Envariabelanalys
Sammanfattning av definitioner och satser

Jacob Adlers

March 15, 2016

1 Funktioner

1.1 Definition

En funktion f är en regel som för varje element i en mängd, definitionsmängden av f, tilldelar ett unikt element i värdemängden av f.

1.2 Definition

Om $f(x)$ är en funktion definerad på ett intervall I så säger vi att $f(x)$ är:

1. Strängt växande på I om $\forall x_1, x_2 \in I \quad x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$
2. Växande på I om $\forall x_1, x_2 \in I \quad x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$
3. Strängt avtagande på I om $\forall x_1, x_2 \in I \quad x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$
4. Avtagande på I om $\forall x_1, x_2 \in I \quad x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$

1.3 Definition

Vi säger att $f(x)$ är injektiv om $f(x_1) = f(x_2 \Rightarrow x_1 = x_2)$.

1.4 Sats (Bevis sid 51)

$cos(s-t) = cos(s)cos(t) + sin(s)sin(t)$

1.5 Sats

Om $f(x)$ är både jämn och udda då är $f(x) = 0 \quad \forall x$

1.6 Sats

Om $p(x)$ är ett polynom och $p(a) = 0$ så finns det ett polynom $q(x)$ sådant att $p(x) = q(x)(x-a)$

2 Gränsvärden

2.1 Definition

Vi säger att $f(x)$ går mot $L \in \mathcal{R}$ när x går mot oändligheten ($f(x) \to L$ då $x \to \infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$).
Det gäller om det $\forall \varepsilon > 0$ existerar ett R_ε sådant att om $x > R_\varepsilon$ så $|f(x) - L| < \varepsilon$

2.2 Definition

Vi säger att en funktion $f(x)$ går mot L då x går mot a om det $\forall \varepsilon > 0$ existerar ett $\delta_\varepsilon > 0$ sådant att $0 < |x-a| < \delta_\varepsilon$. Det medför att $|f(x) - L| < \varepsilon$

2.3 Definition??

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

2.4 Sats

1. $\lim_{x \to \infty} \frac{\log_a(x)}{x^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha > 0$

2. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^\alpha}{a^x} \quad \forall a > 1, \alpha \in \mathcal{R}$

3 Kontinuitet

3.1 Definition

Vi säger att en funktion $f(x)$ är kontinuerlig i en inre punkt c av sitt definitionsområde om $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

3.2 Definition

Vi säger att $f(x)$ är vänster/(höger)-kontinuerlig i en punkt c om: $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c) \quad (\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c))$

3.3 Sats

Om $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga så kommer $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$ och $f(g(x))$ att vara kontinuerliga där de är definerade.

3.4 Sats

Om $f(x)$ är kontinuerlig på ett slutet och begränsat intervall $[a, b]$ då kommer det att finnas två punkter $p, q \in [a, b]$ sådant att $f(p) \leq f(x) \leq f(q) \quad \forall x \in [a, b]$

3.5 Sats om mellanliggande värden

Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$ och om s ligger mellan $f(a)$ och $f(b)$ då finns det ett $x \in [a, b]$ sådant att $f(x) = s$

4 Derivata

4.1 Definition

Vi säger att derivatan av en funktion $f(x)$ ges av $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ om gränsvärdet existerar.

4.2 Definition

Om $f(x)$ är deriverbar i punkten x_0 så är linjen $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ tangenten till $f(x)$ i x_0.

4.3 Sats

Om $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara så gäller följande:

1. $D(f(x) \underset{(-)}{+} g(x))$ (Summaregeln)
2. $D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (Produktregeln)
3. $D(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ (Kvotregeln) Om $g(x) \neq 0$

4.4 Sats

Om en funktion $g(x)$ är deriverbar i x_0 så är $g(x)$ kontinuerlig i x_0. Alltså, $g(x)$ deriverbar $\Rightarrow g(x)$ kontinuerlig.

4.5 Sats

1. $Dx = 1$
2. $Dx^r = rx^{r-1} \quad r \in \mathcal{R}$
3. $D\sin(x) = \cos(x)$
4. $D\cos(x) = -\sin(x)$

4.6 Medelvärdessatsen

Om $f(x)$ är kontinuerlig på ett intervall $[a, b]$ och $f(x)$ är deriverbar på (a, b) då finns en punkt $c \in (a, b)$ så att: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

4.7 Följdsats till medelvärdessatsen

Antag att $f'(x) > 0$ på (a, b). Då är $f(x)$ strängt växande på samma intervall.

5 Differentialekvationer

5.1 Definition

Vi säger att $y_h(x)$ är en homogen lösning om $y_h''(x) + ay_h'(x) + by_h(x) = 0$

5.2 Definition

Vi säger att $y_p(x)$ är en partikulärlösning till $y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$ om $y_p(x)$ är någon funktion som uppfyller ekvationen.

5.3 Lösningsstrategi

$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x), \quad y(x_0) = \alpha, \quad y'(x_0) = \beta$

1. Hitta alla homogena lösningar $y_h(x)$

   (a) Hitta rötterna till det karakteristiska polynomet
   $r^2 + ar + b = 0 \Rightarrow r_1, r_2 = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a}{2})^2 - b}$

   (b) i. Om $r_1 \neq r_2$ och $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$ då är:
   $y_h(x) = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}$ för några $C, D \in \mathcal{R}$

   ii. Om $r_1 = r_2$ och $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$ då är:
   $y_h(x) = Cxe^{r_1 x} + De^{r_1 x}$ för några $C, D \in \mathcal{R}$

   iii. Om $r_1, r_2 = k \pm i\omega$ då är:
   $y_h(x) = Ce^{kx}\sin(\omega x) + De^{kx}\cos(\omega x)$ för några $C, D \in \mathcal{R}$

2. Om $f(x) \neq 0$ gissa en partikulärlösning enligt tabellen och bekräfta den.

$f(x)$	Gissning av y_p
Konstant	$y_p =$ Konstant
Polynom	$y_p =$ Polynom av samma grad
$e^{\lambda x}$	$y_p = Ae^{\lambda x}$
$e^{\mu x}\sin(\lambda x)$ eller $e^{\mu x}\cos(\lambda x)$	$y_p = Ae^{\mu x}\sin(\lambda x) + Be^{\mu x}\cos(\lambda x)$

   Om gissningen är en homogen lösning så multiplicera den partikulära lösningen med x alternativt x^2 om multiplikation med x också är en homogen lösning. Kombination av $f(x)$ ger kombination av gissningar enligt tabellen ovan.

3. Ansätt $y(x) = y_h(x)(+y_p(x))$ och beräkna C och D genom att använda initialdatan. Vi får då ett linjärt ekvationsystem på formen:
$$\begin{cases} y(x_0) = \alpha \\ y'(x_0) = \beta \end{cases}$$