



Université de Paris

Mathématiques discrètes

Projet : Paradoxe des deux enveloppes

Consignes Le but du projet est de présenter une application dans laquelle les mathématiques discrètes jouent un rôle fondamental.

Le rendu final du projet consistera en un article destiné au grand public au format pdf de 800-1000 mots plus une annexe numérique, qui pourra contenir par exemple une démonstration interactive, une vidéo explicative et/ou des graphiques générés par code écrit par vous-même ; cette annexe sera rendue sous la forme d'un lien vers un dépôt en ligne. La forme exacte et la technologie utilisée pour l'annexe peut varier et est donc laissée au libre choix des étudiants. L'article et son annexe seront jugés non seulement sur le contenu mais aussi sur la clarté de la présentation, la qualité de rédaction, et la créativité.

Contenu Le sujet détaille quelques points à développer mais ceux-ci sont proposés comme point de départ de votre travail. Vous êtes encouragés à développer d'autres pistes en lien avec les mathématiques discrètes. De même, la bibliographie conseillée est un point de départ. Vous pouvez vous appuyer sur d'autres sources sur lesquelles vous porterez un œil critique et que vous prendrez soin de citer correctement.

Charte de bonne conduite Lisez attentivement la charte de bonne conduite. Portez une attention particulière à citer toutes vos sources, y compris les exemples et les images que vous utiliserez. L'équipe pédagogique sera très attentive à cet aspect lors de la correction.

Calendrier Consultez la page Moodle du cours pour les dates des principales étapes du projet.

Bref descriptif du sujet

Deux enveloppes contiennent chacune une somme d'argent. Le montant de l'une est le double de l'autre. Un animateur demande à un candidat de choisir une enveloppe, sans l'ouvrir, puis il lui propose :

- soit de confirmer son choix, et gagner dans ce cas l'argent contenu dans l'enveloppe choisie,
- soit de changer d'avis, et gagner dans ce cas l'argent contenu dans l'autre enveloppe.

Voici un argument en faveur du changement d'avis :

Soit x la somme d'argent contenue dans l'enveloppe choisie. L'autre enveloppe contient soit $2x$, avec probabilité $\frac{1}{2}$, soit $\frac{x}{2}$, avec probabilité $\frac{1}{2}$.

Si le candidat confirme son choix, il gagne x . S'il change d'avis, son espérance de gain est

$$\frac{1}{2}2x + \frac{1}{2}\frac{x}{2} = \frac{5}{4}x$$

Donc le candidat doit changer pour maximiser son espérance de gain, ce qui est absurde puisque les deux enveloppes jouent le même rôle, et que le candidat, n'ayant pas encore ouvert la première, n'a aucun moyen de les distinguer.

Bibliographie conseillée

- https://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_des_deux_enveloppes
et les “Liens externes” cités dans cette page.

Pistes de développement

1. Montrer que l'espérance de gain est identique pour les deux stratégies (changer/ne pas changer), en utilisant les outils du cours (espace probabilisé, variables aléatoires, espérance).
2. Expliquer pourquoi l'argument donné dans le descriptif du sujet est fallacieux.
3. Est-ce que le fait d'ouvrir l'enveloppe choisie change quelque chose au problème ?