



Université de Paris

Mathématiques discrètes

Projet : Cliques

Consignes Le but du projet est de présenter une application dans laquelle les mathématiques discrètes jouent un rôle fondamental.

Le rendu final du projet consistera en un article destiné au grand public au format pdf de 800-1000 mots plus une annexe numérique, qui pourra contenir par exemple une démonstration interactive, une vidéo explicative et/ou des graphiques générés par code écrit par vous-même ; cette annexe sera rendue sous la forme d'un lien vers un dépôt en ligne. La forme exacte et la technologie utilisée pour l'annexe peut varier et est donc laissée au libre choix des étudiants. L'article et son annexe seront jugés non seulement sur le contenu mais aussi sur la clarté de la présentation, la qualité de rédaction, et la créativité.

Contenu Le sujet détaille quelques points à développer mais ceux-ci sont proposés comme point de départ de votre travail. Vous êtes encouragés à développer d'autres pistes en lien avec les mathématiques discrètes. De même, la bibliographie conseillée est un point de départ. Vous pouvez vous appuyer sur d'autres sources sur lesquelles vous porterez un œil critique et que vous prendrez soin de citer correctement.

Charte de bonne conduite Lisez attentivement la charte de bonne conduite. Portez une attention particulière à citer toutes vos sources, y compris les exemples et les images que vous utiliserez. L'équipe pédagogique sera très attentive à cet aspect lors de la correction.

Calendrier Consultez la page Moodle du cours pour les dates des principales étapes du projet.

Bref descriptif du sujet

Le projet des colocataires consiste à trouver parmi $2n$ personnes une liste de paires de personnes qui pourront être colocataires. Les individus peuvent indiquer leurs préférences pour les personnes avec qui elle accepteraient d'être mises en colocation. On dit qu'une liste est instable s'il existe deux individus qui ne sont pas appariés et qui préféreraient tous les deux être ensemble plutôt que de rester avec la personne qui leur a été affectée. Un cas particulier de ce problème est le problème de l'appariement stable (classiquement appelé mariage stable). Dans ce cas, les $2n$ individus sont répartis en deux groupes, et le but est de constituer une liste de binômes, où chaque binôme est constitué de personnes dans des groupes différents. Un appariement est dit instable si, comme dans le cas précédent, deux personnes de binômes différents préfèrent être ensemble qu'avec les personnes à qui elles ont été affectées.

L'algorithme de Gale-Shapley (1962) trouve un appariement stable si un tel appariement existe. L'algorithme de Irving reprend l'algorithme de Gale Shapley et rajoute une seconde phase pour obtenir une solution au problème des colocataires.

Bibliographie conseillée

- Jérôme Buzzi, Le prix Nobel d'économie 2012, [https ://images.math.cnrs.fr/Le-prix-Nobel-d-economie-2012.html](https://images.math.cnrs.fr/Le-prix-Nobel-d-economie-2012.html)
- Donald E. Knuth, Mariages stables et leurs relations avec d'autres problèmes combinatoires. [https ://www-cs-faculty.stanford.edu/ knuth/ms.html](https://www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/ms.html)

Pistes de développement

1. Décrire les problèmes d'appariement en présentant des applications réelles.
2. Trouver une façon originale de présenter l'algorithme de Gale Shapley, puis de Irving (éviter de le faire avec les listes de préférences comme on retrouve dans de nombreuses videos sur internet).
3. Expliquer ce qui permet de conclure qu'une solution stable n'existe pas. Quels sont les obstacles qui sont trouvés par l'algorithme de Gale Shapley ?
4. Expliquer quelle est la complexité de l'algorithme.