
Feuille 5 : Probabilités

Exercice 1. *Ensemble des parties d'un ensemble*

Soit $E := \{1, 2, 7, 42\}$.

1. Écrire l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E .
2. Est-ce que 2 est un élément de $\mathcal{P}(E)$?
3. L'ensemble $\{2, 3\}$ appartient-il à $\mathcal{P}(E)$? L'ensemble vide appartient-il à $\mathcal{P}(E)$?
4. Soit $A := \{\{1, 2\}, \{42\}\}$. A-t-on $A \subseteq \mathcal{P}(E)$?
Même question avec $B = \{\{1\}, \{42\}, \emptyset\}$ et $C = \{E, \{3\}\}$.

Exercice 2. *Espace probabilisé*

On choisit un nombre au hasard parmi les entiers entre 1 et 100. Quel est l'espace probabilisé suggéré par cet énoncé ?

Exercice 3. *Événements et point de vue ensemblistes*

Soient A, B, C trois événements d'un espace probabilisé. Exprimer les événements suivants :

1. Aucun des événements A, B, C n'est réalisé.
2. Un seul des trois événements est réalisé.
3. Au moins deux des trois événements sont réalisés.
4. Au plus deux des trois événements sont réalisés.

Exercice 4. *Tribus*

1. Soit T une tribu sur un ensemble Ω et soit Ω' une partie de Ω .
Vérifiez que $T' := \{A \cap \Omega' \mid A \in T\}$ définit une tribu sur Ω' .
2. Soient T' une tribu sur Ω' et $f : \Omega \rightarrow \Omega'$.
Vérifiez que $T := \{f^{-1}(A') \mid A' \in T'\}$ définit une tribu sur Ω .
3. Soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille de tribus sur un même ensemble Ω . Vérifiez que $T = \bigcap_{i \in I} T_i$ est une tribu sur Ω .

Exercice 5. On s'intéresse au lancer d'un dé à 20 faces qui n'est pas truqué.

1. Quel est l'univers Ω correspondant ?
2. On munit cet univers de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. Quelle est la loi de probabilité associée ?
3. À quel ensemble les événements suivants correspondent-ils ?
 - « Le résultat est 12. »
 - « Le résultat est strictement inférieur à 7. »
 - « Le résultat est divisible par 3. »
4. Calculez la probabilité des trois événements ci-dessus.

Exercice 6. *Quelques calculs de probabilités*

1. Un QCM comporte dix questions, pour chacune desquelles quatre réponses sont proposées, une seule est exacte. Combien y a-t-il de grilles-réponses possibles ? Quelle est la probabilité de répondre au hasard au moins six fois correctement ?
2. Monsieur Ollivander possède 1200 baguettes magiques dans son magasin. Une seule parmi les 1200 convient à Harry. S'il avait tiré au hasard les baguettes qu'il proposait au jeune sorcier, quelle aurait été la probabilité qu'il tombe sur la bonne au troisième essai ?

Exercice 7. Soient A et B deux événements.

1. Montrer que

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B).$$

2. Démontrer l'inégalité

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

Exercice 8. On tire 5 cartes d'un jeu de 52 cartes.

1. Si on tient compte de l'ordre dans lequel les cartes sont tirées, combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Si on ne tient pas compte de l'ordre, combien y a-t-il de tirages possibles :
 - (a) au total
 - (b) contenant cinq carreaux ou deux piques
 - (c) contenant 3 trèfles et 2 cœurs
 - (d) ne contenant aucune reine
 - (e) contenant au moins un valet.

Exercice 9. Dénombrer le nombre d'anagrammes des mots :

1. licorne
2. chocolat
3. ananas.

Exercice 10. On tire 4 boules dans une urne contenant 10 boules de couleurs différentes. Déterminer le nombre de tirages possibles lorsque :

1. on tire les 4 boules successivement et avec remise.
2. on tire les 4 boules successivement et sans remise.
3. on tire les 4 boules simultanément.