Examen final du 31 mai 2021

Durée : 2 heures.
Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables. Les exercices sont indépendants entre eux. **Tous les résultats devront être soigneusement justifiés.**

Exercice 1 (1+2+2 pts).

1. Calculer le PGCD de 145 et 55.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes
$$145x + 55y = 237 \qquad\qquad 145x + 55y = 25.$$
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système
$$\begin{cases} x & \equiv 3 \mod 145 \\ 2x & \equiv 1 \mod 55. \end{cases}$$

Exercice 2 (2+1 pts).

1. Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division par 5 de 2^n.
2. Calculer le reste dans la division par 11 de 10^{13}.

Exercice 3 (1+1+1 pts).

1. Déterminer les générateurs du groupe $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$.
2. Existe t-il un morphisme f du groupe $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ vers $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ tel que $f(\bar{1}) = \bar{1}$? tel que $f(\bar{1}) = \bar{2}$? Dans le(s) cas où f est un morphisme, dire s'il est injectif et/ou surjectif.
3. Le groupe $((\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^\times, \times)$ est-il cyclique ?

Exercice 4 (2+1). Écrire la décomposition en cycles disjoints de la permutation
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
et calculer sa signature.

Exercice 5 (1+1+1+1 pts). Un saladier contient 10 papillotes au chocolat noir et 7 papillotes au chocolat blanc. On en tire une poignée de 5 (c'est donc un tirage sans remise, sans ordre).

1. Compter le nombre de tirages qui contiennent exactement 2 papillotes au chocolat blanc.
2. Quelle est la probabilité de n'avoir que des papillotes au chocolat blanc ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une papillote au chocolat noir ?
4. On tire cette fois deux papillotes l'une après l'autre. Quelle est la probabilité que la seconde soit au chocolat noir ?

Exercice 6 (2 pts). Soit $(G, \cdot)$ un groupe d'ordre pair et e son élément neutre. Montrer qu'il existe au moins un élément $x \neq e$ tel que $x^2 = e$.

Exercice 7 (bonus). Soient p, q deux nombres premiers consécutifs strictement plus grands que 3. Montrer que $N = p + q$ a au moins trois diviseurs propres (c'est-à-dire différents de 1 et N).