

Feuille 5 : Probabilités

Exercice 1. Ensemble des parties d'un ensemble

Soit $E := \{1, 2, 7, 42\}$.

1. Écrire l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E .
2. Est-ce que 2 est un élément de $\mathcal{P}(E)$?
3. L'ensemble $\{2, 3\}$ appartient-il à $\mathcal{P}(E)$? L'ensemble vide appartient-il à $\mathcal{P}(E)$?
4. Soit $A := \{\{1, 2\}, \{42\}\}$. A-t-on $A \subseteq \mathcal{P}(E)$?
Même question avec $B = \{\{1\}, \{42\}, \emptyset\}$ et $C = \{E, \{3\}\}$.

Exercice 2. Espace probabilisé

On choisit un nombre au hasard parmi les entiers entre 1 et 100. Quel est l'espace probabilisé suggéré par cet énoncé ?

Exercice 3. Événements et point de vue ensembliste

Soient A, B, C trois événements d'un espace probabilisé. Exprimer les événements suivants :

1. Aucun des événements A, B, C n'est réalisé.
2. Un seul des trois événements est réalisé.
3. Au moins deux des trois événements sont réalisés.
4. Au plus deux des trois événements sont réalisés.

Exercice 4. Tribus

1. Soit T une tribu sur un ensemble Ω et soit Ω' une partie de Ω .

Vérifiez que $T' := \{A \cap \Omega' \mid A \in T\}$ définit une tribu sur Ω' .

2. Soient T' une tribu sur Ω' et $f : \Omega \rightarrow \Omega'$.

Vérifiez que $T := \{f^{-1}(A') \mid A' \in T'\}$ définit une tribu sur Ω .

3. Soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille de tribus sur un même ensemble Ω . Vérifiez que $T = \bigcap_{i \in I} T_i$ est une tribu sur Ω .

Exercice 5. On s'intéresse au lancer d'un dé à 20 faces qui n'est pas truqué.

1. Quel est l'univers Ω correspondant ?
2. On munit cet univers de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. Quelle est la loi de probabilité associée ?
3. À quel ensemble les événements suivants correspondent-ils ?
 - « Le résultat est 12. »
 - « Le résultat est strictement inférieur à 7. »
 - « Le résultat est divisible par 3. »
4. Calculez la probabilité des trois événements ci-dessus.

Exercice 6. Quelques calculs de probabilités

1. Un QCM comporte dix questions, pour chacune desquelles quatre réponses sont proposées, une seule est exacte. Combien y a-t-il de grilles-réponses possibles ? Quelle est la probabilité de répondre au hasard au moins six fois correctement ?
2. Monsieur Ollivander possède 1200 baguettes magiques dans son magasin. Une seule parmi les 1200 convient à Harry. S'il avait tiré au hasard les baguettes qu'il proposait au jeune sorcier, quelle aurait été la probabilité qu'il tombe sur la bonne au troisième essai ?

Exercice 7. Soient A et B deux événements.

1. Montrer que

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B).$$

2. Démontrer l'inégalité

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

Exercice 8. On tire 5 cartes d'un jeu de 52 cartes.

1. Si on tient compte de l'ordre dans lequel les cartes sont tirées, combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Si on ne tient pas compte de l'ordre, combien y a-t-il de tirages possibles :
 - (a) au total
 - (b) contenant cinq carreaux ou deux piques
 - (c) contenant 3 trèfles et 2 coeurs
 - (d) ne contenant aucune reine
 - (e) contenant au moins un valet.

Exercice 9. Dénombrer le nombre d'anagrammes des mots :

1. licorne
2. chocolat
3. ananas.

Exercice 10. On tire 4 boules dans une urne contenant 10 boules de couleurs différentes. Déterminer le nombre de tirages possibles lorsque :

1. on tire les 4 boules successivement et avec remise.
2. on tire les 4 boules successivement et sans remise.
3. on tire les 4 boules simultanément.