Correction de la feuille 5 : Probabilités

Exercice 1. *Ensemble des parties d'un ensemble*
Soit $E := \{1, 2, 7, 42\}$.

1. Écrire l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E.
2. Est-ce que 2 est un élément de $\mathcal{P}(E)$?
3. L'ensemble $\{2, 3\}$ appartient-il à $\mathcal{P}(E)$?
   L'ensemble vide appartient-il à $\mathcal{P}(E)$?
4. Soit $A := \{\{1, 2\}, \{42\}\}$. A-t-on $A \subseteq \mathcal{P}(E)$?
   Même question avec $B = \{\{1\}, \{42\}, \emptyset\}$ et $C = \{E, \{3\}\}$.

1. On a :

$$\mathcal{P}(\mathcal{E}) = \left\{ \begin{array}{c} \emptyset, \\ \{1\}, \{2\}, \{7\}, \{42\}, \\ \{1,2\}, \{7,42\}, \{1,7\}, \{1,42\}, \{2,7\}, \{2,42\}, \\ \{1,2,7\}, \{1,2,42\}, \{2,7,42\}, \{1,7,42\}, \\ \{1,2,7,42\} \end{array} \right\}.$$

2. Non, 2 est un élément de E mais n'est pas un **sous-ensemble** de E. Les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont des **ensembles**.
3. Comme 3 n'est pas un élément de E, l'ensemble $\{2, 3\}$ n'est pas une partie de E donc n'appartient pas à $\mathcal{P}(E)$.
   L'ensemble vide appartient bien à $\mathcal{P}(E)$.
4. Oui, A est bien inclus dans $\mathcal{P}(E)$, car $\{1, 2\}$ et $\{42\}$ sont bien des sous-ensembles de E.
   Idem pour B.
   En revanche 3 n'est pas un élément de E donc l'ensemble $\{3\}$ n'est pas un élément de $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 2. *Espace probabilisé*
On choisit un nombre au hasard parmi les entiers entre 1 et 100.
Quel est l'espace probabilisé suggéré par cet énoncé ?

Rappels de cours Un *espace probabilisé* est la donnée d'un triplet (Ω, T, P) où :

- L'univers Ω est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience.
- La tribu T est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$.
- L'application P est une loi de probabilité.

- Le résultat de l'expérience est un entier compris entre 1 et 100. Donc **l'univers**, c'est-à-dire l'ensemble des résultats possibles, est :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, \dots, 99, 100\}.$$

- L'univers est fini et il n'y a pas des restriction sur l'ensemble des issues possibles, donc la **tribu** suggérée est $T = \mathcal{P}(\Omega)$.
- D'après l'énoncé, chaque évènement est équiprobable, c'est-à-dire que chaque entier a autant de chance d'être choisi. Dans ce cas, la loi de probabilité est celle donnée par :

$$\forall n \in \Omega \quad P(n) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{100},$$

car si $P(n) = p, \forall n \in \Omega$, on voit Ω comme union disjointe de tous ses singletons $\{n\}$, et d'après les propriétés de la loi P, $P(\Omega) = \sum_{n=1}^{100} P(n) = \sum_{n=1}^{100} p = 100p = 1$. Donc $p = \frac{1}{100}$.

Exercice 3. *Événements et point de vue ensembliste*
Soient A,B,C trois évènements d'un espace probabilisé. Exprimer les évènements suivants :

1. Aucun des évènements A,B, C n'est réalisé.
2. Un seul des trois événements est réalisé.
3. Au moins deux des trois événements sont réalisés.
4. Au plus deux des trois événements sont réalisés.

Rappels de cours, indications.

1. Dire qu'un évènement n'est pas réalisé c'est dire que le complémentaire de cet évènement est réalisé.
2. Dire que A **et** B sont réalisés c'est dire que leur intersection l'est.
3. Dire que A **ou** B sont réalisés c'est dire que leur union l'est.

1. On utilise les points 1 et 2 du rappel ci-dessus. La réponse est donc : $A^c \cap B^c \cap C^c$.
2. On décompose le problème en trois cas.
   Dire que seulement A est réalisé c'est dire que A est réalisé et que B et C ne le sont pas, donc par le premier point du rappel que B^c et C^c sont réalisés. Ce qui s'écrit $A \cap B^c \cap C^c$.
   De la même manière, dire que seulement B est réalisé c'est dire que $A^c \cap B \cap C^c$ l'est.
   Et dire que seulement C est réalisé c'est dire que $A^c \cap B^c \cap C$ l'est.
   Pour conclure, dire que *un seul des trois évènements est rélaisé*, c'est qu'on est dans le premier cas **ou** dans le deuxième cas **ou** dans le troisième cas.
   On combine donc les trois résultats précédents en utilisant le point 3 du rappel :
$$\Big(A \cap B^c \cap C^c\Big) \cup \Big(A^c \cap B \cap C^c\Big) \cup \Big(A^c \cap B^c \cap C\Big).$$

3. Dire qu'au moins deux des trois sont réalisés c'est dire que A **et** B sont réalisés, ***ou*** B **et** C sont réalisés, ***ou*** C **et** A sont réalisés. Ce qui se traduit par :

$$(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)\,.$$

4. Dire qu'au plus deux des trois sont réalisés, c'est dire qu'au moins un des trois n'est pas réalisés.
C'est-à-dire : **ou bien** A n'est pas réalisé **ou bien** B n'est pas réalisé **ou bien** C n'est pas réalisé.
En d'autres termes (d'après le premier point du rappel) **ou bien** A^c est réalisé **ou bien** B^c est réalisé **ou bien** C^c est réalisé.
À l'aide du troisième point du rappel, on obtient :

$$A^c \cup B^c \cup C^c.$$

Exercice 4. *Tribus*

1. Soit T une tribu sur un ensemble Ω et soit Ω' une partie de Ω. Vérifiez que $T' := \{A \cap \Omega' \mid A \in T\}$ définit une tribu sur Ω'.

2. Soient T' une tribu sur Ω' et $f : \Omega \to \Omega'$. Vérifiez que $T := \left\{f^{-1}(A') \mid A' \in T'\right\}$ définit une tribu sur Ω.

3. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille de tribus sur un même ensemble Ω. Vérifiez que $T = \cap_{i\in I} T_i$ est une tribu sur Ω.

Rappels, méthode.
Pour montrer qu'une partie T de $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu, on vérifie qu'elle satisfait les différents point de la définition, à savoir :
- $\Omega \in T$;
- Si $A \in T$ alors $A^c \in T$;
- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de T, alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$.

1. Montrons que T vérifie les trois points listés ci-dessus.
   - Le fait que T soit une tribu donne $\Omega \in T$. De plus, comme $\Omega' \subseteq \Omega$, on a $\Omega' = \Omega \cap \Omega'$. et donc $\Omega' \in T'$.
   - Soit $B \in T'$. Par définition de T' il existe $A \in T$ tel que $B = A \cap \Omega'$. Comme T est une tribu, on a $A^c \in T$ et donc $\left(A^c \cap \Omega'\right) \in T'$. Mais $\left(A^c \cap \Omega'\right) = B^c$, donc $B^c \in T'$.
   - Soit (B_n) une suite d'éléments de T'. Il existe une suite (A_n) d'éléments de T telle que $B_n = A_n \cap \Omega'$. Mais T étant une tribu, on a $\cup_n A_n \in T$. Comme $\cup_n B_n = (\cup_n A_n) \cap \Omega'$, on a donc bien $\cup_n B_n \in T'$.

Il s'agit donc bien d'une tribu.

2. Montrons que T' vérifie les trois points listés ci-dessus.
   - Le fait que T' soit une tribu donne $\Omega' \in T'$. De plus, comme $\Omega = f^{-1}(\Omega')$, on a $\Omega \in T$.

— Soit $A \in T$. Par définition de T il existe $A' \in T'$ tel que $A = f^{-1}(A')$. Alors

$$A^c = \left(f^{-1}(A')\right)^c = f^{-1}\left((A')^c\right).$$

Or $(A')^c \in T'$, donc $A^c \in T$.

— Soit (A_n) une suite d'éléments de T. Il existe une suite $({A'}_n)$ d'éléments de T telle que $A_n = f^{-1}\left({A'}_n\right)$. Mais T' étant une tribu, on a $\cup_n {A'}_n \in T'$. Comme

$$\cup_n A_n = f^{-1}\left(\cup_n {A'}_n\right)$$

on a donc bien $\cup_n A_n \in T$.

Il s'agit donc bien d'une tribu.

3. Montrons que T vérifie les trois points listés dans le rappel.

— Comme les T_i sont des tribus, on a :

$$\forall i \in I \quad \Omega \in T_i.$$

Donc $\Omega \in \cap_i T_i = T$.

— Si $A \in T$, alors quel que soit i, on a $A \in T_i$. Ainsi, pour tout i, il vient $A^c \in T_i$ et donc $A^c \in \cap_i T_i = T$.

— Soit $(A_n)_n$ une suite d'éléments de T. Par définition de T,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall i \in I \quad A_n \in T_i.$$

Alors, les T_i étant des tribus on a

$$\forall i \in I \quad (\cup_n A_n) \in T_i.$$

Et donc $(\cup_n A_n) \in T$.

Exercice 5. On s'intéresse au lancer de dé à 20 faces.

1. Quel est l'univers Ω correspondant ?
2. On munit cet univers de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. Quelle est la loi de probabilité associée ?
3. À quel ensemble les événements suivants correspondent-ils ?
   — « Le résultat est 12. »
   — « Le résultat est strictement inférieur à 7. »
   — « Le résultat est divisible par 3. »
4. Calculez la probabilité des trois événements ci-dessus.

Rappels, méthode

— Dans le cas où chaque issue a la même chance de se produire (c'est à dire dans le cas où chaque évènement est **équiprobable**), la loi de probabilité est donnée par :

$$\mathcal{P}(\text{une issue}) = \frac{1}{\text{nombre total d'issues possibles}} = \frac{1}{|\Omega|}.$$

— La probabilité d'un évènement A est donnée par

$$\mathcal{P}(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre total d'issues possibles}} = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

1. L'univers est :

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \\ 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 \end{matrix} \right\}.$$

2. Chaque résultat est **équiprobable**, c'est à dire que chaque nombre a la même chance d'être obtenu. Donc la loi est donnée par :

$$\forall n \in \Omega \quad P(\{n\}) = \frac{1}{20}$$

Les événements correspondent aux ensembles suivants :

— $\{12\}$;
— $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
— $\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$.

D'après la question 2, on a $P(\{12\}) = 1/20$.
On utilise le deuxième point du rappel pour les deux évènements.

$$\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = \frac{|\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}|}{|\Omega|} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

$$\mathcal{P}(\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}) = \frac{|\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}|}{|\Omega|} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

Exercice 6. *Quelques calculs de probabilités*

1. Un QCM comporte dix questions, pour chacune desquelles quatre réponses sont proposées, une seule est exacte. Combien y-a-t-il de grilles-réponses possibles ? Quelle est la probabilité de répondre au hasard au moins six fois correctement ?

2. Monsieur Ollivander possède 1200 baguettes magiques dans son magasin. Une seule parmi les 1200 convient à Harry. S'il avait tiré au hasard les baguettes qu'il proposait au jeune sorcier, quelle aurait été la probabilité qu'il tombe sur la bonne au troisième essai ?

Chaque question a 4 réponses possibles et il y a 10 questions donc, le nombre **total** de grilles réponses possibles (bonnes comme mauvaises) est 4^{10}.
Notons E l'événement « répondre au hasard au moins 6 fois correctement ». Il est réalisé si l'élève répond bien à 6, 7, 8, 9 ou 10 questions. Notons A_n l'événement « répondre au hasard exactement n fois correctement ». Alors, A_n est réalisé si n réponses sont correctes et $10 - n$ sont incorrectes : trois choix sont possibles pour chacune de ces dernières. Comme il y a $\binom{10}{n}$ choix de n objets parmi 10, il y a $\binom{10}{n}3^{10-n}$ façons de réaliser A_n. Alors,

$$\forall n \in \{6, 7, 8, 9, 10\} \quad P(A_n) = \frac{\binom{10}{n}3^{10-n}}{4^{10}}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
P(E) &= P(A_6 \sqcup A_7 \sqcup A_8 \sqcup A_9 \sqcup A_{10}),\\
&= P(A_6) + P(A_7) + P(A_8) + P(A_9) + P(A_{10}),\\
&= \sum_{n=6}^{10} \frac{\binom{10}{n}3^{10-n}}{4^{10}},\\
&\cong 0,0197.
\end{aligned}$$

Ce qui correspond à environ 2 pourcents.

Choisissons un univers Ω constitué de triplets de nombres distincts compris entre 1 et 1200, et disons que le bonne baguette est numérotée 1. Tous ces triplets sont équiprobables. Le cardinal de Ω est $A^3_{1200} = 1200 \times 1199 \times 1198$.
L'évènement A qui décrit notre problème, c'est-à-dire le fait de tirer la bonne baguette au troisième tirage, consiste en les triplets $(a, b, 1)$ avec $a \neq 1$ et $b \neq a$, $b \neq 1$. Son cardinal est 1199×1198. En conclusion, la probabilité de l'événement « choisir la bonne baguette au troisième essai » est :

$$\begin{aligned} & P(\text{« choisir la bonne baguette au troisième essai »}) \\ &= P(A) \\ &= \frac{1199}{1200} \cdot \frac{1198}{1199} \cdot \frac{1}{1198} \\ &= \frac{1}{1200}. \end{aligned}$$

On remarque que c'est la même probabilité que de choisir la bonne baguette au premier essai. Cela est normal vu notre choix d'univers : il y autant de triplets avec 1 en première composante que des 1 en troisième composante.

Exercice 7. Soient A et B deux événements.

1. Montrer que

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B).$$

2. Démontrer l'inégalité

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

1. Comme A est la réunion disjointe de $A \cap \bar{B}$ et de $A \cap B$, d'après l'additivité de la loi de probabilité P on aura $P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)$. D'où le résultat demandé.
2. Comme $A \cup B$ est la réunion disjointe de $A \cap \bar{B}$ et de B, d'après l'additivité de la loi de probabilité P on aura $P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(B)$. D'après la première question on a la formule de Poincaré sous la forme $P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. D'où $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B) \leq 1$, et le résultat demandé.

Exercice 8. On tire 5 cartes d'un jeu de 52 cartes.

1. Si on tient compte de l'ordre dans lequel les cartes sont tirées, combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Si on ne tient pas compte de l'ordre, combien y a-t-il de tirages possibles :
   (a) au total
   (b) contenant cinq carreaux ou exactement deux piques
   (c) contenant 3 trèfles et 2 cœurs
   (d) ne contenant aucune reine
   (e) contenant au moins un valet.

1. Il y a $A_{52}^5 = 52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48$ tirages possibles, car on a 52 choix pour la première composante du quintuplet représentant le tirage, 51 choix pour la deuxième composante, etc...
2. (a) Il y a C_{52}^5 tirages si on ne tient pas compte de l'ordre, car on doit diviser A_{52}^5 par 5!.
   (b) Pour avoir 5 carreaux on a C_{13}^5 tirages possibles, et pour avoir exactement deux piques on a $C_{13}^2 \times C_{39}^3$ tirages possibles, donc pour l'un ou l'autre on aura $C_{13}^5 + C_{13}^2 \times C_{39}^3$ tirages possibles.
   (c) Pour avoir 3 trèfles et 2 cœurs on a $C_{13}^3 \times C_{13}^2$ tirages possibles.
   (d) Pour n'avoir aucune reine on a C_{48}^5 tirages possibles.
   (e) Avoir au moins un valet correspond au contraire de n'avoir aucun valet donc on trouve $C_{52}^5 - C_{48}^5$ tirages possibles.

   Si dans les sous-questions ci-dessus on veut tenir compte de l'ordre il suffit de multiplier par 5! les résultats donnés, car toutes les cartes sont différentes donc tenir compte de l'ordre signifie juste mélanger les tirages pas ordonnés.

Exercice 9. Dénombrer le nombre d'anagrammes des mots :

1. licorne
2. chocolat
3. ananas.

1. Vu que les 7 lettres du mot sont distinctes on a 7! anagrammes possibles.
2. Ici il y a la lettre "c" et la lettre "o" qui apparaissent deux fois donc on aura $\frac{8!}{2!2!}$ anagrammes possibles.
3. Enfin ici il y a la lettre "a" qui apparaît trois fois et la lettre "n" qui apparaît deux fois donc on aura $\frac{7!}{3!2!}$ anagrammes possibles.

Exercice 10. On tire 4 boules dans une urne contenant 10 boules de couleurs différentes. Déterminer le nombre de tirages possibles lorsque :

1. on tire les 4 boules successivement et avec remise.
2. on tire les 4 boules successivement et sans remise.
3. on tire les 4 boules simultanément.

1. On a ici 10^4 choix car les boules étant tirées successivement on comprend que l'on doit tenir compte de l'ordre.
2. On a ici $A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7$ choix car les boules étant tirées successivement on comprend que l'on doit tenir compte de l'ordre.
3. Enfin, tirer les boules simultanément revient à en choisir 4 parmi 10 sans tenir compte de l'ordre et on obtient donc C_{10}^4 choix possibles.