Exploration d'un labyrinthe

Pour explorer un labyrinthe, il suffit d'une pelote de ficelle et d'un morceau de craie :

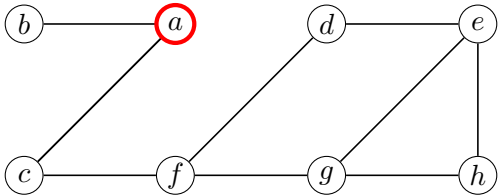
- marquer les carrefours que vous avez déjà visitées avec la craie pour empêcher de boucler
- utiliser une ficelle pour pouvoir revenir au point de départ.

On peut utiliser le même principle pour explorer un graphe.

Parcours en profondeur (DFS) pour les graphes connexes

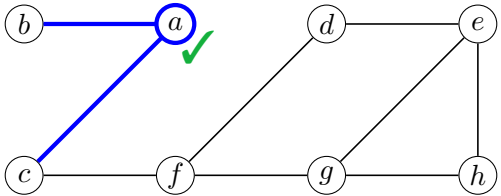
Entrées : graphe $G = (V, E)$ et sommet $r \in V$
début
    créer pile(S)
    pour tous les $u \in V$ **faire**
        marqué[u] $\leftarrow$ False
    empiler(S, r)
    tant que $S \neq \emptyset$ **faire**
        $u \leftarrow$ dépiler(S)
        marqué[r] $\leftarrow$ Vrai
        pour tous les $uv \in E$ **faire**
            si marqué[v] = Faux **alors**
                marqué[v] $\leftarrow$ Vrai
                empiler(S, v)

Illustration du parcours en profondeur



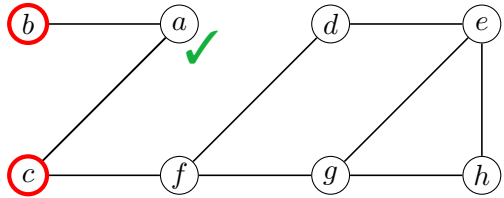
$S = [a]$

Illustration du parcours en profondeur



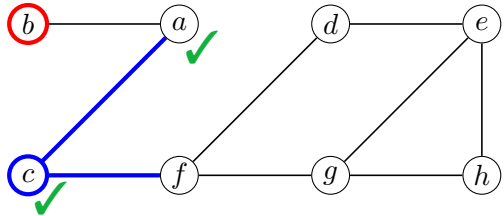
$S = []$
$u = a$

Illustration du parcours en profondeur



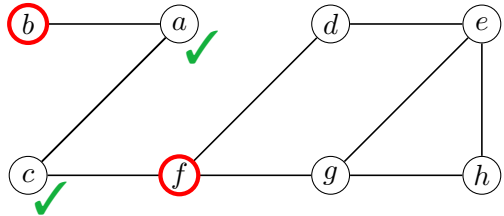
$S = [b, c]$

Illustration du parcours en profondeur



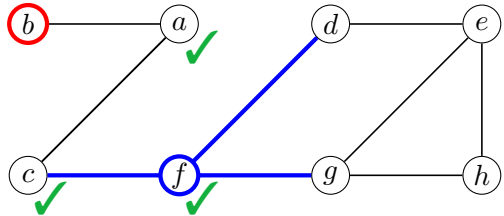
$S = [b]$
$u = c$

Illustration du parcours en profondeur



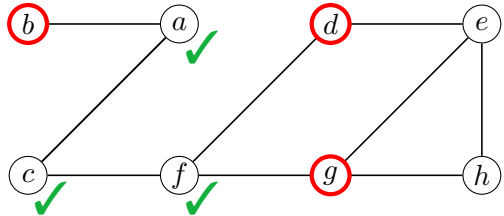
$S = [b, f]$

Illustration du parcours en profondeur



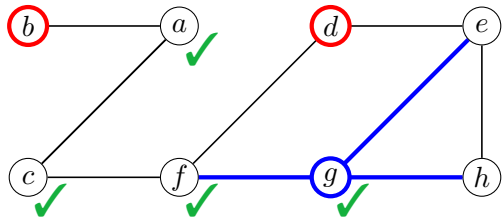
$S = [b]$
$u = f$

Illustration du parcours en profondeur



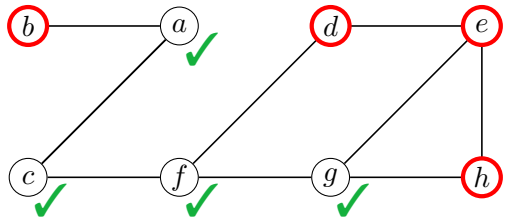
$S = [b, d, g]$

Illustration du parcours en profondeur



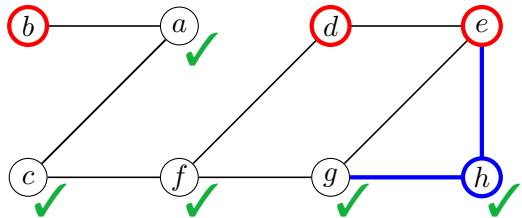
$S = [b, d]$
$u = g$

Illustration du parcours en profondeur



$S = [b, d, e, h]$

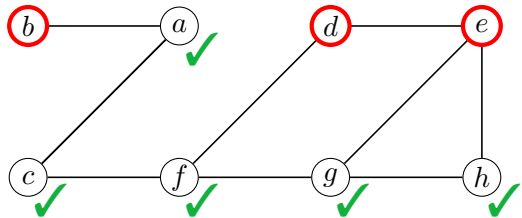
Illustration du parcours en profondeur



$S = [b, d, e]$

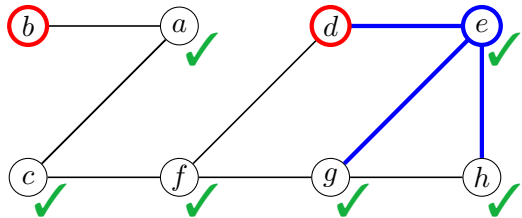
$u = h$

Illustration du parcours en profondeur



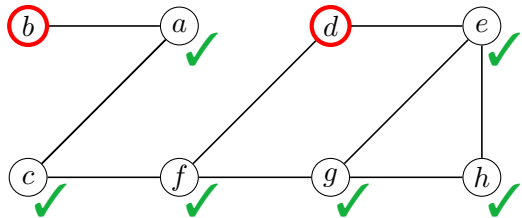
$S = [b, d, e]$

Illustration du parcours en profondeur



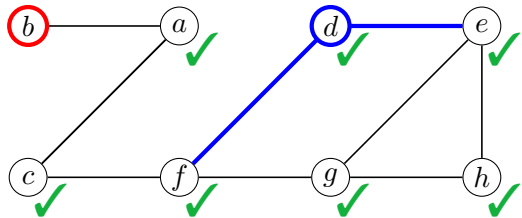
$S = [b, d]$
$u = e$

Illustration du parcours en profondeur



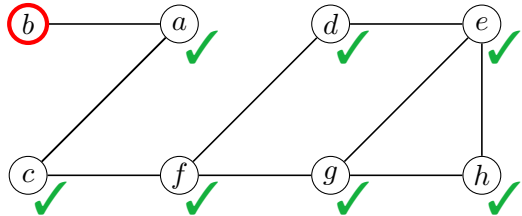
$S = [b, d]$

Illustration du parcours en profondeur



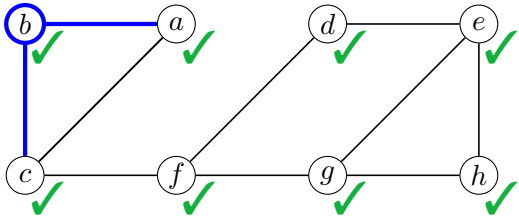
$S = [b]$
$u = d$

Illustration du parcours en profondeur



$S = [b]$

Illustration du parcours en profondeur



$S = []$
$u = b$

Version recursive de DFS pour les graphes connexes

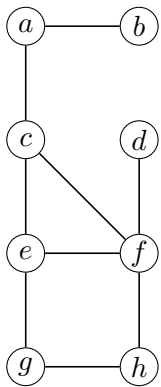
Procédure `explorer(`G, u`)`**:**

```
marqué[u] ← Vrai
pour tous les (u, v) ∈ E(G) faire
    si marqué[v] = Faux alors
        explorer(G,v)
```

Correction de la procédure `explorer`(u)

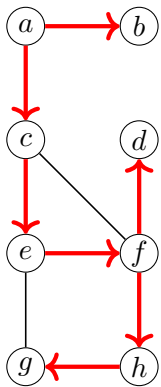
- Il faut montrer que la procédure `explorer`(u) visite tous les sommets atteignables à partir de u.
- Supposons par l'absurde que, à la fin d'exécution de `explorer`(u), il existe un sommet v non marqué.
- Soit P une chaîne de u à v.
- Soit w le dernier sommet sur P (le plus lointain de u) qui est marqué.
- Soit x le successeur de w dans P.
- Contradiction : la procédure `explorer`(w) aurait marqué le sommet x.

Classification des arêtes



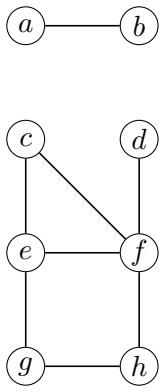
- Voici le résultat de l'exécution d'explore sur un graphe, en commençant par le sommet a (et parcourant les arêtes par ordre alphabétique).
- Chaque fois qu'un nouveau sommet v est marqué, soit u le voisin de v
- Il y a une flèche rouge de u vers v si v a été marqué lors d'un appel de `explorer`(v) a été appelé quand l'algorithme traitait le sommet u.
- Ces arêtes forment un arbre.
- Les autres arêtes sont appelés les arêtes *retour*.

Classification des arêtes



- Voici le résultat de l'exécution d'explore sur un graphe, en commençant par le sommet a (et parcourant les arêtes par ordre alphabétique).
- Chaque fois qu'un nouveau sommet v est marqué, soit u le voisin de v
- Il y a une flèche rouge de u vers v si v a été marqué lors d'un appel de `explorer`(v) a été appelé quand l'algorithme traitait le sommet u.
- Ces arêtes forment un arbre.
- Les autres arêtes sont appelés les arêtes *retour*.

. . . et si le graphe n'est pas connexe ?



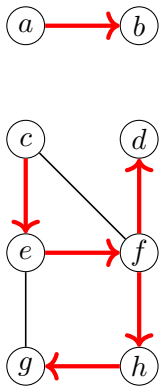
Procédure `explorer` (G, u) **:**

- marqué$[u] \leftarrow$ Vrai
- **pour tous les** $(u, v) \in E(G)$ **faire**
  - **si** marqué$[v] =$ Faux **alors**
    - `explorer` (G,v)

Procédure `DFS` (G) **:**

- **pour tous les** $u \in V(G)$ **faire**
  - marqué$[u] \leftarrow$ Faux
- **pour tous les** $u \in V(G)$ **faire**
  - **si** marqué$[u] =$ Faux **alors**
    - `explorer` (G,u)

. . . et si le graphe n'est pas connexe ?



Procédure `explorer` (G, u) **:**

- marqué$[u] \leftarrow$ Vrai
- **pour tous les** $(u, v) \in E(G)$ **faire**
  - **si** marqué$[v] =$ Faux **alors**
    - `explorer` (G,v)

Procédure `DFS` (G) **:**

- **pour tous les** $u \in V(G)$ **faire**
  - marqué$[u] \leftarrow$ Faux
- **pour tous les** $u \in V(G)$ **faire**
  - **si** marqué$[u] =$ Faux **alors**
    - `explorer` (G,u)

Composantes connexes d'un graphe

- On peut utiliser le parcours en profondeur pour identifier les composantes connexes d'un graphe.

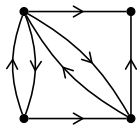
Procédure `prévisite`(u)**:**
    ccnum$[u] =$ cc

Procédure `explorer`(G, u)**:**
    marqué$[u] \leftarrow$ Vrai
    `prévisite`(u)
    pour tous les $(u, v) \in E(G)$ **faire**
        si marqué$[v] =$ Faux **alors**
            `explorer`(G,v)

Procédure `DFS`(G)**:**
    cc $\leftarrow 0$
    pour tous les $u \in V(G)$ **faire**
        marqué$[u] \leftarrow$ Faux
    pour tous les $u \in V(G)$ **faire**
        si marqué$[u] =$ Faux **alors**
            cc $\leftarrow$ cc $+ 1$
            `explorer`(G,u)

Graphes orientés

- Un *graphe orienté* est un couple $G = (V, E)$ formé par un ensemble fini V et un sous-ensemble E de V^2.
- Comme pour les graphes non orientés, V est l'ensemble des sommets de G.
- E est l'ensemble d'arcs (arêtes orientés).
- On représente les arcs par des flèches.
- Si $(u, v) \in E$, alors on met une flèche de u vers v ; u est la tête et v la queue de l'arc (u, v).



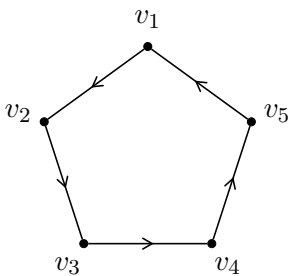
Chemins (chaînes orientées)

Définition

Un *chemin* dans un graphe orienté $G = (V, E)$ est une suite de la forme $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$ où

- $v_i \in V$
- $e_i \in E$
- $e_{i+1} = (v_i, v_{i+1})$ pour $i = 0, \ldots, k-1$.
- L'entier k est la *longueur* du chemin.

Circuits (cycles orientées)



Définition

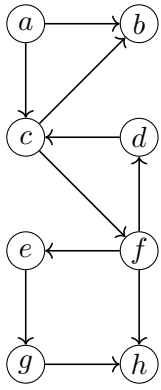
Un *circuit* dans un graphe orienté $G = (V, E)$ est une suite de la forme $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_0)$ où

- $v_i \in V$
- $e_i \in E$
- $e_{i+1} = (v_i, v_{i+1})$ pour $i = 0, \ldots, k-1$.
- L'entier k est la *longueur* du chemin.

Parcours en profondeur dans les graphes orientés

Entrées : graphe $G = (V, E)$ et sommet $r \in V$
début
    créer pile(S)
    pour tous les $u \in V$ **faire**
        marqué[u] $\leftarrow$ False
    empiler(S, r)
    tant que $S \neq \emptyset$ **faire**
        $u \leftarrow$ dépiler(S)
        marqué[r] $\leftarrow$ Vrai
        pour tous les $(u, v) \in E$ **faire**
            si marqué[v] = Faux **alors**
                marqué[v] $\leftarrow$ Vrai
                empiler(S, v)

Parcours en profondeur dans les graphes orientés (version récursive)



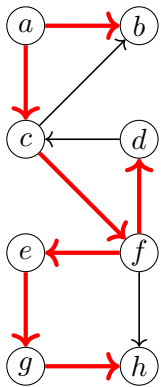
Procédure `explorer` (G, u) **:**

```
marqué[u] ← Vrai
pour tous les (u, v) ∈ E(G) faire
    si marqué[v] = Faux alors
        explorer(G,v)
```

Procédure `DFS` (G) **:**

```
pour tous les u ∈ V(G) faire
    marqué[u] ← Faux
pour tous les u ∈ V(G) faire
    si marqué[u] = Faux alors
        explorer(G,u)
```

Parcours en profondeur dans les graphes orientés (version récursive)



Procédure `explorer` (G, u) **:**

```
marqué[u] ← Vrai
pour tous les (u, v) ∈ E(G) faire
    si marqué[v] = Faux alors
        explorer (G,v)
```

Procédure `DFS` (G) **:**

```
pour tous les u ∈ V(G) faire
    marqué[u] ← Faux
pour tous les u ∈ V(G) faire
    si marqué[u] = Faux alors
        explorer (G,u)
```

Parcours en profondeur : pré- et post-visites

Procédure `prévisite(`u`)`**:**

- pre(s) $\leftarrow t$
- $t \leftarrow t + 1$

Procédure `postvisite(`u`)`**:**

- post(s) $\leftarrow t$
- $t \leftarrow t + 1$

Procédure `DFS(`G, u`)`**:**

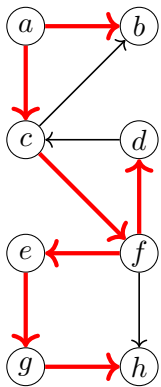
- marquer(u)
- prévisite(u)
- **pour tous les** $(u, v) \in E(G)$ **faire**
  - **si** v *non marqué* **alors**
    - `DFS(`G,v`)`
- postvisite(u)

Intervalles imbriqués

Observation (Théorème des parenthèses)
Pour tout sommet u et v, les deux intervalles $[\text{pre}(u), \text{post}(u)]$ et $[\text{pre}(v), \text{post}(v)]$ sont soit disjoints, soit l'un est contenu dans l'autre.

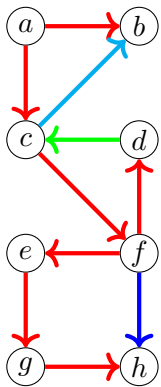
- $[\text{pre}(u), \text{post}(u)]$ représente le temps pendant lequel le sommet u était sur la pile S.
- Si $[\text{pre}(u), \text{post}(u)] \cap [\text{pre}(v), \text{post}(v)] \neq \emptyset$, alors il existe un temps t auquel u et v étaient dans la pile S.
- Si u a été empilé avant v, alors u sera dépilé après v, et donc $\text{pre}(u) < \text{pre}(v) < \text{post}(v) < \text{post}(u)$.
- De même, si v a été empilé avant u, alors $\text{pre}(v) < \text{pre}(u) < \text{post}(u) < \text{post}(v)$.

Terminologie pour l'analyse du BFS



- a est la *racine* de l'arbre.
- Les autres sommets son des *descendants* de a.
- De même, f a des *descendants* e, g et h.
- Inversement, f est un *ancêtre* de e, g et h.
- Les ancêtres immédiats sont les *parents*, et les descendants immédiats sont les *enfants* : c est le parent de f, et f est l'enfant de c.

Classification des arcs (1/3)



Un parcours en profondeur dans un graphe orienté G donne lieu a 4 types d'arcs de G.
On dit que l'arc (u, v) est :

1. un arc *de l'arbre* si u est un parent de v.
2. *avant* si u est un ancêtre (non parent) de v
3. *retour* si v est un ancêtre de u
4. *transverse* dans les autres cas

Classification des arcs (2/3)

- u est un ancêtre de v ssi u est marqué en premier et v est marqué pendant explore(u) ssi $[\text{pre}(u), \text{post}(u)] \supset [\text{pre}(v), \text{post}(v)]$.
- Puisque u est un descendant de v ssi v est un ancêtre de u, (u, v) est un arc retour ssi $[\text{pre}(u), \text{post}(u)] \subset [\text{pre}(v), \text{post}(v)]$.
- Finalement, (u, v) est transverse ssi $[\text{pre}(u), \text{post}(u)] \cap [\text{pre}(v), \text{post}(v)] = \emptyset$.

Classification des arcs (3/3)

- Notons par $[_u \quad]_u$ l'intervalle $[\text{pre}[u], \text{post}[u]]$.
- Voici un résumé des différentes possibilités pour un arc (u, v) :

$[_u \quad [_v \quad]_v \quad]_u$ arcs de l'arbre, avant

$[_v \quad [_u \quad]_u \quad]_v$ arcs retour

$[_v \quad]_v \quad [_u \quad]_u$ arcs trasverses

Remarque

Soit (u, v) un arc. Si $\text{post}(u) < \text{post}(v)$, alors (u, v) est un arc retour.

Complexité du parcours en profondeur

- Chaque sommet n'est exploré qu'une seule fois, grâce au marquage.
- Pendant l'exploration d'un sommet, il y a les étapes suivantes :
  1. marquer le sommet (et éventuellement la pré- et la post-visite).
  2. parcourir les arêtes incidentes à u pour voir si elles mènent à un somment non marqué.
- Cette boucle prend un temps différent pour chaque sommet ; considérons donc tous les sommets ensemble.
- Le temps total de l'étape 1 est alors $O(n)$.
- Dans l'étape 2, chaque arête $uv \in E$ est examinée exactement deux fois — une fois pendant `explorer`(u) et une fois pendant `explorer`(v).
- On conclut que la complexité du parcours en profondeur est de $O(m+n)$ (égale à celle du parcours en largeur).

Graphes orientés acycliques

Définition

Un graphe orienté sans circuits est dit *acyclique*.

Observation

Un graphe orienté contient un circuit ssi le parcours en profondeur trouve une arête retour.

Démonstration (1/2)

- Soit G un graphe orienté et soit T l'arbre DFS, avec racine r.
- Supposons que (u, v) est un arc retour.
- v est donc un ancêtre de u ; il existe un chemin P de v à u dans T.
- P et l'arc (u, v) forment un circuit.

Graphes orientés acycliques (DAG [1])

Démonstration (2/2)

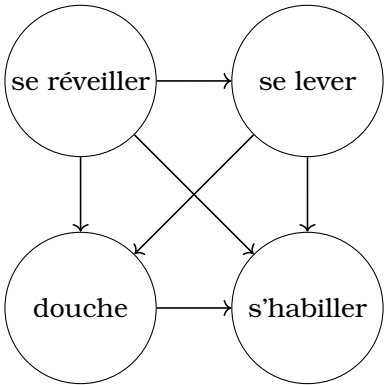
- Inversement, si le graphe possède un cycle $C = (v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1)$, soit v_i le premier sommet visité de C.
- Tous les autres sommets v_j de C sont atteignables à partir de v_i et seront donc ses descendants dans T.
- En particulier, l'arc (v_{i-1}, v_i) (ou (v_k, v_1) au cas où $i = 1$) est un arc retour.

1. Pour *directed acyclic graph*

À quoi ça sert. . . ?

- Les DAG permettent de modéliser des relations telles que :
  - les causalités
  - les hiérarchies
  - les dépendances temporelles
- Par exemple, supposons que vous deviez effectuer de nombreuses tâches, mais que certaines d'entre elles ne puissent pas commencer avant que d'autres ne soient terminées.
- La question qui se pose alors est de savoir quel est l'ordre valide dans lequel les tâches doivent être accomplies.

Exemple

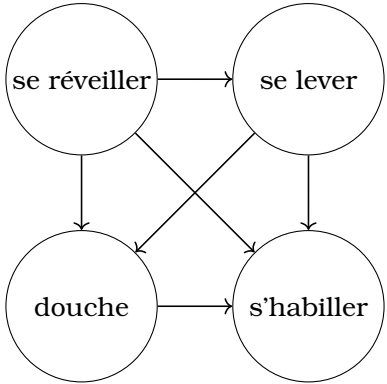


- Vous devez vous réveiller avant de se lever.
- Vous devez être levé, mais pas encore habillé, pour prendre une douche.

L'existence d'un bon ordre

- De telles contraintes sont commodément représentées par un graphe orienté dans lequel chaque tâche est un sommet, et il existe un arc de u à v si u est une *précondition* pour v.
- En d'autres termes, avant d'exécuter une tâche, toutes les tâches qui y sont liées doivent être achevées.
- Si ce graphe orienté comporte un circuit, il n'y a pas de solution.
- Si par contre le graphe est un DAG, on aimerait ordonner les sommets de sorte que chaque arête aille d'un sommet antérieur à un sommet postérieur, afin que toutes les contraintes de precédence soient satisfaites.

Dans cet exemple, il existe (heureusement !) un bon ordre



Tri topologique et les DAG (1/2)

Définition

Un *tri topologique* d'un graphe orienté $G = (V, E)$ est un ordre total $\prec$ sur V tel que, pour tout arc $(u, v) \in E$, on a $u \prec v$.

Théorème

Un graphe orienté G admet un tri topologique ssi G ne contient pas de circuits.

Démonstration (1/2)

- Si G contient un circuit, G n'admet évidemment pas un tri topologique.
- Inversement, supposons que G est un DAG.
- On définit l'ordre total $\prec$ sur les sommets de G comme suit :
- $u \prec v$ ssi $\text{post}(u) > \text{post}(v)$.

Tri topologique et les DAG (2/2)

Démonstration (2/2)

- Soit (u, v) un arc quelconque de G.
- Comme G est un DAG, v n'est pas un ancêtre de u.
- Donc, (u, v) n'est pas un arc retour.
- Par la remarque à la fin de la classification des arcs, $\text{post}(u) > \text{post}(v)$ et donc $u \prec v$.

Remarque

Pour trouver un tri topologique d'un DAG G, il suffit de faire un parcours en profondeur, et trier les sommets de G par ordre décroissant de $\text{post}(\cdot)$.