Corrigé du partiel du 20 mars 2021

Exercice 1. $24x+38y=44$ (*)

Calculons pgcd(24,38) par l'algorithme d'Euclide :

$38=24+14$, $24=14+10$, $14=10+4$, $10=4\times2+2$ et $4=2\times2+0$

Donc pgcd(24,38)=2. Comme 2 divise 44, l'équation (*) admet des solutions et est équivalente à $12x+19y=22$.

Cherchons une solution particulière en remontant l'algorithme d'Euclide pour déterminer une relation de Bézout :

$2=10-4\times2=10-(14-10)\times2=10\times3-14\times2=(24-14)\times3-14\times2=24\times3-14\times5$

$2=24\times3-(38-24)\times5=24\times8-38\times5$ donc $44=2\times22=24\times8\times22-38\times5\times22$
$=24\times176-38\times110$

3

Donc $(x_0,y_0)=(176,-110)$ est une solution particulière de l'équation (*).

On a alors $24x+38y=24x_0+38y_0 \Leftrightarrow 24(x-x_0)=38(y_0-y)$
$\Leftrightarrow 12(x-x_0)=19(y_0-y)$

Comme 12 divise $19(y_0-y)$ et 12 est premier avec 19, d'après le lemme de Gauss, 12 divise y_0-y donc il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $y_0-y=12k$ donc $y=y_0-12k$. Alors $12(x-x_0)=19\times12k \Leftrightarrow x-x_0=19k \Leftrightarrow x=x_0+19k$.

Par conséquent $\{(176+19k,-110-12k),k\in\mathbb{Z}\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation (*)

Ne rien inscrire ici

Exercice 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n \equiv 0$ [2] alors $n^2 \equiv 0$ [2]

Si $n \equiv 1$ [2] alors $n^2 \equiv 1$ [2]

2 Donc si n^2 est pair, c'est-à-dire $n^2 \equiv 0$ [2], on ne peut avoir que $n \equiv 0$ [2]
donc n est pair

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ multiple de 3. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3k$.

2 On a $2^n - 1 = 2^{3k} - 1 = (2^3)^k - 1 \equiv 1^k - 1 \equiv 0$ [7] car $2^3 \equiv 8 \equiv 1$ [7].
Donc 7 divise $2^n - 1$.

Exercice 3

1. $368 = 123 \times 3 - 1$ donc $368 \equiv -1$ [123]
On a alors $368^n \equiv (-1)^n$ [123] pour tout $n \in \mathbb{N}$

1,5 Comme pour $n = 12345678 \ldots 20$, n est pair, on a alors $368^n \equiv 1$ [123]
Donc le reste dans la division par 123 de $368^{12345\ldots20}$ est 1.

2. On a $2021 \equiv 1$ [2]
Alors $2021^{19} \equiv 1^{19} \equiv 1$ [2]

1,5 Le dernier chiffre de l'écriture en binaire de 2021^{19} correspond au reste de la division de 2021^{19} par 2, c'est donc un 1.

Exercice 4 $S : \begin{cases} x \equiv 5\ [12] \\ x \equiv 17\ [20] \end{cases}$ $20 = 5 \times 2^2$ et $12 = 3 \times 2^2$

On a pgcd(20,12) = 4. Comme 4 divise $17-5=12$, le système S admet des solutions et $S \Leftrightarrow S' : \begin{cases} x \equiv 5\ [3] \\ x \equiv 17\ [5] \end{cases}$

Cherchons une solution particulière du système S' en utilisant une relation de Bézout : $1 = 5\times 2 - 3 \times 3$

On a donc $\begin{cases} 5\times 2 \equiv 1\ [3] \\ 5 \times 2 \equiv 0\ [5] \end{cases}$ et $\begin{cases} -3\times 3 \equiv 0\ [3] \\ -3\times 3 \equiv 1\ [5] \end{cases}$

on peut en déduire que $x_0 = 5\times 5\times 2 - 3\times 3 \times 17 = 50 - 153 = -103$ est une solution particulière de S', mais aussi de S. En effet,

$\begin{cases} -103 \equiv 120 - 103 \equiv 17 \equiv 5\ [12] \\ -103 \equiv 100 - 103 \equiv -3 \equiv 17\ [20]. \end{cases}$

4

On a alors $\begin{cases} x \equiv x_0\ [12] \\ x \equiv x_0\ [20] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 \equiv 0\ [12] \\ x - x_0 \equiv 0\ [20] \end{cases}$

$\Leftrightarrow x - x_0 \equiv 0\ [\text{ppcm}(12,20)] \Leftrightarrow x \equiv x_0\ [60] \Leftrightarrow x \equiv -103 \equiv 17\ [60]$

Par conséquent, $\{17 + 60k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble des solutions de S.

Exercice 5

1. $8x \equiv 4\ [12]$

Comme pgcd(8,12) = 4 et 4 divise 4, l'équation admet des solutions et est équivalente à $2x \equiv 1\ [3]$.

Cherchons l'inverse de 2 modulo 3 en passant par une relation de Bézout :

2 $1 = 2\times 2 - 3$ donc 2 est l'inverse de 2 modulo 3.

On a alors $2x \equiv 1\ [3] \Leftrightarrow 2\times 2x \equiv 1 \times 2\ [3] \Leftrightarrow x \equiv 2\ [3]$

Par conséquent, $\{2 + 3k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation

2. $8x \equiv 3\ [12]$ Comme pgcd(8,12) = 4 et 4 ne divise pas 3, donc

1 l'équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 6

1. Soient $a, n \in \mathbb{N}^*$

Alors a est inversible modulo n

$\Leftrightarrow$ il existe $b \in \mathbb{Z}$ tel que $ab \equiv 1 \, [n]$

$\Leftrightarrow$ il existe $b \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$ tel que $ab = 1 + kn \Leftrightarrow ab - kn = 1$

2 $\Leftrightarrow$ a et n sont premiers entre eux d'après le théorème de Bézout pour les nombres premiers entre eux.

2. $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times$ est l'ensemble des éléments de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ qui sont inversibles

1 D'après la question 1, $\bar{a}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ si et seulement si a et 12 sont premiers entre eux donc $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \overline{11}\}$

Exercice 7

On a $2^2 \equiv 4 \, [17]$, $2^3 \equiv 8 \, [17]$ $2^4 \equiv 16 \equiv -1 \, [17]$

donc $2^8 \equiv 1 \, [17]$

On a aussi $83 \equiv 3 \, [8]$ et $3^2 \equiv 9 \equiv 1 \, [8]$ donc $83^{100} \equiv 3^{100} \equiv (3^2)^{50} \equiv 1 \, [8]$

2 Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $83^{100} = 8k + 1$

Par conséquent $2^{(83^{100})} \equiv 2^{8k+1} \equiv (2^8)^k \times 2 \equiv 1^k \times 2 \equiv 2 \, [17]$

Donc le reste de $2^{(83^{100})}$ dans la division euclidienne par 17 est 2