TD 3. Connexité, acyclicité et arbres

Exercice 1. Connexité de graphes de haut degré

Montrer qu'un graphe à n sommets où le degré de chacun d'eux est supérieur ou égal à $\frac{n-1}{2}$ est connexe.

Exercice 2. Complémentaire d'un graphe

Pour tout graphe G, son complémentaire $\bar{G}$ est le graphe sur le même ensemble de sommets avec tout couple de sommets $\{x, y\}$ étant soit une arête de G, soit une arête de $\bar{G}$ (ou exclusif). Dit autrement, $\{x, y\}$ est une arête de $\bar{G}$ si, et seulement si, $\{x, y\}$ n'est pas une arête de G.

(a) Montrer qu'au moins l'un des deux graphes G et $\bar{G}$ est connexe.

(b) Peuvent-ils être tous les deux connexes ?

Exercice 3. Longs cycles dans les graphes réguliers

Soit un graphe non orienté G.

(a) On considère un chemin γ maximal de G. On note s et t ses extrémités. Montrer que tous les voisins de t appartiennent à γ.

(b) On suppose que G est k-régulier, pour un $k \geq 2$. Montrer que G possède un cycle de longueur *au moins* $k+1$.

Exercice 4. Arêtes d'un graphe connexe

Soit G un graphe connexe.

(a) Montrer qu'il existe un sommet s du graphe tel que le sous-graphe obtenu à partir de G en supprimant s reste connexe.

(b) En conclure une borne minimale sur le nombre d'arêtes d'un graphe connexe.

(c) Quel est le nombre maximal d'arêtes dans un graphe connexe ?

(d) Quel est le nombre maximal d'arêtes dans un graphe à deux composantes connexes, si l'une composante connexe est de taille p et l'autre de taille $n-p$?

(e) En déduire le nombre maximal d'arêtes dans un graphe non connexe.

(f) Donner un algorithme pour tester la connexité d'un graphe. Quelle est sa complexité ?

Exercice 5. Nombre de graphes connexes

Le but de cet exercice est de trouver une formule de récurrence pour le cardinal C_n de l'ensemble $\mathcal{C}_n$ des graphes *connexes* à n sommets numérotés $1, \ldots, n$. Pour cela, on va exprimer le nombre de graphes non nécessairement connexes à n sommets en fonction des $(C_i)_{i<n}$.

(a) Décrire l'ensemble $\mathcal{C}_n$ pour $n = 3$, puis $n = 4$.

(b) Considérons les graphes à n sommets dans lesquels le sommet 1 appartient à une composante connexe de taille k. Combien y a-t-il de telles composantes connexes possibles ?

(c) En déduire une formule de récurrence sur les $(C_i)_{i<n}$.

Exercice 6. Arêtes d'un graphe acyclique

Soit $G = (S, A)$ un graphe connexe acyclique et $a \in A$ une arête de G.

(a) Montrer que le graphe $G' = (S, A \setminus \{a\})$ (obtenu en supprimant l'arête a de G) n'est pas connexe, et qu'il possède deux composantes connexes.

(b) Quel est le nombre maximal d'arêtes d'un graphe acyclique ?

(c) Quel est le nombre maximal d'arêtes d'un graphe acyclique à k composantes connexes ?

Exercice 7. Degrés dans les arbres

(a) Montrer qu'un arbre qui possède un sommet de degré k a au moins k feuilles.

(b) Soit A un arbre à n sommets, et, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit n_i le nombre de sommets de A de degré i. Montrer que

$$n_1 - n_3 - 2n_4 - \ldots - (n-3)n_{n-1} = 2\,.$$

Exercice 8. Caractérisations des arbres

Pour tout graphe $G = (V, E)$, et toute paire $\{x, y\}$ de sommets de G, on définit les graphes $G \ominus \{x, y\} = (V, E \setminus \{x, y\})$ et $G \oplus \{x, y\} = (V, E \cup \{x, y\})$.

On considère les propriétés suivantes :

1. G est connexe et acyclique ;
2. pour tous sommets x et y de G, il existe un *unique* chemin de x à y dans G ;
3. G est connexe ***minimal*** ;
   (*pour tous sommets x et y de G adjacents, $G \ominus \{x, y\}$ n'est pas connexe*)
4. G est acyclique ***maximal***.
   (*pour tous sommets x et y de G non adjacents, $G \oplus \{x, y\}$ contient au moins un cycle*)
5. G est connexe et a $n - 1$ arêtes.
6. G est acyclique est a $n - 1$ arêtes.

Montrer que ces propriétés sont équivalentes.