

Une astuce pour détecter des cycles

- Nous allons modéliser l'état de l'algorithme par une collection d'ensembles *disjoints*.
- Chaque ensemble correspond aux sommets d'une composante connexe.
- Au début chaque sommet est isolé, c'est-à-dire, chaque sommet est une composante connexe.
- $\text{makeset}(x)$: créer l'ensemble $\{x\}$.
- Nous aurons besoin de vérifier si deux sommets sont dans la même composante connexe.
- $\text{find}(x)$: à quel ensemble appartient x ?
- Lorsque nous rajoutons une arête, nous fusionnons deux composantes connexes.
- $\text{union}(x, y)$: fusionner les deux ensembles qui contiennent x et y .

L'algorithme de Kruskal (version “union-find”)

Entrées : Un graphe connexe $G = (V, E)$ avec des poids w_e sur les arêtes

Sorties : Ensemble d'arêtes $X \subseteq E$ d'un arbre couvrant de G

pour tous les $u \in V$ **faire**

\lfloor makeset(u)

$X \leftarrow \emptyset$

Trier les arêtes E par poids croissant

pour tous les $uv \in E$, *dans l'ordre croissant de poids* **faire**

\lfloor **si** $\text{find}(u) \neq \text{find}(v)$ **alors**
 \lfloor $X \leftarrow X \cup \{uv\}$
 \lfloor union(u, v)
 \lfloor

Remarque

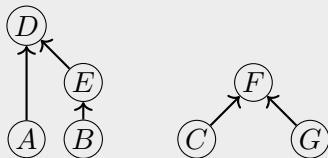
L'algorithme appelle makeset $|V|$ fois, find $2|E|$ fois, et union $|V| - 1$ fois.

Structure des données “union-find”

- Nous pouvons stocker un ensemble S comme une arborescence

Exemple

Une représentation de $\{A, B, D, E\}$ et $\{C, F, G\}$ par des arborescences :



Pointeurs et rank

- Les sommets de cette arborescence sont les éléments de S (dans un ordre quelconque)
- À chaque élément x on associe un pointeur $\pi(x)$ vers son parent.
- En suivant le chemin $(x, \pi(x), \pi(\pi(x)), \dots)$, on arrive finalement à la racine r .
- On peut considérer r comme le *représentant* de S .
- Cet élément est distingué par le fait que $\pi(r) = r$.
- À chaque sommet on associe aussi un *rank* qui mesure la hauteur du sous-arborescence dont le sommet est la racine.

Les fonctions makeset et find

Fonction makeset(x)

$\pi(x) \leftarrow x$

$\text{rank}(x) \leftarrow 0$

Complexité constante

Fonction find(x)

tant que $x \neq \pi(x)$ **faire**

$x \leftarrow \pi(x)$

retourner x

Complexité dépend de la hauteur de l'arborescence, donc il est important de limiter la hauteur de l'arborescence.

Fusionner deux ensembles efficacement

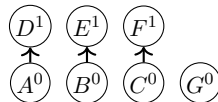
- Soient A et B deux ensembles disjoints qu'on souhaite fusionner.
- Si r_A est la racine de A et r_B est la racine de B , il suffit de définir $\pi(r_A) = r_B$ ou $\pi(r_B) = r_A$.
- Si la hauteur de A est supérieure à celle de B , et on définit $\pi(r_A) = r_B$, alors la hauteur du nouveau arbre augmente de 1.
- Par contre, si on définit $\pi(r_A) = r_B$, alors la hauteur n'augmente pas.
- Avec cette stratégie, la hauteur augmente uniquement lorsque les deux arborescences ont la même hauteur (rank).

Une illustration

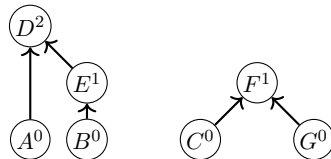
$\text{makeset}(A), \dots, \text{makeset}(G) :$



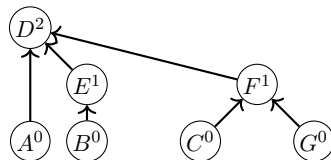
$\text{union}(A, D), \text{union}(B, E), \text{union}(C, F) :$



$\text{union}(E, A), \text{union}(C, G) :$



$\text{union}(B, G) :$



La fonction union

Fonction union

$r_x \leftarrow \text{find}(x)$

$r_y \leftarrow \text{find}(y)$

si $r_x = r_y$ **alors**

└ Retour

si $\text{rank}(r_x) > \text{rank}(r_y)$ **alors**

└ $\pi(r_y) \leftarrow r_x$

sinon

┌ $\pi(r_x) \leftarrow r_y$

└ **si** $\text{rank}(r_x) = \text{rank}(r_y)$ **alors**

└ ┌ $\text{rank}(r_y) \leftarrow \text{rank}(r_y) + 1$

- $\text{rank}(x)$ est la hauteur de la sous-arborescence avec racine x .
- Cela implique, par exemple, que $\text{rank}(x) < \text{rank}(\pi(x))$, pour tout sommet x .

Nombre de sommets en terme de rank

Lemme

Soit x un sommet d'une arborescence A . Si $\text{rank}(x) = k$, alors la sous-arborescence avec racine x a au moins 2^k sommets.

Démonstration

- Vrai pour $k = 0$.
- Supposons que la proposition est vraie pour un entier $k \geq 0$, et soit x un sommet d'une arborescence A telle que $\text{rank}(x) = k + 1$.
- On a $\text{rank}(x) = k + 1$ parce que l'on a fusionné deux arborescences A_1, A_2 , la racine de chacune ayant rang k .
- Par l'hypothèse de récurrence, A_1 et A_2 ont donc chacune au moins 2^k nœuds.
- A a donc au moins $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ sommets.

Complexité de l'algorithme de Kruskal

- Par conséquent, $\text{rank}(x) \leq \log_2 n$, pour tout sommet x .
- find et union sont donc de complexité $O(\log n)$.
- Nous pouvons conclure que l'algorithme de Kruskal est de complexité $O(m \log m) = O(m \log n)$, par exemple, en utilisant mergesort pour trier les arêtes.

Relation entre arbres couvrants de poids minimum et coupes

Rappel

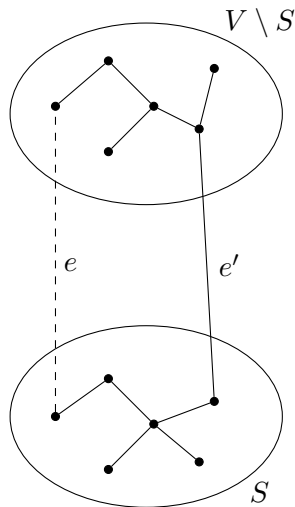
Soit $G = (V, E)$ un graphe et soit $U \subseteq V$. Alors, $\delta(U)$ est l'ensemble des arêtes avec une (et une seule) extrémité dans U . On dit que $\delta(U)$ est une *coupe*.

- Il y a une relation importante entre les arbres couvrants de poids minimum et les coupes :

Lemme

Soit X un sous-ensemble des arêtes d'un arbre couvrant de poids minimum de $G = (V, E)$. Soit $S \subseteq V$ t.q. aucune arête de X n'est présente dans la coupe $\delta(S)$. Soit e l'arête la plus légère dans $\delta(S)$. Alors $X \cup \{e\}$ est un sous-ensemble des arêtes d'un arbre couvrant de poids minimum.

Démonstration



- Soit $T = (V, Y)$ un arbre couvrant de poids minimum de G t.q. $X \subseteq Y$.
- Supposons que $e \notin Y$ (sinon $X \cup \{e\} \subseteq Y$ et on a fini).
- Le graphe $(V, Y \cup \{e\})$ contient un cycle C (voir la caractérisation des arbres).
- Il doit y avoir (au moins) une arête $e' \in Y \cap \delta(S)$.
- Par l'hypothèse, $w_e \leq w_{e'}$.
- Donc, $T' = (V, (Y \setminus \{e'\}) \cup \{e\})$ est un arbre couvrant de G de poids minimum qui contient $X \cup \{e\}$.

L'algorithme de Prim

Entrées : Un graphe connexe $G = (V, E)$ avec des poids w_e sur les arêtes

Sorties : Ensemble d'arêtes $X \subseteq E$ d'un arbre couvrant de G

$X \leftarrow \emptyset$

Choisir arbitrairement un sommet s et le marquer

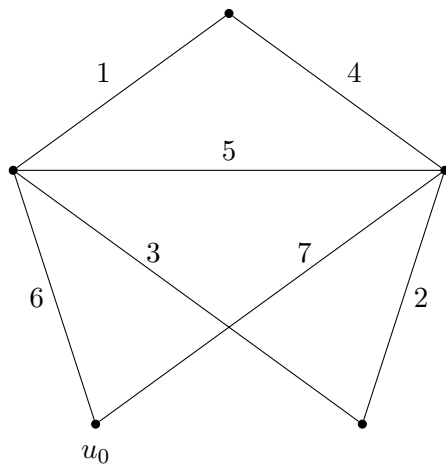
tant que \exists un sommet non marqué adjacent à un sommet marqué **faire**

 Trouver un sommet v non marqué adjacent à un sommet marqué u
 minimisant le poids de l'arête uv

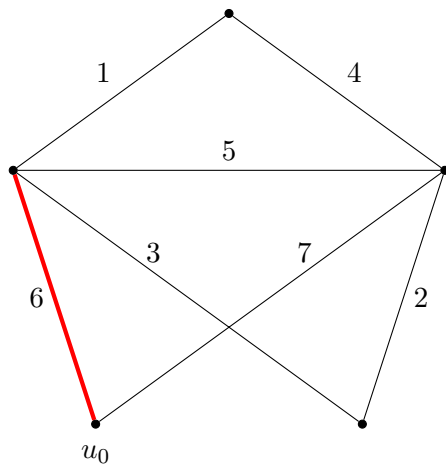
$X \leftarrow X \cup \{uv\}$

 Marquer v

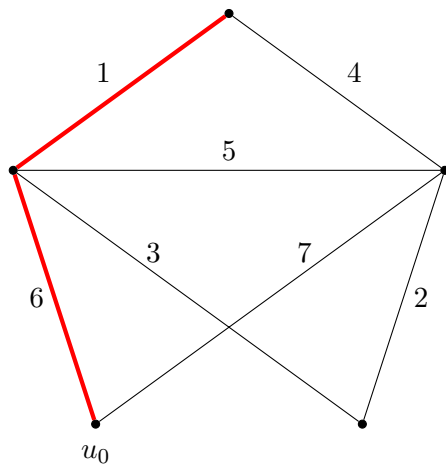
Exemple de l'exécution de l'algorithme de Prim



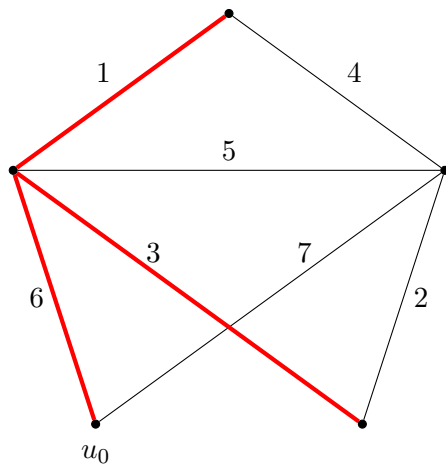
Exemple de l'exécution de l'algorithme de Prim



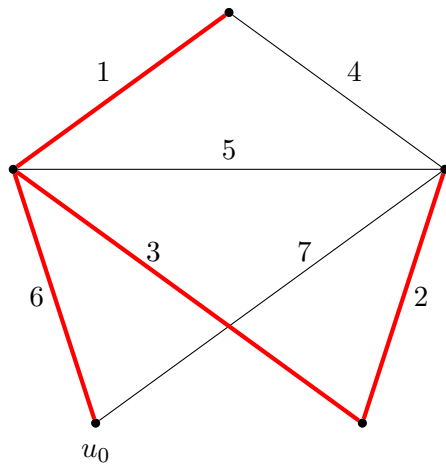
Exemple de l'exécution de l'algorithme de Prim



Exemple de l'exécution de l'algorithme de Prim



Exemple de l'exécution de l'algorithme de Prim



L'algorithme de Prim (implémentation avec files de priorité)

Entrées : Un graphe connexe $G = (V, E)$ avec des poids w_e sur les arêtes

Sorties : Ensemble d'arêtes $X \subseteq E$ d'un arbre couvrant de G

pour tous les $u \in V$ **faire**

- coût[u] $\leftarrow \infty$
- prev[u] $\leftarrow \emptyset$

Choisir une source u_0

coût[u_0] $\leftarrow 0$

$H \leftarrow \text{makequeue}(V)$ // file de priorité avec coûts comme clés

tant que $H \neq \emptyset$ **faire**

- $v \leftarrow \text{deletemin}(H)$

- pour tous les** $vz \in E$ **faire**

- si** coût[z] $> w_{vz}$ **alors**

- coût[z] $\leftarrow w_{vz}$

- prev[z] $\leftarrow v$

- decreasekey(H, z)

Complexité de l'algorithme de Prim

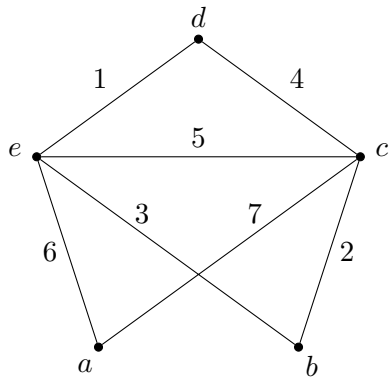
- L'algorithme de Prim est très proche à l'algorithme de Dijkstra.
- La seule différence est dans les valeurs des clés :
 - Dans l'algorithme de Prim, la valeur d'un sommet est le poids de l'arête entrante la plus légère
 - Dans l'algorithme de Dijkstra, c'est la longueur d'un chemin de la source vers ce sommet.
- La complexité est la même que celle de l'algorithme de Dijkstra, selon le type de tas utilisé :

liste $O(n^2)$

tas binaire $O((n + m) \log n) = O(m \log n)$

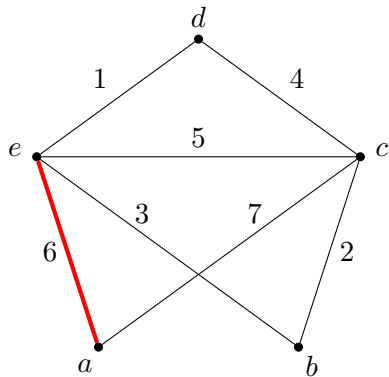
tas de Fibonacci $O(m + n \log n)$

Exemple de l'exécution de l'algorithme de Prim (version avec files de priorité)



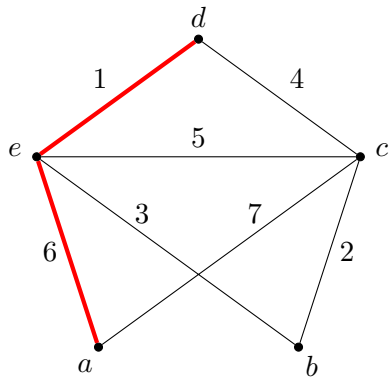
S	a	b	c	d	e
\emptyset	$0/\emptyset$	∞/\emptyset	∞/\emptyset	∞/\emptyset	∞/\emptyset

Exemple de l'exécution de l'algorithme de Prim (version avec files de priorité)



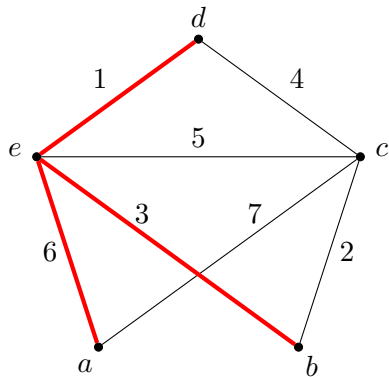
S	a	b	c	d	e
\emptyset	$0/\emptyset$	∞/\emptyset	∞/\emptyset	∞/\emptyset	∞/\emptyset
$\{a\}$		∞/\emptyset	$7/a$	∞/\emptyset	$6/a$

Exemple de l'exécution de l'algorithme de Prim (version avec files de priorité)



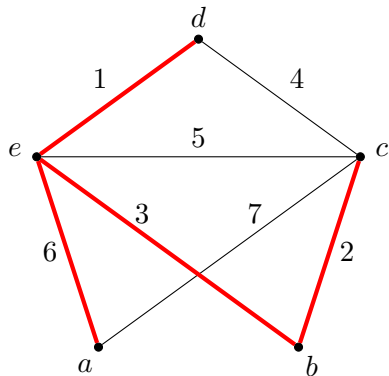
S	a	b	c	d	e
\emptyset	$0/\emptyset$	∞/\emptyset	∞/\emptyset	∞/\emptyset	∞/\emptyset
$\{a\}$		∞/\emptyset	$7/a$	∞/\emptyset	$6/a$
$\{a, e\}$		$3/e$	$5/e$	$1/e$	

Exemple de l'exécution de l'algorithme de Prim (version avec files de priorité)



S	a	b	c	d	e
\emptyset	$0/\emptyset$	∞/\emptyset	∞/\emptyset	∞/\emptyset	∞/\emptyset
$\{a\}$		∞/\emptyset	$7/a$	∞/\emptyset	$6/a$
$\{a, e\}$		$3/e$	$5/e$	$1/e$	
$\{a, e, d\}$		$3/e$	$4/d$		

Exemple de l'exécution de l'algorithme de Prim (version avec files de priorité)



S	a	b	c	d	e
\emptyset	0/ \emptyset	∞/\emptyset	∞/\emptyset	∞/\emptyset	∞/\emptyset
$\{a\}$		∞/\emptyset	7/ a	∞/\emptyset	6/ a
$\{a, e\}$		3/ e	5/ e	1/ e	
$\{a, e, d\}$		3/ e	4/ d		
$\{a, e, d, b\}$			2/ c		