
Feuille 6 : Probabilités

Exercice 1. Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard. Les événements "tirer un nombre pair" et "tirer un multiple de 3" sont-ils indépendants? La réponse change-t-elle s'il y a 13 boules?

Exercice 2. On a un espace probabilisé dont l'univers Ω est de cardinal p , un nombre premier, avec la loi de l'équiprobabilité. Est-il possible de trouver deux événements qui ne soient ni \emptyset ni Ω mais qui soient indépendants?

Exercice 3. Une urne contient 4 boules blanches et 6 boules noires. On tire 3 boules successivement et sans remise.

1. Définir un espace probabilisé décrivant cette situation.
2. Calculer la probabilité d'obtenir 3 boules blanches.
3. Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire au 2e tirage.
4. Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire au 2e tirage, sachant que la première est blanche.

Exercice 4. On lance un dé rouge et un dé noir. Soient les événements suivants :

- A = "La somme des dés vaut 6"
- B = "La somme est un multiple de 3"
- C = "La somme est paire"

Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(B \cap C)$.

Exercice 5. On lance deux dés. Quelle est la probabilité que l'un donne 6, sachant que les deux résultats sont différents?

Exercice 6. Alice propose à Bob le jeu suivant : il tire 5 cartes au hasard dans un jeu de 52. Si l'as de pique figure parmi les cartes, il a gagné.

1. Quelle est la probabilité que Bob gagne?
2. Alice essaie de tricher en retirant 10 cartes au hasard du jeu. Quelle est maintenant la probabilité que Bob gagne? Expliquer pourquoi la probabilité n'a pas changé.

Exercice 7. Alice et Bob, qui sont colocataires, jouent chaque jour à pile ou face pour décider qui fait la vaisselle. Alice sait que Bob triche 30% du temps en utilisant une pièce truquée qui lui permet de gagner avec 75% de chances.

1. Quelle est la probabilité que Bob gagne un jour donné?
2. Il gagne 7 jours d'affilée. Quelle est la probabilité qu'il ait triché au moins une fois?

Exercice 8. Felicity développe un filtre anti-spam. Elle sait que 80% des emails sont des spams, Elle sait aussi que 30% des spams contiennent le mot "promotion" contre seulement 0.01% des e-mails qui ne sont pas des spams. Quelle est la probabilité qu'un e-mail contenant le mot "promotion" soit un spam?

Exercice 9. À l'instant 0, une urne contient une boule rouge et une boule verte et on effectue une succession de tirages définis par la règle suivante : on tire une boule de l'urne au hasard et on la remet dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur (on dispose en réserve d'une infinité de boules rouges et vertes). On note S_n le nombre de boules rouges au temps $n \geq 0$. Prouver que pour tout $n \geq 0$ et tout $k \in \{1, \dots, n+1\}$ on a

$$P(S_n = k) = \frac{1}{n+1}.$$