Examen de contrôle continu du mercredi 11 mars 2020

Durée : 2 heures.
Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.
Les exercices sont indépendants entre eux. **Tous les résultats devront être soigneusement justifiés.**

Exercice 1 (3 pts). Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $1124x + 1004y = 12$.

Exercice 2 (2+2 pts).

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ impair, $7^n + 1$ est divisible par 8.
2. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$, 4 ne divise jamais $a^2 + b^2 - 3$.

Exercice 3 (1.5+1.5 pts).

1. Trouver le reste de la division par 47 du nombre $2020^{123456789}$.
2. Quel est le chiffre des unités dans l'écriture en base 2 de 45675413247^{61} ?

Exercice 4 (4 pts). Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant :

$$S : \begin{cases} x & \equiv & 1 & \mod 10 \\ 4x & \equiv & 9 & \mod 15 \end{cases}$$

Exercice 5 (1+2 pts). Déterminer l'ensemble des x dans $\mathbb{Z}$ qui sont solutions de l'équation (E) dans chacun des cas suivants :

1. $(E) : 2x \equiv 4 \mod 17$.
2. $(E) : 6x \equiv 2 \mod 8$.

Exercice 6 (1+2 pts).

1. Enoncer le théorème de Bézout.
2. Soient a, b, c trois entiers non nuls, et soit $d = \text{pgcd}(a, b)$. Montrer que si c est un diviseur commun de a et de b, alors c divise d.

Exercice 7 (Bonus, 2pts). Soient a et b deux entiers positifs distincts et premiers entre eux. Calculer $\text{pgcd}(a + b, a - b)$, en discutant selon les parités de a et de b.