Terminaison de l'algorithme de Ford–Fulkerson

- Si toutes les capacités sont entières, alors tous les flots intermédiaires sont entiers (récurrence).
- En particulier, $\varepsilon \geq 1$ à chaque étape.
- Donc, l'algorithme termine au bout de $C = \sum_{e \in E} c(e)$ itérations de la boucle `while`.
- L'algorithme termine aussi quand les capacités sont rationnelles (il suffit de les multiplier par le plut petit commun multiple).
- En général, pour les capacités réelles, il y a des cas où l'algorithme ne termine jamais...

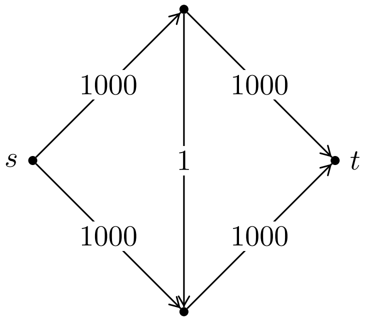
Complexité de l'algorithme de Ford–Fulkerson (capacités entières)

Théorème

Si toutes les capacités sont entières, la complexité de l'algorithme de Ford–Fulkerson est de $O(mC)$, où $C = \sum_{e \in E} c(e)$.

- Nous avons déjà remarqué qu'il y a $O(C)$ itération de la boucle `while`.
- Dans chacune des itérations :
  - On peut trouver un chemin augmentant en temps $O(m+n)$ (avec DFS ou BFS).
  - En supposant que chaque sommet de G est incident à au moins un arc, on a $m \geq n/2$; par conséquent $O(m+n) = O(m)$.
  - La procédure `augment` est de complexité $O(n)$, la longueur du chemin P étant au plus $n-1$.
  - Mettre à jour G_f est de complexité $O(m)$.

Bien choisir les chemins augmentants



- Si l'algorithme de Ford–Fulkerson choisit toujours le chemin augmentant avec 3 arcs, alors l'algorithme termine au bout de 1000 itérations.
- Par contre, si l'on choisit les chemins augmentants de longueur 2, alors l'algorithme se termine au bout de 2 itérations seulement !

Une amélioration : l'algorithme de Edmonds–Karp

- Si l'on utilise un BFS pour trouver un chemin augmentant avec le nombre minimum d'arcs, on peut prouver que l'algorithme termine toujours (même pour les capacités irrationnelles).
- Cette version est appelée l'algorithme de Edmonds–Karp, et on peut prouver que sa complexité est de $O(nm^2)$.

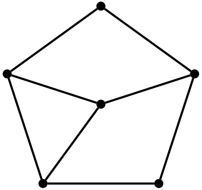
Couplages

Définition

- Un *couplage* dans un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $M \subseteq E$ tel que $e \cap f = \varnothing$ pour toutes les arêtes $e, f \in M$.
- La taille maximum d'un couplage dans G est notée $\nu(G)$.

Application

Affectation de tâches.



couplage M

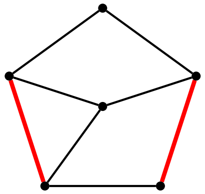
Couplages

Définition

- Un *couplage* dans un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $M \subseteq E$ tel que $e \cap f = \varnothing$ pour toutes les arêtes $e, f \in M$.
- La taille maximum d'un couplage dans G est notée $\nu(G)$.

Application

Affectation de tâches.



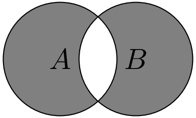
couplage M

La différence symétrique

Définition

La différence symétrique de A et B, notée $A \triangle B$, consiste des éléments dans A ou dans B, mais pas dans les deux.

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B).$$



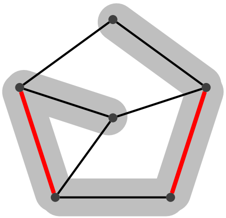
Chaînes alternées et augmentantes

Définition

- *Chaîne M-alternée* une chaîne dont les arêtes alternent entre celles de M et celles de $E \setminus M$.
- *Chaîne M-augmentante* : chaîne M-alternée entre deux sommets non couplés.

Observation

Soit M un couplage dans un graphe et P une chaîne M-augmentante. Alors, $M \triangle P$ est un couplage de taille $|M| + 1$.



couplage M

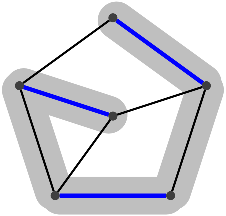
Chaînes alternées et augmentantes

Définition

- *Chaîne M-alternée* une chaîne dont les arêtes alternent entre celles de M et celles de $E \setminus M$.
- *Chaîne M-augmentante* : chaîne M-alternée entre deux sommets non couplés.

Observation

Soit M un couplage dans un graphe et P une chaîne M-augmentante. Alors, $M \triangle P$ est un couplage de taille $|M| + 1$.



couplage $M \triangle P$

Une caractérisation des couplages maximaux

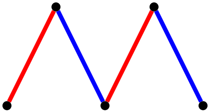
Théorème de Berge

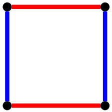
Un couplage M dans un graphe G est maximum ssi il n'y a pas de chaîne M-augmentante dans G.

Démonstration

- S'il existe une chaîne M-augmentante, alors M n'est pas maximum.
- Supposons qu'il n'y a pas de chaîne M-augmentante.
- Soit M' un couplage maximum quelconque dans G.
- Les composantes connexes de $M \triangle M'$ consistent de cycles alternés (de longueur paire) et de chaînes alternées.

Une caractérisation des couplages maximaux





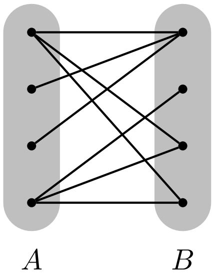
Démonstration (suite)

- Aucune chaîne alternée n'est M-augmentante par l'hypothèse.
- Donc toute composante connexe consistant d'une chaîne alternée est de longueur paire.
- On conclut que $|M| = |M'|$.

Couplages dans les graphes bipartis

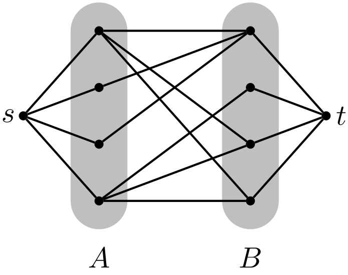
- Le théorème de Berge fournit un algorithme pour trouver un couplage maximum :
  - commencer par un couplage de taille 1
  - s'il existe une chaîne augmentante, augmenter le couplage
  - répéter jusqu'à ce qu'il n'y a aucune chaîne augmentante.
- Chercher les chaîne augmentantes prend beaucoup de temps. . .
- Heureusement, il y a des algorithmes plus efficaces !
- Nous verrons que l'on peut utiliser l'algorithme de Ford–Fulkerson pour trouver un couplage maximum dans les graphes *bipartis*.

Graphes bipartis



- Un graphe $G = (V, E)$ est *biparti* s'il existe une partition $V = A \cup B$ telle que toutes les arêtes ont une extrémité dans A et l'autre dans B.
- On peut montrer qu'un graphe est biparti ssi il ne contient aucun cycle impair.

Des couplages aux flots



- Ajouter deux nouveaux sommets s et t
- Ajouter une arête entre s et chaque sommet de A
- Ajouter une arête entre t et chaque sommet de B
- Orienter toutes les arêtes de gauche à droite
- Donner une capacité de 1 à chaque arc.

Observation

Un flot entier f dans le réseau correspond à un couplage M dans le graphe original, où $\mathrm{val}(f) = |M|$.

Algorithme pour les couplages maximaux dans les graphes bipartis

- Il suffit d'appliquer l'algorithme de Ford–Fulkerson au réseau construit !
- Comme toutes les capacités sont entières, l'algorithme est garantie de terminer.
- De plus, la valeur d'un flot maximum est de $O(n)$ car $\mathrm{cap}(\{s\}, A \cup B \cup \{t\}) \leq n$.
- Donc, l'algorithme termine au bout de $O(n)$ itérations de la boucle `while`.
- Nous avons donc un algorithme de couplage maximum dans les graphes bipartis de complexité $O(mn)$.
- Cette complexité peut être amélioré à $O(m\sqrt{n})$ (algorithme de Hopcroft–Karp).

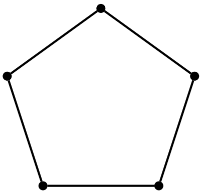
Couplages et transversaux

Définition

- Un *transversal* dans un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble $T \subseteq V$ tel que $T \cap e \neq \varnothing$ pour toute arête $e \in E$.
- La taille minimum d'un transversal dans G est notée $\tau(G)$.

Remarque

- Toute arête dans un couplage doit être intersecté par un sommet différent dans un transversal, donc $\tau(G) \geq \nu(G)$.



couplage M

transversal T

$\nu(G) = 2 < 3 = \tau(G)$

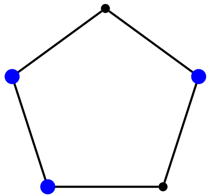
Couplages et transversaux

Définition

- Un *transversal* dans un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble $T \subseteq V$ tel que $T \cap e \neq \varnothing$ pour toute arête $e \in E$.
- La taille minimum d'un transversal dans G est notée $\tau(G)$.

Remarque

- Toute arête dans un couplage doit être intersecté par un sommet différent dans un transversal, donc $\tau(G) \geq \nu(G)$.



couplage M

transversal T

$\nu(G) = 2 < 3 = \tau(G)$

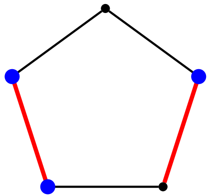
Couplages et transversaux

Définition

- Un *transversal* dans un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble $T \subseteq V$ tel que $T \cap e \neq \varnothing$ pour toute arête $e \in E$.
- La taille minimum d'un transversal dans G est notée $\tau(G)$.

Remarque

- Toute arête dans un couplage doit être intersecté par un sommet différent dans un transversal, donc $\tau(G) \geq \nu(G)$.



couplage M

transversal T

$\nu(G) = 2 < 3 = \tau(G)$

Le théorème de Kőnig

Théorème de Kőnig

Si G est biparti, alors $\tau(G) = \nu(G)$.

- Imaginons qu'il faut convaincre quelqu'un qu'un graphe G n'a pas de couplage de taille k.
- Un transversal de taille $k - 1$ est un *certificat* de la non existence d'un couplage de taille k (grâce à l'inégalité $\nu(G) \leq \tau(G)$)
- Malheureusement, ce type de certificat peut ne pas exister (par exemple, considérez le 5-cycle avec $k = 3$).
- Le théorème de Kőnig garantit l'existence d'un tel certificat *dans les graphes bipartis*.

Démonstration du théorème de Kőnig (1/2)

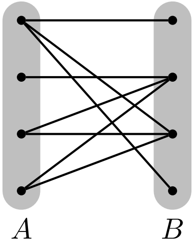
- Soit M un couplage (maximum) de $G = (V, E)$ de taille $\nu(G)$.
- Ajouter une source s et un puits t, et orienter les arcs de s vers t comme avant.
- Les capacités de tous les arcs incidents à s et t sont 1.
- Par contre, les capacités des autres arcs sont ∞.
- La capacité d'une s–t coupe minimale est finie, car $\mathrm{cap}(\{s\}, V \cup \{t\})$ est fini.
- Soit (S, T) une s–t coupe minimum dans G'.
- Aucun arc de A à B ne traverse la coupe (S, T) (sinon la capacité serait infinie).

Démonstration du théorème de Kőnig (2/2)

- Donc, $(A \setminus S) \cup (B \setminus T)$ est un transversal de G.
- Les arcs traversant la coupe (S, T) sont précisément les arcs de s à $A \cap T$ et les arcs de $B \cap S$ à t.
- Donc, $\mathrm{cap}(S, T) = |A \cap T| + |B \cap S| = |A \setminus S| + |B \setminus T|$.
- Donc, $(A \setminus S) \cup (B \setminus T)$ est un transversal de G de taille $\mathrm{cap}(S, T)$.
- On sait que $\mathrm{cap}(S, T) = |M|$ grâce au théorème de flot max – coupe min.

Théorème de Hall

- Si $G = (A, B)$ est un graphe biparti tel que G admet un couplage qui couvre tous les sommets de A, alors forcément $|N(X)| \geq |X|$ pour tous $X \subseteq V(G)$.
- Hall a montré que cette condition nécessaire triviale est aussi suffisante.
- Son théorème est l'un des résultats le plus importants de la théorie des couplages.

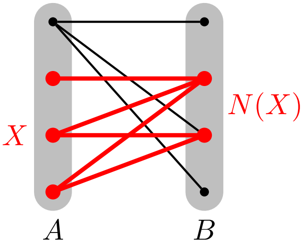


Théorème de Hall

Soit $G = (A, B)$ un graphe biparti. Alors G a un couplage couvrant tous les sommets de A ssi $|N(X)| \geq |X|$ pour tous $X \subseteq A$.

Théorème de Hall

- Si $G = (A, B)$ est un graphe biparti tel que G admet un couplage qui couvre tous les sommets de A, alors forcément $|N(X)| \geq |X|$ pour tous $X \subseteq V(G)$.
- Hall a montré que cette condition nécessaire triviale est aussi suffisante.
- Son théorème est l'un des résultats le plus importants de la théorie des couplages.



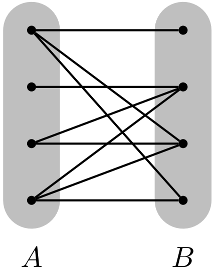
Théorème de Hall

Soit $G = (A, B)$ un graphe biparti. Alors G a un couplage couvrant tous les sommets de A ssi $|N(X)| \geq |X|$ pour tous $X \subseteq A$.

Démonstration du théorème de Hall (1/2)

Démonstration

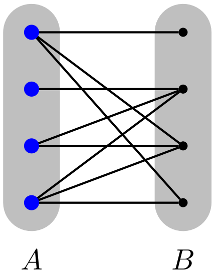
- La nécessité est évidente.
- Inversement, supposons que $|N(X)| \geq |X|$ pour tout $X \subseteq A$.
- Soit T un transversal minimal de G, càd, $|T| = \tau(G)$.
- On a $|T| \leq |A|$.



Démonstration du théorème de Hall (1/2)

Démonstration

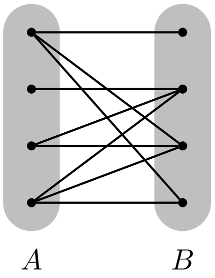
- La nécessité est évidente.
- Inversement, supposons que $|N(X)| \geq |X|$ pour tout $X \subseteq A$.
- Soit T un transversal minimal de G, càd, $|T| = \tau(G)$.
- On a $|T| \leq |A|$.



Démonstration du théorème de Hall (2/2)

Démonstration (suite)

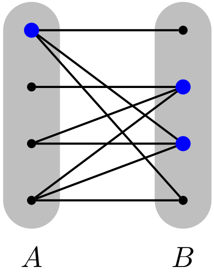
- Supposons par l'absurde que $|T| < |A|$.
- Comme $|T| = |T \cap A| + |T \cap B|$, on a $|A| - |A \cap T| > |B \cap T|$.
- Donc $|N(A \setminus T)| \geq |A \setminus T| = |A| - |A \cap T| > |B \cap T|$.
- Donc il existe une arête avec une extrémité dans $A \setminus T$ et l'autre dans $B \setminus T$, contradiction avec l'hypothèse que T est un transversal.



Démonstration du théorème de Hall (2/2)

Démonstration (suite)

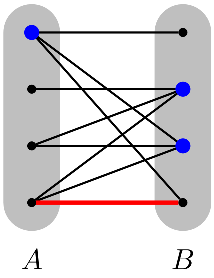
- Supposons par l'absurde que $|T| < |A|$.
- Comme $|T| = |T \cap A| + |T \cap B|$, on a $|A| - |A \cap T| > |B \cap T|$.
- Donc $|N(A \setminus T)| \geq |A \setminus T| = |A| - |A \cap T| > |B \cap T|$.
- Donc il existe une arête avec une extrémité dans $A \setminus T$ et l'autre dans $B \setminus T$, contradiction avec l'hypothèse que T est un transversal.



Démonstration du théorème de Hall (2/2)

Démonstration (suite)

- Supposons par l'absurde que $|T| < |A|$.
- Comme $|T| = |T \cap A| + |T \cap B|$, on a $|A| - |A \cap T| > |B \cap T|$.
- Donc $|N(A \setminus T)| \geq |A \setminus T| = |A| - |A \cap T| > |B \cap T|$.
- Donc il existe une arête avec une extrémité dans $A \setminus T$ et l'autre dans $B \setminus T$, contradiction avec l'hypothèse que T est un transversal.

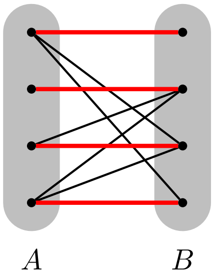


Conséquences du théorème de Hall

- Un couplage dans un graphe G est *parfait* si tous les sommets de G sont couverts.

Le lemme des mariages

Soit $G = (A, B)$ un graphe biparti. Alors G a un couplage parfait ssi $|A| = |B|$ et $|N(X)| \geq |X|$ pour tout $X \subseteq A$.



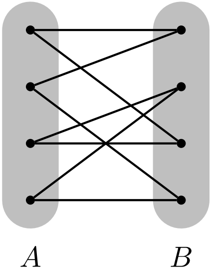
Couplages dans les graphes bipartis réguliers (1/2)

Corollaire

Soit $G = (A, B)$ un graphe biparti k-régulier (tous les sommets sont de degré k), pour un entier $k \geq 1$. Alors G a un couplage parfait.

Démonstration

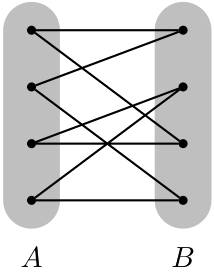
- Comme $k|A| = \delta(A) = \delta(B) = k|B|$, on a $|A| = |B|$.
- Soit $X \subseteq A$.
- Grâce à la régularité de G, $|\delta(X)| = kX$.



Couplages dans les graphes bipartis réguliers (2/2)

Démonstration (suite)

- Comme $\delta(X) \subseteq \delta(N(X))$, on obtient $k(X) = |\delta(X)| \leq |\delta(N(X))| = k|N(X)|$.
- Donc, G a un couplage parfit par le lemme des mariages.



Une application aux cartes

Exercise

On distribue un jeu de 52 cartes en faisant treize paquets de quatre cartes chacun. Il est possible de prendre une carte de chaque paquet de telle façon qu'on termine avec treize cartes contenant toutes les valeurs (un as, un 2, et ainsi de suite jusqu'à un roi).