

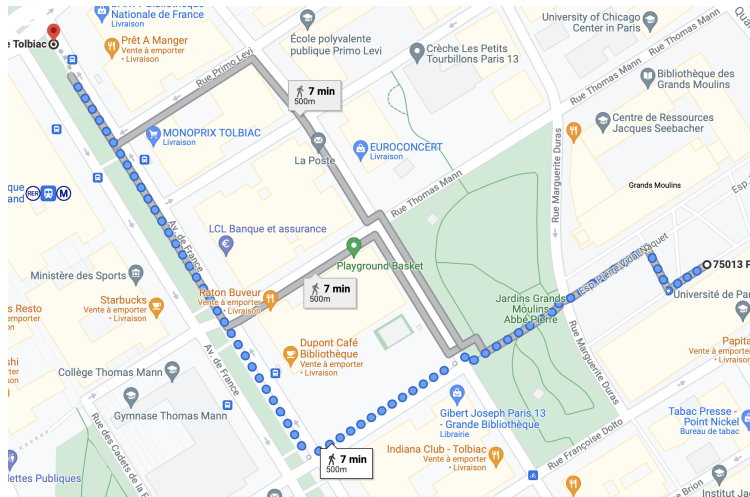
# Plus court chemin

CM n°5 — Algorithmique (AL5)

Matěj Stehlík

14/10/2022

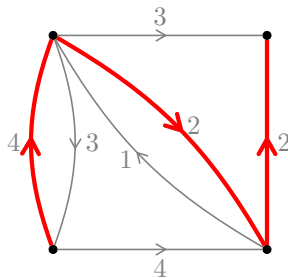
# Plus court chemin



# Chemins et circuits pondérés

## Définition

- Soit  $G = (V, E)$  un graphe orienté pondéré (avec pondération  $w \in \mathbb{R}^{|E|}$ ).
- Soit  $P \subseteq$  un chemin dans  $G$ .
- La *longueur* (ou poids) du chemin  $P$  est définie comme  $\sum_{e \in E(P)} w_e$ .

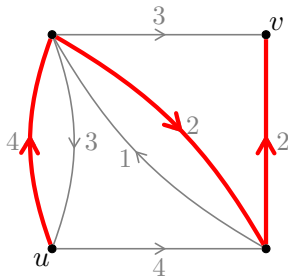


# Distance

## Définition

Soient  $u, v$  deux sommets dans un graphe orienté pondéré  $G = (V, E)$  (avec pondération  $w \in \mathbb{R}^{|E|}$ ). La *distance* de  $u$  à  $v$  est définie comme

$$\text{dist}(u, v) = \min\{w(P) : P \text{ est un chemin de } u \text{ à } v\}$$



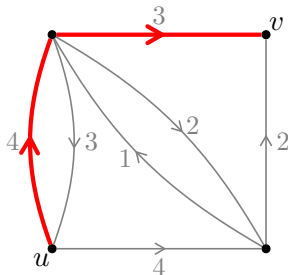
$$\text{dist}(u, v) \leq 8$$

# Distance

## Définition

Soient  $u, v$  deux sommets dans un graphe orienté pondéré  $G = (V, E)$  (avec pondération  $w \in \mathbb{R}^{|E|}$ ). La *distance* de  $u$  à  $v$  est définie comme

$$\text{dist}(u, v) = \min\{w(P) : P \text{ est un chemin de } u \text{ à } v\}$$



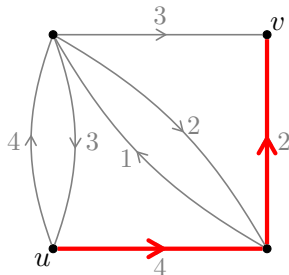
$$\text{dist}(u, v) \leq 7$$

# Distance

## Définition

Soient  $u, v$  deux sommets dans un graphe orienté pondéré  $G = (V, E)$  (avec pondération  $w \in \mathbb{R}^{|E|}$ ). La *distance* de  $u$  à  $v$  est définie comme

$$\text{dist}(u, v) = \min\{w(P) : P \text{ est un chemin de } u \text{ à } v\}$$



$$\text{dist}(u, v) = 6$$

# Le problème du plus court chemin

## Problème

Étant donné un graphe orienté  $G = (V, E)$  pondéré (avec pondération  $w \in \mathbb{R}^{|E|}$ ) et deux sommets  $u \neq v$  dans  $V$ , trouver un plus court chemin (« chaîne orientée ») de  $u$  vers  $v$ .

## Remarque

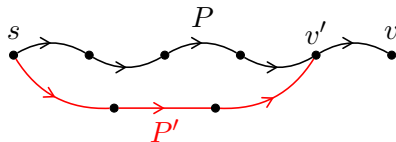
Il peut ne pas exister de plus court chemin de  $u$  à  $v$  :

- S'il n'y a aucun chemin de  $u$  à  $v$  :  $\text{dist}(u, v) = \infty$
- S'il y a un circuit négatif sur le chemin de  $u$  à  $v$  :  $\text{dist}(u, v) = -\infty$

# Principe de sous-optimalité

## Observation

Si  $P$  est un plus court chemin de  $s$  vers  $v$  alors, en notant  $v'$  le prédécesseur de  $v$  dans ce chemin, le sous-chemin de  $P$  qui va de  $s$  vers  $v'$  est un plus court chemin de  $s$  vers  $v'$ .



## Démonstration par l'absurde

S'il existe  $P'$  de  $s$  vers  $v'$  de poids strictement inférieur au sous-chemin de  $P$  de  $s$  vers  $v'$  alors en concaténant  $P'$  à  $(v, v')$  on aurait un chemin de  $s$  à  $v'$  de poids strictement inférieur à celui de  $P$ , contradiction.



## Algorithme de Dijkstra

**Entrées :** Graphe orienté  $G = (V, E)$  avec pondération  $\ell \in \mathbb{R}^+$ , un sommet  $s \in V$

**Sorties :** Distances de  $s$  aux autres sommets

$S \leftarrow \emptyset$

$D[s] \leftarrow 0$

**pour tous les**  $u \in V \setminus \{s\}$  **faire**

$D[u] \leftarrow +\infty$

**tant que**  $S \neq V$  **faire**

    Trouver  $u \in V \setminus S$  tel que  $D[u]$  est minimum

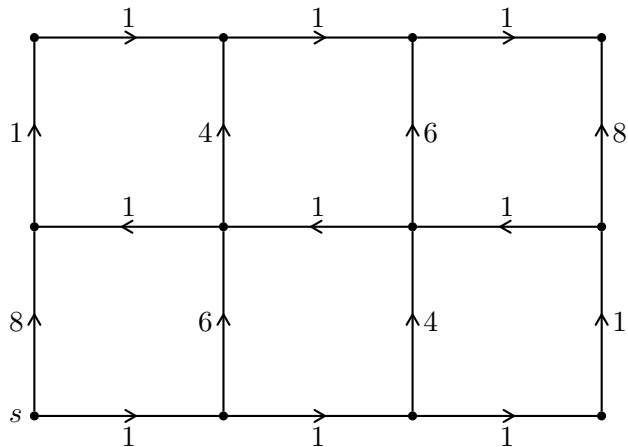
$S \leftarrow S \cup \{u\}$

**pour tous les**  $v \in V \setminus S$  tels que  $(u, v) \in E$  **faire**

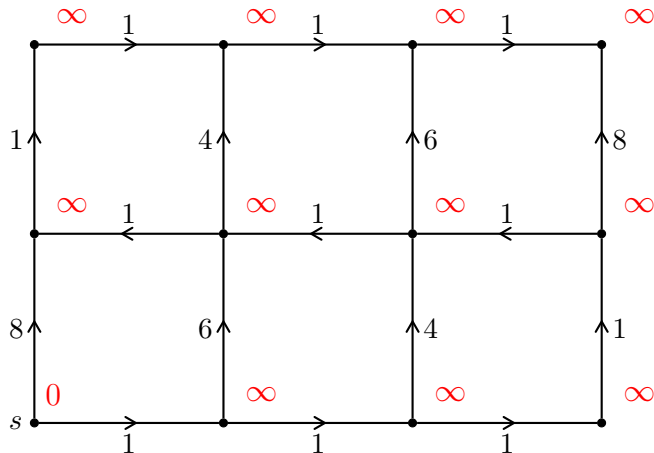
$D[v] \leftarrow \min(D[u], D[v] + \ell(u, v))$

**retourner**  $D$

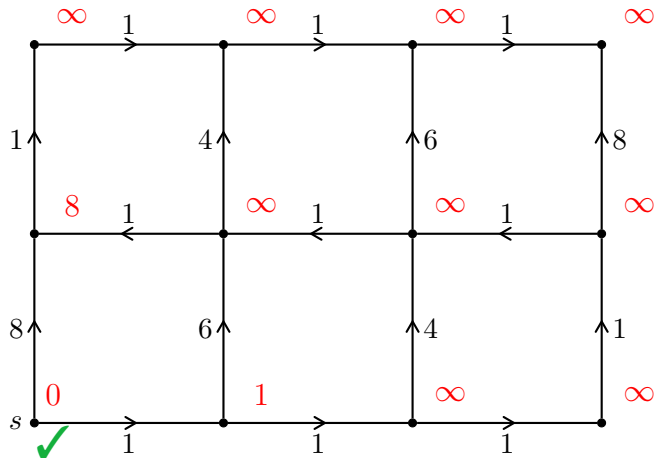
## Illustration de l'algorithme de Dijkstra



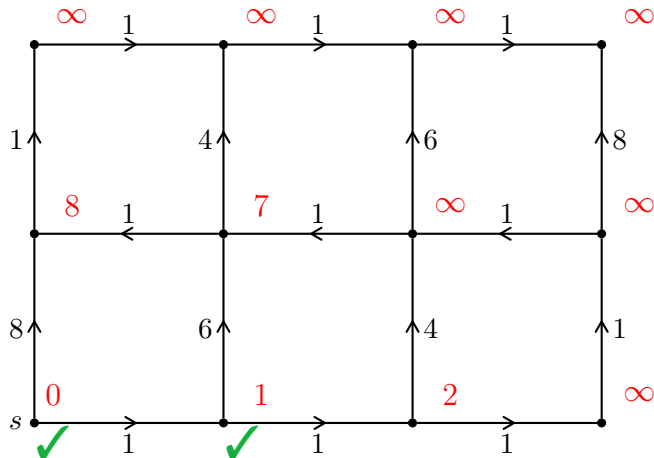
## Illustration de l'algorithme de Dijkstra



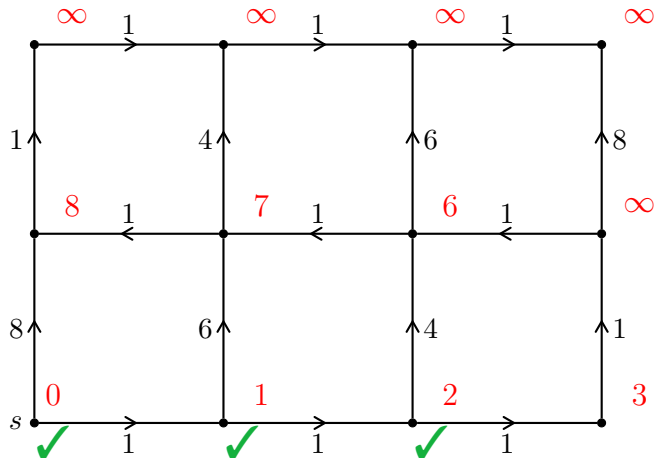
## Illustration de l'algorithme de Dijkstra



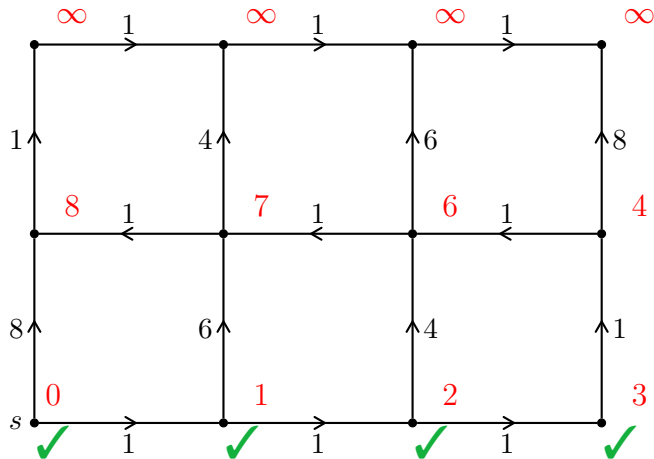
## Illustration de l'algorithme de Dijkstra



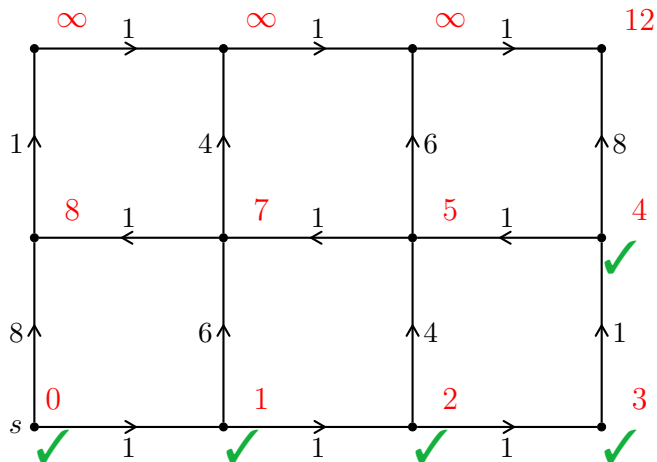
## Illustration de l'algorithme de Dijkstra



## Illustration de l'algorithme de Dijkstra

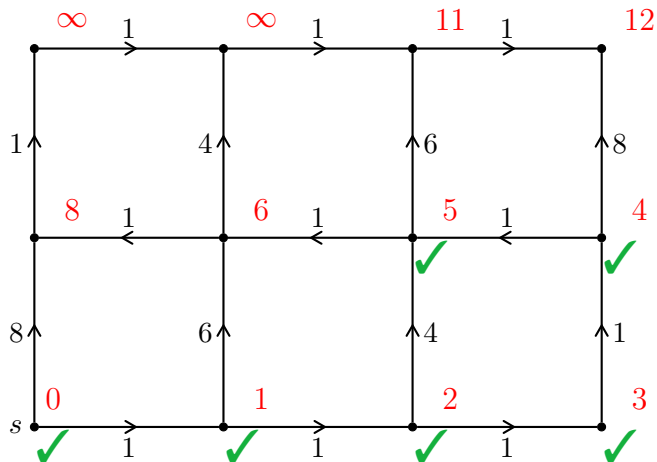


## Illustration de l'algorithme de Dijkstra

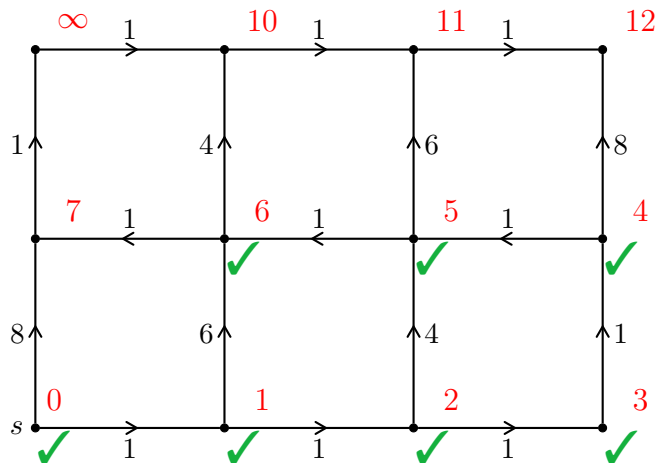




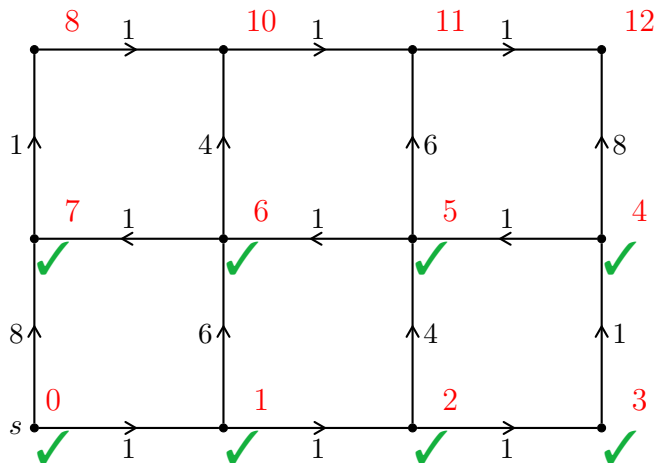
## Illustration de l'algorithme de Dijkstra



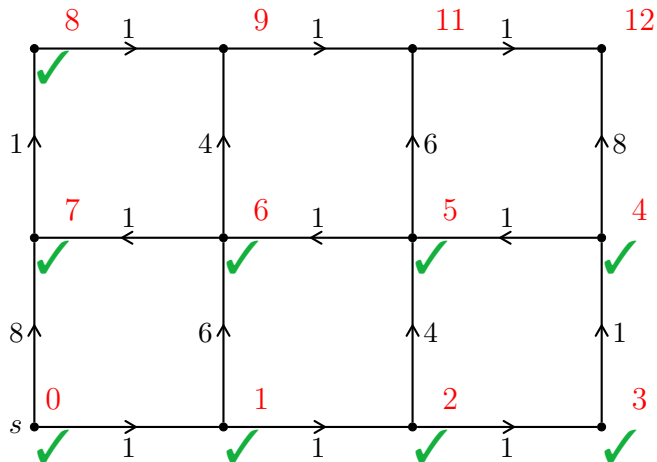
## Illustration de l'algorithme de Dijkstra



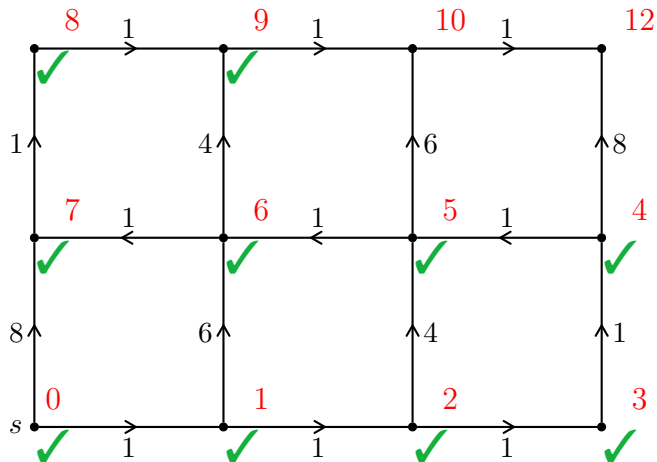
## Illustration de l'algorithme de Dijkstra



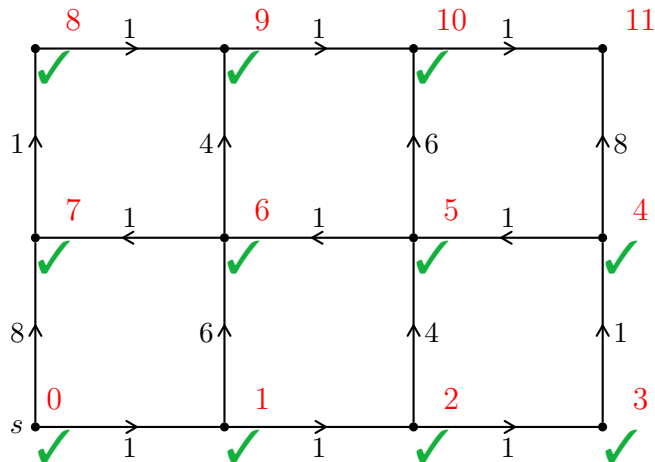
## Illustration de l'algorithme de Dijkstra



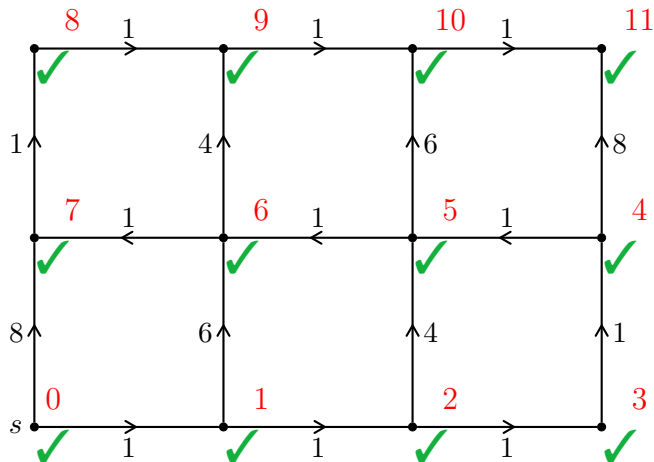
## Illustration de l'algorithme de Dijkstra



## Illustration de l'algorithme de Dijkstra



## Illustration de l'algorithme de Dijkstra

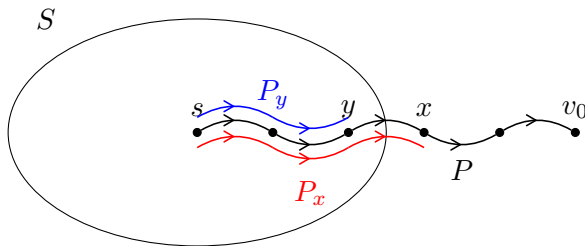


## Distances partielles

### Définition

Soit  $G = (V, E)$  un graphe orienté avec pondération  $\ell \in \mathbb{R}^+$ , et  $s \in S \subseteq V$ . Pour tout  $u \in V$ , on note  $d(u) = \text{dist}(s, u)$ . Pour tout sommet  $v \notin S$ , on définit

$$D(v) = \min \{d(u) + \ell(u, v) : u \in S \text{ et } (u, v) \in E\}.$$





## Justification de l'algorithme de Dijkstra (1/3)

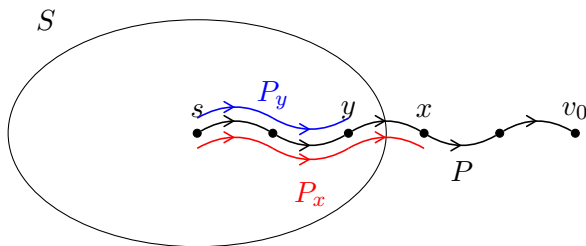
### Lemme

Soit  $v_0$  tel que  $D(v_0)$  est minimum, parmi tous les sommets dans  $V \setminus S$ .  
Alors,  $D(v_0) = d(v_0)$ .

### Démonstration

- Soit  $v_0$  tel que  $D(v_0)$  est minimum.
- Comme  $D(v_0)$  est la longueur d'un chemin de  $s$  à  $v_0$ , on a  $D(v_0) \geq d(v_0)$ .
- Si  $D(v_0) \leq d(v_0)$  alors la preuve est terminée.
- Sinon, on suppose  $D(v_0) > d(v_0)$ .
- Soit  $P$  un plus court chemin de  $s$  vers  $v_0$  (son poids est alors  $d(v_0)$ ).
- Soit  $x$  le premier sommet de  $P$  qui n'appartient pas à  $S$ .

## Justification de l'algorithme de Dijkstra (2/3)



### Démonstration (suite)

- Soit  $y \in S$  le prédécesseur de  $x$  dans ce chemin.
- Soit  $P_y$  le sous-chemin de  $P$  de  $s$  vers  $y$ .
- $P_y$  est un plus court chemin de  $s$  vers  $y$  (principe de sous optimalité).
- Soit  $P_x$  le sous chemin de  $P$  de  $s$  vers  $x$ .

## Justification de l'algorithme de Dijkstra (3/3)

### Démonstration (suite)

- La longueur de  $P_x$  est  $d(y) + \ell(y, x)$ .
- Ceci entraîne que  $D(x) \leq d(y) + \ell(y, x) \leq d(v_0) < D(v_0)$ .
  - Première inégalité : par définition de  $D$ .
  - Deuxième inégalité : tous les poids sont  $\geq 0$ .
  - Troisième inégalité : par hypothèse.
- Implique  $D(x) < D(v_0)$  — contradiction avec le choix de  $D(v_0)$ .

## Les files de priorité

Une *file de priorité* est un type abstrait élémentaire sur laquelle on peut effectuer les opérations suivantes :

**Insert** insérer un élément

**Decrease-key** diminuer la valeur de la clé d'un élément particulier

**Delete-min** retourner l'élément ayant la plus petite clé et supprimer-le de la file

**Make-queue** créer une file d'attente prioritaire à partir des éléments donnés, avec les valeurs de clés données.

## Complexité des opérations dans les files de priorité

| implémentation   | deletemin   | insert      | decreasekey |
|------------------|-------------|-------------|-------------|
| liste            | $O(n)$      | $O(1)$      | $O(1)$      |
| tas binaire      | $O(\log n)$ | $O(\log n)$ | $O(\log n)$ |
| tas de Fibonacci | $O(\log n)$ | $O(1)$      | $O(1)$      |

## Implémentation de Dijkstra avec une file de priorité

**pour tous les**  $u \in V$  **faire**

$D[u] \leftarrow +\infty$   
     $\text{prev}[u] \leftarrow \emptyset$

$D[s] \leftarrow 0$

$H \leftarrow \text{makequeue}(V)$

**tant que**  $H \neq \emptyset$  **faire**

$u \leftarrow \text{deletemin}(H)$

**pour tous les**  $(u, v) \in E$  **faire**

**si**  $D[v] > D[u] + w(u, v)$  **alors**

$D[v] = D[u] + w(u, v)$

$\text{prev}[v] \leftarrow u$

$\text{decreasekey}(H, v)$

## Complexité de l'algorithme de Dijkstra

- L'algorithme de Dijkstra est très similaire au parcours en largeur.
- Cependant, il est plus lent car les files de priorité sont plus exigeantes que les files simples de BFS.
- Puisque makequeue prend au plus autant de temps que  $|V|$  opérations d'insertion, nous obtenons un total de  $|V|$  deletemin et  $|V| + |E|$  opérations d'insertion/decreasekey.
- On obtient ainsi les complexités suivantes de Dijkstra selon l'implémentation de la file de priorité :

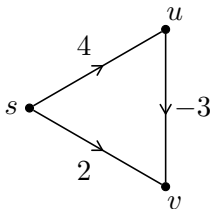
**liste**  $O(n^2)$

**tas binaire**  $O((n + m) \log n)$

**tas de Fibonacci**  $O(m + n \log n)$

## Arcs négatifs

- L'algorithme de Dijkstra fonctionne en partie parce que le plus court chemin entre le point de départ  $s$  et un sommet  $v$  doit passer exclusivement par des sommets plus proches que  $v$ .
- Ce n'est plus le cas lorsque l'on permet des arcs de poids négatif.
- Dans cet exemple, le plus court chemin de  $s$  à  $v$  passe par  $u$ , un sommet plus éloigné





## Dijkstra vu comme une séquence de mises à jour

- Pour tout sommet  $v$ , la valeur de  $D[v]$  est toujours supérieure ou égale à  $\text{dist}(s, v)$ .
- Les valeurs de  $D[v]$  changent uniquement grâce à la “mise à jour” le long d’un arc :

**Procédure**  $\text{maj}(u, v)$ :

$$\lfloor D[v] \leftarrow \min\{D[v], D[u] + \ell(u, v)\}$$

- Cette opération, basée sur le principe de sous-optimalité, satisfait les propriétés suivantes :
  - Elle donne la distance correcte de  $s$  à  $v$  dans le cas particulier où  $u$  est l’avant-dernier noeud du plus court chemin vers  $v$ , et  $D[u] = \text{dist}(s, u)$ .
  - Elle ne rendra jamais  $D[v]$  trop petit.

## Plus courts chemins dans les graphes avec arcs négatifs

- Soit  $t$  un sommet quelconque dans  $G$ , et soit  $P = (s, u_1, \dots, u_k, t)$  un plus court chemin de  $s$  à  $t$ .
- $P$  comprend au plus  $n - 1$  arcs (sinon,  $P$  n'est pas élémentaire).
- Si la séquence de maj comprend  $(s, u_1), (u_1, u_2), (u_2, u_3), \dots, (u_k, t)$ , *dans cet ordre* (mais pas nécessairement de manière consécutive), alors, grâce à la première propriété de la diapo précédente,  $D[t] = \text{dist}(s, t)$ , *même s'il y a des arcs négatifs!*
- Il suffit donc de mettre à jour tous les arcs  $n - 1$  fois.

## Algorithme de Bellman–Ford

**Entrées :** Graphe orienté  $G = (V, E)$ , pondération  $\ell \in \mathbb{R}^m$ , source  $s \in V$

**Sorties :** Distances de  $s$  aux autres sommets

$D[s] \leftarrow 0$

$\text{prev}[s] \leftarrow s$

**pour tous les**  $u \in V \setminus \{s\}$  **faire**

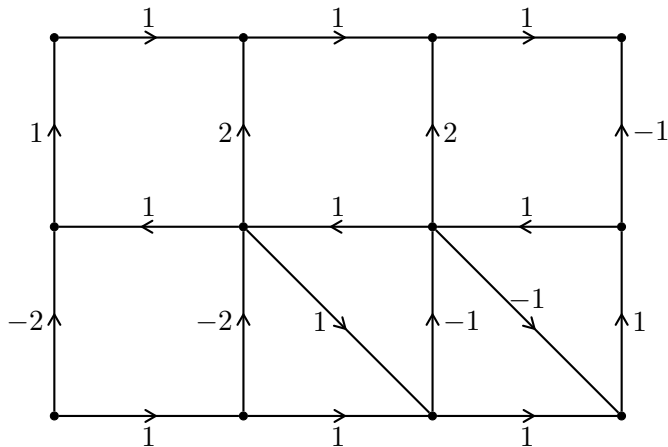
$D[u] \leftarrow +\infty$   
     $\text{prev}[u] \leftarrow \emptyset$

**répéter**  $|V| - 1$  **fois**

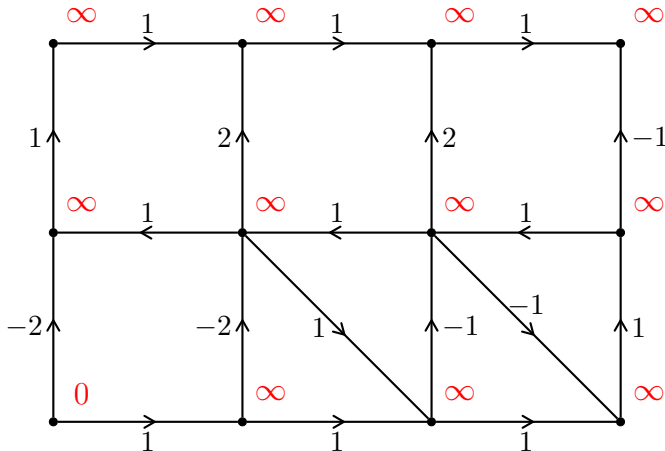
**pour tous les**  $e \in E$  **faire**  
        maj( $e$ )

**retourner**  $D, \text{prev}$

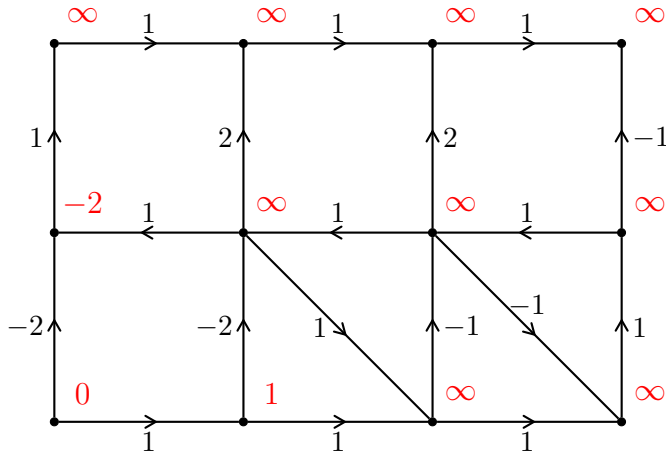
## Illustration de l'algorithme de Bellman-Ford



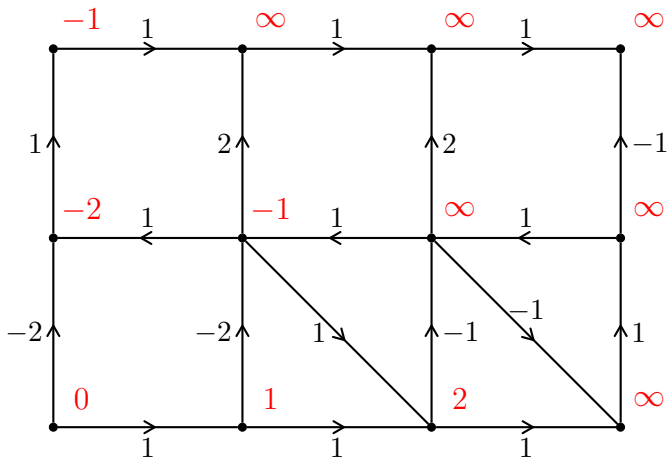
## Illustration de l'algorithme de Bellman-Ford



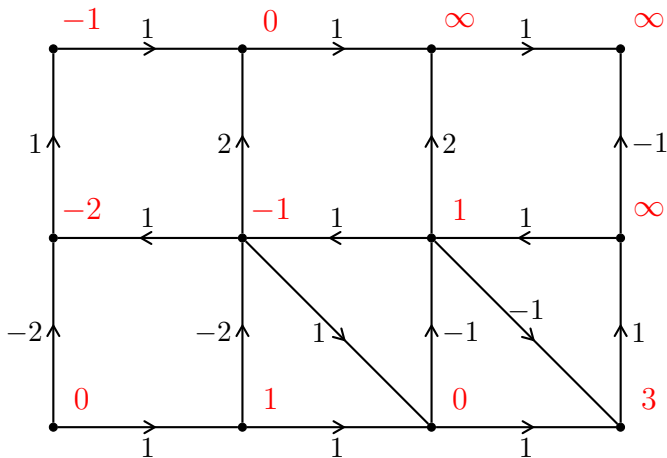
## Illustration de l'algorithme de Bellman-Ford



## Illustration de l'algorithme de Bellman-Ford

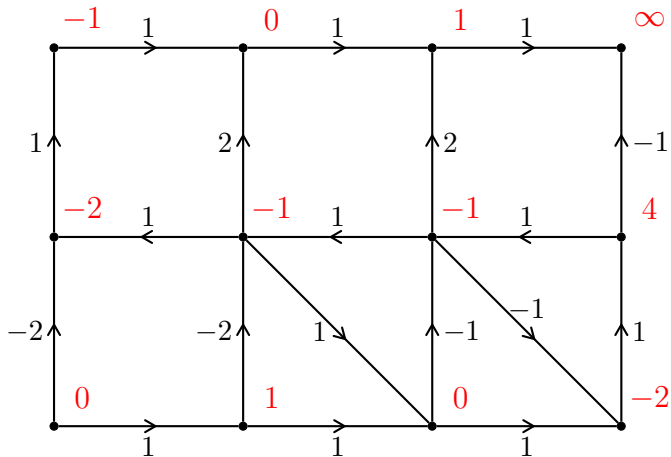


## Illustration de l'algorithme de Bellman-Ford

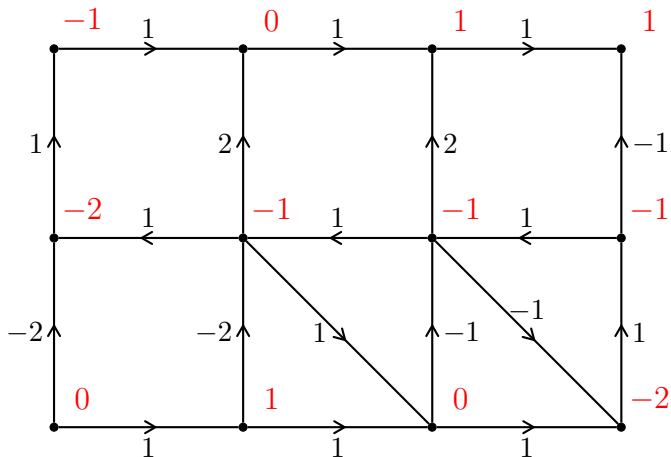




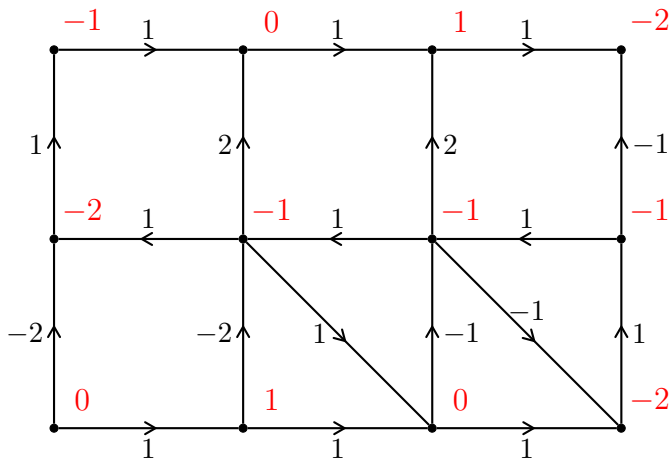
## Illustration de l'algorithme de Bellman-Ford



## Illustration de l'algorithme de Bellman-Ford



## Illustration de l'algorithme de Bellman-Ford



## Complexité et correction de l'algorithme de Bellman–Ford

- La complexité de Bellman–Ford est de  $O(nm)$ .
- Pour la correction de l'algorithme de Bellman–Ford, il suffit de prouver le lemme suivant.
- La démonstration peut se faire par récurrence.

### Lemme

Après  $i$  itérations de la boucle principale :

- Si  $D[u] \neq +\infty$ , alors  $D[u]$  est la longueur d'un chemin de  $s$  à  $u$  ;
- S'il existe un chemin de  $s$  à  $u$  comprenant au plus  $i$  arcs, alors la valeur de  $D[u]$  est inférieure ou égale à la longueur d'un plus court chemin de  $s$  à  $u$  comprenant au plus  $i$  arcs.

## Détection de cycles négatifs

- Une légère modification de l'algorithme de Bellman–Ford nous permet de détecter les cycles négatifs.
- Après avoir fait les  $|V| - 1$  itérations de la boucle, faire une itération supplémentaire.
- Un cycle négatif existe dans  $G$  ssi il y a au moins un changement dans le tableau  $D$  lors de la dernière itération.
- Détecter les cycles négatifs a des applications importantes dans la vie réelle.
- Une application classique est l'arbitrage de devises (voir aussi le TD).

## Une application (qui pourrait vous rendre fabuleusement riche)

- Vous avez un ensemble de taux de change entre certaines devises.
- Vous voulez déterminer si un arbitrage est possible, c'est-à-dire s'il existe un moyen par lequel vous pouvez commencer avec une unité d'une certaine devise C et effectuer une série d'échanges qui aboutit à avoir plus d'une unité de C.
- Supposons que les coûts de transaction sont nuls et que les taux de change ne fluctuent pas.

## Exemple (d'il y a bien longtemps !)

|            | <b>USD</b> | <b>EUR</b> | <b>GBP</b> | <b>CHF</b> | <b>CAD</b> |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| <b>USD</b> | 1          | 0.741      | 0.657      | 1.061      | 1.005      |
| <b>EUR</b> | 1.349      | 1          | 0.888      | 1.433      | 1.366      |
| <b>GBP</b> | 1.521      | 1.126      | 1          | 1.614      | 1.538      |
| <b>CHF</b> | 0.942      | 0.698      | 0.619      | 1          | 0.953      |
| <b>CAD</b> | 0.995      | 0.732      | 0.650      | 1.049      | 1          |

## Exemple (d'il y a bien longtemps !)

|     | USD   | EUR   | GBP   | CHF   | CAD   |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| USD | 1     | 0.741 | 0.657 | 1.061 | 1.005 |
| EUR | 1.349 | 1     | 0.888 | 1.433 | 1.366 |
| GBP | 1.521 | 1.126 | 1     | 1.614 | 1.538 |
| CHF | 0.942 | 0.698 | 0.619 | 1     | 0.953 |
| CAD | 0.995 | 0.732 | 0.650 | 1.049 | 1     |

- Échangeons 10000 USD dans la séquence suivante : USD  $\rightarrow$  EUR  $\rightarrow$  CAD  $\rightarrow$  USD



## Exemple (d'il y a bien longtemps !)

|     | USD   | EUR   | GBP   | CHF   | CAD   |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| USD | 1     | 0.741 | 0.657 | 1.061 | 1.005 |
| EUR | 1.349 | 1     | 0.888 | 1.433 | 1.366 |
| GBP | 1.521 | 1.126 | 1     | 1.614 | 1.538 |
| CHF | 0.942 | 0.698 | 0.619 | 1     | 0.953 |
| CAD | 0.995 | 0.732 | 0.650 | 1.049 | 1     |

- Échangeons 10000 USD dans la séquence suivante : USD  $\rightarrow$  EUR  $\rightarrow$  CAD  $\rightarrow$  USD
- Nous obtenons  $10000 \times 0.741 \times 1.366 \times 0.995 \approx 10071$

## Exemple (d'il y a bien longtemps !)

|     | USD   | EUR   | GBP   | CHF   | CAD   |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| USD | 1     | 0.741 | 0.657 | 1.061 | 1.005 |
| EUR | 1.349 | 1     | 0.888 | 1.433 | 1.366 |
| GBP | 1.521 | 1.126 | 1     | 1.614 | 1.538 |
| CHF | 0.942 | 0.698 | 0.619 | 1     | 0.953 |
| CAD | 0.995 | 0.732 | 0.650 | 1.049 | 1     |

- Échangeons 10000 USD dans la séquence suivante : USD  $\rightarrow$  EUR  $\rightarrow$  CAD  $\rightarrow$  USD
- Nous obtenons  $10000 \times 0.741 \times 1.366 \times 0.995 \approx 10071$
- Nous avons ainsi fait un bénéfice de 71 USD !
- Bellman-Ford peut servir pour trouver une telle séquence de changes.

## Réduction au problème de cycle négatif