Feuille 4 : Groupes, groupe symétrique

Exercice 1. Montrer qu'il n'existe pas de morphisme non trivial de groupes de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Exercice 2. Montrer qu'il existe un unique morphisme f de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ tel que $f(\bar{1}) = \bar{3}$. Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$. Ce morphisme f est-il injectif ? surjectif ?

Exercice 3. Soit $f : G \longrightarrow H$ un morphisme entre deux groupes finis. Montrer que $\forall x \in G$, l'ordre de $f(x)$ divise l'ordre de x. En déduire que si l'ordre de x est premier avec le cardinal de H, alors $x \in \ker f$.

Exercice 4. Calculer le cardinal de $(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})^\times$. Quel est l'ordre multiplicatif de $\overline{11}$?

Exercice 5. On se place dans $\mathcal{S}_6$. Soit $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ et $\tau := (1,2,3)(2,5)$.
Calculer σ^{-1}, σ^2, τ^2 et la signature de chacune de ces permutations.
Calculer de deux manières différentes $\sigma^{-1}\tau\sigma$.

Exercice 6. Écrire le cycle $(1,2,\dots,n)$ de $\mathcal{S}_n$ comme un produit de transpositions.
Quelle est sa signature ?

Exercice 7. On considère dans $\mathcal{S}_{16}$ l'élément

$$S = \left(\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 13 & 11 & 16 & 12 & 4 & 14 & 3 & 8 & 1 & 9 & 7 & 5 & 10 & 6 & 15 & 2 \end{array} \right).$$

Donner le support, les orbites, la décomposition en cycles disjoints, l'ordre et la signature de S.
Cette permutation appartient-elle à $\mathcal{A}_{16}$?

Exercice 8.
Soit σ et τ les éléments du groupe symétrique $\mathcal{S}_6$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'ensemble des entiers n tels que $\sigma^n = \tau^n$.

Exercice 9. On se place dans le groupe symétrique $\mathcal{S}_{11}$ et on considère les permutations :

$$\pi = \left(\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 11 & 2 & 4 & 1 & 6 & 5 & 8 & 9 & 7 & 10 & 3 \end{array} \right) \text{ et } \sigma = \left(\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 6 & 4 & 11 & 9 & 7 & 8 & 10 & 5 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

1. Ecrire π, σ et $\pi \circ \sigma$ comme produit de cycles à supports disjoints.
2. Déterminer l'ordre de π, de σ et de $\pi \circ \sigma$ dans $\mathcal{S}_{11}$.
3. Quel est l'ordre de $\mathcal{S}_{11}$?
4. Existe-t-il dans le groupe $\mathcal{S}_{11}$ un élément d'ordre 13 ou d'ordre 30 ?

Exercice 10. Soit σ l'élément de $\mathcal{S}_{11}$ suivant : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 8 & 11 & 3 & 1 & 2 & 9 & 6 & 4 & 10 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que σ se décompose en produit de 3 cycles à supports disjoints $\sigma_2,\ \sigma_3,\ \sigma_5$ de longueur respective $2,\ 3$ et 5. Donner l'ordre et la signature de σ.
2. Caractériser H, le sous-groupe de $\mathcal{S}_{11}$ engendré par $\sigma_2,\ \sigma_3,\ \sigma_5$. Est-il commutatif ?
3. On pose
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \longrightarrow & H \\ & (r,s,t) & \mapsto & \sigma_2^r \circ \sigma_3^s \circ \sigma_5^t \end{array}.$$
Montrer que φ est un homomorphisme de groupes surjectif. Caractériser $\ker\varphi$.
Quel est l'ordre de H ? Montrez que H est cyclique et donner un générateur.
Combien existe-t-il de générateurs distincts de H ?