Corrigé succint de la feuille 6 : Probabilités

Exercice 1. Appliquer la définition, oui dans le premier cas, non dans le second.

Exercice 2. Non : si A et B sont de cardinal $m \neq 0$ et $n \neq 0$ respectivement, et si A et B sont indépendants, on a que le cardinal de $A \cap B$ est $\frac{mn}{p}$. Par Gauss, p divise m ou n, donc l'un de A ou B a pour cardinal p.

Exercice 3.

1. Proba uniforme sur un ensemble à A_{10}^3 élements.
2. A_4^3 façons d'obtenir 3 boules blanches.
3. 6/10 (6 choix pour la boule noire en 2e position, A_9^2 façon de choisir les autres).
4. Ça revient à tirer deux boules parmi les 9 qui restent et à calculer la proba que la première soit noire, donc au final c'est simplement la proba de tirer une des 6 boules noires parmi les 9 boules qui restent.

Exercice 4. 5/36, 1/3, 1/2 (les deux tirages sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs), $A \cap B = A$, 1/6.

Exercice 5. Proba que les deux dés soient différents=1-proba qu'ils soient identiques=5/6. Proba de "l'un des dés donne 6 et les résultats sont distincts"=10/36=5/18. Au final la proba recherchée est 1/3.

Exercice 6.

1. $C_{51}^4 / C_{52}^5 = 5/52$. On peut aussi observer que l'as de pique peut être n'importe où dans le jeu avec la même proba et voir directement que c'est 5/52.
2. $C_{51}^9 / C_{52}^{10} = 10/52$ chances que l'as de pique soit dans les cartes retirées (même raisonnement que ci-dessus), dans ce cas Bob a proba 0 de gagner. Sinon il gagne avec proba $C_{41}^4 / C_{42}^5 = 5/42$. Par la formule des probas totales sa proba de gagner est (1-10/52)*5/42=5/52.

Exercice 7. 1) formule des probas totales : 0.7*0.5+ 0.3*0.75=0.575.

2) On cherche le complémentaire : proba qu'il n'ait jamais triché, sachant qu'il a gagné 7 fois d'affilé. Par Bayes, la proba recherchée est donc : $1 - (\frac{0.5*0.7}{0.575})^7 \approx 96.9\%$.

Exercice 8. Bayes + proba totale.

Exercice 9.

On prouve le résultat proposé par récurrence. Il faut commencer par remarquer qu'à chaque date $n \geq 0$ l'urne contient $n+2$ boules. Pour $n = 0$ le résultat est clairement vrai. Supposons la proposition vraie à un rang n quelconque mais fixé. La famille $\{S_n = 1\}, \ldots, \{S_n = n+1\}$ forme un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales, pour tout $k \in \{1, \ldots, n+2\}$ on a

$$P(S_{n+1} = k) = \sum_{l=1}^{n+1} P(S_{n+1} = k, S_n = l) = P(S_{n+1} = k, S_n = k) + P(S_{n+1} = k, S_n = k-1).$$

En effet, le mécanisme décrit conduit à chaque étape à ajouter 0 ou 1 boule rouge donc l'événement $S_{n+1} = k$ n'est compatible au plus qu'avec $S_n = k$ ou $S_n = k-1$. Si $k = 1$ alors $\{S_n = k-1\} = \emptyset$ donc

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} = 1) &= P(S_{n+1} = 1, S_n = 1) \\ &= P(S_{n+1} = 1 | S_n = 1) P(S_n = 1) \\ &= \frac{n+1}{n+2} \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

car la probabilité conditionnelle est la probabilité de tirer une boule verte dans une urne qui contient $n+2$ boules dont $n+1$ sont vertes (puisqu'une seule est rouge) et $P(S_n = 1) = \frac{1}{n+1}$ d'après l'hypothèse de récurrence. De même si $k = n+2$ alors $\{S_n = k\} = \emptyset$ donc

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} = n+2) &= P(S_{n+1} = n+2, S_n = n+1) \\ &= P(S_{n+1} = n+2 | S_n = n+1) P(S_n = n+1) \\ &= \frac{n+1}{n+2} \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

car la probabilité conditionnelle est la probabilité de tirer une boule rouge dans une urne qui contient $n+2$ boules dont $n+1$ sont rouges et $P(S_n = n+1) = \frac{1}{n+1}$ d'après l'hypothèse de récurrence. Finalement, si $k \in \{2, \ldots, n+1\}$ alors

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} = k) &= P(S_{n+1} = k | S_n = k-1) P(S_n = k-1) + P(S_{n+1} = k | S_n = k) P(S_n = k) \\ &= \frac{k-1}{n+2} \frac{1}{n+1} + \frac{n+2-k}{n+2} \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

Donc si la propriété est vraie pour un entier $n \geq 0$ quelconque elle est vraie pour $n+1$ et comme elle est vraie pour $n = 0$ elle est vraie pour tout entier n.

Une autre solution a été proposé par Maryline ZHANG, que voici :

On peut distinguer les boules en notant R_i la boule rouge ajoutée à l'instant i et V_i la boule verte ajoutée à l'instant i.

Soit $n \geq 0$, alors l'univers Ω est l'ensemble des n-uplets $(a_1, a_2, ..., a_n)$ avec a_i la boule tirée à l'instant $i-1$, pour tout $1 \leq i \leq n$. Par exemple, pour $n = 2$,

$$\Omega = \{(V_0, V_0), (V_0, V_1), (R_0, V_0), (V_0, R_0), (R_0, R_0), (R_0, R_1)\}.$$

Pour a_1 on a 2 choix, pour a_2 on a 3 choix, etc. Donc $|\Omega| = 2 \times 3 \times \ldots \times n+1 = (n+1)!$.

Soit $k \in [\![1; n+1]\!]$. Si $S_n = k$, alors à l'instant n il y a k boules rouges dans l'urne donc les boules rouges ont été tirées $k-1$ fois. Pour le premier tirage il y a qu'un choix : R_0 ; pour le deuxième il y a deux choix : R_0 et la boule ajoutée lorsque R_0 a été tirée, etc. Donc on a $(k-1)!$ choix pour tirer les k boules rouges. Pour les boules vertes, il y en a $n+2-k$ dans l'urne à l'instant n, donc de la même façon, on a $(n-k+1)!$ choix pour tirer les boules vertes.

Il y a C_n^{k-1} façons de choisir les $k-1$ instants où on tire une boule rouge. Par conséquent, il y a $(k-1)! \times (n-k+1)! \times C_n^{k-1}$ cas favorables. Donc $\mathrm{P}(S_n = k) = \dfrac{(k-1)! \times (n-k+1)! \times C_n^{k-1}}{(n+1)!} = \dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n+1}$.