Algorithmique (AL5)
TD n° 2 : parcours en largeur de graphes non orientés

Les exercices notés avec une étoile (*) présentent un niveau de difficulté plus élevé.

Exercice 1 : parcours en largeur

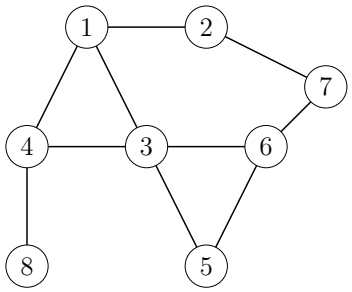
Appliquer aux deux graphes ci-dessous l'algorithme de parcours en largeur à partir du sommet 1. Pour chaque graphe, donner l'arbre résultant de ce parcours.

Parcours en largeur (BFS [1])

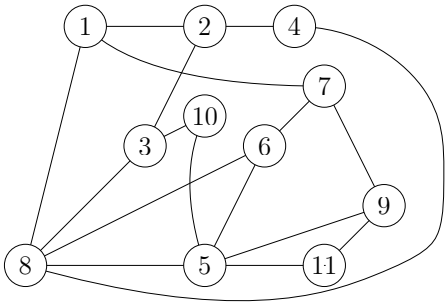
Entrées : graphe $G = (V, E)$ et sommet $s \in V$
début
  créer file(Q) ;
  marquer(s) ;
  enfiler(Q, s) ;
  tant que $Q \neq \emptyset$ **faire**
    $u \leftarrow$ défiler(Q) ;
    pour tous les $uv \in E$ **faire**
      si v non marqué **alors**
        marquer(v) ;
        enfiler(Q, v)

1. Breadth-first search

Algorithme de parcours en largeur



Graphe G_1



Graphe G_2

Exercice 2 : parcours et matrice d'adjacence

Quelle est la complexité de l'algorithme de parcours en largeur d'un graphe non orienté si celui-ci est représenté par une matrice d'adjacence ?

Exercice 3 : plus courts chemins

Dans cet exercice $G := (V, E)$ est un graphe quelconque (représenté par une liste d'adjacence), et $s \in V$, un de ses sommets. On a $(|V|, |E|) = (n, m)$. On définit la *distance de plus court chemin* entre deux noeuds $v, v' \in V$ comme étant le nombre minimum d'arcs d'une chaîne reliant le sommet v au sommet v', ou ∞ s'il n'existe aucune chaîne de v à v'.
Remarque : dans le cas des graphes orientés on ne parle pas de *chaîne*, mais de *chemin*. Par abus de langage, on appelle souvent chemins les chaînes des graphes non orientés.

1. Proposer un algorithme de complexité en $O(n+m)$ (nombre de sommets plus nombre d'arêtes) qui calcule la distance entre s et les autres sommets de G.
2. En proposant une manière astucieuse d'encoder la sortie, en déduire un algorithme de complexité en $O(n+m)$ qui calcule un chemin le plus court entre s et chacun des autres sommets de G.

Exercice 4 : graphes bipartis

Un graphe $G = (V, E)$ est un graphe biparti si l'ensemble des sommets V peut être partitionné en deux sous-ensembles V_1 et V_2 (i.e. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ et $V_1 \cup V_2 = V$), de sorte que les arêtes de E ont exactement une extrémité dans V_1 et une extrémité dans V_2.

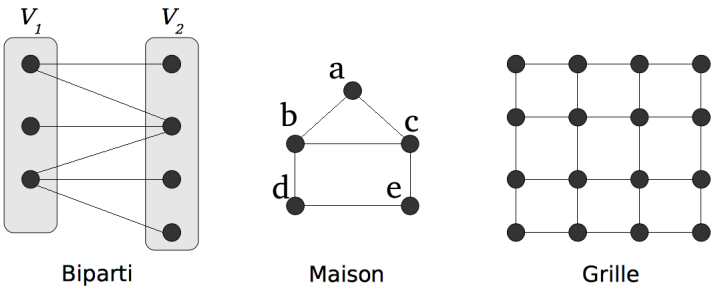


FIGURE 1 – Schéma général d'un graphe biparti, la maison, la grille $G_{4,4}$

1. Déterminer si le graphe maison est un graphe biparti.
2. Même question pour la grille $G_{4,4}$ (on pourra nommer les sommets (i, j) selon leur coordonnées).
3. Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement si il n'a pas de cycle de longueur impaire. La longueur d'un cycle est le nombre d'arêtes qui le composent. (Astuce : on peut se servir d'une 2-coloration).

   Remarque : colorier un graphe revient à mettre des couleurs sur chaque sommet du graphe. La seule contrainte imposée est que deux sommets adjacents ne soient pas de la même couleur.
4. Proposer un algorithme qui prend en entrée un graphe, qui teste si le graphe est biparti, et qui renvoie un cycle impair sinon. On pourra se servir du parcours en largeur (BFS) vu en cours.
5. Évaluer la complexité de votre algorithme.

Exercice 5 : cycle (*)

Proposer un algorithme renvoyant, s'il existe, un cycle de longueur minimale passant par un sommet s donné dans un graphe G non orienté. Prouver sa correction. On pourra dans un premier temps supposer que le graphe est biparti.