Devoir Maison 1

Devoir maison à rendre sur la page moodle du cours pour le 12 novembre 2021. Le barème sur 15 points donné dans la marge est indicatif.

Exercice 1. Algorithme DPLL

Considérons la formule propositionnelle φ_1 ci-dessous.

$$\varphi_1 \stackrel{\text{def}}{=} \big((P \vee Q) \Leftrightarrow R\big) \wedge \Bigg((\neg S) \Rightarrow \Big(\big((P \wedge Q) \Rightarrow R\big) \wedge (Q \Rightarrow P)\Big)\Bigg) \wedge \neg S\,.$$

[2] (a) Mettre φ_1 sous forme normale négative : calculer $\text{nnf}(\varphi_1)$.

[1] (b) Mettre $\text{nnf}(\varphi_1)$ sous forme clausale.

[2] (c) Appliquer l'algorithme DPLL à la formule obtenue en (b). Plus précisément, dessiner un arbre de recherche DPLL comme vu en cours (c.f. figures 15 à 18 des notes de cours).

[0,5] (d) Dire si la formule φ_1 est satisfiable, et si oui, fournir un modèle.

Exercice 2. Calcul des séquents propositionnel

Considérons la formule propositionnelle φ_2 ci-dessous.

$$\varphi_2 \stackrel{\text{def}}{=} (P \Rightarrow Q) \Rightarrow \big((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)\big)\,.$$

[1,5] (a) Mettre φ_2 sous forme normale négative : calculer $\text{nnf}(\varphi_2)$.

[2] (b) Faire une recherche de preuve dans le calcul des séquents propositionnel vu en cours sur la formule $\text{nnf}(\varphi_2)$ obtenue à la question (a).

[0,5] (c) Dire si la formule φ_2 est valide, et si non, fournir un contre-modèle.

Exercice 3. Modélisation en logique propositionnelle

Le problème qui nous intéresse est le problème de couverture par sommets. L'entrée du problème est un entier naturel k et un graphe fini non orienté simple $G = (V, E)$ comme celui de gauche dans la figure 1, où V est l'ensemble de sommets et E l'ensemble des arêtes.

Un sous-ensemble $S \subseteq V$ des sommets est une *couverture par sommets* si, pour toute arête $\{v, v'\} \in E$ du graphe, on a $v \in S$ ou $v' \in S$. Par exemple, $\{0, 1, 4\}$ et $\{0, 2\}$ sont deux couvertures par sommets du graphe de la figure 1, montrées en rouge dans la figure.

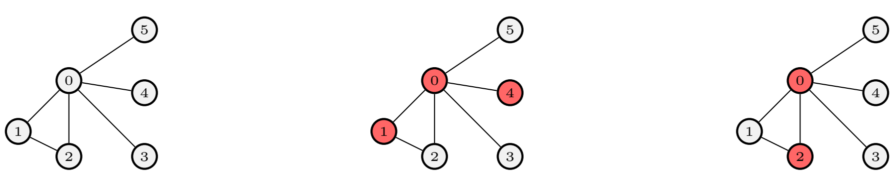

FIGURE 1 – Un graphe et deux de ses couvertures par sommets.

Le but de l'exercice est d'écrire une formule propositionnelle $\varphi_3 \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_{3,\leq k} \wedge \varphi_{3,C}$ qui dépend de k et du graphe d'entrée $G = (V, E)$, et qui est satisfiable si et seulement s'il existe une couverture par sommets de taille *au plus* k dans G. Par exemple, dans le graphe de la figure 1, il existe bien une couverture par sommets de taille au plus 2, mais aucune de taille au plus 1.

Comme dans le TD n°4, exercice 4.(d), on va travailler avec des propositions $P_{i,v}$ où $1 \leq i \leq k$ et $v \in V$. À toute interprétation I des propositions, on peut alors associer le sous-ensemble

$$S_I \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \exists 1 \leq i \leq k \,.\, I \vDash P_{i,v}\}$$

des sommets v du graphe pour lesquels au moins une des propositions $P_{i,v}$ est interprétée comme vraie par I. On souhaite donc que notre formule soit telle que $I \vDash \varphi_3$ si et seulement si S_I est une couverture par sommets de taille au plus k du graphe G.

[2] (a) Écrire une formule $\varphi_{3,\leq k}$ qui force S_I à être de taille au plus k. Plus formellement, on souhaite que $I \vDash \varphi_{3,\leq k}$ si et seulement si $|S_I| \leq k$.

[2] (b) Écrire une formule propositionnelle $\varphi_{3,C}$ qui impose que S_I soit une couverture par sommet. Plus formellement, on souhaite que $I \vDash \varphi_{3,C}$ si et seulement si S_I est une couverture par sommets du graphe G.

Pour aller plus loin, on va s'intéresser au problème d'optimisation : trouver le plus petit k tel qu'il existe une couverture par sommets du graphe de taille au plus k.[1] On va construire une formule ψ_3 qui dépend de k et de G et qui sera satisfiable si et seulement si la plus petite couverture par sommets de G (la plus petite en nombre de sommets) est de taille k.

[0,5] (c) On travaille pour cette question avec l'ensemble de propositions $Q_{j,v}$ pour $1 \leq j \leq k-1$ et $v \in V$, qui permettent de définir un nouveau sous-ensemble des sommets

$$S'_I \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \exists 1 \leq j \leq k-1 \,.\, I \vDash Q_{j,v}\}$$

pour toute interprétation I. Écrire une formule propositionnelle ψ'_3 telle que $I \vDash \psi'_3$ si et seulement si S'_I est une couverture par sommets de G de taille $|S'_I| \leq k-1$.

[1] (d) En déduire une formule propositionnelle ψ_3 qui est satisfiable si et seulement si la plus petite couverture par sommets de G est de taille k.

1. Le plus naturel pour cela serait d'appeler un solveur SAT sur les différentes formules φ_3 construites pour des valeurs décroissantes de $k = |V|, |V|-1, \ldots$ jusqu'à ce que le solveur réponde ≪ UNSAT ≫.