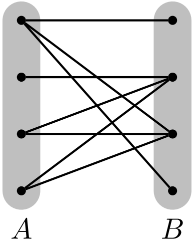
Théorème de Hall

- Si $G = (A, B)$ est un graphe biparti tel que G admet un couplage qui couvre tous les sommets de A, alors forcément $|N(X)| \geq |X|$ pour tous $X \subseteq V(G)$.
- Hall a montré que cette condition nécessaire triviale est aussi suffisante.
- Son théorème est l'un des résultats le plus importants de la théorie des couplages.

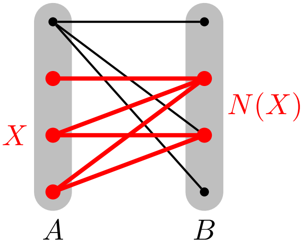


Théorème de Hall

Soit $G = (A, B)$ un graphe biparti. Alors G a un couplage couvrant tous les sommets de A ssi $|N(X)| \geq |X|$ pour tous $X \subseteq A$.

Théorème de Hall

- Si $G = (A, B)$ est un graphe biparti tel que G admet un couplage qui couvre tous les sommets de A, alors forcément $|N(X)| \geq |X|$ pour tous $X \subseteq V(G)$.
- Hall a montré que cette condition nécessaire triviale est aussi suffisante.
- Son théorème est l'un des résultats le plus importants de la théorie des couplages.



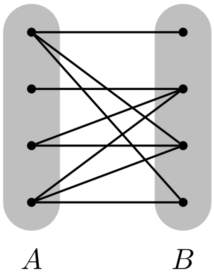
Théorème de Hall

Soit $G = (A, B)$ un graphe biparti. Alors G a un couplage couvrant tous les sommets de A ssi $|N(X)| \geq |X|$ pour tous $X \subseteq A$.

Démonstration du théorème de Hall (1/2)

Démonstration

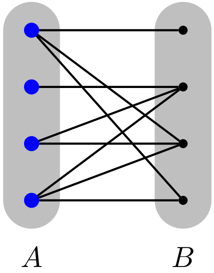
- La nécessité est évidente.
- Inversement, supposons que $|N(X)| \geq |X|$ pour tout $X \subseteq A$.
- Soit T un transversal minimal de G, càd, $|T| = \tau(G)$.
- On a $|T| \leq |A|$.



Démonstration du théorème de Hall (1/2)

Démonstration

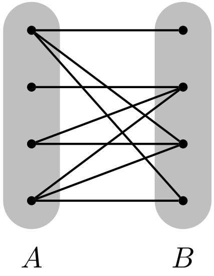
- La nécessité est évidente.
- Inversement, supposons que $|N(X)| \geq |X|$ pour tout $X \subseteq A$.
- Soit T un transversal minimal de G, càd, $|T| = \tau(G)$.
- On a $|T| \leq |A|$.



Démonstration du théorème de Hall (2/2)

Démonstration (suite)

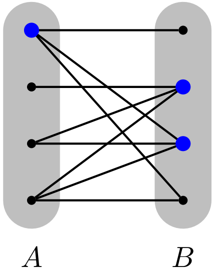
- Supposons par l'absurde que $|T| < |A|$.
- Comme $|T| = |T \cap A| + |T \cap B|$, on a $|A| - |A \cap T| > |B \cap T|$.
- Donc $|N(A \setminus T)| \geq |A \setminus T| = |A| - |A \cap T| > |B \cap T|$.
- Donc il existe une arête avec une extrémité dans $A \setminus T$ et l'autre dans $B \setminus T$, contradiction avec l'hypothèse que T est un transversal.



Démonstration du théorème de Hall (2/2)

Démonstration (suite)

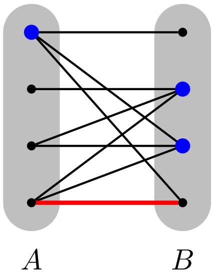
- Supposons par l'absurde que $|T| < |A|$.
- Comme $|T| = |T \cap A| + |T \cap B|$, on a $|A| - |A \cap T| > |B \cap T|$.
- Donc $|N(A \setminus T)| \geq |A \setminus T| = |A| - |A \cap T| > |B \cap T|$.
- Donc il existe une arête avec une extrémité dans $A \setminus T$ et l'autre dans $B \setminus T$, contradiction avec l'hypothèse que T est un transversal.



Démonstration du théorème de Hall (2/2)

Démonstration (suite)

- Supposons par l'absurde que $|T| < |A|$.
- Comme $|T| = |T \cap A| + |T \cap B|$, on a $|A| - |A \cap T| > |B \cap T|$.
- Donc $|N(A \setminus T)| \geq |A \setminus T| = |A| - |A \cap T| > |B \cap T|$.
- Donc il existe une arête avec une extrémité dans $A \setminus T$ et l'autre dans $B \setminus T$, contradiction avec l'hypothèse que T est un transversal.

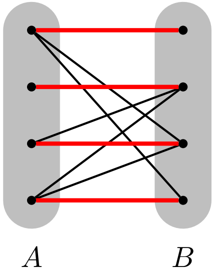


Conséquences du théorème de Hall

- Un couplage dans un graphe G est *parfait* si tous les sommets de G sont couverts.

Le lemme des mariages

Soit $G = (A, B)$ un graphe biparti. Alors G a un couplage parfait ssi $|A| = |B|$ et $|N(X)| \geq |X|$ pour tout $X \subseteq A$.



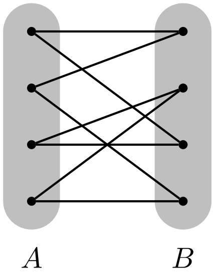
Couplages dans les graphes bipartis réguliers (1/2)

Corollaire

Soit $G = (A, B)$ un graphe biparti k-régulier (tous les sommets sont de degré k), pour un entier $k \geq 1$. Alors G a un couplage parfait.

Démonstration

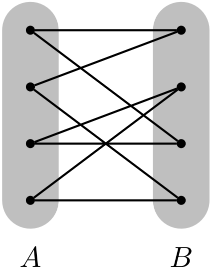
- Comme $k|A| = \delta(A) = \delta(B) = k|B|$, on a $|A| = |B|$.
- Soit $X \subseteq A$.
- Grâce à la régularité de G, $|\delta(X)| = kX$.



Couplages dans les graphes bipartis réguliers (2/2)

Démonstration (suite)

- Comme $\delta(X) \subseteq \delta(N(X))$, on obtient $k(X) = |\delta(X)| \leq |\delta(N(X))| = k|N(X)|$.
- Donc, G a un couplage parfit par le lemme des mariages.



Une application aux cartes

Exercise

On distribue un jeu de 52 cartes en faisant treize paquets de quatre cartes chacun. Il est possible de prendre une carte de chaque paquet de telle façon qu'on termine avec treize cartes contenant toutes les valeurs (un as, un 2, et ainsi de suite jusqu'à un roi).

Problèmes d'optimisation "durs"

- Un *problème d'optimisation* est le problème de trouver la meilleure solution parmi toutes les solutions réalisables.
- Nous avons déjà vu plusieurs exemples :
  - plus court chemin
  - arbre couvrant de poids minimum
  - flot maximum
  - coupe minimum
  - couplage maximum
  - transversal minimum. . .
- Chacun de ces problèmes peut être résolu par un algorithme en temps *polynomial* (par rapport à la taille de l'instance).
- Pour certains problèmes, tous les algorithmes connus prennent un temps *exponentiel*. . .

Exemple classique d'un problème d'optimisation dur

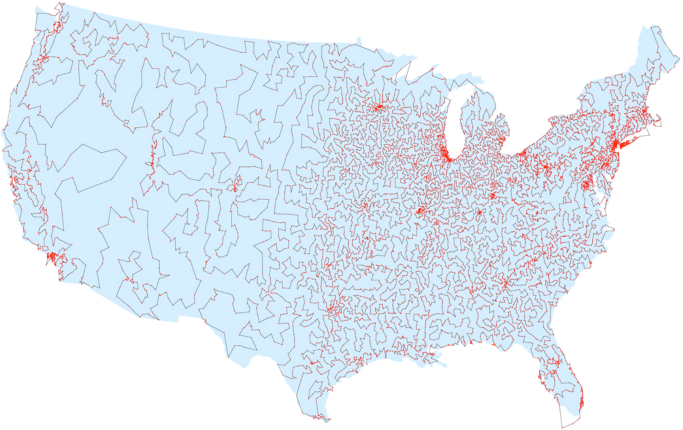
Le problème du voyageur de commerce (TSP)

Instance Un graphe complet $G = (V, E)$ avec pondération $w \in \mathbb{R}^{|E|}$.

Problème Trouver un cycle de poids minimum qui passe par chaque sommet de G une et une seule fois.

- Illustration dans la vie réelle : déterminer, étant donné une liste de villes et les distances entre toutes les paires de villes, le plus court cycle qui passe par chaque ville une et une seule fois.

Exemple d'un tour de voyageur de commerce aux États-Unis



Algorithmes d'approximation

Définition

- Lorsque l'on n'arrive pas à trouver un algorithme polynomial pour un problème d'optimisation, on peut espérer de trouver un *algorithme d'approximation*.
- Étant donné une problème d'optimisation, soit $\mathrm{OPT}(I)$ la solution optimale de l'instance I.
- Soit $\mathcal{A}$ un algorithme (polynomial) qui retourne une solution $\mathcal{A}(I)$ de l'instance I.
- Alors, le *facteur d'approximation* de $\mathcal{A}$ est défini comme

$$\rho = \max_I \frac{\mathcal{A}(I)}{\mathrm{OPT}(I)}.$$

- On dit que $\mathcal{A}$ est un algorithme de *ρ-approximation*.

Un algorithme d'approximation pour VERTEX COVER

Algorithme : Vertex-Cover-Approx

Entrées : un graphe $G = (V, E)$

Sorties : un transversal (vertex cover) T de G

début

$T \leftarrow \emptyset$

$F \leftarrow E$

tant que $F \neq \emptyset$ **faire**

Soit uv une arête de F

$T \leftarrow T \cup \{u, v\}$

$F \leftarrow F \setminus \{\delta(u) \cup \delta(v)\}$

retourner T

Analyse de l'algorithme

Théorème

Vertex-Cover-Approx est un algorithme de 2-approximation pour VERTEX COVER.

Démonstration

- Soit T la sortie de l'algorithme.
- Il est clair que T est un transversal de G.
- Soient $M = \{u_1v_1, u_2v_2, \ldots, u_kv_k\}$ les arêtes choisies par l'algorithme.
- Les arêtes dans M sont disjointes.
- Soit T' un transversal minimal de G.
- T' doit intersecter toutes les arêtes de M, donc $|T'| \geq |M| = k = |T|/2$.
- On conclut que $|T| \leq 2|T'|$.

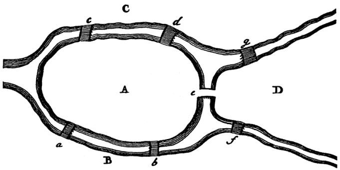
Algorithme d'approximation pour le voyageur de commerce. . . ?

- Aucun algorithme polynomial n'est connu pour résoudre TSP en général.
- Cependant, il existe des algorithmes d'approximation lorsque les poids sur les arêtes satisfont l'inégalité triangulaire : soient a, b et c des sommets de G quelconques, alors $w_{ac} \leq w_{ab} + w_{bc}$.
- On parle dans ce cas du problème de voyageur de commerce (TSP) *métrique*.
- Dans la dernière partie de ce cours, nous étudierons un algorithme de 2-approximation pour TSP métrique.
- On va commencer par un différent problème. . .

Les sept ponts de Königsberg

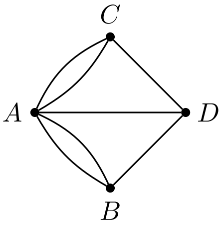
Problème

Existe-t-il une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont, et de revenir à son point de départ ?



Une reformulation

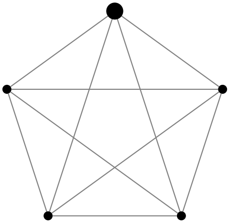
Existe-t-il un cycle dans le graphe à droite qui traverse chaque arête exactement une fois ?



Graphes eulériens

Définition

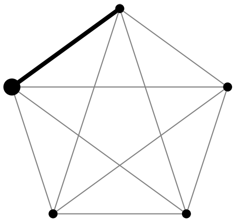
- Un cycle C dans un graphe G est *eulérien* si C traverse chaque arête de G une et une seule fois.
- Un graphe avec un cycle eulérien est appelé *graphe eulérien*.



Graphes eulériens

Définition

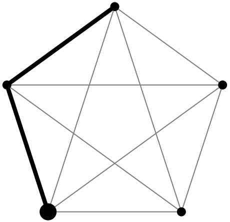
- Un cycle C dans un graphe G est *eulérien* si C traverse chaque arête de G une et une seule fois.
- Un graphe avec un cycle eulérien est appelé *graphe eulérien*.



Graphes eulériens

Définition

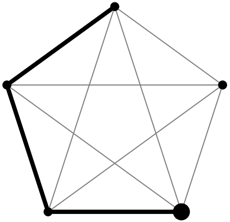
- Un cycle C dans un graphe G est *eulérien* si C traverse chaque arête de G une et une seule fois.
- Un graphe avec un cycle eulérien est appelé *graphe eulérien*.



Graphes eulériens

Définition

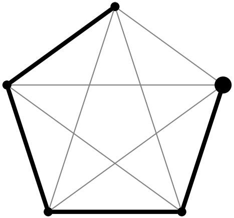
- Un cycle C dans un graphe G est *eulérien* si C traverse chaque arête de G une et une seule fois.
- Un graphe avec un cycle eulérien est appelé *graphe eulérien*.



Graphes eulériens

Définition

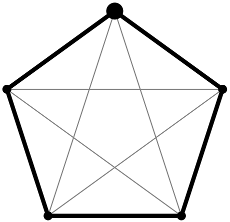
- Un cycle C dans un graphe G est *eulérien* si C traverse chaque arête de G une et une seule fois.
- Un graphe avec un cycle eulérien est appelé *graphe eulérien*.



Graphes eulériens

Définition

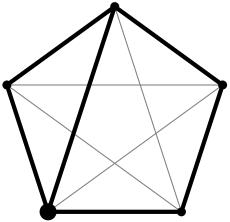
- Un cycle C dans un graphe G est *eulérien* si C traverse chaque arête de G une et une seule fois.
- Un graphe avec un cycle eulérien est appelé *graphe eulérien*.



Graphes eulériens

Définition

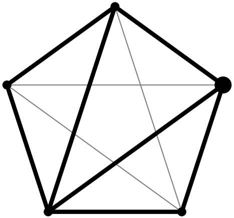
- Un cycle C dans un graphe G est *eulérien* si C traverse chaque arête de G une et une seule fois.
- Un graphe avec un cycle eulérien est appelé *graphe eulérien*.



Graphes eulériens

Définition

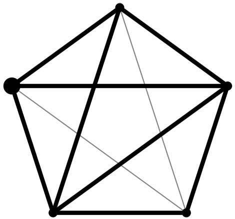
- Un cycle C dans un graphe G est *eulérien* si C traverse chaque arête de G une et une seule fois.
- Un graphe avec un cycle eulérien est appelé *graphe eulérien*.



Graphes eulériens

Définition

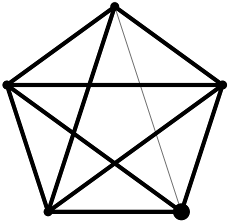
- Un cycle C dans un graphe G est *eulérien* si C traverse chaque arête de G une et une seule fois.
- Un graphe avec un cycle eulérien est appelé *graphe eulérien*.



Graphes eulériens

Définition

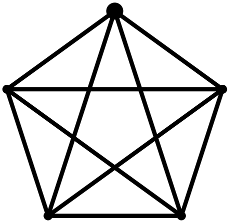
- Un cycle C dans un graphe G est *eulérien* si C traverse chaque arête de G une et une seule fois.
- Un graphe avec un cycle eulérien est appelé *graphe eulérien*.



Graphes eulériens

Définition

- Un cycle C dans un graphe G est *eulérien* si C traverse chaque arête de G une et une seule fois.
- Un graphe avec un cycle eulérien est appelé *graphe eulérien*.



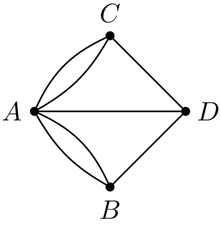
Caractérisation des graphes eulériens

Théorème (Euler 1736)

Un graphe G est eulérien si et seulement si G est connexe, et tout sommet de G est de degré pair.

Remarques

- Euler a prouvé eulérien $\implies$ connexe et tous les degrés pairs
- Il a ainsi donné une réponse négative au problème des sept ponts.



Démonstration du théorème d'Euler

- ($\Longrightarrow$)
- Soit G un graphe eulérien avec un cycle eulérien C avec sommet initial et terminal u.
- Chaque fois que C passe par un sommet $v \neq u$, on compte deux arêtes incidentes à v.
- Donc, le degré de v est pair.
- De même, $d(u)$ est pair puisque C débute et termine en u.
- ($\Longleftarrow$)
- Soit G un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair.
- On peut construire un cycle eulérien en utilisant l'algorithme de Hierholzer :