U.E. Mathématiques Discrètes

A. Bucciarelli, B. Delcroix-Oger , S. Laplante et C. Tasson

Semestre d'automne 2019
(actualisé en 2021 par G. Couteau, B. Delcroix-Oger, S. van Gool et S. Laplante)

Table des matières

Chapitre 1

Graphes et dénombrement

1.1 Graphes et ensembles ?

Question 1. Pouvez-vous citer des exemples d'utilisation de graphes ?

Il existe de nombreuses définitions de graphes. Celle que nous traiterons dans ce cours est la notion suivante :

Définition 2. Un graphe non orienté est une paire (V, E) où
— V est un ensemble dont les éléments sont appelés sommets
— E est un ensemble de paires de sommets distincts, appelées arêtes.

Pour être rigoureux, il nous faut définir la notion d'*ensemble*.

Définition 3. Un ensemble est une collection (= regroupement) *non ordonnée* d'objets (sans répétition). Un objet de l'ensemble est appelé un élément de l'ensemble, on dit alors qu'il lui appartient. Un multiensemble est une collection d'objets avec répétitions éventuelles.

Si un objet x appartient à un ensemble E, on note $\boldsymbol{x \in E}$.
Sinon, on note $\boldsymbol{x \notin E}$.
Un ensemble sera noté entre accolades $\boldsymbol{\{\ \}}$.

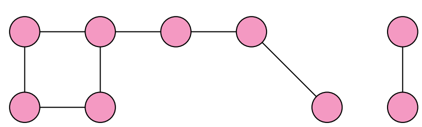


Figure 1.1 – Un exemple de graphe non orienté

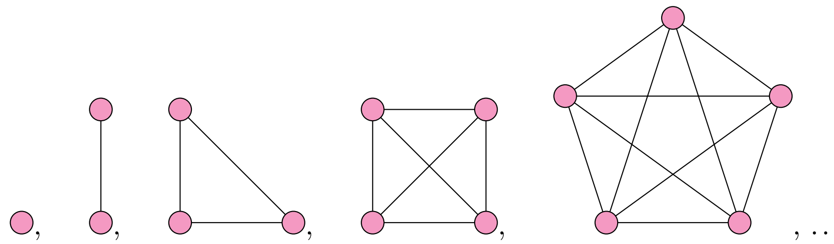


FIGURE 1.2 – Graphes complets à 5 sommets et moins

Exemple 4. Sauriez-vous donner des exemples et des contre-exemples d'ensemble ?

Attention 5. Nous ne considérerons ici que des ensembles finis.

L'un des premiers exemples de graphes que l'on peut définir est les graphes complets :

Définition 6. Un graphe est complet si toute paire de sommets distincts est une arête.

Considérons les ensembles $A = \{x_1, \ldots, x_n\} (= \{x_3, x_n, x_1, x_2, x_4, \ldots, x_{n-1}\})$ et $B = \{y_1, \ldots, y_k\}$:

Définition 7. On définit les opération suivantes :

$\cup$ (Union) : $A \cup B =$	$\{z \mid (\exists 1 \leq j \leq k : z = y_j)$ or $(\exists 1 \leq i \leq n : z = x_i)\}$
$\cap$ (Intersection) :	$A \cap B = \{z \mid \exists 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k : z = y_j = x_i\}$
$^{-}$(Complémentaire) :	Dans A, $\bar{S} = \{x \in A \mid x \notin S\} (= A \setminus S)$
$\subseteq$ (Sous-ensemble) :	$S \subseteq A$ ssi $(\exists T : T \cap S = \emptyset, S \cup T = A)$
$\times$ (Produit cartésien) :	$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A$ et $y \in B\}$

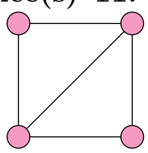
Exercice(s) 8. Quels sont les analogues des opérations ci-dessus en calcul propositionnel ?

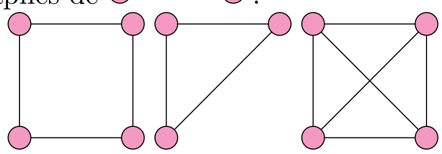
Définition 9. L'analogue de ces opérations en termes de graphes est le suivant :

$\cup$ (Union) :	union de graphes
$\cap$ (Intersection) :	restriction de graphes
$^{-}$(Complémentaire) :	Si $G = (A, E)$, $\bar{G} = (A, \bar{E})$
$\subseteq$ (Sous-ensemble) :	sous-graphes
$\times$ (Produit cartésien) :	produits de graphes

Soient $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ deux graphes.

Définition 10. On dit que G est un sous-graphe de G' si $V \subseteq V'$ et $E \subseteq E'$. On dit que G est un sous-graphe induit de G' si de plus toute arête e de E' entre deux sommets de V est dans E.

Exercice(s) 11. Parmi les graphes suivants, lesquels sont des sous-graphes de  ?



1.2 Rudiments combinatoires

Définition 12. Le cardinal d'un ensemble E est son nombre d'éléments.

Le cardinal d'un ensemble E est noté $|E|$.

Proposition 13. *Soient A et B deux ensembles,*

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- $|A \cap B| \leq \min(|A|, |B|)$
- $|A \times B| = |A| \times |B|$
- *Si* $S \subseteq A$, $|S| \leq |A|$
- $|\bar{S}| = |A| - |S|$

Proposition 14. *Principe de multiplication : Si un objet consiste en k éléments, chacun choisi dans un ensemble A_i de cardinal $|A_i|$ ($1 \leq i \leq k$), alors il y a $|A_1| \times \ldots \times |A_k|$ objets différents possibles.*

$$|A_1 \times \ldots \times A_k| = |A_1| \times \ldots \times |A_k|$$

Exemple 15. Dans une base de données, contenant une table "clients" de taille k et une table "commandes" de taille l, quelle est la taille du produit cartésien des deux tables ?

Exemple 16. Un graphe a 3 sommets rouges, 6 sommets verts et 4 sommets bleus, ainsi que toutes les arêtes possibles entre deux sommets de couleurs différentes : combien y a-t-il de triangles sur le graphe ?

Proposition 17. *Principe d'addition : Si $E_1, \ldots, E_k$ sont deux à deux disjoints ($E_i \cap E_j = \emptyset$, pour tout $i \neq j$), on note $\sqcup$ l'union disjointe de ces éléments et on a :*

$$|E_1 \sqcup \ldots \sqcup E_k| = |E_1| + \ldots + |E_k|$$

Exemple 18. Un graphe a 3 sommets rouges, 6 sommets verts et 4 sommets bleus, ainsi que toutes les arêtes possibles entre deux sommets de couleurs différentes : combien a-t-il d'arêtes ?

Définition 19. Un uplet d'éléments de E est une liste d'éléments de E.

Définition 20. Soient E et F deux ensembles. Une application de E dans F est un uplet de $|E|$ éléments de F. Comme chaque élément de E désigne une et une seule case du uplet, on peut alors noter $f(x)$ l'(unique !) élément du uplet correspondant à x.

Proposition 21. *Le nombre d'applications d'un ensemble E dans un ensemble F est :*

$$\mathcal{F}(E, F) = |F|^{|E|}.$$

Définition 22. L'application f est dite :
— injective si $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$,
— surjective si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$,
— bijective si elle est injective et surjective (pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = y$).

On parle alors respectivement d'injection, de surjection et de bijection.

Proposition 23. *S'il existe une injection $f : A \to B$, alors $|A| \leq |B|$.*

Proposition 24. *S'il existe une surjection $f : A \to B$, alors $|A| \geq |B|$.*

Proposition 25. *Si deux ensembles sont en bijection, ils ont même cardinal.*

C'est ce que l'on fait dès que l'on numérote des objets !

Définition 26. Une permutation d'un ensemble E est une application bijective de E dans E.

Proposition 27. *Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est donné par la factorielle*

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \times 2 \times \ldots \times n \text{ avec } 0! = 1.$$

Exemple 28. Alice range ses cours de L3 pour pouvoir les relire facilement. Sachant qu'elle a 6 modules différents ce semestre, de combien de manières différentes pourra-t-elle attribuer les intercalaires de son classeur ?

Définition 29. Un k-arrangement de E est un k-uplet de E sans répétition. C'est une injection de $[\![1;k]\!] := \{1,2,\ldots,k-1,k\}$ dans E.

Remarque : Un $|E|$-arrangement est une permutation.

Proposition 30. *Le nombre de k-arrangements (= k-uplets sans répétitions) d'un ensemble E est donné par :*

$$(n)_k = \prod_{i=1}^{k}(n-i+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exemple 31. Le comité olympique décide, en première sélection, de classer quatre dossiers parmi les vingt dossiers de candidature déposés : combien de classements différents pourrait-il faire ?

Remarque 32. Un k-sous-ensemble (ou sous-ensemble de cardinal k) d'un ensemble E devient un k-uplet sans répétition lorsqu'on ordonne ses éléments

Proposition 33. *Soit E un ensemble de cardinal n. Le nombre de sous-ensembles de E de cardinal k est donné par le coefficient binomial :*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\overbrace{n(n-1)\ldots(n-k+1)}^{k \text{ éléments}}}{k!} = \frac{(n)_k}{k!}$$

Exemple 34. Pour jouer au loto, il faut cocher 5 numéros sur une grille de 49 nombres puis choisir un numéro chance parmi dix : combien de tickets de loto différents est-il possible de remplir ?

Définition 35. L'ensemble des sous-ensembles d'un ensemble X est appelé ensemble des parties de X, notée $\mathcal{P}(X)$.

Définition 36. La fonction indicatrice de $S \subset X$, notée $\mathbf{1}_S$ est l'application de X dans $\{0,1\}$ qui envoie les éléments de S sur 1 et les autres sur 0.

Proposition 37.

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$$

Soit $B = \{0,1\}$ l'ensemble des booléens.

Définition 38. Une fonction booléenne à n variables (ou fonction binaire, ou fonction logique) est une application

$$\begin{array}{rcl} f : B^n & \to & B \\ (a_1, \ldots, a_n) & \to & f(a_1, ..., a_n) \end{array}$$

On représente f par un tableau qui est dit Table de Vérité de f.

Proposition 39.
- *L'ensemble F_n des fonctions booléennes (de B^n dans B) est en bijection avec $\mathcal{P}(B^n)$ l'ensemble des ensembles d'éléments de B^n.*
- *Le nombre d'éléments de F_n est $2^{(2^n)}$.*

Proposition 40. *Soit E un ensemble de cardinal n. Le nombre de k-multi-ensembles (=combinaisons avec répétition) de E est donné par le coefficient multinomial :* $$\binom{n+k-1}{k}.$$

Exemple 41. Bob range son armoire dans laquelle il a dix paires de chaussettes toutes identiques et cinq tiroirs : combien de manières différentes a-t-il de ranger ses affaires ?

Proposition 42. *On note $B = \{0,1\}$ l'ensemble à 2 éléments représentant les booléens. Une fonction booléenne à n variables (ou fonction binaire, ou fonction logique) est une application*

$$\begin{array}{rcl} f : B^n & \to & B \\ (a_1, \ldots, a_n) & \to & f(a_1, ..., a_n) \end{array}$$

On représente f par un tableau qui est dit Table de Vérité de f.
- *L'ensemble F_n des fonctions booléennes (de B^n dans B) est en bijection avec $\mathcal{P}(B^n)$ l'ensemble des ensembles d'éléments de B^n.*
- *Le nombre d'éléments de F_n est $2^{(2^n)}$.*

Soit E un ensemble de cardinal n et F un ensemble de cardinal k. Le tableau ci-dessous résume les objets définis plus haut :

		Ordonné	
		Oui	Non
Répétition	Oui	k-uplets de E (= fonctions de F dans E) n^k	k-multi-ensembles de E $\binom{n+k-1}{k}$
	Non	k-uplets sans répétitions (= fctions inj. de F dans E) $\frac{n!}{(n-k)!}$	k-sous-ensembles de E $\binom{n}{k}$

Rappelons que si A et B sont deux ensembles, nous avons la relation suivante :
$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$$

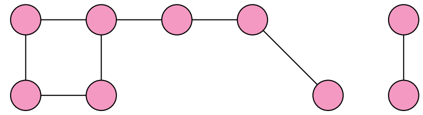
Exemple 43. Dans une classe de 50, il y a 30 filles et 35 étudiants bruns : montrer qu'il y a au moins 15 filles brunes.

Théorème 44 (Théorème d'inclusion-exclusion)**.** *Soit $A_1,\ldots,A_n$ des ensembles. Le nombre d'éléments de $A_1\cup\ldots\cup A_n$ qui ont au moins une de ces propriétés est donné par :*
$$\begin{aligned}|A_1\cup\ldots\cup A_n| &= \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n}|A_i\cap A_j| + \ldots + (-1)^{n-1}|A_1\cap\ldots\cap A_{n-2}|\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n}|A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}|\end{aligned}$$

1.3 Degré et double comptage

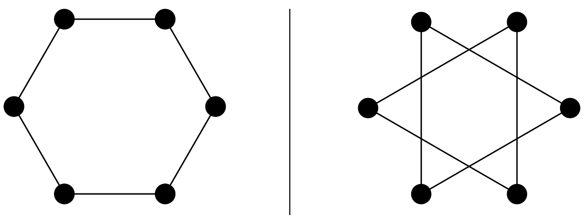
Définition 45. Un sommet u est adjacent à un sommet v s'il existe une arête entre u et v. Le degré d'un sommet v est le nombre d'arêtes contenant v.

Exercice(s) 46. Quels sont les degrés des sommets ci-dessous ?

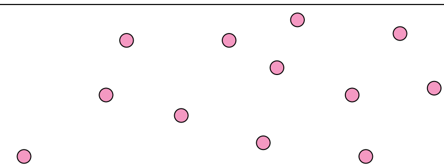
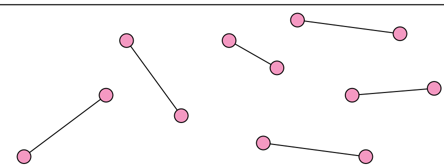
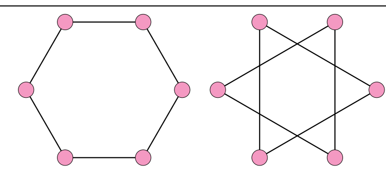


Attention 47. Connaître les degrés de tous les sommets d'un graphe ne permet pas de le caractériser.

Exemple 48.



Définition 49. Un graphe n-régulier est un graphe dont tous les sommets sont de degré n.

n=0	
n=1	
n=2	

Le degré des sommets d'un graphe $G = (V, E)$ vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 50.

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

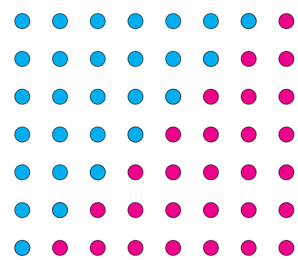
Corollaire 51 (Lemme des poignées de main)**.** *Tout graphe (non orienté fini) a un nombre pair de sommets de degré impair.*

Question 52. Comment le prouver ?

Le double-comptage consiste à compter de deux manières différentes un certain ensemble. De manière équivalente, il revient à donner une bijection entre deux ensembles qui ont alors le même cardinal.

Exemples 53. — Preuve du nombre de k-sous-ensembles (équivalence entre k-sous-ensemble ordonné et k-uplet sans répétition).
— Preuve de la formule du binôme de Newton (équivalence entre la donnée d'une fonction de $\{1,\dots,n\} \to \{0,1\}$ et la donnée d'un sous-ensemble de $\{1,\dots,n\}$ correspondant à $\{x \in \{1,\dots,n\} | f(x) = 1\}$).

Exemple 54. Comment la figure ci-dessous sert de preuve à la formule $\sum_{k=1}^{n} = \frac{n(n+1)}{2}$?



1.4 Définition inductives et preuves par induction

En informatique, on trouve beaucoup d'exemples de définitions inductives : règles de typage en programmation fonctionnelle, les syntaxes abstraites, les formules logiques, les arbres, automates, les grammaires,... et de preuves par induction : preuves de programmes, ...

Définitions inductives

Définition 55. Une définition inductive d'un ensemble E est donnée par :
— un ou plusieurs **éléments minimaux**
— un ensemble de **constructeurs** : $c : E^k \to E$ pour construire des éléments de E à partir de k éléments.

Exemple 56. Les entiers naturels
— Un élément minimal : "0 est un entier naturel"
— Un constructeur unaire : succ : $Nat \to Nat$: "si n est un entier naturel, alors succ(n) est naturel"

En notation BNF :

$$n ::= 0 \,|\, \mathrm{succ}(n)$$

Avec des types :

```
type Nat = Zero | Succ Nat
```

☞ **Exemple 57.** Les mots Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini de lettres.

— Un élément minimal : "le mot vide ϵ est un **mot**"

— Autant de constructeurs unaires $a :: \_ :$ mot $\rightarrow$ A que de lettres $a \in \mathcal{A}$: "si $a \in \mathcal{A}$ et s est un **mot**, alors $a :: s$ est un **mot**"

En notation BNF :

$$s ::= \epsilon \,|\, a :: s, \qquad a \in \mathcal{A}$$

Avec des types :

```
type mot = Epsilon | Concat of int * mot
```

☞ **Exemple 58.** Les arbres binaires Soit $\mathcal{L}$ un ensemble d'étiquettes.

— Éléments minimaux : " une racine étiquettée par $e \in \mathcal{L}$ est un **arbre binaire**

— Constructeurs : "si $e \in \mathcal{L}$ et A_1 et A_2 sont des **arbres binaires**, alors Tree(e, A_1, A_2) sont des **arbres binaires**.

En notation BNF :

$$t ::= e|Tree(e,t,t), \qquad e \in \mathcal{L}$$

Avec des types :

```
type btree = Root of int | Node of int * btree * btree
```

☞ **Exemple 59.** Les formules logiques Soit $\mathcal{P}_0$ un ensemble de variables propositionnelles.

— Éléments minimaux : "si P est une variable propositionnelle, alors P est une **formule logique**"

— Constructeurs :

  — Si ϕ est une **formule propositionnelle**, alors $\neg\phi$ est une **formule propositionnelle**.

  — Si ϕ_1 et ϕ_2 sont des **formules propositionnelles**, alors $\phi_1 \vee \phi_2$ est une **formule propositionnelle**.

  — Si ϕ_1 et ϕ_2 sont des **formules propositionnelles**, alors $\phi_1 \wedge \phi_2$ est une **formule propositionnelle**.

En notation BNF :

$$\phi ::= P|\neg\phi|\phi \vee \phi|\phi \wedge \phi \quad P \in \mathcal{P}_0$$

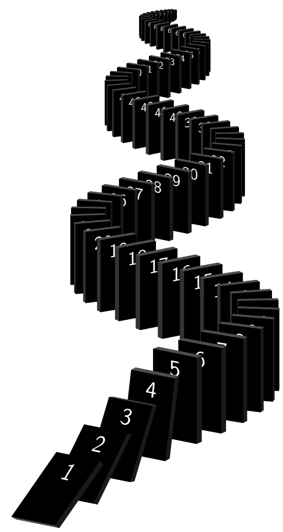
Avec des types :

```
type formule = Var of int | Neg of formule |
Or of formule * formule | And of formule * formule
```

Définition 60. Un ensemble inductif est le **plus petit** ensemble engendré par les éléments minimaux et les constructeurs.

Remarque 61. Dans la définition d'un ensemble inductif,
— un élément minimal est donné indépendamment d'autres éléments de l'ensemble
— dans une règle d'inférence, on suppose que l'on a un élément de l'ensemble inductif et on **construit** un autre élément qui dépent du premier.

Induction sur les entiers



Théorème 62. *Principe de récurence. Soit P une propriété sur les entiers naturels. Soit X un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ dont l'élément minimal est m.*
Si
— *$P(m)$ est vrai,*
— *Le fait que $P(x)$ soit vrai implique que $P(x+1)$ est vrai,*
alors
pour tout $n \in X$ on a que $P(n)$ est vrai.

Remarque 63. Pour prouver la conclusion $\forall n \in \mathcal{X}.P(n)$ (la propriété P est vraie sur tous les entiers de l'ensemble $\mathcal{X}$) il faut prouver :
— Le cas de base $P(m)$, sans utiliser d'hypothèse supplémentaire,
— Le cas inductif $P(x+1)$, en utilisant l'hypothèse d'induction $P(x)$ (une seule hypothèse d'induction).

Question 64. En combien de mouvements au minimum est-il possible de résoudre le problème de la tour de Hanoï (amener tous les disques sur le poteau de droite) à n disques ?

Théorème 65. *Principe d'induction complète. Soit P une propriété sur les entiers naturels. Soit X un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ dont l'élément minimal est m.*
Si

— *$P(m)$ est vrai,*
— *Le fait que $P(k)$ soit vrai pour tout élément $k < x$ implique que $P(x)$ est vrai,*

alors
pour tout $n \in X$ on a que $P(n)$ est vrai.

Remarque 66. Pour prouver la conclusion $\forall n \in \mathcal{X}.P(n)$ (la propriété P est vraie sur tous les entiers de l'ensemble $\mathcal{X}$) il faut prouver :

— Le cas de base $P(m)$, sans utiliser d'hypothèse supplémentaire,
— Le cas inductif $P(x)$, en utilisant les hypothèses d'induction (plusieurs) $\{P(k) \mid k \in \mathcal{X} \text{ et } k < x\}$.

Exemple 67. — Algorithme de tri (par exemple, tri fusion)
— Mq tout entier $n > 0$ admet une expression binaire (càd qu'il existe $c_i \in \{0;1\}$ tq $n = c_r 2^r + c_{r-1} 2^{r-1} + \ldots + c_0 2^0$) source : Strong Induction. Brilliant.org. Retrieved 18 :57, September 12, 2017, from https ://brilliant.org/wiki/strong-induction/

Question 68. Considérons la fonction $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$f(n,m) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \text{ et } m = 0 \\ 1 + f(n, m-1) & \text{si } m > 0 \\ f(n-1, n) & \text{si } n > 0 \text{ et } m = 0 \end{cases}$$

1. f est-elle bien définie ?
2. que calcule f ?

La récurrence sur $\mathbb{N}$ n'aide pas à répondre à ces questions (pourquoi ?).

Induction bien fondée Nous allons généraliser le raisonnement par récurrence à d'autres ensembles ordonnés que $\mathbb{N}$.

Définition 69. Ensemble bien fondé Un ensemble E muni d'un ordre stricte $<$ est bien fondé ss'il n'existe aucune chaîne infinie décroissante (i.e. de la forme $a_0 > a_1 > \ldots$).

Exemples d'ordres stricts pas bien fondées :

- les entiers, et l'ordre $<$ usuel :
  $4 > 3 > 2 > 1 > 0 > -1 > -2 > \dots$
- les mots sur un alphabet et l'ordre dictionnaire
  $b > ab > aab > aaab > \dots$.
- les entiers rationnel et l'ordre $<$ usuel.
  $4.2 > 4.19 > 4.119 > \dots$

Exemples d'ordres stricts bien fondées :

- les entiers naturels $\{0,1,2,\dots\}$ et l'ordre usuel $<$.
- les entiers positifs $\{1,2,\dots\}$ et l'ordre $a < b$ ssi a divise b et $a \neq b$.
- les ensembles *finis* et l'ordre usuel $\subset$.
- les mots sur un alphabet et l'ordre $s < t$ ssi s est un sous-mot strict de t.
- l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, et l'ordre $(n1, n2) < (m1, m2)$ ssi $n1 < m1$ et $n2 < m2$.
- l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, et l'ordre lexicographique $(n1, n2) < (m1, m2)$ ssi $n1 < m1$ ou $n1 = m1$ et $n2 < m2$.
- les noeuds d'un graphe orienté acyclique et l'ordre aRb ssi il y une arête de a vers b.

Théorème 70. *Soient donnés un ensemble $\mathcal{A}$ quelconque, un ordre strict $\sqsubset$ sur $\mathcal{A}$ (dont $\mathcal{M}$ est son ensemble d'éléments minimaux), et une propriété P sur $\mathcal{A}$.*

Si

1. *pour tout élément minimal $m \in \mathcal{M}$ on a **P(m)***
2. *le fait que **P(k)** soit vérifiée pour tout élément $k \sqsubset x$ implique **P(x)***

alors

pour tout $a \in \mathcal{A}$ on a $P(a)$

Remarque 71. Pour prouver la conclusion $\forall a \in \mathcal{A}.P(a)$ (la propriété P est vraie sur tous les éléments de $\mathcal{A}$) il faut prouver :

- Chaque cas de base $P(m)$ où $m \in \mathcal{M}$, sans utiliser d'hypothèse supplémentaire,
- Le cas inductif $P(x)$, en utilisant les hypothèses d'induction (plusieurs) $\{P(k) \mid k \in \mathcal{A} \text{ et } k \sqsubset x\}$.

Revenons à la fonction définie au début du paragraphe.

Question 72. La fonction f est-elle bien définie ? Que calcule-t-elle ?

Réponse 73. On raisonne par induction sur N^2 muni de l'ordre lexicographique pour montrer que la fonction est bien définie et que on a $f(n,m) = \frac{n(n+1)}{2} + m$. Pour le prouver, on applique l'induction bien fondée à la propriété $\mathcal{P}(n,m) \equiv f(n,m) = \frac{n(n+1)}{2} + m$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Induction structurelle

Exemple 74. Le code suivant est-il correct ? Pourquoi ?

```
public class maListe {
    int tete;       maListe queue;
    maListe(int dbt, maListe fin){
        tete=dbt;           queue=fin;       }
    int longueur(){
        if(this.queue==null){
            return 1;         }
        else{return (1+queue.longueur());} }
    maListe concat(int dbt){
        return new maListe(dbt, this);}
}
```

Définition 75. On considère la définition inductive d'un ensemble $\mathcal{X}$ donnée par des règles de la forme, où f est un symbole syntaxique n-aire :

— Si $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{X}$ alors $f(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{X}$

On construit un ordre $\sqsubset$ (qui est strict et bien fondé) en associant à chaque règle f les couples $a_1 \sqsubset f(a_1, \ldots, a_n), \ldots, a_n \sqsubset f(a_1, \ldots, a_n)$.

Remarque 76. — **Les** cas de base correspondent aux éléments minimaux

— Les cas inductifs sont les constructeurs avec 1 ou plus d'arguments.

Exemple 77. — Les mots sur un alphabet, où $n \sqsubset a.n$ pour toute lettre a et tout mot n.

— Les arbres arbres binaires, où $A_i \sqsubset ab(A_1, A_2)$ $(i = 1,2)$ pour tous les arbres A_1 et A_2.

Proposition 78. *Un ensemble défini par induction structurelle muni de la relation sous-structure est un ensemble bien fondé.*

Théorème 79. *Principe d'induction structurelle. Soient donnés un ensemble $\mathcal{X}$ défini par induction structurelle et muni de l'ordre sous-structure et une propriété P sur $\mathcal{X}$.*

Si

1. *pour tout élément minimal* $m \in \mathcal{M}$ *on a* ***P(m)***
2. *pour chacun des constructeurs* $c : \mathcal{X}^k \to \mathcal{X}$*, le fait que* $\boldsymbol{P}(a_1), \ldots, \boldsymbol{P}(a_k)$ *soient vérifiées implique* $\boldsymbol{P}(c(a_1, \ldots, a_k))$

alors

pour tout $a \in \mathcal{A}$ *on a* $P(a)$

Exemple 80. On définit une fonction *concat* sur les mots comme suit :

$$\begin{array}{lcl} concat(\epsilon, k) & := & k \\ concat(a.l, k) & := & a.concat(l, k) \end{array}$$

Soit m un mot et soit P la propriété suivante :

$$P(m) \text{ ssi } concat(concat(m, v_1), v_2) = concat(m, concat(v_1, v_2))$$

Démontrer par induction la propriété P pour tout les mots.

Exemple 81. Soit a un arbre binaire et soit P la propriété suivante :

$$P(a) \text{ ssi } \#feuilles(a) = \#noeuds\_internes(a) + 1$$

Démontrer par induction la propriété P pour tout les arbres binaires.

Hiérarchie des récurrences :

Ordre bien fondé $\Longrightarrow$ récurrence forte $\Longrightarrow$ récurrence double $\Longrightarrow$ récurrence simple

1.5 Marches, chemins et connexité

Définition 82. Une marche sur un graphe $G = (V, E)$ est une liste de sommets

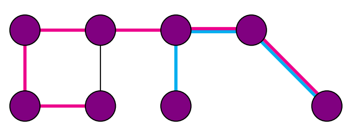
$$(v_0, v_1, \dots, v_t)$$

où $v_i \in V$ et deux sommets consécutifs de la listes sont voisins.
t est alors la longueur de la marche. Un chemin est une marche dont tous les sommets sont distincts.
Un cycle est une marche qui revient à son point de départ ($v_t = v_0$), et telle que $(v_0, v_1, \dots, v_{t-1})$ soit un chemin te $t > 2$.

Considérons un graphe $G = (V, E)$.

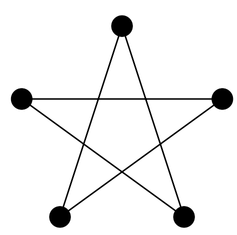
Définition 83. Un chemin maximal de G est un chemin $(v_0, \dots, v_n)$ qui ne peut pas être prolongé en un chemin $(v_0, \dots, v_n, v_{n+1})$, càd qu'il n'existe pas de sommet v_{n+1} tel que la marche $(v_0, \dots, v_n, v_{n+1})$ soit un chemin.
Un chemin de longueur maximale est un chemin $(v_0, \dots, v_n)$ tel qu'il n'existe aucun chemin $(v'_0, \dots, v'_n, v'_{n+1})$. Un chemin de longueur maximal est notamment un chemin maximal.

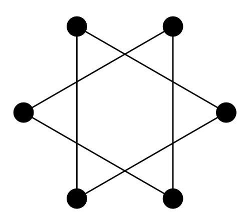
Surligner ci-dessous un chemin maximal et un chemin de longueur maximal :



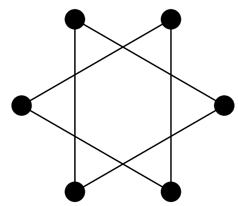
Définition 84. Un graphe est connexe si pour tous sommets $x, y \in V(G)$, il existe une marche de x à y. Dans ce cas, il existe aussi un chemin de x à y.

Exemples 85.





Définition 86. Une composante connexe d'un graphe est un sous-graphe connexe maximal.

Exemple 87. 

Définition 88. Un graphe est acyclique s'il n'existe aucun cycle dans le graphe

Proposition 89. *Un graphe G est acyclique si et seulement si pour tous sommets u et v de G, il existe au plus un chemin entre u et v.*

Proposition 90. *Tout graphe acyclique sur n sommets a au plus $n-1$ arêtes. Plus précisément, un graphe acyclique à k composantes connexes a $n-k$ arêtes pour tout $0 < k \leq n$.*

Question 91. Qu'est-ce qu'un graphe qui est à la fois acyclique et connexe ?

1.6 Arbres

Définition 92. Un arbre est un graphe connexe et acyclique (=sans cycle).

Théorème 93. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *G est un arbre*
2. *Entre tous sommets x et y, il existe un et un seul chemin*
3. *Le graphe est connexe et enlever une arête (n'importe laquelle) déconnecte le graphe (connexité minimale)*
4. *Le graphe est acyclique et ajouter n'importe quelle arête forme un cycle (acyclicité maximale)*
5. *G est connexe et $|E| = |V| - 1$*
6. *G est acyclique et $|E| = |V| - 1$*

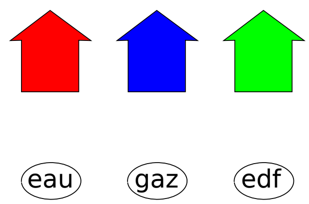
Définition 94. Une (feuille est un sommet de degré 1. Les autres sommets sont appelés nœuds.

Lemme 95. *Tout arbre, sur au moins deux sommets, possède au moins deux feuilles.*

Lemme 96. *Pour G un graphe et v une feuille de G, G est un arbre si et seulement si $G - \{v\}$ est un arbre.*

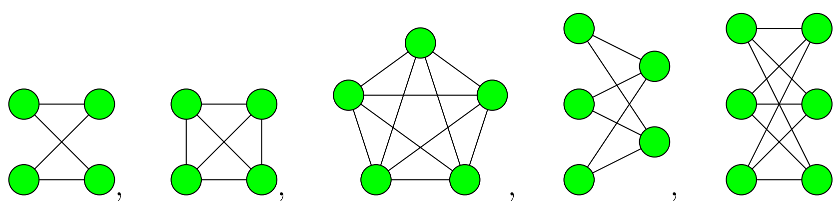
1.6.1 Graphes planaires

Question 97. Trois fournisseurs d'eau, gaz et électricité veulent relier trois maisons aux réseaux existants. Le sol étant peu profond, il faudrait que les canalisations tiennent dans un plan. Est-ce possible ?



Définition 98. Un graphe planaire est un graphe qui possède une représentation dans le plan dans laquelle deux arêtes ne se coupent jamais

Exemples 99. Les graphes suivants sont-ils planaires ?



Définition 100. Une face d'un graphe planaire est une zone du plan délimitée par des arêtes qui l'entourent et ne contenant pas elle-même d'arêtes. (On peut déterminer sa délimitation en imaginant un personnage qui suivrait les bords des arêtes jusqu'à revenir à son point de départ)

Théorème 101 (Formule d'Euler)**.** *Tout graphe planaire connexe vérifie :*

$$n - a + f = 2,$$

avec n le nombre de sommets,

a le nombre d'arêtes

et f le nombre de faces du graphe (dans une de ses représentations planaires).

Démonstration. Preuve par récurrence sur le nombre d'arêtes du graphe. **Initialisation :** Si $a = 0$, un seul graphe connexe est possible, le sommet isolé. $a = 0, n = 1, f = 1$ et on a bien $1 - 0 + 1 = 2$.

Hérédité Soit G un graphe connexe avec a arêtes.

Cas 1 : G a un cycle. Retirer une arête u, v d'un cycle de G. G' reste connexe car il existe un (autre) chemin de u à v dans G. Le cycle formait une face et chaque arête est adjacente à 2 faces donc G' a $f-1$ faces, $a-1$ arêtes, et n sommets. Par hypothèse de récurrence, $2 = n-(a-1)+(f-1) = n-a+f$.

Cas 2 : G n'a pas de cycle donc $f = 1$. Retirer une arête de G déconnecte G en 2 composantes connexes G' et G''. Appelons a' le nombre d'arêtes et n' le nombre de sommets de G', et de même pour a'' et n'' pour G''. On a que $n'+n'' = n$, et $a'+a'' = a-1$. G' et G'' ont une face car ils ne contiennent pas de cycle. En appliquant l'hypothèse d'induction à G' et G'' on obtient $n'-a'+1 = 2$ et $n''-a''+1 = 2$. Sommant les deux, $4 = (n'+n'')-(a'+a'')+2 = n-(a-1)+2$ donc $2 = n-a+f$ car $f = 1$. $\square$

❓ **Question 102.** Que donne cette formule appliquée aux exemples précédents ?

Proposition 103. *Dans un graphe connexe planaire, le nombre d'arêtes a et le nombre de sommets n vérifie :*

$$a \leq 3n-6$$

Si, de plus, le graphe est sans triangle, on a :

$$a \leq 2n-4$$

Théorème 104 (Théorème de Kuratowski)**.** *Un graphe fini est planaire ssi il ne contient aucun sous-graphe qui est une subdivision de K_5 ou $K_{3,3}$.*

Une subdivision d'un graphe est obtenue en insérant des sommets au milieu d'arêtes.