

Examen de contrôle continu du samedi 20 mars 2021

Durée : 2 heures.

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.
Les exercices sont indépendants entre eux. Tous les résultats devront être soigneusement justifiés.

Exercice 1 (3 pts). Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation $24x + 38y = 44$.

Exercice 2 (2+2 pts).

1. Soit n un entier naturel. Montrer que si n^2 est pair, alors n est pair.
2. Soit n un entier naturel multiple de 3. Montrer que $2^n - 1$ est divisible par 7.

Exercice 3 (1.5+1.5 pts).

1. Quel est le reste dans la division par 123 de $368^{123456789101112131451617181920}$?
2. L'écriture en binaire de 2021^{19} se termine-t-elle par 0 ou par 1 ?

Exercice 4 (4 pts). Résoudre dans \mathbb{Z} le système suivant :

$$S : \begin{cases} x \equiv 5 \pmod{12} \\ x \equiv 17 \pmod{20} \end{cases}$$

Exercice 5 (2+1 pts). Déterminer l'ensemble des x dans \mathbb{Z} qui sont solutions des équations suivantes :

1. $8x \equiv 4 \pmod{12}$.
2. $8x \equiv 3 \pmod{12}$.

Exercice 6 (2+1 pts).

1. Soient a et n des entiers naturels non nuls. Montrer que a est inversible modulo n si et seulement si a et n sont premiers entre eux.
2. Donner la liste des éléments de $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times$.

Exercice 7 (Bonus, 2pts). Déterminer le reste de $2^{(83^{100})}$ dans la division Euclidienne par 17.