Algorithme de Bellman–Ford

Entrées : Graphe orienté $G = (V, E)$ avec pondération $w \in \mathbb{R}^+$, un sommet $s \in V$

Sorties : Distances de s aux autres sommets

$S \leftarrow \emptyset$

$D[s] \leftarrow 0$

pour tous les $x \neq s$ **faire**

  $D[x] \leftarrow +\infty$

  $\texttt{prev}[u] \leftarrow \emptyset$

repéter $|V| - 1$ **fois**

  pour tous les $e \in E$ **faire**

    $\texttt{maj}(e)$

retourner $D, \texttt{prev}$

Illustration de l'algorithme de Bellman–Ford

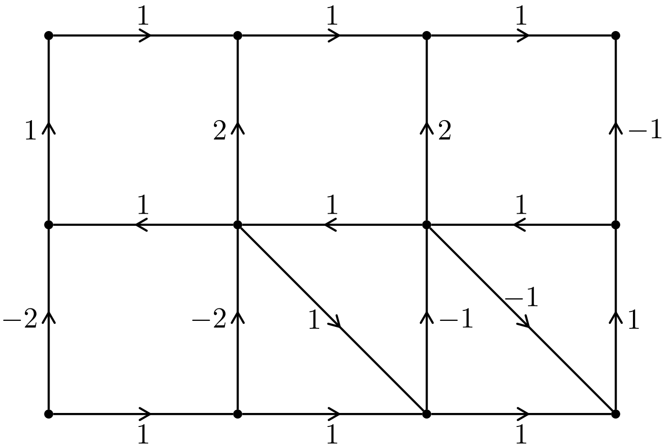


Illustration de l’algorithme de Bellman–Ford

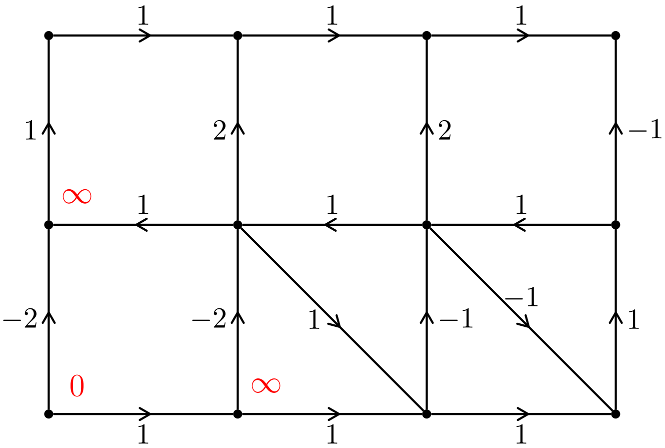


Illustration de l'algorithme de Bellman–Ford

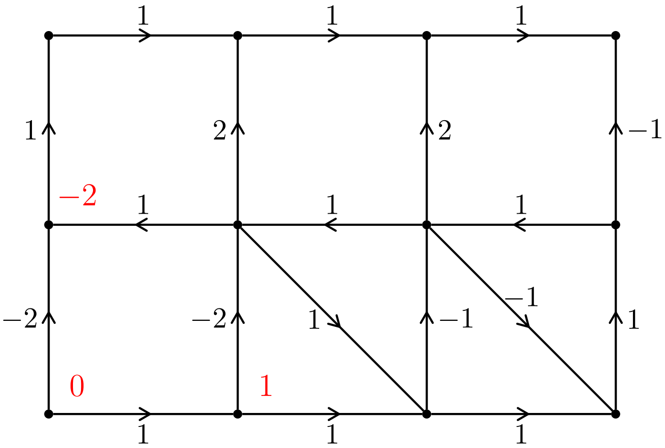


Illustration de l'algorithme de Bellman–Ford

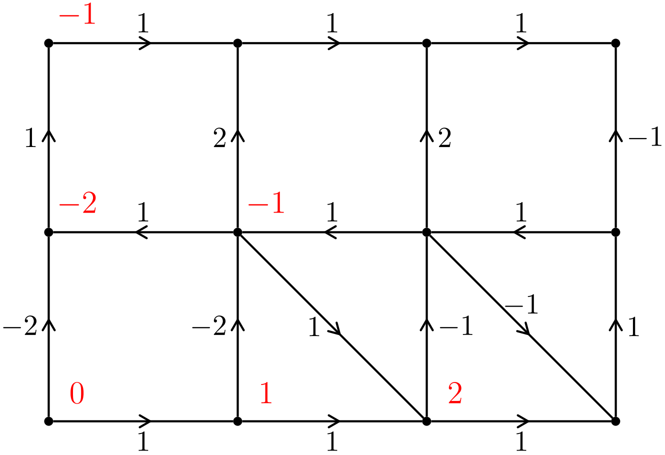


Illustration de l'algorithme de Bellman–Ford

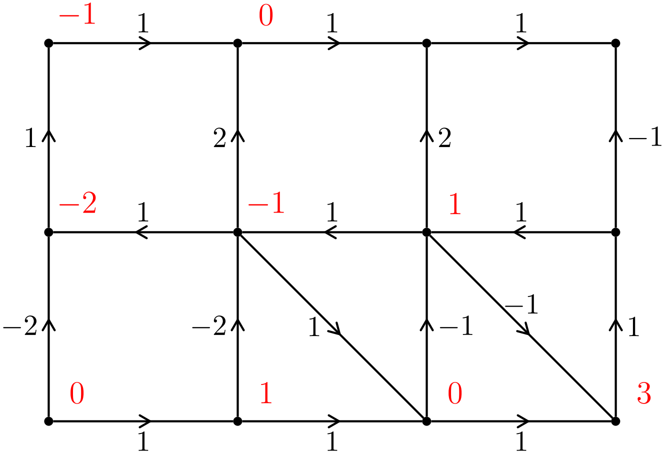


Illustration de l'algorithme de Bellman–Ford

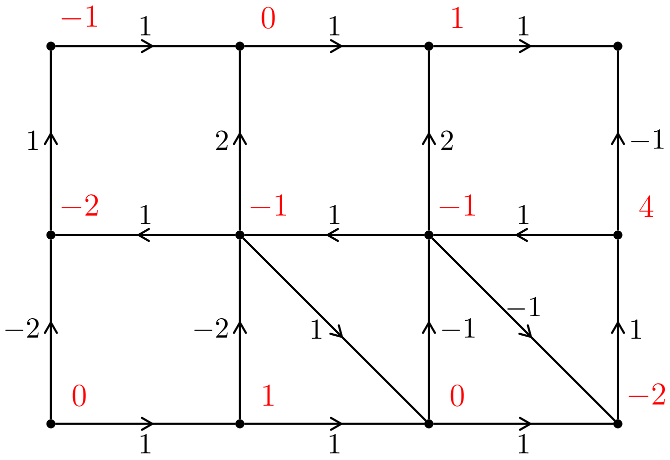


Illustration de l'algorithme de Bellman–Ford

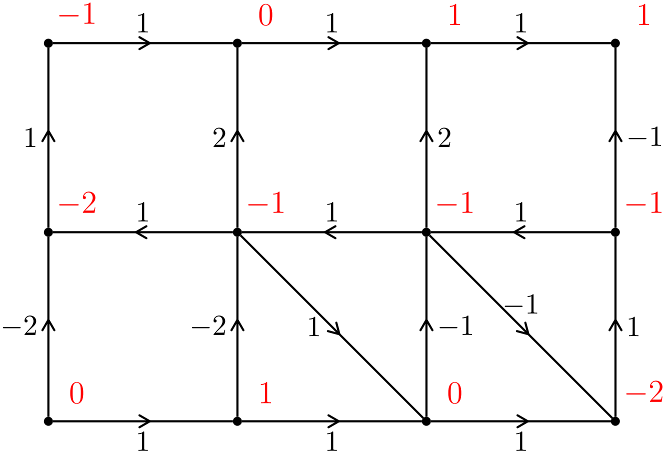
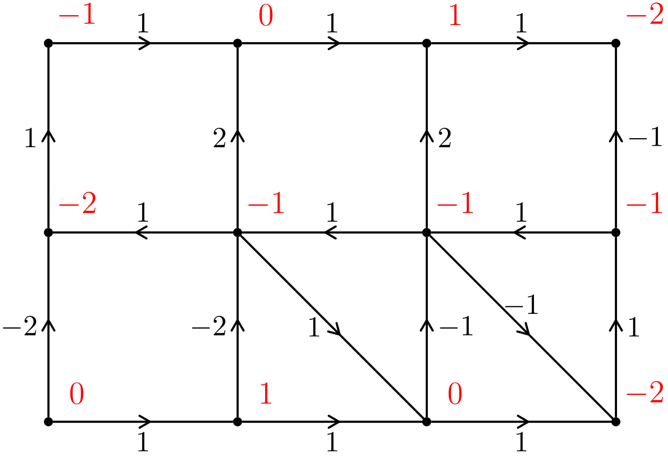


Illustration de l'algorithme de Bellman–Ford



Complexité et correction de l'algorithme de Bellman–Ford

- La complexité de Bellman–Ford est de $O(nm)$.
- Pour la correction de l'algorithme de Bellman–Ford, il suffit de prouver le lemme suivant.
- La démonstration peut se faire par récurrence.

Lemme

Après i itérations de la boucle principale :

- Si $D[u] \neq +\infty$, alors $D[u]$ est la longueur d'un chemin de s à u ;
- S'il existe un chemin de s à u comprenant au plus i arcs, alors la valeur de $D[u]$ est inférieure ou égale à la longueur d'un plus court chemin de s à u comprenant au plus i arcs.

Détection de cycles négatifs

- Une légère modification de l'algorithme de Bellman–Ford nous permet de détecter les cycles négatifs.
- Après avoir fait les $|V| - 1$ itérations de la boucle, faire une itération supplémentaire.
- Un cycle négatif existe dans G ssi il y a au moins un changement dans le tableau D lors de la dernière itération.
- Détecter les cycles négatifs a des applications importantes dans la vie réele.
- Une application classique est l'arbitrage de devises (voir le TD).

Deix classes naturelles de graphes orientés sans cycles négatifs

- Il y a deux classes naturelles de graphes orientés sans cycles négatifs :
  - les graphes sans arcs négatifs
  - les graphes sans cycles orientés.
- Dans les graphes sans arcs négatifs, on peut utiliser l'algorithme de Dijkstra.

Plus court chemin dans les graphes orientés acycliques (DAG)

- Il faut effectuer une séquence de mises à jour qui inclut chaque plus court chemin comme sous-séquence.
- Dans tout chemin d'un DAG, les sommets apparaissent dans un ordre topologique croissant.
- Par conséquent, il suffit de faire un tri topologique du DAG par une recherche en profondeur, et puis de parcourir les sommets dans l'ordre topologique, en mettant chaque fois à jour tous les arcs sortants du sommet.
- La complexité de cet algorithme est de $O(n + m)$.

Algorithme de plus court chemin dans les DAG

Entrées : Graphe orienté $G = (V, E)$ avec pondération $w \in \mathbb{R}^+$, un sommet $s \in V$

Sorties : Distances de s aux autres sommets

$S \leftarrow \emptyset$

$D[s] \leftarrow 0$

Tri topologique de G

pour tous les $u \in V$ *dans l'ordre topologique* **faire**

  pour tous les $(u, v) \in E$ **faire**

    `maj`(u, v)

retourner D

Illustration de l'algorithme de plus court chemin dans les DAG

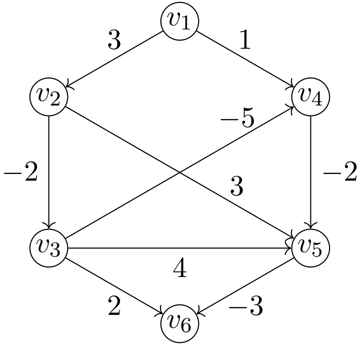


Illustration de l'algorithme de plus court chemin dans les DAG

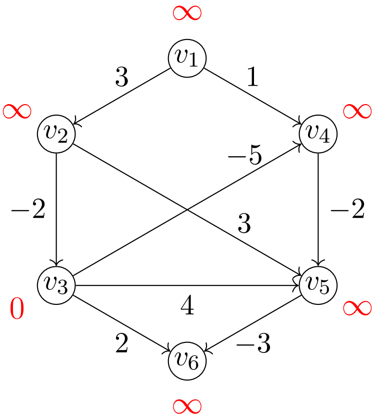


Illustration de l'algorithme de plus court chemin dans les DAG

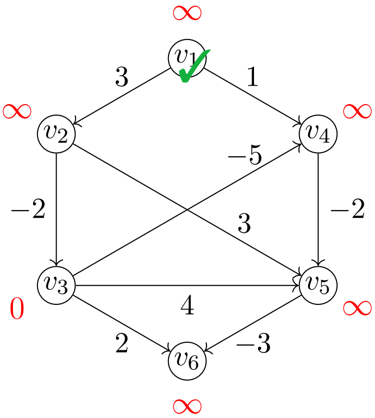


Illustration de l'algorithme de plus court chemin dans les DAG

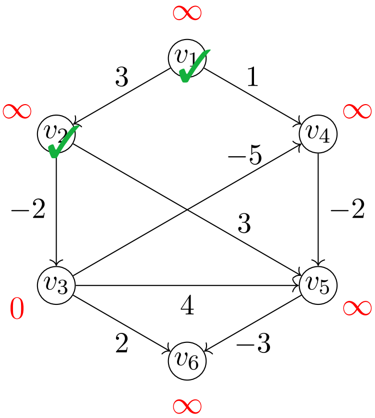


Illustration de l'algorithme de plus court chemin dans les DAG

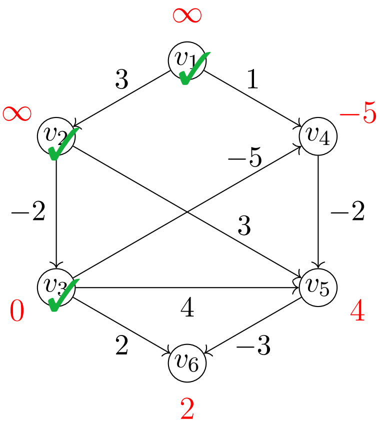


Illustration de l'algorithme de plus court chemin dans les DAG

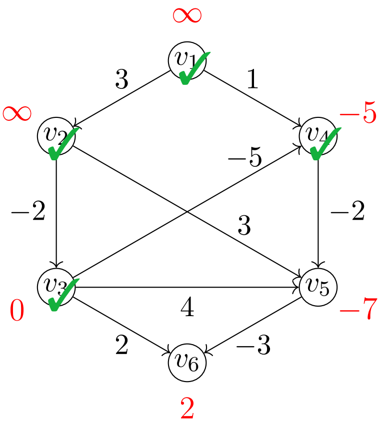


Illustration de l'algorithme de plus court chemin dans les DAG

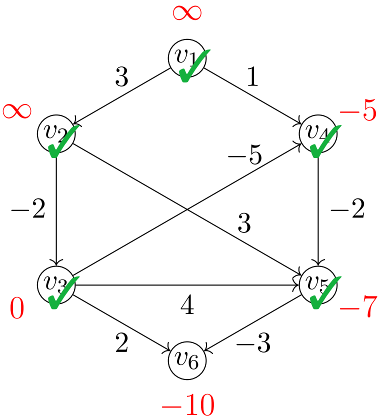
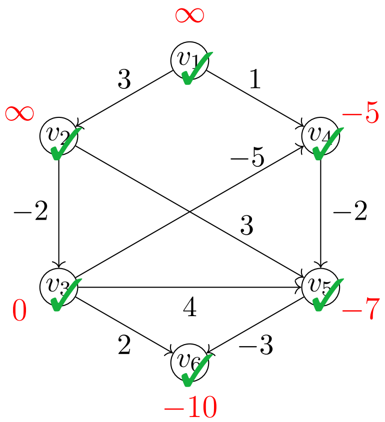


Illustration de l'algorithme de plus court chemin dans les DAG



Distances entre toutes les paires de sommets

- Dijkstra et Bellman–Ford trouvent la distance d'un sommet fixe (la source) aux autres sommets.
- Et si on veut trouver la distance entre *toutes les paires* de sommets ?
- Une approche naïve : exécuter Dijkstra ou Bellman–Ford n fois : une fois pour chaque sommet.
- La complexité de l'algorithme ainsi obtenu est de :
  - $O(nm + n^2 \log n)$ (cas avec poids non négatifs)
  - $O(n^2 m)$ (cas général)
- Si l'on ignore le terme logarithmique, le premier algorithme (poids non négatifs) a la même complexité que Bellman–Ford.
- Pour les graphes denses, complexité du deuxième algorithme est de $O(n^4)$.
- Peut-on faire mieux ?

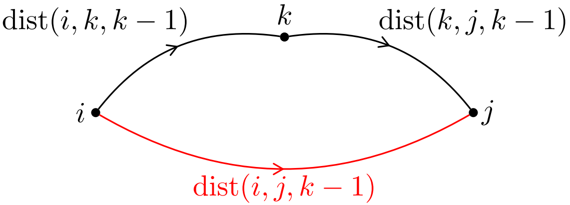
Sommets intermédiaires

- Le plus court chemin $(u, w_1, \ldots, w_\ell, v)$ de u à v utilise un certain nombre de sommets "intermédiaires".
- Supposons que nous n'autorisions aucun sommet intermédiaire.
- Nous pouvons alors trouver les plus courts chemins entre toutes les paires en un seul coup : le plus court chemin de u à v est simplement l'arc (u, v), si il existe.
- On élargit progressivement (d'un sommet à chaque étape) l'ensemble des sommets intermédiaires autorisés, en mettant à jour les longueurs des plus courts chemins à chaque étape.

Distances partielles

- Soit $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ l'ensemble des sommets.
- Soit $\mathrm{dist}(i, j, k)$ la longueur minimum d'un chemin de i à j dont tous les sommets intermédiaires sont dans $\{1, 2, \ldots, k\}$.
- En particulier,
$$\mathrm{dist}(i, j, 0) = \begin{cases} \ell(i, j) & \textbf{si } (i, j) \in E \\ 0 & \textbf{si } (i, j) \notin E. \end{cases}$$
- Un plus court chemin de i à j qui emprunte k (et éventuellement d'autres sommets intermédiaires qui précédent k) passe par k une seule fois.

Mise à jour des distances partielles



- On a déjà calculé la longueur d'un plus court chemin passant uniquement par les sommets intermédiaires dans $\{1,\ldots,k\}$.
- Passer par k donne un chemin plus court de i à j ssi

$$\mathrm{dist}(i,k,k-1)+\mathrm{dist}(k,j,k-1)<\mathrm{dist}(i,j,k-1).$$

Algorithme de Floyd–Warshall

Entrées : Graphe orienté $G = (V, E)$ avec pondération $\ell \in \mathbb{R}^{|E|}$

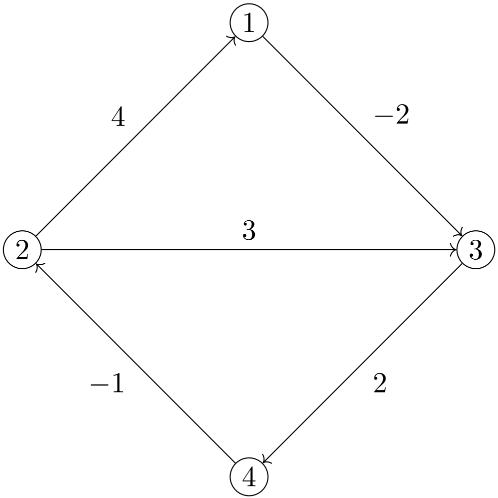
Sorties : Distances entre chaque paire de sommets

pour tous les $i \in \{1, \dots, n\}$ **faire**
- **pour tous les** $j \in \{1, \dots, n\}$ **faire**
  - $\text{dist}(i, j, 0) \leftarrow \infty$

pour tous les $(i, j) \in E$ **faire**
- $\text{dist}(i, j, 0) \leftarrow \ell(i, j)$

pour tous les $k \in \{1, \dots, n\}$ **faire**
- **pour tous les** $i \in \{1, \dots, n\}$ **faire**
  - **pour tous les** $j \in \{1, \dots, n\}$ **faire**
    - $\text{dist}(i, j, k) = \min\{\text{dist}(i, k, k-1) + \text{dist}(k, j, k-1), \text{dist}(i, j, k-1)\}$

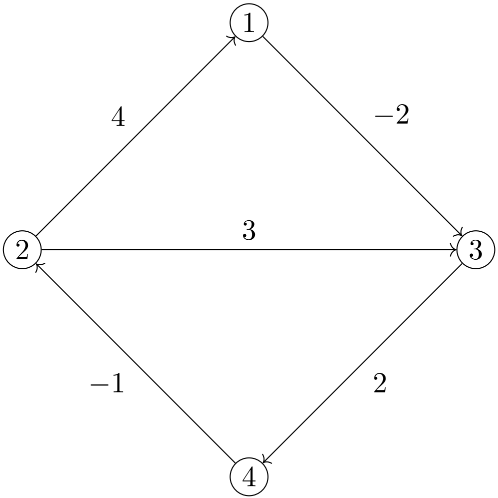
Illustration de l'algorithme de Floyd–Warshall



	1	2	3	4
1	0	∞	-2	∞
2	4	0	3	∞
3	∞	∞	0	2
4	∞	-1	∞	0

$\mathrm{dist}(\cdot, \cdot, 0)$

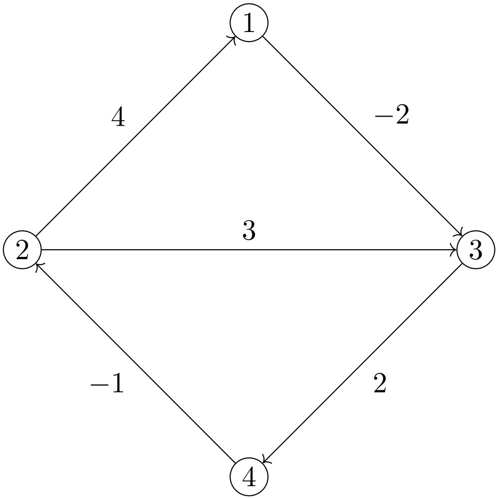
Illustration de l’algorithme de Floyd–Warshall



	1	2	3	4
1	0	∞	-2	∞
2	4	0	2	∞
3	∞	∞	0	2
4	∞	-1	∞	0

$\mathrm{dist}(\cdot, \cdot, 1)$

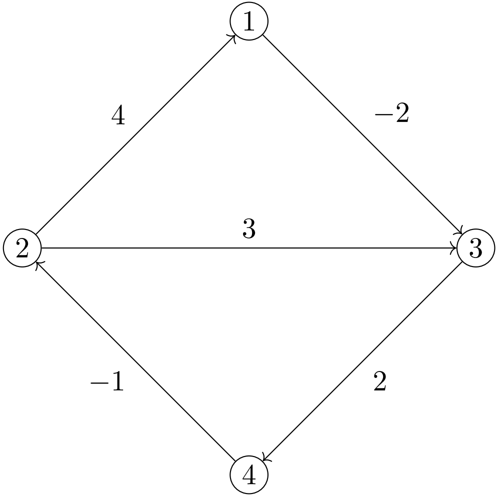
Illustration de l'algorithme de Floyd–Warshall



	1	2	3	4
1	0	∞	-2	∞
2	4	0	2	∞
3	∞	∞	0	2
4	3	-1	1	0

$\mathrm{dist}(\cdot,\cdot,2)$

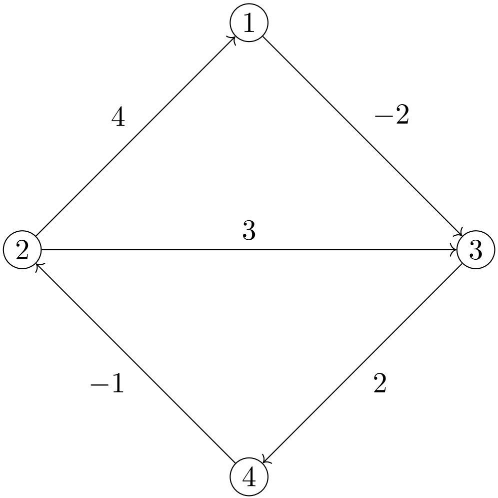
Illustration de l'algorithme de Floyd–Warshall



	1	2	3	4
1	0	∞	-2	0
2	4	0	2	4
3	∞	∞	0	2
4	3	-1	1	0

$\mathrm{dist}(\cdot, \cdot, 3)$

Illustration de l'algorithme de Floyd–Warshall



	1	2	3	4
1	0	−1	−2	0
2	4	0	2	4
3	5	1	0	2
4	3	−1	1	0

$\mathrm{dist}(\cdot, \cdot, 4)$

Remarques sur l'algorithme de Floyd–Warshall

- La complexité est de $O(n^3)$.
- Pour les graphes denses, cela représente une amélioration d'un facteur de n.
- On verra un autre algorithme mieux adapté aux graphes peu denses.
- L'algorithme de Floyd–Warshall peut être utilisé pour détecter les cycles négatifs.
- Il y a un nombre négatif sur la diagonale de la matrice de distances ssi le graphe contient au moins un cycle négatif.

Peut-on faire mieux que $O(n^3)$ dans le cas des graphes peu denses ?

- Idée naïve : repondérer le graphe de sorte que les poids deviennent non-négatifs, et les plus courts chemins soient préservés.
- Ensuite, exécuter Dijkstra n fois (une fois par sommet) ; complexité $O(nm + n^2 \log n)$.
- On ne peut pas simplement ajouter une constante à tous les arcs (pourquoi ?)
- Cependant, il existe une façon de le faire, de complexité $O(nm)$

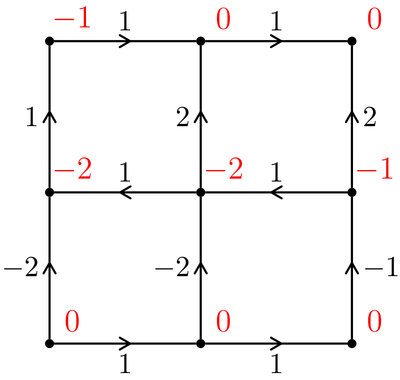
Repondération préservant les plus courts chemins

- Soit $G = (V, E)$ un graphe avec pondération $\ell \in \mathbb{R}^m$.
- Soit $h \in \mathbb{R}^n$ un vecteur associant à chaque sommet un nombre réel.
- On définit une nouvelle pondération $\ell' \in \mathbb{R}^m$ de G par $\ell'_{(u,v)} = \ell_{(u,v)} + h_u - h_v$.

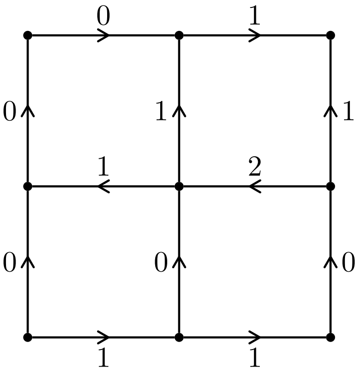
Lemme

P est un plus court chemin de u à v dans G par rapport à ℓ ssi P est un plus court chemin de u à v dans G par rapport à ℓ'.

Exemple



ℓ, h



ℓ'

Preuve du lemme (1/2)

- Soit P un chemin quelconque dans G.

$$
\begin{aligned}
\ell'(P) &= \sum_{i=1}^{k} \ell_{(v_{i-1},v_i)} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left(\ell_{(v_{i-1},v_i)} + h_{v_{i-1}} - h_{v_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \ell_{(v_{i-1},v_i)} + h_{v_0} - h_{v_k} \\
&= \ell(P) + h_{v_0} - h_{v_k}
\end{aligned}
$$

- Donc, *tout* chemin P de u à v (pas seulement le plus court chemin) vérifie $\ell'(P) = \ell(P) + h_u - h_v$.

Preuve du lemme (2/2)

- En particulier, si P est un chemin de u à v, alors $\ell(P) = \mathrm{dist}_\ell(u, v)$ ssi $\ell'(P) = \mathrm{dist}_{\ell'}(u, v)$.
- La longueur de cycles ne change pas si l'on passe de la pondération ℓ à ℓ' (car on a $v_0 = v_k$ dans l'équation de la diapo précédente).
- En particulier, il n'y a pas de cycle négatif par rapport à ℓ ssi il n'y a pas de cycle négatif par rapport à ℓ'.

Comment trouver la repondération ?

- Il suffit de prouver l'existence d'une pondération $\ell' \in \mathbb{R}^m$ t.q. $\ell \geq 0$.
- Soit G' le graphe construit à partir de G en ajoutant un nouveau sommet s et les arcs $\{(s,v) : v \in V\}$.
- On étend la pondération ℓ à une pondération de G' en posant $\ell_{(s,v)} = 0$ pour tout $v \in V$.
- G' ne contient aucun cycle négatif ssi G ne contient aucun cycle de poids négatif.
- Supposons que G et G' ne contiennent aucun cycle négatif.
- On définit $h_v = \mathrm{dist}(s,v)$ pour tout sommet $v \in V(G')$.
- On a $h_v \leq h_u + \ell_{(u,v)}$ pour tout arc $(u,v) \in E(G')$.
- Donc, $\ell'_{(u,v)} = \ell_{(u,v)} + h_u - h_v \geq 0$.

Algorithme de Johnson

1. Calculer G'.
2. Appliquer Bellman–Ford à G', avec source s, pour calculer $h_v := \mathrm{dist}(s, v)$ pour tout $v \in V(G)$ (ou trouver un cycle négatif)
3. Repondérer chaque arc $(u, v) \in E(G)$ par $\ell'_{(u,v)} = \ell_{(u,v)} + h(u) - h(v)$.
4. Pour chaque $u \in V(G)$, exécuter Dijkstra pour calculer $\mathrm{dist}_{\ell'}(u, v)$ pour tout $v \in V(G)$.
5. Pour chaque couple u, v, on a $\mathrm{dist}_{\ell}(u, v) = \mathrm{dist}_{\ell'}(u, v) + h(v) - h(u)$.

Complexité de l'algorithme de Johnson

- L'étape 1 : $O(n)$
- L'étape 2 : $O(nm)$
- L'étape 3 : $O(m)$
- L'étape 4 : $O(nm + n^2 \log n)$
- L'étape 5 : $O(n^2)$
- Donc, l'algorithme de Johnson est de complexité $O(nm + n^2 \log n)$.
- Pour des graphes *peu denses*, l'algorithme de Johnson est donc plus rapide que l'algorithme de Floyd–Warshall.