Feuille 2 : Congruences

Exercice 1. Soit $X = x^2$ le carré d'un entier.

1. Quels sont les restes possibles de X dans la division par 4 ?
2. Quels sont les restes possibles de X dans la division par 3 ?

Exercice 2. Montrer que 4 ne peut diviser aucun nombre de la forme $n^2 + 1$.

Exercice 3. Démontrer que le nombre $7^n + 1$ est divisible par 8 si n est un entier naturel impair ; dans le cas n pair, donner le reste de sa division par 8.

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant :

$$S : \left\{ \begin{array}{lcll} x & \equiv & 4 & \mod 6 \\ x & \equiv & 7 & \mod 9 \end{array} \right.$$

Exercice 5.

1. Soit p un nombre premier. Justifier que

$$x^2 \equiv 1 \ (mod\ p)$$

   si et seulement si

$$x \equiv 1 \ (mod\ p) \ \text{ ou } \ x \equiv -1 \ (mod\ p) \ .$$

2. Résoudre le système de congruences

$$\left\{ \begin{array}{lcll} 2x & \equiv & 3 & (mod\ 5) \\ 4x & \equiv & 3 & (mod\ 7) \end{array} \right.$$

Exercice 6. Soit n un entier.

1. Déterminer le pgcd de $9n + 15$ et $4n + 7$ en fonction de n.
2. Montrer que n^2 et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

Exercice 7. Soit n un entier naturel à 6 chiffres tel que lorsque l'on échange les trois premiers chiffres avec les trois derniers, le résultat obtenu est $6n + 21$. Déterminer n.

Exercice 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) = n^2 - n + 41$.

1. La quantité $P(n)$ est-elle un nombre premier pour tout $n \in \mathbb{N}$?
2. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que 43 divise $P(n)$.

Exercice 9.

1. Soit a, $b \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$
$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$
2. Soient n et m deux entiers positifs et $a \in \mathbb{N}^*, a \neq 1$. Montrer que $a^m - 1$ divise $a^n - 1$ si et seulement si m divise n.
3. Soit a un entier, $a > 2$. Montrer que pour $n > 1$, $a^n - 1$ n'est pas premier.
4. Montrer que si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.

Exercice 10. Déterminer :

1. Quel est le dernier chiffre de 7777^{7777} ?
2. Quels sont les restes des divisions euclidiennes de 900^{2000} et de $101^{102^{103}}$ par 13 ?
3. Quel est le reste de la division euclidienne de $31^{32^{33}}$ par 7 ?
4. Quel est le reste de la division euclidienne de $100^{100^{100}}$ par 12 ?

Exercice 11. Montrer que $5^{6614} - 12^{857} \equiv 1 \mod 7$.

Exercice 12. Résoudre les congruences suivantes :

a) $2x \equiv 1 \mod 7$	b) $4x \equiv 6 \mod 18$	c) $12x \equiv 9 \mod 6$	d) $23x \equiv 41 \mod 52$
e) $68x \equiv 100 \mod 120$	f) $5x \equiv -1 \mod 8$	g) $20x \equiv 4 \mod 30$	h) $20x \equiv 30 \mod 4$

Exercice 13. Résoudre dans $\mathbb{Z}/212\mathbb{Z}$: $\overline{171}x = \overline{7}$.