

Définition 3

On dit que la suite (u_n) est négligeable devant (v_n)

Définition 3

On dit que la suite (u_n) est négligeable devant (v_n) et on note
$u_n = o(v_n)$

Définition 3

On dit que la suite (u_n) est négligeable devant (v_n) et on note
$u_n = o(v_n)$ s'il existe une suite w_n telle que

Définition 3

On dit que la suite (u_n) est négligeable devant (v_n) et on note
$u_n = o(v_n)$ s'il existe une suite w_n telle que

- $u_n = w_n v_n$

Définition 3

On dit que la suite (u_n) est négligeable devant (v_n) et on note
$u_n = o(v_n)$ s'il existe une suite w_n telle que

- $u_n = w_n v_n$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0.$

Remarque 2

Soit N un entier. Supposons que $\boldsymbol{v_n} \neq 0$ pour tout $n > N$ alors

Remarque 2

Soit N un entier. Supposons que $v_n \neq 0$ pour tout $n > N$ alors nous avons

$$u_n = o(v_n)$$

Remarque 2

Soit N un entier. Supposons que $v_n \neq 0$ pour tout $n > N$ alors nous avons

$$u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Exemples 1

1. $f = o_a(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = 0.$
2. Échelle des puissances en 0, $x^{n+1} = o_0(x^n)$ si $n \in \mathbb{N}$.
3. Échelle des puissances en $+\infty$, $x^n = o_{+\infty}(x^{n+1})$.

1. Nous allons voir très régulièrement la notation $o_0(x^n)$. Dire que $f = o_0(x^n)$ signifie que $f(x) = x^n\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
2. Croissances comparées : Si α et β sont des nombres strictement positifs, alors
$$x^\alpha = o_{+\infty}\left(e^{x^\beta}\right);$$
$$\ln^\alpha(x) = o_{+\infty}\left(x^\beta\right) \quad ;$$
$$\ln^\alpha(x) = o_{0^+}\left(\frac{1}{x^\beta}\right).$$

Proposition 1

1) Si $f = o_a(g)$ alors

Proposition 1

1) Si $f = o_a(g)$ alors $\lambda f = o_a(g)$

Proposition 1

1) Si $f = o_a(g)$ alors $\lambda f = o_a(g)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposition 1

1) Si $f = o_a(g)$ alors $\lambda f = o_a(g)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2) Si $f = o_a(g)$ et $g = o_a(h)$, alors

Proposition 1

1) Si $f = o_a(g)$ alors $\lambda f = o_a(g)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2) Si $f = o_a(g)$ et $g = o_a(h)$, alors $f = o_a(h)$.

Proposition 1

1) Si $f = o_a(g)$ alors $\lambda f = o_a(g)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2) Si $f = o_a(g)$ et $g = o_a(h)$, alors $f = o_a(h)$.
3) Si $f_1 = o_a(g)$ et $f_2 = o_a(g)$, alors

Proposition 1

1) Si $f = o_a(g)$ alors $\lambda f = o_a(g)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2) Si $f = o_a(g)$ et $g = o_a(h)$, alors $f = o_a(h)$.
3) Si $f_1 = o_a(g)$ et $f_2 = o_a(g)$, alors $f_1 + f_2 = o_a(g)$.

4) Si $f_1 = o_a(g_1)$ et $f_2 = o_a(g_2)$, alors

4) Si $f_1 = o_a(g_1)$ et $f_2 = o_a(g_2)$, alors $f_1 f_2 = o_a(g_1 g_2)$.

4) Si $f_1 = o_a(g_1)$ et $f_2 = o_a(g_2)$, alors $f_1 f_2 = o_a(g_1 g_2)$.

5) Si $f = o_a(g)$ alors

4) Si $f_1 = o_a(g_1)$ et $f_2 = o_a(g_2)$, alors $f_1 f_2 = o_a(g_1 g_2)$.

5) Si $f = o_a(g)$ alors $f \cdot h = o_a(g \cdot h)$.

4) Si $f_1 = o_a(g_1)$ et $f_2 = o_a(g_2)$, alors $f_1 f_2 = o_a(g_1 g_2)$.

5) Si $f = o_a(g)$ alors $f \cdot h = o_a(g \cdot h)$.

6) Si $f = o_a(g)$

4) Si $f_1 = o_a(g_1)$ et $f_2 = o_a(g_2)$, alors $f_1 f_2 = o_a(g_1 g_2)$.

5) Si $f = o_a(g)$ alors $f \cdot h = o_a(g \cdot h)$.

6) Si $f = o_a(g)$ et h est bornée au voisinage de a, alors

4) Si $f_1 = o_a(g_1)$ et $f_2 = o_a(g_2)$, alors $f_1 f_2 = o_a(g_1 g_2)$.

5) Si $f = o_a(g)$ alors $f \cdot h = o_a(g \cdot h)$.

6) Si $f = o_a(g)$ et h est bornée au voisinage de a, alors $f\,h = o_a(g)$.

4) Si $f_1 = o_a(g_1)$ et $f_2 = o_a(g_2)$, alors $f_1 f_2 = o_a(g_1 g_2)$.

5) Si $f = o_a(g)$ alors $f \cdot h = o_a(g \cdot h)$.

6) Si $f = o_a(g)$ et h est bornée au voisinage de a, alors $f\,h = o_a(g)$.

7) Si $g = o_a(f)$

4) Si $f_1 = o_a(g_1)$ et $f_2 = o_a(g_2)$, alors $f_1 f_2 = o_a(g_1 g_2)$.
5) Si $f = o_a(g)$ alors $f \cdot h = o_a(g \cdot h)$.
6) Si $f = o_a(g)$ et h est bornée au voisinage de a, alors $f\, h = o_a(g)$.
7) Si $g = o_a(f)$ et $h = o_a(f)$

4) Si $f_1 = o_a(g_1)$ et $f_2 = o_a(g_2)$, alors $f_1 f_2 = o_a(g_1 g_2)$.

5) Si $f = o_a(g)$ alors $f \cdot h = o_a(g \cdot h)$.

6) Si $f = o_a(g)$ et h est bornée au voisinage de a, alors $f\,h = o_a(g)$.

7) Si $g = o_a(f)$ et $h = o_a(f)$ alors

4) Si $f_1 = o_a(g_1)$ et $f_2 = o_a(g_2)$, alors $f_1 f_2 = o_a(g_1 g_2)$.

5) Si $f = o_a(g)$ alors $f \cdot h = o_a(g \cdot h)$.

6) Si $f = o_a(g)$ et h est bornée au voisinage de a, alors $f\,h = o_a(g)$.

7) Si $g = o_a(f)$ et $h = o_a(f)$ alors $h = o_a(f + g)$.

Démonstration.

□

Montrons la troisième propriété pour $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

□

Montrons la troisième propriété pour $a \in \mathbb{R}$.
$f_1(x) = \varepsilon_1(x)g(x)$ pour $x \in]a - \delta_1; a + \delta_1[- \{a\}$ et $\lim_{x \to a} \varepsilon_1(x) = 0$.

Démonstration.

□

Montrons la troisième propriété pour $a \in \mathbb{R}$.

$f_1(x) = \varepsilon_1(x)g(x)$ pour $x \in]a-\delta_1; a+\delta_1[-\{a\}$ et $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon_1(x) = 0$.

$f_2(x) = \varepsilon_2(x)g(x)$ pour $x \in]a-\delta_2; a+\delta_2[-\{a\}$ et $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon_2(x) = 0$.

Posons $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$, Posons $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$, si $x \in]a - \delta; a + \delta[- \{a\}$:

Posons $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$, si $x \in]a-\delta; a+\delta[- \{a\}$:

$$f_1(x) + f_2(x) = \underbrace{(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x))}_{\varepsilon(x)} g(x),$$

c-à-d

Posons $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$, si $x \in]a-\delta; a+\delta[-\{a\}$:

$$f_1(x) + f_2(x) = \underbrace{(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x))}_{\varepsilon(x)} g(x),$$

c-à-d $f_1(x) + f_2(x) = \varepsilon(x) g(x)$,

Posons $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$, si $x \in]a-\delta; a+\delta[- \{a\}$:

$$f_1(x) + f_2(x) = (\underbrace{\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)}_{\varepsilon(x)})g(x),$$

c-à-d $f_1(x) + f_2(x) = \varepsilon(x)g(x)$, or

Posons $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$, si $x \in \,]a-\delta; \, a+\delta[\, - \{a\}$:

$$f_1(x) + f_2(x) = \underbrace{(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x))}_{\varepsilon(x)} g(x),$$

c-à-d $f_1(x) + f_2(x) = \varepsilon(x) g(x)$, or $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = \lim\limits_{x \to a} (\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)) = 0.$

Posons $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$, si $x \in]a - \delta; a + \delta[- \{a\}$:

$$f_1(x) + f_2(x) = (\underbrace{\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)}_{\varepsilon(x)})g(x),$$

c-à-d $f_1(x) + f_2(x) = \varepsilon(x)g(x)$, or $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = \lim_{x \to a} (\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)) = 0.$

Donc

Posons $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$, si $x \in]a-\delta; a+\delta[- \{a\}$:

$$f_1(x) + f_2(x) = \underbrace{(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x))}_{\varepsilon(x)} g(x),$$

c-à-d $f_1(x) + f_2(x) = \varepsilon(x)g(x)$, or $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = \lim\limits_{x \to a} (\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)) = 0.$

Donc $f_1 + f_2 = o_a(g)$.

Lien entre équivalents et la notion de fonction négligeable devant une autre :

Proposition 2

$f \underset{a}{\sim} g$

Lien entre équivalents et la notion de fonction négligeable devant une autre :

Proposition 2

$f \underset{a}{\sim} g \quad ssi$

Lien entre équivalents et la notion de fonction négligeable devant une autre :

Proposition 2

$f \underset{a}{\sim} g \quad ssi \quad f = g + o_a(f)$

Lien entre équivalents et la notion de fonction négligeable devant une autre :

Proposition 2

$f \underset{a}{\sim} g$ *ssi* $f = g + o_a(f)$ *ssi*

Lien entre équivalents et la notion de fonction négligeable devant une autre :

Proposition 2

$$f \underset{a}{\sim} g \quad ssi \quad f = g + o_a(f) \quad ssi \quad f = g + o_a(g).$$

En pratique :

$$g + o_a(g) \underset{a}{\sim} g$$

Si $h_1 = o_a(g), \cdots, h_n = o_a(g)$ **alors**

$$g + h_1 + \cdots + h_n \underset{a}{\sim} g$$

Proposition 3

1. Si $u_n = o(v_n)$ alors

Proposition 3

1. Si $u_n = o(v_n)$ alors $\lambda u_n = o(v_n)$

Proposition 3

1. Si $u_n = o(v_n)$ alors $\lambda u_n = o(v_n)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposition 3

1. Si $u_n = o(v_n)$ alors $\lambda u_n = o(v_n)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors

Proposition 3

1. Si $u_n = o(v_n)$ alors $\lambda u_n = o(v_n)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.

Proposition 3

1. Si $u_n = o(v_n)$ alors $\lambda u_n = o(v_n)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
3. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors

Proposition 3

1. Si $u_n = o(v_n)$ alors $\lambda u_n = o(v_n)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
3. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = o(w_n)$.

Proposition 3

1. Si $u_n = o(v_n)$ alors $\lambda u_n = o(v_n)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
3. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = o(w_n)$.
4. Si $u_n = o(a_n)$ et $v_n = o(b_n)$, alors

Proposition 3

1. Si $u_n = o(v_n)$ alors $\lambda u_n = o(v_n)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
3. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = o(w_n)$.
4. Si $u_n = o(a_n)$ et $v_n = o(b_n)$, alors $u_n v_n = o(a_n b_n)$.

1. Si $u_n = o(v_n)$ alors

1. Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$.

1. Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$.
2. Si $u_n = o(v_n)$ et w_n est bornée, alors

1. Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$.
2. Si $u_n = o(v_n)$ et w_n est bornée, alors $u_n w_n = o(v_n)$.

Proposition 4

$u_n \sim v_n$

Proposition 4

$u_n \sim v_n$ **ssi**

Proposition 4

$$u_n \sim v_n \quad \text{ssi} \quad u_n = v_n + o(u_n)$$

Proposition 4

$u_n \sim v_n$ ssi $u_n = v_n + o(u_n)$ ssi

Proposition 4

$$u_n \sim v_n \quad \text{ssi} \quad u_n = v_n + o(u_n) \ \text{ssi} \quad u_n = v_n + o(v_n).$$

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ tel que

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ tel que D est une réunion d'un nombre fini d'intervalles.

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ tel que D est une réunion d'un nombre fini d'intervalles. On considère a tel que

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ tel que D est une réunion d'un nombre fini d'intervalles. On considère a tel que ou bien $a \in D$ ou bien

Soient f, g : $D \to \mathbb{R}$ tel que D est une réunion d'un nombre fini d'intervalles. On considère a tel que ou bien $a \in D$ ou bien a est une extrémité de l'un des intervalles de D.

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ tel que D est une réunion d'un nombre fini d'intervalles. On considère a tel que ou bien $a \in D$ ou bien a est une extrémité de l'un des intervalles de D.

Remarquons qu'on peut avoir

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ tel que D est une réunion d'un nombre fini d'intervalles. On considère a tel que ou bien $a \in D$ ou bien a est une extrémité de l'un des intervalles de D.

Remarquons qu'on peut avoir $a \in \mathbb{R}$

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ tel que D est une réunion d'un nombre fini d'intervalles. On considère a tel que ou bien $a \in D$ ou bien a est une extrémité de l'un des intervalles de D.

Remarquons qu'on peut avoir $a \in \mathbb{R}$ ou bien

Soient f, g : $D \to \mathbb{R}$ tel que D est une réunion d'un nombre fini d'intervalles. On considère a tel que ou bien $a \in D$ ou bien a est une extrémité de l'un des intervalles de D.

Remarquons qu'on peut avoir $a \in \mathbb{R}$ ou bien $a = +\infty$

Soient f, g : $D \to \mathbb{R}$ tel que D est une réunion d'un nombre fini d'intervalles. On considère a tel que ou bien $a \in D$ ou bien a est une extrémité de l'un des intervalles de D.

Remarquons qu'on peut avoir $a \in \mathbb{R}$ ou bien $a = +\infty$ ou bien

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ tel que D est une réunion d'un nombre fini d'intervalles. On considère a tel que ou bien $a \in D$ ou bien a est une extrémité de l'un des intervalles de D.

Remarquons qu'on peut avoir $a \in \mathbb{R}$ ou bien $a = +\infty$ ou bien $a = -\infty$.

Définition 4

On dit que f est dominée par g en a

Définition 4

On dit que f est dominée par g en a et on note $f = O_a(g)$

Définition 4

On dit que f est dominée par g en a et on note $f = O_a(g)$ lorsqu'il existe une fonction c définie sur un voisinage V de a telle que :

Définition 4

On dit que f est dominée par g en a et on note $f = O_a(g)$ lorsqu'il existe une fonction c définie sur un voisinage V de a telle que :

- $f(x) = c(x)g(x)$

Définition 4

On dit que f est dominée par g en a et on note $f = O_a(g)$ lorsqu'il existe une fonction c définie sur un voisinage V de a telle que :

- $f(x) = c(x)g(x)$ pour tout $x \neq a$ appartenant à $D \cap V$.

Définition 4

On dit que f est dominée par g en a et on note $f = O_a(g)$ lorsqu'il existe une fonction c définie sur un voisinage V de a telle que :

- $f(x) = c(x)g(x)$ pour tout $x \neq a$ appartenant à $D \cap V$.
- c est une fonction bornée sur D.

Remarque 3

1. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, nous avons

Remarque 3

1. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, nous avons

$$f = O_a(g)$$

Remarque 3

1. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, nous avons

$$f = O_a(g) \Leftrightarrow$$

Remarque 3

1. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, nous avons $f = O_a(g) \iff \dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.

Remarque 3

1. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, nous avons
$$f = O_a(g) \iff \frac{f}{g} \text{ est bornée}$$
au voisinage de a.
2. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors

Remarque 3

1. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, nous avons
$$f = O_a(g) \iff \frac{f}{g} \text{ est bornée}$$
au voisinage de a.
2. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f = O_a(g)$.

Remarque 3

1. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, nous avons
$$f = O_a(g) \iff \frac{f}{g} \text{ est bornée}$$
au voisinage de a.
2. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f = O_a(g)$.
3. Si $f = o_a(g)$, alors

Remarque 3

1. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, nous avons
$$f = O_a(g) \iff \frac{f}{g} \text{ est bornée}$$
au voisinage de a.
2. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f = O_a(g)$.
3. Si $f = o_a(g)$, alors $f = O_a(g)$.

4. Si $g \underset{a}{\sim} h$ et

4. Si $g \underset{a}{\sim} h$ et $\boldsymbol{f = O_a(h)}$

4. Si $g \underset{a}{\sim} h$ et $\boldsymbol{f = O_a(h)}$ alors

4. Si $g \underset{a}{\sim} h$ et $\boldsymbol{f = O_a(h)}$ alors $\boldsymbol{f = O_a(g)}$.

1. La terminologie peut-être trompeuse, car elle paraît sous-entendre que si f est dominée par g au voisinage de a, alors

1. La terminologie peut-être trompeuse, car elle paraît sous-entendre que si f est dominée par g au voisinage de a, alors $f \leq g$ au voisinage de a,

1. La terminologie peut-être trompeuse, car elle paraît sous-entendre que si f est dominée par g au voisinage de a, alors $f \leq g$ au voisinage de a, ce qui est loin d'être le cas.

1. La terminologie peut-être trompeuse, car elle paraît sous-entendre que si f est dominée par g au voisinage de a, alors $f \leq g$ au voisinage de a, ce qui est loin d'être le cas. Par exemple,

1. La terminologie peut-être trompeuse, car elle paraît sous-entendre que si f est dominée par g au voisinage de a, alors $f \leq g$ au voisinage de a, ce qui est loin d'être le cas. Par exemple, pour toute fonction, $2f$ est dominée par

1. La terminologie peut-être trompeuse, car elle paraît sous-entendre que si f est dominée par g au voisinage de a, alors $f \leq g$ au voisinage de a, ce qui est loin d'être le cas. Par exemple, pour toute fonction, $2f$ est dominée par f !

Définition 5

Soit f définie sur $I - \{a\}$.

Définition 5

Soit f définie sur $I - \{a\}$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au point a

Définition 5

Soit f définie sur $I - \{a\}$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au point a s'il existe un polynôme de degré n

Définition 5

Soit f définie sur $I - \{a\}$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au point a s'il existe un polynôme de degré n noté $\mathrm{PP}_n(f)$

Définition 5

Soit f définie sur $I - \{a\}$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au point a s'il existe un polynôme de degré n noté $PP_n(f)$ tel que :

Définition 5

Soit f définie sur $I - \{a\}$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au point a s'il existe un polynôme de degré n noté $PP_n(f)$ tel que :
$f(x) = PP_n(x-a) + o_a((x-a)^n)$

C'est-à-dire

C'est-à-dire

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + ... + \alpha_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$$

C'est-à-dire

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \ldots + \alpha_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$$

$$PP_n(f) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \ldots + \alpha_n(x-a)^n$$

C'est-à-dire

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + ... + \alpha_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$$

$$PP_n(f) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + ... + \alpha_n(x-a)^n$$

et

C'est-à-dire

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + ... + \alpha_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$$

$$PP_n(f) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + ... + \alpha_n(x-a)^n$$

et $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0.$

C'est-à-dire

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + ... + \alpha_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$$

$$PP_n(f) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + ... + \alpha_n(x-a)^n$$

et $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

PP$_n(f)$ s'appelle la partie principale du développement limité d'ordre n en a.

Remarque 4

En faisant le changement de fonction

Remarque 4

En faisant le changement de fonction $g : x \to f(x + a)$

Remarque 4

En faisant le changement de fonction $g : x \to f(x+a)$ on se ramène toujours

Remarque 4

En faisant le changement de fonction $g : x \to f(x+a)$ on se ramène toujours au développement limité au point 0.

Soient $f :]a - \delta; a + \delta[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$

Soient $f :]a-\delta; a+\delta[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$

ou

Soient $f :]a-\delta; a+\delta[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$

$$ou \quad]a-\delta; a] \to \mathbb{R},$$

Soient $\quad f \; : \,]a-\delta ; a+\delta[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$

$$ou \quad]a-\delta ; a] \to \mathbb{R},$$

ou

Soient $f :]a-\delta; a+\delta[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$

$$ou \quad]a-\delta; a] \to \mathbb{R},$$

$$ou \ [a, a+\delta[\to \mathbb{R},$$

Soient $f :]a-\delta; a+\delta[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$

$$ou \quad]a-\delta; a] \to \mathbb{R},$$

$$ou \; [a, a+\delta[\to \mathbb{R},$$

On notera I l'un de ces intervalles.

Proposition 5

Intégration du développement limité.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que

Proposition 5

Intégration du développement limité.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o_a((x-a)^n),$$

Proposition 5

Intégration du développement limité.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o_a((x-a)^n), \quad \text{alors}$$

Proposition 5

Intégration du développement limité.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o_a((x-a)^n), \quad \text{alors}$$

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o_a((x-a)^{n+1}).$$

Démonstration.

$\square$

Soit ε

Démonstration.

□

Soit ε tel que $\lim_{a} \varepsilon(x) = 0$

Démonstration.

$\square$

Soit ε tel que $\lim_a \varepsilon(x) = 0$ et

Démonstration.

$\square$

Soit ε tel que $\lim_{a} \varepsilon(x) = 0$ et

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + \varepsilon(x)(x-a)^n$$

Démonstration.

□

Soit ε tel que $\lim_a \varepsilon(x) = 0$ et

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + \varepsilon(x)(x-a)^n$$

Posons

$g(x) = f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}$.

Démonstration.

$\square$

Soit ε tel que $\lim_{a} \varepsilon(x) = 0$ et

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + \varepsilon(x)(x-a)^n$$

Posons
$g(x) = f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}$.
Alors $g(a) = 0$ et

Démonstration.

□

Soit ε tel que $\lim_{a} \varepsilon(x) = 0$ et

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + \varepsilon(x)(x-a)^n$$

Posons

$g(x) = f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}$.

Alors $g(a) = 0$ et

$g'(x) = f'(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k =$

Démonstration.

$\square$

Soit ε tel que $\lim_a \varepsilon(x) = 0$ et

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + \varepsilon(x)(x-a)^n$$

Posons
$g(x) = f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}$.
Alors $g(a) = 0$ et
$g'(x) = f'(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k =$
$\sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + \varepsilon(x)(x-a)^n -$
$\sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k =$

Démonstration.

$\square$

Soit ε tel que $\lim_a \varepsilon(x) = 0$ et

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + \varepsilon(x)(x-a)^n$$

Posons

$g(x) = f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}$.

Alors $g(a) = 0$ et

$g'(x) = f'(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + \varepsilon(x)(x-a)^n - \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k = \varepsilon(x)(x-a)^n$. Donc

$g'(x) = \varepsilon(x)(x-a)^n$

$$g'(x) = \varepsilon(x)(x-a)^n$$

$$g'(x) = \varepsilon(x)(x-a)^n$$

D'après le TAF,

$$g'(x) = \varepsilon(x)(x-a)^n$$

D'après le TAF, pour tout $x \in I$

$$g'(x) = \varepsilon(x)(x-a)^n$$

D'après le TAF, pour tout $x \in I$ il existe $y \in I$

$$g'(x) = \varepsilon(x)(x-a)^n$$

D'après le TAF, pour tout $x \in I$ il existe $y \in I$ strictement compris entre a et x

$$g'(x) = \varepsilon(x)(x-a)^n$$

D'après le TAF, pour tout $x \in I$ il existe $y \in I$ strictement compris entre a et x tel que

$$g'(x) = \varepsilon(x)(x-a)^n$$

D'après le TAF, pour tout $x \in I$ il existe $y \in I$ strictement compris entre a et x tel que $g(x) - g(a) = (x-a)g'(y)$,

$$g'(x) = \varepsilon(x)(x-a)^n$$

D'après le TAF, pour tout $x \in I$ il existe $y \in I$ strictement compris entre a et x tel que $g(x) - g(a) = (x-a)g'(y)$, donc $g(x) = (x-a)\varepsilon(y)(y-a)^n$.

$$g'(x) = \varepsilon(x)(x-a)^n$$

D'après le TAF, pour tout $x \in I$ il existe $y \in I$ strictement compris entre a et x tel que $g(x) - g(a) = (x-a)g'(y)$, donc $g(x) = (x-a)\varepsilon(y)(y-a)^n$. Or $|y-a| < |x-a|$,

$$g'(x) = \varepsilon(x)(x-a)^n$$

D'après le TAF, pour tout $x \in I$ il existe $y \in I$ strictement compris entre a et x tel que $g(x) - g(a) = (x-a)g'(y)$, donc $g(x) = (x-a)\varepsilon(y)(y-a)^n$. Or $|y-a| < |x-a|$, donc $|g(x)| = |(x-a)\varepsilon(y)(y-a)^n| < |x-a|^{n+1}|\varepsilon(y)|$,

$$g'(x) = \varepsilon(x)(x-a)^n$$

D'après le TAF, pour tout $x \in I$ il existe $y \in I$ strictement compris entre a et x tel que $g(x) - g(a) = (x-a)g'(y)$, donc $g(x) = (x-a)\varepsilon(y)(y-a)^n$. Or $|y-a| < |x-a|$, donc $|g(x)| = |(x-a)\varepsilon(y)(y-a)^n| < |x-a|^{n+1}|\varepsilon(y)|$, d'où $|g(x)| < |x-a|^{n+1}|\varepsilon(y)|$,

$$g'(x) = \varepsilon(x)(x-a)^n$$

D'après le TAF, pour tout $x \in I$ il existe $y \in I$ strictement compris entre a et x tel que $g(x) - g(a) = (x-a)g'(y)$, donc $g(x) = (x-a)\varepsilon(y)(y-a)^n$. Or $|y-a| < |x-a|$, donc $|g(x)| = |(x-a)\varepsilon(y)(y-a)^n| < |x-a|^{n+1}|\varepsilon(y)|$, d'où $|g(x)| < |x-a|^{n+1}|\varepsilon(y)|$, ce qui donne $\left|\dfrac{g(x)}{(x-a)^{n+1}}\right| < |\varepsilon(y)|$.

$$\left|\frac{g(x)}{(x-a)^{n+1}}\right| < |\varepsilon(y)|$$

$\left|\dfrac{g(x)}{(x-a)^{n+1}}\right| < |\varepsilon(y)|$ Or comme y est compris entre a et x,

$\left|\frac{g(x)}{(x-a)^{n+1}}\right| < |\varepsilon(y)|$ Or comme y est compris entre a et x, alors y doit tendre vers a

$\left|\frac{g(x)}{(x-a)^{n+1}}\right| < |\varepsilon(y)|$ Or comme y est compris entre a et x, alors y doit tendre vers a quand x tend vers a.

$\left|\dfrac{g(x)}{(x-a)^{n+1}}\right| < |\varepsilon(y)|$ Or comme y est compris entre a et x, alors y doit tendre vers a quand x tend vers a.

Et comme $\lim_a \varepsilon(x) = 0$

$\left|\dfrac{g(x)}{(x-a)^{n+1}}\right| < |\varepsilon(y)|$ Or comme y est compris entre a et x, alors y doit tendre vers a quand x tend vers a.

Et comme $\lim\limits_{a} \varepsilon(x) = 0$ alors

$\left|\dfrac{g(x)}{(x-a)^{n+1}}\right| < |\varepsilon(y)|$ Or comme y est compris entre a et x, alors y doit tendre vers a quand x tend vers a.

Et comme $\lim_{a} \varepsilon(x) = 0$ alors $\varepsilon(y)$ doit tendre vers 0 quand x tend vers a.

$\left|\dfrac{g(x)}{(x-a)^{n+1}}\right| < |\varepsilon(y)|$ Or comme y est compris entre a et x, alors y doit tendre vers a quand x tend vers a.

Et comme $\lim_{a} \varepsilon(x) = 0$ alors $\varepsilon(y)$ doit tendre vers 0 quand x tend vers a. Donc, d'après le théorème des

gendarmes on a

$\left|\dfrac{g(x)}{(x-a)^{n+1}}\right| < |\varepsilon(y)|$ Or comme y est compris entre a et x, alors y doit tendre vers a quand x tend vers a.

Et comme $\lim_a \varepsilon(x) = 0$ alors $\varepsilon(y)$ doit tendre vers 0 quand x tend vers a. Donc, d'après le théorème des gendarmes on a $\lim_a \dfrac{g(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0$

$\left|\dfrac{g(x)}{(x-a)^{n+1}}\right| < |\varepsilon(y)|$ Or comme y est compris entre a et x, alors y doit tendre vers a quand x tend vers a.

Et comme $\lim_{a} \varepsilon(x) = 0$ alors $\varepsilon(y)$ doit tendre vers 0 quand x tend vers a. Donc, d'après le théorème des gendarmes on a $\lim_{a} \dfrac{g(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0$

puisque

$\left|\dfrac{g(x)}{(x-a)^{n+1}}\right| < |\varepsilon(y)|$ Or comme y est compris entre a et x, alors y doit tendre vers a quand x tend vers a.

Et comme $\lim\limits_{a} \varepsilon(x) = 0$ alors $\varepsilon(y)$ doit tendre vers 0 quand x tend vers a. Donc, d'après le théorème des gendarmes on a $\lim\limits_{a} \dfrac{g(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0$ puisque $\left|\dfrac{g(x)}{(x-a)^{n+1}}\right| < |\varepsilon(y)|$.

On a $\lim\limits_{a} \dfrac{g(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0,$

On a $\lim_{a} \dfrac{g(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0$, donc $g(x) = o((x-a)^{n+1})$.

On a $\lim\limits_{a} \dfrac{g(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0$, donc $g(x) = o((x-a)^{n+1})$. Or $g(x) = f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}$, On a $\lim_{a} \frac{g(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0$, donc $g(x) = o((x-a)^{n+1})$. Or $g(x) = f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}$, donc $f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} = o((x-a)^{n+1})$

On a $\lim_{a} \dfrac{g(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0,$ donc $g(x) = o((x-a)^{n+1})$. Or $g(x) = f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}$, donc $f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} = o((x-a)^{n+1})$ et on a bien

$$\boldsymbol{f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o_a((x-a)^{n+1}).}$$

Corollaire 1

Dérivation du développement limité.
Si f admet un DL d'ordre n en 0,

Corollaire 1

Dérivation du développement limité.
Si f admet un DL d'ordre $\boldsymbol{n}$ en 0,
$f(x) = P(x) + o(x^n)$

Corollaire 1

Dérivation du développement limité.
Si f admet un DL d'ordre $\boldsymbol{n}$ en 0,
$f(x) = P(x) + o(x^n)$ *avec*

Corollaire 1

Dérivation du développement limité.
Si f admet un DL d'ordre $\boldsymbol{n}$ *en 0,*
$f(x) = P(x) + o(x^n)$ *avec*
$\deg(P) \leq n$

Corollaire 1

Dérivation du développement limité.
Si f admet un DL d'ordre $\boldsymbol{n}$ en 0,
$f(x) = P(x) + o(x^n)$ *avec*
$\deg(P) \leq \boldsymbol{n}$ *et si f' admet un DL d'ordre $\boldsymbol{n} - 1$ en 0,*

Corollaire 1

Dérivation du développement limité.
Si f *admet un DL d'ordre* $\boldsymbol{n}$ *en* 0*,*
$f(x) = P(x) + o(x^n)$ *avec*
$\deg(P) \leq n$ *et si* f' *admet un DL d'ordre* $\boldsymbol{n} - 1$ *en* 0*, alors*

Corollaire 1

Dérivation du développement limité.
Si f admet un DL d'ordre $\boldsymbol{n}$ en 0,
$f(x) = P(x) + o(x^n)$ *avec*
$\deg(P) \leq \boldsymbol{n}$ *et si f' admet un DL d'ordre $\boldsymbol{n} - 1$ en 0, alors*
$f'(x) = P'(x) + o(x^{n-1})$.

Taylor-Young

Soit $f : I \to \mathbb{R}$,

Taylor-Young

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, si f est n fois dérivable en a,

Taylor-Young

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, si f est n fois dérivable en a, alors on peut écrire :

Taylor-Young

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, si f est n fois dérivable en a, alors on peut écrire :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o_a((x-a)^n).$$

Taylor-Young

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, si f est n fois dérivable en a, alors on peut écrire :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o_a((x-a)^n).$$

pour x qui varie dans I

Démonstration.

Par récurrence sur n.

Démonstration.

$\square$

Par récurrence sur n.

- Pour $n = 1$,

Démonstration.

Par récurrence sur n.

- Pour $n = 1$, on a que

Démonstration.

$\square$

Par récurrence sur n.

• Pour $n = 1$, on a que f est dérivable.

Démonstration.

□

Par récurrence sur n.

• Pour $n = 1$, on a que f est dérivable. Donc

Démonstration.

$\square$

Par récurrence sur n.

• Pour $n = 1$, on a que f est dérivable. Donc $\lim\limits_{a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$,

Démonstration.

$\square$

Par récurrence sur n.

• Pour $n = 1$, on a que f est dérivable. Donc $\lim\limits_{a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$, et il existe ε tel que

Démonstration.

$\square$

Par récurrence sur n.

• Pour $n = 1$, on a que f est dérivable. Donc $\lim_{a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$, et il existe ε tel que $\lim_{a} \varepsilon = 0$

Démonstration.

$\square$

Par récurrence sur n.

• Pour $n = 1$, on a que f est dérivable. Donc $\lim\limits_{a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$, et il existe ε tel que $\lim\limits_{a} \varepsilon = 0$ et

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) + \varepsilon(x).$$

Démonstration.

Par récurrence sur n.

• Pour $n = 1$, on a que f est dérivable. Donc $\lim_a \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$, et il existe ε tel que $\lim_a \varepsilon = 0$ et

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) + \varepsilon(x).$$ Alors

Démonstration.

Par récurrence sur n.

• Pour $n = 1$, on a que f est dérivable. Donc $\lim_{a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$, et il existe ε tel que $\lim_{a} \varepsilon = 0$ et

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) + \varepsilon(x).$$ Alors

$$f(x) - f(a) = (x - a)(f'(a) + \varepsilon(x)),$$

Démonstration.

$\square$

Par récurrence sur n.

• Pour $n = 1$, on a que f est dérivable. Donc $\lim_a \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$, et il existe ε tel que $\lim_a \varepsilon = 0$ et

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) + \varepsilon(x).$$ Alors

$f(x) - f(a) = (x - a)(f'(a) + \varepsilon(x))$, donc

$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \varepsilon(x)(x - a)$,

donc
$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \varepsilon(x)(x - a),$

donc
$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \varepsilon(x)(x-a)$, ou
autrement

donc $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \varepsilon(x)(x-a)$, ou autrement

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + o((x-a))$$

donc $f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \varepsilon(x)(x - a)$, ou autrement

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + o((x - a))$$

puisque

donc
$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \varepsilon(x)(x-a)$, ou autrement

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + o((x-a))$$

puisque $\lim_a \varepsilon = 0$.

- Supposons l'énoncé vrai pour $n-1$.

- Supposons l'énoncé vrai pour $n-1$.

Soit f une fonction n fois dérivable en a,

- Supposons l'énoncé vrai pour $n-1$.

Soit f une fonction n fois dérivable en a, alors f' est $n-1$ dérivable en a

• Supposons l'énoncé vrai pour $n-1$.

Soit f une fonction n fois dérivable en a, alors f' est $n-1$ dérivable en a et, d'après l'hypothèse de récurrence

- Supposons l'énoncé vrai pour $n-1$.

Soit f une fonction n fois dérivable en a, alors f' est $n-1$ dérivable en a et, d'après l'hypothèse de récurrence $f'(x) =$

$$f'(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o_a((x-a)^{n-1}).$$

• Supposons l'énoncé vrai pour $n-1$.

Soit f une fonction n fois dérivable en a, alors f' est $n-1$ dérivable en a et, d'après l'hypothèse de récurrence $f'(x) =$

$$f'(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o_a((x-a)^{n-1}).$$

c-à-d

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k + o_a((x-a)^{n-1}).$$

Et d'après la proposition précédente on a :

Et d'après la proposition précédente on a :

$$f(x) =$$

$$f(a)+\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} \frac{1}{k+1}(x-a)^{k+1}+o_a((x-a)^n) =$$

Et d'après la proposition précédente on a :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} \frac{1}{k+1}(x-a)^{k+1} + o_a((x-a)^n) =$$

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + o_a((x-a)^n).$$

Et d'après la proposition précédente on a :
$f(x) =$

$$f(a)+\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}\frac{1}{k+1}(x-a)^{k+1}+o_a((x-a)^n) =$$

$$f(x) = f(a)+\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}+o_a((x-a)^n).$$

Et par translation d'indice :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{(k)!}(x-a)^k + o_a((x-a)^n).$$

Première source de développements limités, Première source de développements limités, la formule de Taylor-Young :

Première source de développements limités, la formule de Taylor-Young : si f est n fois dérivable en 0,

Première source de développements limités, la formule de Taylor-Young : si f est n fois dérivable en 0, alors f admet un développement limité à l'ordre n en 0 donné par

Première source de développements limités, la formule de Taylor-Young : si f est n fois dérivable en 0, alors f admet un développement limité à l'ordre n en 0 donné par

$$f(x) =$$

Première source de développements limités, la formule de Taylor-Young : si f est n fois dérivable en 0, alors f admet un développement limité à l'ordre n en 0 donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

Exemples 2

1. e^x **admet un développement limité à l'ordre** n **en** 0 **pour tout** $n \in \mathbb{N}$ **donné par**

$$e^x =$$

Exemples 2

1. e^x **admet un développement limité à l'ordre** n **en** 0 **pour tout** $n \in \mathbb{N}$ **donné par**

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

Exemples 2

1. e^x **admet un développement limité à l'ordre** n **en** 0 **pour tout** $n \in \mathbb{N}$ **donné par**

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

car $x \to e^x$ **est de classe** C^∞ **sur** $\mathbb{R}$

Exemples 2

1. e^x **admet un développement limité à l'ordre** n **en** 0 **pour tout** $n \in \mathbb{N}$ **donné par**

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

car $x \to e^x$ **est de classe** C^∞ **sur** $\mathbb{R}$ **et de dérivées** e^x**.**

1. $(1+x)^{\alpha}$ **est dérivable en** 0 **de dérivée** $\alpha(1+X)^{\alpha-1}$

1. $(1+x)^{\alpha}$ **est dérivable en** 0 **de dérivée** $\alpha(1+X)^{\alpha-1}$ **et est dérivable à l'ordre** k **au voisinage de** 0**, pour tout** $k \in \mathbb{N}$**, de dérivée k-ième :**

1. $(1+x)^\alpha$ **est dérivable en** 0 **de dérivée** $\alpha(1+X)^{\alpha-1}$ **et est dérivable à l'ordre** k **au voisinage de** 0**, pour tout** $k \in \mathbb{N}$**, de dérivée k-ième :** $\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$

1. $(1+x)^{\alpha}$ **est dérivable en** 0 **de dérivée** $\alpha(1+X)^{\alpha-1}$ **et est dérivable à l'ordre** k **au voisinage de** 0**, pour tout** $k \in \mathbb{N}$**, de dérivée k-ième :**
   $\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$
   Donc $(1+x)^{\alpha}$ **admet un développement limité à l'ordre** n **en** 0**,** $\forall n \in \mathbb{N}$**,**

1. $(1+x)^\alpha$ **est dérivable en** 0 **de dérivée** $\alpha(1+X)^{\alpha-1}$ **et est dérivable à l'ordre** k **au voisinage de** 0**, pour tout** $k \in \mathbb{N}$**, de dérivée k-ième :** $\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$ **Donc** $(1+x)^\alpha$ **admet un développement limité à l'ordre** n **en** 0**,** $\forall n \in \mathbb{N}$**, donné par :**

1. $(1+x)^{\alpha}$ **est dérivable en** 0 **de dérivée** $\alpha(1+X)^{\alpha-1}$ **et est dérivable à l'ordre** k **au voisinage de** 0**, pour tout** $k \in \mathbb{N}$**, de dérivée k-ième :** $\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$
   Donc $(1+x)^{\alpha}$ **admet un développement limité à l'ordre** n **en** 0**,** $\forall n \in \mathbb{N}$**, donné par :**

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n).$$

1. **Si** $\alpha = -1$,

1. **Si** $\alpha = -1$, **on obtient**

$$\frac{1}{1+x} =$$

1. **Si $\alpha = -1$, on obtient** $$\frac{1}{1+x} = 1 + \frac{-1}{1!}x + \frac{(-1)(-2)x^2}{2!} + ... + \frac{(-1)(-2)...(-n)x^n}{n!} + o(x^n) =$$

1. **Si** $\alpha = -1$, **on obtient**
$$\frac{1}{1+x} = 1 + \frac{-1}{1!}x + \frac{(-1)(-2)x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)(-2)\ldots(-n)x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + o(x^n).$$

1. **Si** $\alpha = -1$, **on obtient** $\dfrac{1}{1+x} = 1 + \dfrac{-1}{1!}x + \dfrac{(-1)(-2)x^2}{2!} + ... + \dfrac{(-1)(-2)...(-n)x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + o(x^n)$.

   C-à-d :

1. **Si** $\alpha = -1$, **on obtient** $\frac{1}{1+x} = 1 + \frac{-1}{1!}x + \frac{(-1)(-2)x^2}{2!} + ... + \frac{(-1)(-2)...(-n)x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + o(x^n)$.
C-à-d :
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

1. **Si** $\alpha = \frac{1}{2}$,

1. **Si $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient**

1. **Si** $\alpha = \frac{1}{2}$, **on obtient** $\sqrt{1+x} =$

1. **Si** $\alpha = \frac{1}{2}$, **on obtient** $\sqrt{1+x} =$

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} x^k + o(x^n)$$

1. De même, en dérivant on a

1. De même, en dérivant on a

$$\cos(x) =$$

1. **De même, en dérivant on a**

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k!} + o(x^{2n})$$

1. **De même, en dérivant on a**

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k!} + o(x^{2n})$$

et

$$\sin(x) =$$

1. **De même, en dérivant on a**

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k!} + o(x^{2n})$$

et

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

Exemples 3

1. **Développement limité de** $\ln(1+x)$ **à l'ordre** 3 **en** 0**.**

Exemples 3

1. Développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3 en 0.

   On a

Exemples 3

1. **Développement limité de** $\ln(1+x)$ **à l'ordre** 3 **en** 0.
   On a $\displaystyle \int \frac{1}{1+t}\,\mathrm{dt} = \ln(1+x)$.

Exemples 3

1. **Développement limité de** $\ln(1+x)$ **à l'ordre** 3 **en** 0.
   On a $\displaystyle\int \frac{1}{1+t}\,\mathrm{dt} = \ln(1+x)$. **or**
   $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2),$$

Exemples 3

1. Développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3 en 0.
   On a $\displaystyle\int \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln(1+x)$. or
   $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2),$$
   Donc

Exemples 3

1. **Développement limité de** $\ln(1+x)$ **à l'ordre** 3 **en** 0**.**
   On a $\displaystyle\int \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln(1+x)$**. or** $\displaystyle\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$,
   Donc $\displaystyle\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

2. Développement limité de $\arctan(x)$ à l'ordre 5 en 0.

2. Développement limité de $\arctan(x)$ à l'ordre 5 en 0.

2. **Développement limité de** arctan(x) **à l'ordre** 5 **en** 0.

$$\arctan(x) = \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{dt},$$

2. Développement limité de $\arctan(x)$ à l'ordre 5 en 0.

$$\arctan(x) = \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{dt},$$ et on a

2. Développement limité de $\arctan(x)$ à l'ordre 5 en 0.

$\arctan(x) = \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{dt}$, **et on a**

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$$

2. Développement limité de $\arctan(x)$ à l'ordre 5 en 0.

$$\arctan(x) = \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{dt},$$ **et on a**

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$$

Donc

2. **Développement limité de** $\arctan(x)$ **à l'ordre** 5 **en** 0.

$\arctan(x) = \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, **et on a**

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$$

Donc $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$

3. Développement limité de $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ à l'ordre 4 en 0 ?.

3. Développement limité de $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ à l'ordre 4 en 0 ?.

On sait que la dérivée de $\dfrac{1}{1+x}$

3. Développement limité de $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ à l'ordre 4 en 0 ?.

On sait que la dérivée de $\dfrac{1}{1+x}$

est

3. Développement limité de $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ à l'ordre 4 en 0 ?.

On sait que la dérivée de $\dfrac{1}{1+x}$ est $-\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

3. Développement limité de $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ à l'ordre 4 en 0 ?.

On sait que la dérivée de $\dfrac{1}{1+x}$ est $-\dfrac{1}{(1+x)^2}$. Or on a :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + o(x^5),$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + o(x^5),$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + o(x^5),$$

donc en dérivant on a :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + o(x^5),$$

donc en dérivant on a :

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 + o(x^4)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + o(x^5),$$

donc en dérivant on a :

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 + o(x^4)$$

et en passant à l'opposé on obtient

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + o(x^5),$$

donc en dérivant on a :

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 + o(x^4)$$

et en passant à l'opposé on obtient

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 + o(x^4).$$

Notation. $o(x^k)$ *signifie* $o_0(x^k)$.

Notation. $o(x^k)$ *signifie* $o_0(x^k)$.

Définition 6

Si $n \in \mathbb{N}$,

Notation. $o(x^k)$ *signifie* $o_0(x^k)$.

Définition 6

Si $n \in \mathbb{N}$, l'application
$\mathrm{Tronc}_n : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}_n[X]$

Notation. $o(x^k)$ *signifie* $o_0(x^k)$.

Définition 6

Si $n \in \mathbb{N}$, l'application $\mathrm{Tronc}_n : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ est l'application qui à un polynôme P elle associe le polynôme Q

Notation. $o(x^k)$ *signifie* $o_0(x^k)$.

Définition 6

Si $n \in \mathbb{N}$, l'application $\mathrm{Tronc}_n : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ est l'application qui à un polynôme P elle associe le polynôme Q qui ne contient que les monômes de P

Notation. $o(x^k)$ *signifie* $o_0(x^k)$.

Définition 6

Si $n \in \mathbb{N}$, l'application $\mathrm{Tronc}_n : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ est l'application qui à un polynôme P elle associe le polynôme Q qui ne contient que les monômes de P de degré inférieur ou égal à n.

Proposition 6

1. Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0,

Proposition 6

1. Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, il est unique

Proposition 6

1. Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, il est unique ($\mathbf{PP}_n(f)$ est uniquement déterminé).

Proposition 6

1. Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, il est unique ($\mathbf{PP}_n(f)$ est uniquement déterminé).
2. Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0,

Proposition 6

1. Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, il est unique ($\mathbf{PP}_n(f)$ est uniquement déterminé).
2. Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, alors

Proposition 6

1. Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, il est unique ($\mathbf{PP}_n(f)$ est uniquement déterminé).
2. Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, alors f admet un développement limité à l'ordre k en 0

Proposition 6

1. Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, il est unique ($\mathbf{PP}_n(f)$ est uniquement déterminé).
2. Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, alors f admet un développement limité à l'ordre k en 0 pour tout $k \leq n$,

Proposition 6

1. Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, il est unique ($\mathbf{PP}_n(f)$ est uniquement déterminé).
2. Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, alors f admet un développement limité à l'ordre k en 0 pour tout $k \leq n$, et $\mathbf{PP}_k(f) = \mathbf{Tronc}_k(\mathbf{PP}_n(f))$.

1. $\lim\limits_{x \to a} f = \ell$

1. $\lim\limits_{x \to a} f = \ell$ si et seulement si

1. $\lim\limits_{x \to a} f = \ell$ si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 0 au point 0

1. $\lim_{x \to a} f = \ell$ si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 0 au point 0 dont le premier terme est ℓ.

1. $\lim_{x \to a} f = \ell$ si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 0 au point 0 dont le premier terme est ℓ.
2. f est continue en 0

1. $\lim\limits_{x \to a} f = \ell$ si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 0 au point 0 dont le premier terme est ℓ.
2. f est continue en 0 $\Leftrightarrow$

1. $\lim_{x \to a} f = \ell$ si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 0 au point 0 dont le premier terme est ℓ.
2. f est continue en 0 $\Leftrightarrow$ f

1. $\lim_{x \to a} f = \ell$ si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 0 au point 0 dont le premier terme est ℓ.
2. f est continue en 0 $\Leftrightarrow$ f admet un développement limité d'ordre 0 au point 0

1. $\lim_{x \to a} f = \ell$ si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 0 au point 0 dont le premier terme est ℓ.
2. f est continue en 0 $\Leftrightarrow$ f admet un développement limité d'ordre 0 au point 0 dont le premier terme est $f(0)$.

1. f est dérivable en 0

1. f est dérivable en 0 $\Leftrightarrow$

1. f est dérivable en 0 $\Leftrightarrow$ f

1. f est dérivable en $0 \Leftrightarrow f$ admet un développement limité à l'ordre 1 au point 0.

1. f est dérivable en $0 \Leftrightarrow f$ admet un développement limité à l'ordre 1 au point 0.
2. Reformulation de Taylor-Young :

1. f est dérivable en 0 $\Leftrightarrow$ f admet un développement limité à l'ordre 1 au point 0.
2. Reformulation de Taylor-Young : si f est n fois dérivable en 0,

1. f est dérivable en 0 $\Leftrightarrow$ f admet un développement limité à l'ordre 1 au point 0.
2. Reformulation de Taylor-Young : si f est n fois dérivable en 0, alors

1. f est dérivable en 0 $\Leftrightarrow$ f admet un développement limité à l'ordre 1 au point 0.
2. Reformulation de Taylor-Young : si f est n fois dérivable en 0, alors f admet un développement limité d'ordre n en 0.

1. f est dérivable en 0 $\Leftrightarrow$ f admet un développement limité à l'ordre 1 au point 0.
2. Reformulation de Taylor-Young : si f est n fois dérivable en 0, alors f admet un développement limité d'ordre n en 0. Attention : si $n > 1$ la réciproque est fausse.

Démonstration.

$\square$

- Supposons que
  $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_n x^n + \varepsilon_1(x)x^n$

Démonstration.

- **Supposons que**
$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_n x^n + \varepsilon_1(x)x^n$$
$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + ... + \beta_n x^n + \varepsilon_2(x)x^n$$

Démonstration.

$\square$

- Supposons que
  $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_n x^n + \varepsilon_1(x) x^n$
  $f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + ... + \beta_n x^n + \varepsilon_2(x) x^n$
  avec

Démonstration.

$\square$

- Supposons que
  $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_n x^n + \varepsilon_1(x)x^n$
  $f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + ... + \beta_n x^n + \varepsilon_2(x)x^n$
  avec $\lim_{0}(\varepsilon_1) = \lim_{0}(\varepsilon_2) = 0.$

Démonstration.

$\square$

- Supposons que
  $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_n x^n + \varepsilon_1(x)x^n$
  $f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + ... + \beta_n x^n + \varepsilon_2(x)x^n$
  avec $\lim_0(\varepsilon_1) = \lim_0(\varepsilon_2) = 0.$
  Supposons par l'absurde

Démonstration.

- Supposons que
  $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_n x^n + \varepsilon_1(x)x^n$
  $f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + ... + \beta_n x^n + \varepsilon_2(x)x^n$
  avec $\lim_{0}(\varepsilon_1) = \lim_{0}(\varepsilon_2) = 0.$
  Supposons par l'absurde qu'il existe $k \leq n$ tel que

Démonstration.

- Supposons que
$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_n x^n + \varepsilon_1(x)x^n$
$f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + ... + \beta_n x^n + \varepsilon_2(x)x^n$
avec $\lim\limits_{0}(\varepsilon_1) = \lim\limits_{0}(\varepsilon_2) = 0.$
Supposons par l'absurde qu'il existe $k \leq n$ tel que $\alpha_k \neq \beta_k$.

Démonstration.

- Supposons que
$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_n x^n + \varepsilon_1(x)x^n$
$f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + ... + \beta_n x^n + \varepsilon_2(x)x^n$
avec $\lim\limits_{0}(\varepsilon_1) = \lim\limits_{0}(\varepsilon_2) = 0.$
Supposons par l'absurde qu'il existe $k \leq n$ tel que $\alpha_k \neq \beta_k$. En soustrayant :

Démonstration.

$\square$

- Supposons que
$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_n x^n + \varepsilon_1(x)x^n$
$f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + ... + \beta_n x^n + \varepsilon_2(x)x^n$
avec $\lim_0(\varepsilon_1) = \lim_0(\varepsilon_2) = 0$.
Supposons par l'absurde qu'il existe $k \leq n$ tel que $\alpha_k \neq \beta_k$. En soustrayant :
$(\beta_0 - \alpha_0) + (\beta_1 - \alpha_1)x + ...+$
$(\beta_n - \alpha_n)x^n + (\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x))x^n = 0$

Soit k_0 le plus petit $k \leq n$ tel que $\beta_k - \alpha_k \neq 0$.

Soit k_0 le plus petit $k \leq n$ tel que $\beta_k - \alpha_k \neq 0$. ($\beta_{k_0} - \alpha_{k_0} \neq 0$)

Soit k_0 le plus petit $k \leq n$ tel que $\beta_k - \alpha_k \neq 0$. ($\beta_{k_0} - \alpha_{k_0} \neq 0$)

Alors $(\beta_{k_0} - \alpha_{k_0})x^{k_0} + (\beta_{k_0+1} - \alpha_{k_0+1})x^{k_0+1} + \ldots + (\beta_n - \alpha_n)x^n + (\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x))x^n = 0$.

Soit k_0 le plus petit $k \leq n$ tel que $\beta_k - \alpha_k \neq 0$. ($\beta_{k_0} - \alpha_{k_0} \neq 0$)

Alors
$$(\beta_{k_0} - \alpha_{k_0})x^{k_0} + (\beta_{k_0+1} - \alpha_{k_0+1})x^{k_0+1} + \ldots + (\beta_n - \alpha_n)x^n + (\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x))x^n = 0.$$

Divisons par x^{k_0},

Soit k_0 le plus petit $k \leq n$ tel que $\beta_k - \alpha_k \neq 0$. ($\beta_{k_0} - \alpha_{k_0} \neq 0$)

Alors $(\beta_{k_0} - \alpha_{k_0})x^{k_0} + (\beta_{k_0+1} - \alpha_{k_0+1})x^{k_0+1} + \ldots + (\beta_n - \alpha_n)x^n + (\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x))x^n = 0.$

Divisons par x^{k_0},

Divisons par x^{k_0},

Divisons par x^{k_0}, alors
$(\beta_{k_0} - \alpha_{k_0}) + (\beta_{k_0+1} - \alpha_{k_0+1})x + ...+$
$(\beta_n - \alpha_n)x^{n-k_0} + (\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x))x^{n-k_0} = 0$

Divisons par x^{k_0}, alors
$(\beta_{k_0} - \alpha_{k_0}) + (\beta_{k_0+1} - \alpha_{k_0+1})x + ... +$
$(\beta_n - \alpha_n)x^{n-k_0} + (\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x))x^{n-k_0} = 0$

Alors en passant à la limite en 0,

Divisons par x^{k_0}, alors
$(\beta_{k_0} - \alpha_{k_0}) + (\beta_{k_0+1} - \alpha_{k_0+1})x + \ldots +$
$(\beta_n - \alpha_n)x^{n-k_0} + (\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x))x^{n-k_0} = 0$

Alors en passant à la limite en 0, on a :

Divisons par x^{k_0}, alors
$(\beta_{k_0} - \alpha_{k_0}) + (\beta_{k_0+1} - \alpha_{k_0+1})x + ...+$
$(\beta_n - \alpha_n)x^{n-k_0} + (\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x))x^{n-k_0} = 0$

Alors en passant à la limite en 0, on a :

$$\beta_{k_0} - \alpha_{k_0} = 0$$

Divisons par x^{k_0}, alors
$(\beta_{k_0} - \alpha_{k_0}) + (\beta_{k_0+1} - \alpha_{k_0+1})x + ... +$
$(\beta_n - \alpha_n)x^{n-k_0} + (\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x))x^{n-k_0} = 0$

Alors en passant à la limite en 0, on a :

$$\beta_{k_0} - \alpha_{k_0} = 0$$

Ce qui contredit l'hypothèse $\beta_{k_0} - \alpha_{k_0} \neq 0$.

Divisons par x^{k_0}, alors
$(\beta_{k_0} - \alpha_{k_0}) + (\beta_{k_0+1} - \alpha_{k_0+1})x + ... +$
$(\beta_n - \alpha_n)x^{n-k_0} + (\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x))x^{n-k_0} = 0$

Alors en passant à la limite en 0, on a :

$$\beta_{k_0} - \alpha_{k_0} = 0$$

Ce qui contredit l'hypothèse $\beta_{k_0} - \alpha_{k_0} \neq 0$.

Donc on a $\alpha_k = \beta_k$ pour tout $k \leq n$.

- $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n + o(x^n)$

- $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n + o(x^n)$

$$\Leftrightarrow f(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j x^j + o(x^n)$$

- $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n + o(x^n)$

$$\Leftrightarrow f(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j x^j + o(x^n)$$

$$\Leftrightarrow f(x) =$$

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j x^j + \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j x^j + o(x^n)$$

$$o(x^k)$$

- f est continue en 0.

- f est continue en 0. $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} f(0) \Leftrightarrow f(x) - f(0) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$

- f est continue en 0.
$$f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} f(0) \Leftrightarrow$$
$$f(x) - f(0) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$
$$\Leftrightarrow f(x) - f(0) = o(1)$$

- f est continue en 0.
  $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} f(0) \Leftrightarrow$
  $f(x) - f(0) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$
  $\Leftrightarrow f(x) - f(0) = o(1)$
  $\Leftrightarrow f(x) = f(0) + o(1)$

- f est continue en 0. $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} f(0) \Leftrightarrow$ $f(x) - f(0) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ $\Leftrightarrow f(x) - f(0) = o(1)$ $\Leftrightarrow f(x) = f(0) + o(1)$ $\Leftrightarrow f$ admet un développement limité d'ordre 0 en 0 dont le premier terme est $f(0)$.

- f **est dérivable en** 0**,**

- f **est dérivable en** 0**,**

  $\exists\, a \in \mathbb{R}$

- f **est dérivable en** 0**,**

  $\exists\, a \in \mathbb{R}$ **tel que**

- f **est dérivable en** 0,
  $\exists\, a \in \mathbb{R}$ **tel que** $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} a$

- f **est dérivable en** 0,
  $\exists\, a \in \mathbb{R}$ **tel que** $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} a$
  $\Leftrightarrow \dfrac{f(x)-f(0)}{x} - a \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

- f **est dérivable en** 0,

$\exists\, a \in \mathbb{R}$ **tel que** $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} a$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x} - a \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x} - a = o(1)$$

- f **est dérivable en** 0,

  $\exists\, a \in \mathbb{R}$ **tel que** $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} a$

  $$\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x} - a \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

  $$\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x} - a = o(1)$$

  $$\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x} = a + o(1)$$

- f **est dérivable en** 0,

$\exists\, a \in \mathbb{R}$ **tel que** $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} a$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x} - a \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x} - a = o(1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x} = a + o(1)$$

$$\Leftrightarrow f(x)-f(0) = ax + o(x)$$

- f **est dérivable en** 0,

$\exists\, a \in \mathbb{R}$ **tel que** $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} a$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x} - a \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x} - a = o(1)$$
$$\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x} = a + o(1)$$
$$\Leftrightarrow f(x)-f(0) = ax + o(x)$$
$$\Leftrightarrow f(x) = f(0) + ax + o(x)$$

- f **est dérivable en** 0,

$\exists\, a \in \mathbb{R}$ **tel que** $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} a$

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x)-f(0)}{x} - a \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x)-f(0)}{x} - a = o(1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = a + o(1)$

$\Leftrightarrow f(x) - f(0) = ax + o(x)$

$\Leftrightarrow f(x) = f(0) + ax + o(x)$

$\Leftrightarrow f$ **admet un développement limité à l'ordre** 1 **en** 0.

Proposition 7

Si f et g admettent un DL_n :

Proposition 7

Si f et g admettent un DL_n :
$f(x) = P(x) + o(x^n)$

Proposition 7

Si f et g admettent un DL_n :
$f(x) = P(x) + o(x^n)$ et
$g(x) = Q(x) + o(x^n)$

Proposition 7

Si f et g admettent un DL_n :
$f(x) = P(x) + o(x^n)$ et
$g(x) = Q(x) + o(x^n)$ avec degré de P et $Q \leq n$,

Proposition 7

Si f et g admettent un DL_n :
$f(x) = P(x) + o(x^n)$ et
$g(x) = Q(x) + o(x^n)$ avec degré de P et $Q \leq n$, alors :

Proposition 7

Si f et g admettent un DL_n :
$f(x) = P(x) + o(x^n)$ et
$g(x) = Q(x) + o(x^n)$ avec degré de P et $Q \leq n$, alors :

1. $f + g$ admet le DL_n :

Proposition 7

Si f et g admettent un DL_n :
$f(x) = P(x) + o(x^n)$ et
$g(x) = Q(x) + o(x^n)$ avec degré de P et $Q \leq n$, alors :

1. $f + g$ admet le DL_n :
$f(x) + g(x) = P(x) + Q(x) + o(x^n)$.

Proposition 7

Si f et g admettent un DL_n :
$f(x) = P(x) + o(x^n)$ et
$g(x) = Q(x) + o(x^n)$ avec degré de P et $Q \leq n$, alors :

1. $f + g$ admet le DL_n :
   $f(x) + g(x) = P(x) + Q(x) + o(x^n)$.
2. $f \cdot g$ admet le DL_n :

Proposition 7

Si f et g admettent un DL_n :
$f(x) = P(x) + o(x^n)$ et
$g(x) = Q(x) + o(x^n)$ avec degré de P et $Q \leq n$, alors :

1. $f + g$ admet le DL_n :
   $f(x) + g(x) = P(x) + Q(x) + o(x^n)$.
2. $f \cdot g$ admet le DL_n :
   $f(x) \cdot g(x) = \mathbf{Tronc}_n(P(x) \cdot Q(x)) + o(x^n)$.

1. Si $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$,

1. Si $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, alors

1. Si $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, alors $g \circ f(x) = \mathbf{Tronc}_n[Q(P(x))] + o(x^n)$.

Exemples 4

Posons $f(x) = \sin(x)$ **et** $g(x) = \sqrt{1 + x}$.

Exemples 4

Posons $f(x) = \sin(x)$ **et** $g(x) = \sqrt{1+x}$.

On a $f(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.

Exemples 4

Posons $f(x) = \sin(x)$ **et** $g(x) = \sqrt{1+x}$**.**

On a $f(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3).$

et

Exemples 4

Posons $f(x) = \sin(x)$ **et** $g(x) = \sqrt{1+x}$.

On a $f(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.

et $g(x) = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} + o(x^3)$

Exemples 4

Posons $f(x) = \sin(x)$ **et** $g(x) = \sqrt{1+x}$.

On a $f(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.

et $g(x) = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} + o(x^3)$ **alors :**

Exemples 4

Posons $f(x) = \sin(x)$ **et** $g(x) = \sqrt{1+x}$.

On a $f(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.

et $g(x) = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} + o(x^3)$ **alors :**

- $\sin(x) +$

Exemples 4

Posons $f(x) = \sin(x)$ **et** $g(x) = \sqrt{1+x}$.

On a $f(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.

et $g(x) = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} + o(x^3)$ **alors :**

- $\sin(x) + \sqrt{1+x} =$

Exemples 4

Posons $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \sqrt{1+x}$.

On a $f(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

et $g(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$ alors :

- $\sin(x) + \sqrt{1+x} =$

$x - \frac{x^3}{6} + 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3) =$

Exemples 4

Posons $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \sqrt{1+x}$.

On a $f(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.

et $g(x) = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} + o(x^3)$ alors :

- $\sin(x) + \sqrt{1+x} =$

$x - \dfrac{x^3}{6} + 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} + o(x^3) =$

$1 + \dfrac{3x}{2} - \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{5x^3}{48} + o(x^3)$;

•• $\sin(x)\ \sqrt{1+x} =$

•• $\sin(x)\ \sqrt{1+x} =$

$$\textbf{Tronc}_3\left(\left(x-\frac{x^3}{6}\right)\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}\right)\right)+o(x^3) =$$

$\bullet\bullet$ $\sin(x)\ \sqrt{1+x} =$

$\mathbf{Tronc}_3((x - \frac{x^3}{6})(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16})) + o(x^3) =$

$\mathbf{Tronc}_3(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{48} - \frac{x^6}{96}) +$

$o(x^3) =$

$\bullet\bullet$ $\sin(x)\sqrt{1+x} =$

$$\textbf{Tronc}_3\left(\left(x-\frac{x^3}{6}\right)\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}\right)\right)+o(x^3) =$$

$$\textbf{Tronc}_3\left(x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{16}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{48}-\frac{x^6}{96}\right)+$$

$$o(x^3) =$$

$$x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{8}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

$\bullet\bullet$ $\sin(x)\ \sqrt{1+x} =$

$\mathbf{Tronc}_3((x - \frac{x^3}{6})(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16})) + o(x^3) =$

$\mathbf{Tronc}_3(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{48} - \frac{x^6}{96}) +$
$o(x^3) =$

$x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$= x + \frac{x^2}{2} - \frac{7x^3}{24} + o(x^3)$;

Une autre rédaction :

$$(x - \frac{x^3}{6})(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}) =$$

Une autre rédaction :

$$(x - \frac{x^3}{6})(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}) =$$

$$x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} - \frac{x^3}{6} +$$

Une autre rédaction :

$$(x - \frac{x^3}{6})(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}) =$$

$$x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) =$$

Une autre rédaction :

$$(x - \frac{x^3}{6})(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}) =$$
$$x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) =$$
$$= x + \frac{x^2}{2} - \frac{7x^3}{24} + o(x^3).$$

Une autre rédaction :

$$(x - \frac{x^3}{6})(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}) =$$

$$x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) =$$

$$= x + \frac{x^2}{2} - \frac{7x^3}{24} + o(x^3).$$

Donc $\sin(x)\ \sqrt{1+x} =$

Une autre rédaction :

$$\left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}\right) =$$
$$x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) =$$
$$= x + \frac{x^2}{2} - \frac{7x^3}{24} + o(x^3).$$

Donc $\sin(x)\,\sqrt{1+x} = x + \frac{x^2}{2} - \frac{7x^3}{24} + o(x^3)$

$\bullet\bullet\bullet \sqrt{1+\sin(x)} = g(f(x)),$

• • • $\sqrt{1+\sin(x)} = g(f(x))$, **avec**

$\bullet\bullet\bullet\sqrt{1+\sin(x)} = g(f(x))$, **avec** $g(x) = \sqrt{1+x}$

$\bullet\bullet\bullet \sqrt{1+\sin(x)} = g(f(x))$, **avec** $g(x) = \sqrt{1+x}$ **et** $f(x) = \sin(x)$.

$\bullet \bullet \bullet \sqrt{1+\sin(x)} = g(f(x))$, **avec** $g(x) = \sqrt{1+x}$ **et** $f(x) = \sin(x)$.

On a : $\lim_{0} f = 0$,

$\bullet\bullet\bullet \sqrt{1+\sin(x)} = g(f(x))$, **avec** $g(x) = \sqrt{1+x}$ **et** $f(x) = \sin(x)$.

On a : $\lim\limits_{0} f = 0$, $f(x) = \underbrace{x - \frac{x^3}{6}}_{P(x)} + o(x^3)$

$\bullet\bullet\bullet\sqrt{1+\sin(x)} = g(f(x))$, **avec** $g(x) = \sqrt{1+x}$ **et** $f(x) = \sin(x)$.

On a : $\lim\limits_{0} f = 0$, $\underbrace{f(x) = x - \frac{x^3}{6}}_{P(x)} + o(x^3)$

$\bullet\bullet\bullet \sqrt{1+\sin(x)} = g(f(x))$, **avec** $g(x) = \sqrt{1+x}$ **et** $f(x) = \sin(x)$.

On a : $\lim_0 f = 0$, $f(x) = \underbrace{x - \frac{x^3}{6}}_{P(x)} + o(x^3)$

et $g(x) = \underbrace{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}}_{Q(x)} + o(x^3)$

$\bullet\bullet\bullet \sqrt{1+\sin(x)} = g(f(x))$, **avec** $g(x) = \sqrt{1+x}$ **et** $f(x) = \sin(x)$.

On a : $\lim\limits_{0} f = 0$, $f(x) = \underbrace{x - \frac{x^3}{6}}_{P(x)} + o(x^3)$

et $g(x) = \underbrace{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}}_{Q(x)} + o(x^3)$

Donc $\sqrt{1+\sin(x)} =$

$\bullet\bullet\bullet \sqrt{1+\sin(x)} = g(f(x))$, **avec** $g(x) = \sqrt{1+x}$ **et** $f(x) = \sin(x)$.

On a : $\lim\limits_{0} f = 0$, $f(x) = \underbrace{x - \frac{x^3}{6}}_{P(x)} + o(x^3)$

et $g(x) = \underbrace{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}}_{Q(x)} + o(x^3)$

Donc $\sqrt{1+\sin(x)} = Tronc_3(Q(P(x))) + o(x^3)$.

Calculons $Tronc_3(Q(P(x)))$.

Calculons $Tronc_3(Q(P(x)))$.

$$P(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

Calculons $Tronc_3(Q(P(x)))$.

$$P(x) = x - \frac{x^3}{6} \textbf{ et } Q(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$$

Calculons $Tronc_3(Q(P(x)))$.

$$P(x) = x - \frac{x^3}{6} \textbf{ et } Q(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$$

$$Q(P(x)) = 1 + \frac{P(x)}{2} - \frac{P(x)^2}{8} + \frac{P(x)^3}{16} =$$

Calculons $Tronc_3(Q(P(x)))$.

$$P(x) = x - \frac{x^3}{6} \textbf{ et } Q(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$$

$$Q(P(x)) = 1 + \frac{P(x)}{2} - \frac{P(x)^2}{8} + \frac{P(x)^3}{16} =$$

$$1 + \frac{(x - \frac{x^3}{6})}{2} - \frac{(x - \frac{x^3}{6})^2}{8} + \frac{(x - \frac{x^3}{6})^3}{16} =$$

Calculons $Tronc_3(Q(P(x)))$.

$$P(x) = x - \frac{x^3}{6} \textbf{ et } Q(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$$

$$Q(P(x)) = 1 + \frac{P(x)}{2} - \frac{P(x)^2}{8} + \frac{P(x)^3}{16} =$$

$$1 + \frac{(x - \frac{x^3}{6})}{2} - \frac{(x - \frac{x^3}{6})^2}{8} + \frac{(x - \frac{x^3}{6})^3}{16} =$$

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} +$$

Calculons $Tronc_3(Q(P(x)))$.

$$P(x) = x - \frac{x^3}{6} \textbf{ et } Q(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$$

$$Q(P(x)) = 1 + \frac{P(x)}{2} - \frac{P(x)^2}{8} + \frac{P(x)^3}{16} =$$

$$1 + \frac{(x - \frac{x^3}{6})}{2} - \frac{(x - \frac{x^3}{6})^2}{8} + \frac{(x - \frac{x^3}{6})^3}{16} =$$

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + o(x^3)$$

$$Tronc_3(Q(P(x))) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48}$$

$$Tronc_3(Q(P(x))) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48}$$ **Donc**

$$Tronc_3(Q(P(x))) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48}$$ **Donc**

$$\sqrt{1+\sin(x)} =$$

$$Tronc_3(Q(P(x))) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48}$$ **Donc**

$$\sqrt{1+\sin(x)} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + o(x^3)$$

Proposition 8

Soit $f : I \to \mathbb{R}$,

Proposition 8

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, si f est n fois dérivable en a,

Proposition 8

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, si f est n fois dérivable en a, et si f admet un développement limité d'ordre n :

Proposition 8

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, si f est n fois dérivable en a, et si f admet un développement limité d'ordre n :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x-a)^k + o_a((x-a)^n).$$

Proposition 8

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, si f est n fois dérivable en a, et si f admet un développement limité d'ordre n :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x-a)^k + o_a((x-a)^n).$$

alors

$$\alpha_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

Démonstration.

$\square$

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x-a)^k + o_a((x-a)^n).$$

Démonstration.

$\square$

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x-a)^k + o_a((x-a)^n).$$

Taylor-Young :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o_a((x-a)^n).$$

Démonstration.

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x-a)^k + o_a((x-a)^n).$$

Taylor-Young :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o_a((x-a)^n).$$

Alors,

Démonstration.

$\square$

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x-a)^k + o_a((x-a)^n).$$

Taylor-Young :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o_a((x-a)^n).$$

Alors, par unicité de la partie principale,

Démonstration.

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x-a)^k + o_a((x-a)^n).$$

Taylor-Young :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o_a((x-a)^n).$$

Alors, par unicité de la partie principale, on a :

Démonstration.

$\square$

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x-a)^k + o_a((x-a)^n).$$

Taylor-Young :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o_a((x-a)^n).$$

Alors, par unicité de la partie principale, on a :

$$\alpha_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

Exemples 5

Soit $f(x) = x - x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5)$

Exemples 5

Soit $f(x) = x - x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5)$ **une fonction** $\mathcal{C}^5$**.**

Exemples 5

Soit $f(x) = x - x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5)$ **une fonction** $\mathcal{C}^5$.
Alors :

-

Exemples 5

Soit $f(x) = x - x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5)$ **une fonction** $\mathcal{C}^5$.

Alors :

- $f(0) = 0$

Exemples 5

Soit $f(x) = x - x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5)$ **une fonction** $\mathcal{C}^5$.

Alors :

- $f(0) = 0$ **puisque**

Exemples 5

Soit $f(x) = x - x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5)$ une fonction $\mathcal{C}^5$.

Alors :

- $f(0) = 0$ puisque la constante est nulle,
-

Exemples 5

Soit $f(x) = x - x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5)$ **une fonction** $\mathcal{C}^5$.

Alors :

- $f(0) = 0$ **puisque la constante est nulle,**
- $f'(0) = 1$

Exemples 5

Soit $f(x) = x - x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5)$ une fonction $\mathcal{C}^5$.

Alors :

- $f(0) = 0$ puisque la constante est nulle,
- $f'(0) = 1$ puisque

Exemples 5

Soit $f(x) = x - x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5)$ une fonction $\mathcal{C}^5$.

Alors :

- $f(0) = 0$ puisque la constante est nulle,
- $f'(0) = 1$ puisque le coefficient de x est

Exemples 5

Soit $f(x) = x - x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5)$ une fonction $\mathcal{C}^5$.

Alors :

- $f(0) = 0$ puisque la constante est nulle,
- $f'(0) = 1$ puisque le coefficient de x est $1 = \frac{f'(0)}{1!}$,
-

Exemples 5

Soit $f(x) = x - x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5)$ une fonction $\mathcal{C}^5$.

Alors :

- $f(0) = 0$ puisque la constante est nulle,
- $f'(0) = 1$ puisque le coefficient de x est $1 = \frac{f'(0)}{1!}$,
- $f''(0) = -2$

Exemples 5

Soit $f(x) = x - x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5)$ **une fonction** $\mathcal{C}^5$.

Alors :

• $f(0) = 0$ **puisque la constante est nulle,**

• $f'(0) = 1$ **puisque le coefficient de** x **est** $1 = \frac{f'(0)}{1!}$,

• $f''(0) = -2$ **puisque**

Exemples 5

Soit $f(x) = x - x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5)$ une fonction $\mathcal{C}^5$.
Alors :
• $f(0) = 0$ puisque la constante est nulle,
• $f'(0) = 1$ puisque le coefficient de x est $1 = \frac{f'(0)}{1!}$,
• $f''(0) = -2$ puisque le coefficient de x^2 est

Exemples 5

Soit $f(x) = x - x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5)$ une fonction $\mathcal{C}^5$.

Alors :

- $f(0) = 0$ puisque la constante est nulle,
- $f'(0) = 1$ puisque le coefficient de x est $1 = \frac{f'(0)}{1!}$,
- $f''(0) = -2$ puisque le coefficient de x^2 est $-1 = \frac{f''(0)}{2!}$,

$$f(x) = x - x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5).$$

-

$$f(x) = x - x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5).$$

- $f'''(0) = 0$

$f(x) = x - x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5)$.

- $f'''(0) = 0$ **puisque**

$f(x) = x - x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5)$.
• $f'''(0) = 0$ puisque le coefficient de x^3 est

$f(x) = x - x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5)$.

- $f'''(0) = 0$ puisque le coefficient de x^3 est $0 = \frac{f'''(0)}{3!}$,
-

$f(x) = x - x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5)$.

- $f'''(0) = 0$ **puisque le coefficient de** x^3 **est** $0 = \frac{f'''(0)}{3!}$,
- $f^{(4)}(0) = 3$

$f(x) = x - x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5)$.

- $f'''(0) = 0$ **puisque le coefficient de x^3 est** $0 = \frac{f'''(0)}{3!}$,
- $f^{(4)}(0) = 3$ **puisque**

$f(x) = x - x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5)$.

• $f'''(0) = 0$ puisque le coefficient de x^3 est $0 = \frac{f'''(0)}{3!}$,

• $f^{(4)}(0) = 3$ puisque le coefficient de x^4 est

$f(x) = x - x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5)$.

- $f'''(0) = 0$ puisque le coefficient de x^3 est $0 = \frac{f'''(0)}{3!}$,
- $f^{(4)}(0) = 3$ puisque le coefficient de x^4 est $\frac{1}{8} = \frac{f^{(4)}(0)}{4!}$
-

$$f(x) = x - x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5).$$

- $f'''(0) = 0$ puisque le coefficient de x^3 est $0 = \frac{f'''(0)}{3!}$,
- $f^{(4)}(0) = 3$ puisque le coefficient de x^4 est $\frac{1}{8} = \frac{f^{(4)}(0)}{4!}$
- $f^{(5)}(0) = 0$

$f(x) = x - x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5)$.

- $f'''(0) = 0$ puisque le coefficient de x^3 est $0 = \frac{f'''(0)}{3!}$,
- $f^{(4)}(0) = 3$ puisque le coefficient de x^4 est $\frac{1}{8} = \frac{f^{(4)}(0)}{4!}$
- $f^{(5)}(0) = 0$ puisque

$f(x) = x - x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5)$.

- $f'''(0) = 0$ puisque le coefficient de x^3 est $0 = \frac{f'''(0)}{3!}$,
- $f^{(4)}(0) = 3$ puisque le coefficient de x^4 est $\frac{1}{8} = \frac{f^{(4)}(0)}{4!}$
- $f^{(5)}(0) = 0$ puisque le coefficient de x^4 est

$f(x) = x - x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5)$.

• $f'''(0) = 0$ puisque le coefficient de x^3 est $0 = \frac{f'''(0)}{3!}$,

• $f^{(4)}(0) = 3$ puisque le coefficient de x^4 est $\frac{1}{8} = \frac{f^{(4)}(0)}{4!}$

• $f^{(5)}(0) = 0$ puisque le coefficient de x^4 est $0 = \frac{f^{(5)}(0)}{5!}$.

Proposition 9

Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n en 0 :

Proposition 9

Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n en 0 :

- Si f est paire

Proposition 9

Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n en 0 :

- Si f est paire alors $PP_n(f)$ est un polynôme pair.

Proposition 9

Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n en 0 :

- Si f est paire alors $PP_n(f)$ est un polynôme pair.
- Si f est impaire,

Proposition 9

Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n en 0 :

- Si f est paire alors $PP_n(f)$ est un polynôme pair.
- Si f est impaire, alors $PP_n(f)$ est un polynôme impair.

Exemples 6

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Exemples 6

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \underset{\textbf{impaire}}{=}$$

Exemples 6

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \underset{\textbf{impaire}}{=} \cdots + 0\,x^4 + o(x^4)$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) =$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) =$$

$$x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

Proposition 10

Quotient.

Proposition 10

Quotient.
Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0 et si

$$f(0) \neq 0$$

Proposition 10

Quotient.
Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0 et si

$f(0) \neq 0$ alors

Proposition 10

Quotient.
Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0 et si $f(0) \neq 0$ alors $\dfrac{1}{f}$

Proposition 10

Quotient.
Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0 et si $f(0) \neq 0$ alors $\dfrac{1}{f}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0.

On utilise que
$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x^k + o(x^n)$

On utilise que $f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x^k + o(x^n)$ et on obtient :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f(0) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x^k + o(x^n)} =$$

$$\frac{1}{f(0)} \frac{1}{1+u}$$

On utilise que $f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x^k + o(x^n)$ et on obtient :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f(0) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x^k + o(x^n)} =$$

$$\frac{1}{f(0)} \frac{1}{1+u}$$

où l'on pose

On utilise que $f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x^k + o(x^n)$ et on obtient :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f(0) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x^k + o(x^n)} = \frac{1}{f(0)} \frac{1}{1+u}$$

où l'on pose $u = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{f(0)} x^k + o(x^n)$.

Donc $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{f(0)}\dfrac{1}{1+u}$

Donc $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{f(0)} \dfrac{1}{1+u}$

On utilise ensuite la composition des développements limités, vue plus haut pour traiter

Donc $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{f(0)} \dfrac{1}{1+u}$

On utilise ensuite la composition des développements limités, vue plus haut pour traiter $\dfrac{1}{1+u}$.

Exemples 7

Développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\tan(x)$:

Exemples 7

Développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\tan(x)$:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Exemples 7

Développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\tan(x)$:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Exemples 7

Développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\tan(x)$:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

On a : $\tan(x) =$

Exemples 7

Développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\tan(x)$:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

On a : $\tan(x) = \sin(x).\dfrac{1}{\cos(x)}$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 \underbrace{- \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}_{u(x)}} = g(u(x)).$$

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}_{u(x)}} = g(u(x)).$$ **Avec**

$$g(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}_{u(x)}} = g(u(x)).$$ **Avec**

$$g(x) = \frac{1}{1+x}$$ **et**

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 \underbrace{- \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}_{u(x)}} = g(u(x)).$$ **Avec**

$$g(x) = \frac{1}{1+x} \quad \textbf{et} \quad u = \underbrace{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}}_{P(x)} + o(x^5)$$

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}_{u(x)}} = g(u(x)).$$ **Avec**

$$g(x) = \frac{1}{1+x}$$ **et** $$u = \underbrace{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}}_{P(x)} + o(x^5)$$

On a

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 \underbrace{- \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}_{u(x)}} = g(u(x)).$$ **Avec**

$$g(x) = \frac{1}{1+x}$$ **et** $$u = \underbrace{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}}_{P(x)} + o(x^5)$$

On a $g(x) = \dfrac{1}{1+x} =$

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 \underbrace{- \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}_{u(x)}} = g(u(x)).$$ **Avec**

$$g(x) = \frac{1}{1+x}$$ **et** $$u = \underbrace{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}}_{P(x)} + o(x^5)$$

On a $g(x) = \dfrac{1}{1+x} =$
$$\underbrace{1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5}_{Q(x)} + o(x^5).$$

On a $\lim\limits_{0} u = 0$**,**

On a $\lim\limits_{0} u = 0$**, donc**

$$\frac{1}{\cos(x)} = g(f(x)) = Tronc_5(Q(P(x))) + o(x^5).$$

On a $\lim_{0} u = 0$, **donc**

$$\frac{1}{\cos(x)} = g(f(x)) = Tronc_5(Q(P(x))) + o(x^5).$$

$$Q(P(x)) =$$
$$1 - P(x) + P(x)^2 - P(x)^3 + P(x)^4 - P(x)^5 =$$

On a $\lim_{0} u = 0$**, donc**

$$\frac{1}{\cos(x)} = g(f(x)) = Tronc_5(Q(P(x))) + o(x^5).$$

$$Q(P(x)) =$$

$$1 - P(x) + P(x)^2 - P(x)^3 + P(x)^4 - P(x)^5 =$$

$$1 - \left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) +$$

On a $\lim_{0} u = 0$, **donc**

$$\frac{1}{\cos(x)} = g(f(x)) = Tronc_5(Q(P(x))) + o(x^5).$$

$$Q(P(x)) =$$

$$1 - P(x) + P(x)^2 - P(x)^3 + P(x)^4 - P(x)^5 =$$

$$1 - \left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 -$$

On a $\lim\limits_{0} u = 0$**, donc**

$$\frac{1}{\cos(x)} = g(f(x)) = Tronc_5(Q(P(x))) + o(x^5).$$

$$Q(P(x)) =$$

$$1 - P(x) + P(x)^2 - P(x)^3 + P(x)^4 - P(x)^5 =$$

$$1 - \left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 -$$

$$\left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^3 +$$

On a $\lim\limits_{0} u = 0$**, donc**

$$\frac{1}{\cos(x)} = g(f(x)) = Tronc_5(Q(P(x))) + o(x^5).$$

$$Q(P(x)) =$$

$$1 - P(x) + P(x)^2 - P(x)^3 + P(x)^4 - P(x)^5 =$$

$$1 - \left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 -$$

$$\left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^3 + \left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^4 -$$

On a $\lim\limits_{0} u = 0$**, donc**

$$\frac{1}{\cos(x)} = g(f(x)) = Tronc_5(Q(P(x))) + o(x^5).$$

$$Q(P(x)) =$$

$$1 - P(x) + P(x)^2 - P(x)^3 + P(x)^4 - P(x)^5 =$$

$$1 - \left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 -$$

$$\left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^3 + \left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^4 - \left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^5$$

$$Q(P(x)) = 1 - \left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) +$$

$$Q(P(x)) = 1 - \left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^5) =$$

$$Q(P(x)) = 1 - \left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^5) =$$

$$1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^5) =$$

$$Q(P(x)) = 1 - \left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^5) =$$

$$1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^5) =$$

$$1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5).$$

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5).$$

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5).$$

$$\tan(x) = \sin(x)\frac{1}{\cos(x)} =$$

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5).$$

$$\tan(x) = \sin(x)\frac{1}{\cos(x)} =$$

$$Tronc_5\left(\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}\right)\right) + o(x^5)$$

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5).$$

$$\tan(x) = \sin(x)\frac{1}{\cos(x)} =$$

$$Tronc_5\left(\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}\right)\right) + o(x^5)$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + o(x^5)$$

Au voisinage de 0

$$\begin{aligned}
e^x &= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)\\
\mathrm{ch}(x) &= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})\\
\mathrm{sh}(x) &= x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})\\
\mathbf{th}(x) &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7+o(x^7)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\cos(x) &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})\\
\sin(x) &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})\\
\tan(x) &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+o(x^7)\\
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1.3.5\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \cdots + (-1)^n\frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^n + o(x^n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
\arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \\
\arcsin(x) &= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})
\end{aligned}$$

Définition 7

On dit qu'une fonction f définie au voisinage de $+\infty$ admet un développement limité à l'ordre n en $+\infty$

Définition 7

On dit qu'une fonction f définie au voisinage de $+\infty$ admet un développement limité à l'ordre n en $+\infty$ s'il existe un polynôme P de degré au plus n tel que :

Définition 7

On dit qu'une fonction f définie au voisinage de $+\infty$ admet un développement limité à l'ordre n en $+\infty$ s'il existe un polynôme P de degré au plus n tel que :

$$f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

En pratique, on fait le changement de variable : $h = \dfrac{1}{x}$**,**

En pratique, on fait le changement de variable : $h = \dfrac{1}{x}$, $g(h) = f\left(\frac{1}{h}\right)$, En pratique, on fait le changement de variable : $h = \dfrac{1}{x}$, $g(h) = f\left(\frac{1}{h}\right)$, f admet un développement limité à l'ordre n en $+\infty$ si et seulement si

En pratique, on fait le changement de variable : $h = \dfrac{1}{x}$, $g(h) = f\left(\frac{1}{h}\right)$, f admet un développement limité à l'ordre n en $+\infty$ si et seulement si g admet un développement limité à l'ordre n en 0.

Exemples 8

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{1 + x},$$

Exemples 8

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{1+x}$, **calculons son développement limité à l'ordre** 3 **en** $\pm\infty$ **:**

Exemples 8

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{1+x}$, calculons son développement limité à l'ordre 3 en $\pm\infty$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} =$$

Exemples 8

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{1+x}$, calculons son développement limité à l'ordre 3 en $\pm\infty$:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\pm\frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}} \text{ en } \pm\infty$$

Exemples 8

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{1+x}$, **calculons son développement limité à l'ordre 3 en $\pm\infty$:**

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = \pm\frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}} \text{ en } \pm\infty$$

On pose $g(h) = \dfrac{\sqrt{1+h+h^2}}{1+h}$,

Exemples 8

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{1+x}$, calculons son développement limité à l'ordre 3 en $\pm\infty$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = \pm\frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}} \text{ en } \pm\infty$$

On pose $g(h) = \dfrac{\sqrt{1+h+h^2}}{1+h}$, avec le développement limité à l'ordre 3 en 0 de g, on obtient le développement limité à l'ordre 3 en $\pm\infty$ de f.

On a $g(h) = 1 - \frac{1}{2}h + \frac{7}{8}h^2 - \frac{17}{16}h^3 + o(h^3)$**.**

Et puisque $f(x) = g(\frac{1}{h})$**,**

On a $g(h) = 1 - \frac{1}{2}h + \frac{7}{8}h^2 - \frac{17}{16}h^3 + o(h^3)$**.**

Et puisque $f(x) = g(\frac{1}{h})$**, alors**

On a $g(h) = 1 - \frac{1}{2}h + \frac{7}{8}h^2 - \frac{17}{16}h^3 + o(h^3)$.

Et puisque $f(x) = g(\frac{1}{h})$, **alors**

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2x} + \frac{7}{8}\frac{1}{x^2} - \frac{17}{16}\frac{1}{x^3} + o(\frac{1}{x^3})$$

Si f est une fonction définie au voisinage de 0, il se peut que f n'admette pas de développement limité en 0 mais que :

Si f est une fonction définie au voisinage de 0, il se peut que f n'admette pas de développement limité en 0 mais que :

$x^{\alpha}f$ **ou**

Si f est une fonction définie au voisinage de 0, il se peut que f n'admette pas de développement limité en 0 mais que :

$$x^{\alpha} f \text{ ou } x^{\alpha}(\ln(x))^{\beta} f$$

Si f est une fonction définie au voisinage de 0, il se peut que f n'admette pas de développement limité en 0 mais que :

$x^\alpha f$ **ou** $x^\alpha(\ln(x))^\beta f$ **admettent un développement limité en 0.**

Si f est une fonction définie au voisinage de 0, il se peut que f n'admette pas de développement limité en 0 mais que :

$x^\alpha f$ **ou** $x^\alpha(\ln(x))^\beta f$ **admettent un développement limité en 0.**

On écrit :

$$x^\alpha(\ln(x))^\beta f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + o(x^n)$$

Si f est une fonction définie au voisinage de 0, il se peut que f n'admette pas de développement limité en 0 mais que :

$x^\alpha f$ **ou** $x^\alpha(\ln(x))^\beta f$ **admettent un développement limité en 0.**

On écrit :

$$x^\alpha(\ln(x))^\beta f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + o(x^n)$$

$$f(x) = a_0 x^{-\alpha}(\ln(x))^{-\beta} + a_1 x^{1-\alpha}(\ln(x))^{-\beta} + ... + a_n x^{n-\alpha}(\ln(x))^{-\beta} + o(x^{n-\alpha}(\ln(x))^{-\beta})$$

Si f est une fonction définie au voisinage de 0, il se peut que f n'admette pas de développement limité en 0 mais que :

$x^{\alpha}f$ **ou** $x^{\alpha}(\ln(x))^{\beta}f$ **admettent un développement limité en 0.**

On écrit :

$$x^{\alpha}(\ln(x))^{\beta}f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n + o(x^n)$$

$$f(x) = a_0x^{-\alpha}(\ln(x))^{-\beta} + a_1x^{1-\alpha}(\ln(x))^{-\beta} + ... + a_nx^{n-\alpha}(\ln(x))^{-\beta} + o(x^{n-\alpha}(\ln(x))^{-\beta})$$

On appelle cette expression un développement limité généralisé en 0.

Exemples 9

1. $f(x) = cotan(x) = \dfrac{1}{tan(x)}$

1. $f(x) = cotan(x) = \dfrac{1}{tan(x)}$
   $xf(x) = \dfrac{x}{tan(x)}$ **admet un prolongement continu en** 0

1. $f(x) = cotan(x) = \dfrac{1}{tan(x)}$
   $xf(x) = \dfrac{x}{tan(x)}$ **admet un prolongement continu en** 0
   $xf(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$

1. $f(x) = cotan(x) = \dfrac{1}{tan(x)}$

   $xf(x) = \dfrac{x}{tan(x)}$ **admet un prolongement continu en** 0

   $xf(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$

   Si $tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^5)$**,**

1. $f(x) = cotan(x) = \dfrac{1}{tan(x)}$

   $xf(x) = \dfrac{x}{tan(x)}$ **admet un prolongement continu en** 0

   $xf(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$

   Si $tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^5)$, **alors :**

1. $f(x) = cotan(x) = \dfrac{1}{tan(x)}$

   $xf(x) = \dfrac{x}{tan(x)}$ **admet un prolongement continu en** 0

   $xf(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$

   Si $tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^5)$, **alors :**

   $\dfrac{x}{tan(x)} = \dfrac{x}{x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^5)} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{2x^4}{15} + o(x^4)}$

$$\frac{x}{tan(x)} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + o(x^4)}$$

$$\frac{x}{tan(x)} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + o(x^4)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{tan(x)} = 1 - \left(\frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15}\right) + \left(\frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15}\right)^2 - \left(\frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15}\right)^3 + o(x^4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{tan(x)} = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{2x^4}{15} + \frac{x^4}{9} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + o(x^4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{tan(x)} = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{2x^4}{15} + \frac{x^4}{9} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + o(x^4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{tan(x)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + o(x^3).$$

1. **$\sqrt{\sin(x)}$ est bien définie au voisinage de 0^+, continue en 0^+ mais pas dérivable en 0^+.**

1. $\sqrt{\sin(x)}$ **est bien définie au voisinage de** 0^+**, continue en** 0^+ **mais pas dérivable en** 0^+**. On sait donc qu'elle n'admet pas de D.L. à l'ordre 1 en** 0^+**.**

1. $\sqrt{\sin(x)}$ **est bien définie au voisinage de** 0^+**, continue en** 0^+ **mais pas dérivable en** 0^+**. On sait donc qu'elle n'admet pas de D.L. à l'ordre 1 en** 0^+**. Cependant, on peut écrire**
$$\sqrt{\sin(x)} = \sqrt{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

1. $\sqrt{\sin(x)}$ **est bien définie au voisinage de 0^+, continue en 0^+ mais pas dérivable en 0^+. On sait donc qu'elle n'admet pas de D.L. à l'ordre 1 en 0^+. Cependant, on peut écrire**

$$\sqrt{\sin(x)} = \sqrt{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sin(x)} = \sqrt{x} \times \sqrt{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)}$$

1. $\sqrt{\sin(x)}$ **est bien définie au voisinage de 0^+, continue en 0^+ mais pas dérivable en 0^+. On sait donc qu'elle n'admet pas de D.L. à l'ordre 1 en 0^+. Cependant, on peut écrire**

$$\sqrt{\sin(x)} = \sqrt{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sin(x)} = \sqrt{x} \times \sqrt{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sin(x)} = \sqrt{x} \times \left(1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6}\right) + o(x^2)\right)$$

1. $\sqrt{\sin(x)}$ **est bien définie au voisinage de** 0^+**, continue en** 0^+ **mais pas dérivable en** 0^+**. On sait donc qu'elle n'admet pas de D.L. à l'ordre 1 en** 0^+**. Cependant, on peut écrire**

$$\sqrt{\sin(x)} = \sqrt{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sin(x)} = \sqrt{x} \times \sqrt{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sin(x)} = \sqrt{x} \times \left(1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6}\right) + o(x^2)\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sin(x)} = \sqrt{x} - \frac{x^2}{12}\sqrt{x} + o(x^2\sqrt{x})$$

Définition 8

On appelle *développement asymptotique* un développement limité généralisé au voisinage de $\pm\infty$

Les développements limités peuvent être utilisés notamment pour calculer des limites, Les développements limités peuvent être utilisés notamment pour calculer des limites, faire l'étude locale d'une fonction au voisinage d'un point, Les développements limités peuvent être utilisés notamment pour calculer des limites, faire l'étude locale d'une fonction au voisinage d'un point, ou étudier les branches infinies d'une fonction.

Exemples 10

1. **Un exemple de calcul de limite**
   On a vu que les équivalents permettaient de calculer rapidement des limites,

Exemples 10

1. **Un exemple de calcul de limite**
   On a vu que les équivalents permettaient de calculer rapidement des limites, mais ils ne peuvent être utilisés dès qu'une somme ou une composition entrent dans l'expression de la fonction.

Exemples 10

1. Un exemple de calcul de limite
   On a vu que les équivalents permettaient de calculer rapidement des limites, mais ils ne peuvent être utilisés dès qu'une somme ou une composition entrent dans l'expression de la fonction. On utilise dans ce cas les développements limités pour étudier la limite.

Exemples 10

1. **Un exemple de calcul de limite**
   On a vu que les équivalents permettaient de calculer rapidement des limites, mais ils ne peuvent être utilisés dès qu'une somme ou une composition entrent dans l'expression de la fonction. On utilise dans ce cas les développements limités pour étudier la limite.
   Déterminons, par exemple, la limite en 0 de $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2}$.

On a $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$**,**

On a $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$, **d'où l'on tire**

$$\frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{x}\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)} = \frac{1}{x}(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)) =$$

On a $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$**, d'où l'on tire**

$$\frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{x}\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)} = \frac{1}{x}(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)) =$$

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{6} + o(x^2)$, **puis**

On a $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$**, d'où l'on tire**

$$\frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{x}\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)} = \frac{1}{x}(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)) =$$

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{6} + o(x^2)$, **puis** $\dfrac{1}{\sin^2(x)} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{3} + o(x)$**,**

On a $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$**, d'où l'on tire**

$$\frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{x}\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)} = \frac{1}{x}(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)) =$$

$\frac{1}{x} + \frac{x}{6} + o(x^2)$, **puis** $\frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} + o(x)$**,**
et finalement on obtient :

On a $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, **d'où l'on tire**

$$\frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{x}\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)} = \frac{1}{x}(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)) =$$

$\frac{1}{x} + \frac{x}{6} + o(x^2)$, **puis** $\frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} + o(x)$,

et finalement on obtient :

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3}.$$

1. **Etude des propriétés locales de la représentation graphique d'une fonction**
   On a vu qu'une fonction est dérivable en un point si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en ce point.

1. **Etude des propriétés locales de la représentation graphique d'une fonction**
   On a vu qu'une fonction est dérivable en un point si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en ce point. Cela permet notamment de voir si une fonction peut être prolongeable en une fonction dérivable en un point,

1. **Etude des propriétés locales de la représentation graphique d'une fonction**

   On a vu qu'une fonction est dérivable en un point si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en ce point. Cela permet notamment de voir si une fonction peut être prolongeable en une fonction dérivable en un point, le développement limité à l'ordre 1 donnant en plus l'équation de la droite tangente à la courbe en ce point.

1. **Etude des propriétés locales de la représentation graphique d'une fonction**
   On a vu qu'une fonction est dérivable en un point si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en ce point. Cela permet notamment de voir si une fonction peut être prolongeable en une fonction dérivable en un point, le développement limité à l'ordre 1 donnant en plus l'équation de la droite tangente à la courbe en ce point. Le premier terme non nul suivant dans un développement limité d'ordre $n > 1$ permet en outre de déterminer la position de la courbe par rapport à la droite tangente.

Montrons que la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ se prolonge en une fonction dérivable en 0

Montrons que la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ se prolonge en une fonction dérivable en 0 et calculons l'équation de la droite tangente à la courbe de f en 0.

Montrons que la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ se prolonge en une fonction dérivable en 0 et calculons l'équation de la droite tangente à la courbe de f en 0.

On sait que $e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

Montrons que la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ se prolonge en une fonction dérivable en 0 et calculons l'équation de la droite tangente à la courbe de f en 0.

On sait que $e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ d'où l'on tire un développement limité à l'ordre2 de f en 0 :

Montrons que la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ se prolonge en une fonction dérivable en 0 et calculons l'équation de la droite tangente à la courbe de f en 0.

On sait que $e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ d'où l'on tire un développement limité à l'ordre 2 de f en 0 :

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2).$$

Montrons que la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ se prolonge en une fonction dérivable en 0 et calculons l'équation de la droite tangente à la courbe de f en 0.

On sait que $e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ d'où l'on tire un développement limité à l'ordre2 de f en 0 :

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2).$$

On obtient ainsi les informations suivantes :

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2).$$

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2).$$

- **La fonction f se prolonge en une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable.**

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2).$$

- La fonction f se prolonge en une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable.
- La valeur de la fonction prolongée en 0 est

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2).$$

- **La fonction f se prolonge en une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable.**
- **La valeur de la fonction prolongée en 0 est $f(0) = 1$.**

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2).$$

- **La fonction f se prolonge en une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable.**
- **La valeur de la fonction prolongée en 0 est** $f(0) = 1$.
- **La droite tangente à la courbe au point**

  $x = 0, y = 1$ **est la droite d'équation**

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2).$$

- La fonction f se prolonge en une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable.
- La valeur de la fonction prolongée en 0 est $f(0) = 1$.
- La droite tangente à la courbe au point $x = 0, y = 1$ est la droite d'équation $y = 1 - \dfrac{x}{2}$.
- La courbe se situe au dessus de la droite tangente au voisinage du point $x = 0$ car

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2).$$

- La fonction f se prolonge en une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable.
- La valeur de la fonction prolongée en 0 est $f(0) = 1$.
- La droite tangente à la courbe au point $x = 0, y = 1$ est la droite d'équation $y = 1 - \dfrac{x}{2}$.
- La courbe se situe au dessus de la droite tangente au voisinage du point $x = 0$ car $f(x) - \left(1 - \dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{x^2}{12} + o(x^2) > 0$

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2).$$

- La fonction f se prolonge en une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable.
- La valeur de la fonction prolongée en 0 est $f(0) = 1$.
- La droite tangente à la courbe au point $x = 0, y = 1$ est la droite d'équation $y = 1 - \dfrac{x}{2}$.
- La courbe se situe au dessus de la droite tangente au voisinage du point $x = 0$ car $f(x) - \left(1 - \dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{x^2}{12} + o(x^2) > 0$ au voisinage de 0.

puisque $\dfrac{x^2}{12} + o(x^2)$

puisque $\dfrac{x^2}{12} + o(x^2)$ est du signe de

puisque $\dfrac{x^2}{12} + o(x^2)$ **est du signe de** $\dfrac{x^2}{12}$ **au voisinage de** 0.

1. Étude d'une fonction au voisinage de $+\infty$.
   $f(x) = (8x^3 - 4x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$

1. Étude d'une fonction au voisinage de $+\infty$.
$f(x) = (8x^3 - 4x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$
$$\Leftrightarrow f(x) = \left[8x^3\left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

1. Étude d'une fonction au voisinage de $+\infty$.

$f(x) = (8x^3 - 4x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$

$$\Leftrightarrow f(x) = \left[8x^3\left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2x\left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

1. Étude d'une fonction au voisinage de $+\infty$.

$f(x) = (8x^3 - 4x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$

$$\Leftrightarrow f(x) = \left[8x^3\left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2x\left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$(u+1)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}u + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right) \times \frac{1}{2}u^2 + o(u^2) =$$
$$1 + \frac{1}{3}u - \frac{1}{9}u^2 + o(u^2)$$

1. Étude d'une fonction au voisinage de $+\infty$.

$f(x) = (8x^3 - 4x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$

$$\Leftrightarrow f(x) = \left[8x^3\left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2x\left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$(u+1)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}u + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right) \times \frac{1}{2}u^2 + o(u^2) =$$

$$1 + \frac{1}{3}u - \frac{1}{9}u^2 + o(u^2)$$

$f(x) =$

$$2x\left[1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3}\right) - \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2x\left[1 - \frac{1}{6x} - \frac{1}{36x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2x\left[1 - \frac{1}{6x} - \frac{1}{36x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$
$$\Leftrightarrow f(x) = 2x - \frac{1}{3} - \frac{1}{18x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2x\left[1 - \frac{1}{6x} - \frac{1}{36x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2x - \frac{1}{3} - \frac{1}{18x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ce développement asymptotique permet de dire que :

$$\Leftrightarrow f(x) = 2x\left[1 - \frac{1}{6x} - \frac{1}{36x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2x - \frac{1}{3} - \frac{1}{18x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ce développement asymptotique permet de dire que :

- f **a la droite**

$$\Leftrightarrow f(x) = 2x\left[1 - \frac{1}{6x} - \frac{1}{36x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2x - \frac{1}{3} - \frac{1}{18x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ce développement asymptotique permet de dire que :

- f **a la droite** $y = 2x - \dfrac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2x\left[1 - \frac{1}{6x} - \frac{1}{36x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2x - \frac{1}{3} - \frac{1}{18x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ce développement asymptotique permet de dire que :

- f **a la droite** $y = 2x - \dfrac{1}{3}$ **pour asymptote en** $+\infty$.

$$\Leftrightarrow f(x) = 2x\left[1 - \frac{1}{6x} - \frac{1}{36x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2x - \frac{1}{3} - \frac{1}{18x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ce développement asymptotique permet de dire que :

- f a la droite $y = 2x - \frac{1}{3}$ pour asymptote en $+\infty$.
- la courbe de f est

$$\Leftrightarrow f(x) = 2x\left[1 - \frac{1}{6x} - \frac{1}{36x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$
$$\Leftrightarrow f(x) = 2x - \frac{1}{3} - \frac{1}{18x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ce développement asymptotique permet de dire que :

- f a la droite $y = 2x - \dfrac{1}{3}$ pour asymptote en $+\infty$.
- la courbe de f est en-dessous de l'asymptote au voisinage de $+\infty$ car

$$\Leftrightarrow f(x) = 2x\left[1 - \frac{1}{6x} - \frac{1}{36x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2x - \frac{1}{3} - \frac{1}{18x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ce développement asymptotique permet de dire que :

- f **a la droite** $y = 2x - \frac{1}{3}$ **pour asymptote en** $+\infty$.
- **la courbe de** f **est en-dessous de l'asymptote au voisinage de** $+\infty$ **car**
  $$f(x) - \left(2x - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{18x} + o\left(\frac{1}{x}\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2x\left[1 - \frac{1}{6x} - \frac{1}{36x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$
$$\Leftrightarrow f(x) = 2x - \frac{1}{3} - \frac{1}{18x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ce développement asymptotique permet de dire que :

- f a la droite $y = 2x - \dfrac{1}{3}$ pour asymptote en $+\infty$.
- la courbe de f est en-dessous de l'asymptote au voisinage de $+\infty$ car $f(x) - \left(2x - \dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{18x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right) < 0$ au voisinage de $+\infty$.

puisque $-\dfrac{1}{18x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$

puisque $-\dfrac{1}{18x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ **est du signe de**

puisque $-\frac{1}{18x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ est du signe de $-\frac{1}{18x}$ au voisinage de $+\infty$.

Proposition 11

Soit f une fonction de classe C^n bijective au voisinage de 0,

Proposition 11

Soit f une fonction de classe C^n bijective au voisinage de 0, avec $f(0) = 0$

Proposition 11

Soit f une fonction de classe C^n bijective au voisinage de 0, avec $f(0) = 0$ et tel que $f'(0) \neq 0$.

Proposition 11

Soit f une fonction de classe C^n bijective au voisinage de 0, avec $f(0) = 0$ et tel que $f'(0) \neq 0$. Alors f admet une fonction réciproque f^{-1}

Proposition 11

Soit f une fonction de classe C^n bijective au voisinage de 0, avec $f(0) = 0$ et tel que $f'(0) \neq 0$. Alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un voisinage de 0

Proposition 11

Soit f une fonction de classe C^n bijective au voisinage de 0, avec $f(0) = 0$ et tel que $f'(0) \neq 0$. Alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un voisinage de 0 et on peut calculer le développement limité à l'ordre n en 0

Proposition 11

Soit f une fonction de classe C^n bijective au voisinage de 0, avec $f(0) = 0$ et tel que $f'(0) \neq 0$. Alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un voisinage de 0 et on peut calculer le développement limité à l'ordre n en 0 de f^{-1}

Proposition 11

Soit f une fonction de classe C^n bijective au voisinage de 0, avec $f(0) = 0$ et tel que $f'(0) \neq 0$. Alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un voisinage de 0 et on peut calculer le développement limité à l'ordre n en 0 de f^{-1} à l'aide de celui de f.

Démonstration.

$\square$

Indication :

Démonstration.

$\square$

Indication : Soit $y = f(x)$ avec $f'(x) \neq 0$.

Démonstration.

□

Indication : Soit $y = f(x)$ avec $f'(x) \neq 0$. Alors $(f^{-1})^{(n)}(y)$ existe pour tout n.

•

Démonstration.

□

Indication : Soit $y = f(x)$ **avec** $f'(x) \neq 0$. **Alors** $(f^{-1})^{(n)}(y)$ **existe pour tout** n.

- $(f^{-1})'(f(x))\underbrace{f'(x)}_{\neq 0} = 1 \ (*)$.

Démonstration.

□

Indication : Soit $y = f(x)$ **avec** $f'(x) \neq 0$. **Alors** $(f^{-1})^{(n)}(y)$ **existe pour tout** n.

- $(f^{-1})'(f(x))\underbrace{f'(x)}_{\neq 0} = 1 \ (*)$.

Donc

Démonstration.

$\square$

Indication : Soit $y = f(x)$ **avec** $f'(x) \neq 0$. **Alors** $(f^{-1})^{(n)}(y)$ **existe pour tout** n.

- $(f^{-1})'(f(x))\underbrace{f'(x)}_{\neq 0} = 1 \ (*)$.

Donc $(f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$,

Démonstration.

Indication : **Soit** $y = f(x)$ **avec** $f'(x) \neq 0$. **Alors** $(f^{-1})^{(n)}(y)$ **existe pour tout** n.

- $(f^{-1})'(f(x))\underbrace{f'(x)}_{\neq 0} = 1 \ (*)$.

Donc $(f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$, **c-à-d**

Démonstration.

$\square$

Indication : Soit $y = f(x)$ **avec** $f'(x) \neq 0$. **Alors** $(f^{-1})^{(n)}(y)$ **existe pour tout** n.

- $(f^{-1})'(f(x))\underbrace{f'(x)}_{\neq 0} = 1 \ (*)$.

Donc $(f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$, **c-à-d**

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$(f^{-1})'(f(x))\underbrace{f'(x)}_{\neq 0} = 1 \ (*).$$

-

$$(f^{-1})'(f(x))\underbrace{f'(x)}_{\neq 0} = 1 \ (*).$$

- **en dérivant** $(*)$

$$(f^{-1})'(f(x))\underbrace{f'(x)}_{\neq 0} = 1 \ (*).$$

- **en dérivant $(*)$ on a :**

$$(f^{-1})'(f(x))\underbrace{f'(x)}_{\neq 0} = 1 \ (*).$$

- **en dérivant $(*)$ on a :**

$$(f^{-1})''(f(x))\underbrace{(f'(x))^2}_{\neq 0} + (f^{-1})'(f(x))f''(x) = 0 \ (**).$$

$$(f^{-1})'(f(x))\underbrace{f'(x)}_{\neq 0} = 1 \ (*).$$

- **en dérivant** $(*)$ **on a :**

$$(f^{-1})''(f(x))\underbrace{(f'(x))^2}_{\neq 0} + (f^{-1})'(f(x))f''(x) = 0 \ (**).$$

Donc

$$(f^{-1})'(f(x))\underbrace{f'(x)}_{\neq 0} = 1 \ (*).$$

- **en dérivant** $(*)$ **on a :**

$$(f^{-1})''(f(x))\underbrace{(f'(x))^2}_{\neq 0} + (f^{-1})'(f(x))f''(x) = 0 \ (**).$$

Donc $\quad (f^{-1})''(f(x)) = -\dfrac{(f^{-1})'(f(x))f''(x)}{(f'(x))^2},$

$$(f^{-1})'(f(x))\underbrace{f'(x)}_{\neq 0} = 1 \ (*).$$

- **en dérivant** $(*)$ **on a :**

$$(f^{-1})''(f(x))\underbrace{(f'(x))^2}_{\neq 0} + (f^{-1})'(f(x))f''(x) = 0 \ (**).$$

Donc $(f^{-1})''(f(x)) = -\dfrac{(f^{-1})'(f(x))f''(x)}{(f'(x))^2}$,

c-à-d

$$(f^{-1})'(f(x))\underbrace{f'(x)}_{\neq 0} = 1 \ (*).$$

- **en dérivant** $(*)$ **on a :**

$$(f^{-1})''(f(x))\underbrace{(f'(x))^2}_{\neq 0} + (f^{-1})'(f(x))f''(x) = 0 \ (**).$$

Donc $\quad (f^{-1})''(f(x)) = -\dfrac{(f^{-1})'(f(x))f''(x)}{(f'(x))^2}$,

c-à-d

$$(f^{-1})''(y) = -\frac{(f^{-1})'(y)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$(f^{-1})''(f(x))\underbrace{(f'(x))^2}_{\neq 0}+(f^{-1})'(f(x))f''(x) = 0 \ (**).$$

-

$$(f^{-1})''(f(x))\underbrace{(f'(x))^2}_{\neq 0}+(f^{-1})'(f(x))f''(x) = 0 \ (**).$$

- **en dérivant** $(**) \cdots$.

$$(f^{-1})'''(y) = \frac{\cdots}{(f'(x))^3}$$

Exemples 11

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x\, exp(x^2)$.

Exemples 11

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x\, exp(x^2)$. Montrons que f^{-1} admet un DL_3 en 0.

Exemples 11

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x\, exp(x^2)$. Montrons que f^{-1} admet un DL_3 en 0.

- f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Exemples 11

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x\,exp(x^2)$. Montrons que f^{-1} admet un DL_3 en 0.

- f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
  En effet, on a

Exemples 11

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x\, exp(x^2)$. Montrons que f^{-1} admet un DL_3 en 0.

- f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
  En effet, on a $f'(x) = (x^2 + 1) exp(x^2) > 0$,

Exemples 11

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x\, exp(x^2)$. Montrons que f^{-1} admet un DL_3 en 0.

- f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
  En effet, on a $f'(x) = (x^2+1)exp(x^2) > 0$, donc

Exemples 11

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x\,exp(x^2)$. Montrons que f^{-1} admet un DL_3 en 0.

- f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
  En effet, on a $f'(x) = (x^2 + 1)exp(x^2) > 0$, donc f est strictement croissante.

De plus $\lim_{-\infty} f(x) = -\infty$

De plus $\lim_{-\infty} f(x) = -\infty$ et

De plus $\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$.

De plus $\lim_{-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$. Et comme f est continue, De plus $\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$. Et comme f est continue, alors

De plus $\lim_{-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$. Et comme f est continue, alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

De plus $\lim_{-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$. Et comme f est continue, alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

- f est $\mathcal{C}^{\infty}$,

De plus $\lim_{-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$. Et comme f est continue, alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

- f est $\mathcal{C}^{\infty}$, donc f admet un DL_n pour tout n.

De plus $\lim_{-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$. Et comme f est continue, alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

- f est $\mathcal{C}^{\infty}$, donc f admet un DL_n pour tout n.
- $f(0) = 0$.

De plus $\lim_{-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$. Et comme f est continue, alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

- f est $\mathcal{C}^{\infty}$, donc f admet un DL_n pour tout n.
- $f(0) = 0$.
- $f'(0) \neq 0$.

De plus $\lim_{-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$. Et comme f est continue, alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

- f est $\mathcal{C}^\infty$, donc f admet un DL_n pour tout n.
- $f(0) = 0$.
- $f'(0) \neq 0$.

  Donc f^{-1} admet un DL_n en 0 pour tout n.

- $f^{-1}(0) = 0$.

- $f^{-1}(0) = 0$. Écrivons le DL_3 de f^{-1} en 0.

- $f^{-1}(0) = 0$. Écrivons le DL_3 de f^{-1} en 0.
  $$f^{-1}(x) = \underbrace{ax + bx^2 + cx^3}_{Q(x)} + o(x^3).$$

- $f^{-1}(0) = 0$. Écrivons le DL_3 de f^{-1} en 0.
  $$f^{-1}(x) = \underbrace{ax + bx^2 + cx^3}_{Q(x)} + o(x^3).$$
  De plus

- $f^{-1}(0) = 0$. Écrivons le DL_3 de f^{-1} en 0.

$$f^{-1}(x) = \underbrace{ax + bx^2 + cx^3}_{Q(x)} + o(x^3).$$

De plus $f(x) = \underbrace{x + x^3}_{P(x)} + o(x^3).$

- $f^{-1}(0) = 0$. Écrivons le DL_3 de f^{-1} en 0.

$$f^{-1}(x) = \underbrace{ax + bx^2 + cx^3}_{Q(x)} + o(x^3).$$

De plus $f(x) = \underbrace{x + x^3}_{P(x)} + o(x^3)$.

Donc

- $f^{-1}(0) = 0$. Écrivons le DL_3 de f^{-1} en 0.

$$f^{-1}(x) = \underbrace{ax + bx^2 + cx^3}_{Q(x)} + o(x^3).$$

De plus $f(x) = \underbrace{x + x^3}_{P(x)} + o(x^3)$.

Donc $f^{-1}(f(x)) = Tronc_3(Q(P(x)) + o(x^3)$.

$$Q(x) = ax + bx^2 + cx^3.$$

$$Q(x) = ax + bx^2 + cx^3.$$

$$Q(P(x)) =$$
$$aP(x) + bP(x)^2 + cP(x)^3 =$$
$$a(x + x^3) + b(x + x^3)^2 + c(x + x^3)^3 =$$
$$ax + bx^2 + (a + c)x^3 + o(x^3)$$

$$Q(x) = ax + bx^2 + cx^3.$$

$$Q(P(x)) =$$
$$aP(x) + bP(x)^2 + cP(x)^3 =$$
$$a(x + x^3) + b(x + x^3)^2 + c(x + x^3)^3 =$$
$$ax + bx^2 + (a + c)x^3 + o(x^3)$$

Ainsi

$$Q(x) = ax + bx^2 + cx^3.$$

$$Q(P(x)) =$$
$$aP(x) + bP(x)^2 + cP(x)^3 =$$
$$a(x + x^3) + b(x + x^3)^2 + c(x + x^3)^3 =$$
$$ax + bx^2 + (a + c)x^3 + o(x^3)$$

Ainsi $f^{-1}(f(x)) =$
$$ax + bx^2 + (a + c)x^3 + o(x^3).$$

$$Q(x) = ax + bx^2 + cx^3.$$

$$Q(P(x)) =$$
$$aP(x) + bP(x)^2 + cP(x)^3 =$$
$$a(x + x^3) + b(x + x^3)^2 + c(x + x^3)^3 =$$
$$ax + bx^2 + (a + c)x^3 + o(x^3)$$

Ainsi $f^{-1}(f(x)) =$
$$ax + bx^2 + (a + c)x^3 + o(x^3).$$

Or $f^{-1}(f(x)) = x,$

$$Q(x) = ax + bx^2 + cx^3.$$

$$Q(P(x)) =$$
$$aP(x) + bP(x)^2 + cP(x)^3 =$$
$$a(x + x^3) + b(x + x^3)^2 + c(x + x^3)^3 =$$
$$ax + bx^2 + (a + c)x^3 + o(x^3)$$

Ainsi $f^{-1}(f(x)) =$
$ax + bx^2 + (a + c)x^3 + o(x^3)$.

Or $f^{-1}(f(x)) = x$, donc

$$f^{-1}(f(x)) = x + o(x^3).$$

$f^{-1}(f(x)) = x + o(x^3)$.
Or $f^{-1}(f(x)) =$
$ax + bx^2 + (a + c)x^3 + o(x^3)$,

$f^{-1}(f(x)) = x + o(x^3)$.
Or $f^{-1}(f(x)) =$
$ax + bx^2 + (a + c)x^3 + o(x^3)$, alors
par unicité du DL

$f^{-1}(f(x)) = x + o(x^3)$.
Or $f^{-1}(f(x)) =$
$ax + bx^2 + (a+c)x^3 + o(x^3)$, alors par unicité du DL les deux polynômes

$f^{-1}(f(x)) = x + o(x^3)$.
Or $f^{-1}(f(x)) =$
$ax + bx^2 + (a+c)x^3 + o(x^3)$, alors par unicité du DL les deux polynômes $ax + bx^2 + (a+c)x^3$

$f^{-1}(f(x)) = x + o(x^3)$.
Or $f^{-1}(f(x)) = ax + bx^2 + (a+c)x^3 + o(x^3)$, alors par unicité du DL les deux polynômes $ax + bx^2 + (a+c)x^3$ et x

$f^{-1}(f(x)) = x + o(x^3)$.
Or $f^{-1}(f(x)) =$
$ax + bx^2 + (a+c)x^3 + o(x^3)$, alors par unicité du DL les deux polynômes $ax + bx^2 + (a+c)x^3$ et x sont égaux.

$f^{-1}(f(x)) = x + o(x^3)$.
Or $f^{-1}(f(x)) =$
$ax + bx^2 + (a+c)x^3 + o(x^3)$, alors par unicité du DL les deux polynômes $ax + bx^2 + (a+c)x^3$ et x sont égaux.

Donc $a = 1$, $b = 0$ et $a + c = 0$,

$f^{-1}(f(x)) = x + o(x^3)$.
Or $f^{-1}(f(x)) =$
$ax + bx^2 + (a+c)x^3 + o(x^3)$, alors par unicité du DL les deux polynômes $ax + bx^2 + (a+c)x^3$ et x sont égaux.

Donc $a = 1$, $b = 0$ et $a + c = 0$, ce qui donne $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$ et

$f^{-1}(f(x)) = x + o(x^3)$.
Or $f^{-1}(f(x)) =$
$ax + bx^2 + (a+c)x^3 + o(x^3)$, alors par unicité du DL les deux polynômes $ax + bx^2 + (a+c)x^3$ et x sont égaux.

Donc $a = 1$, $b = 0$ et $a + c = 0$, ce qui donne $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$ et

$$f^{-1}(x) = x - x^3 + o(x^3)$$