

Envariabelanalys  
Sammanfattning av definitioner och satser

Jacob Adlers

March 16, 2016

# 1 Funktioner

## 1.1 Definition

En funktion  $f$  är en regel som för varje element i en mängd, definitionsmängden av  $f$ , tilldelar ett unikt element i värdemängden av  $f$ .

## 1.2 Definition

Om  $f(x)$  är en funktion definierad på ett intervall  $I$  så säger vi att  $f(x)$  är:

1. Strängt växande på  $I$  om  $\forall x_1, x_2 \in I \quad x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$
2. Växande på  $I$  om  $\forall x_1, x_2 \in I \quad x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$
3. Strängt avtagande på  $I$  om  $\forall x_1, x_2 \in I \quad x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$
4. Avtagande på  $I$  om  $\forall x_1, x_2 \in I \quad x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$

## 1.3 Definition

Vi säger att  $f(x)$  är injektiv om  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ .

## 1.4 Sats (Bevis sid 51)

$$\cos(s - t) = \cos(s)\cos(t) + \sin(s)\sin(t)$$

## 1.5 Sats

Om  $f(x)$  är både jämn och udda då är  $f(x) = 0 \quad \forall x$

## 1.6 Sats

Om  $p(x)$  är ett polynom och  $p(a) = 0$  så finns det ett polynom  $q(x)$  sådant att  $p(x) = q(x)(x - a)$

# 2 Gränsvärden

## 2.1 Definition

Vi säger att  $f(x)$  går mot  $L \in \mathcal{R}$  när  $x$  går mot oändligheten ( $f(x) \rightarrow L$  då  $x \rightarrow \infty \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ ).

Det gäller om det  $\forall \varepsilon > 0$  existerar ett  $R_\varepsilon$  sådant att om  $x > R_\varepsilon$  så  $|f(x) - L| < \varepsilon$

## 2.2 Definition

Vi säger att en funktion  $f(x)$  går mot  $L$  då  $x$  går mot  $a$  om det  $\forall \varepsilon > 0$  existerar ett  $\delta_\varepsilon > 0$  sådant att  $0 < |x - a| < \delta_\varepsilon$ . Det medför att  $|f(x) - L| < \varepsilon$

## 2.3 Sats

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_a(x)}{x^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha > 0$
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0 \quad \forall a > 1, \alpha \in \mathcal{R}$

## 3 Kontinuitet

### 3.1 Definition

Vi säger att en funktion  $f(x)$  är kontinuerlig i en inre punkt  $c$  av sitt definitionssområde om  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

### 3.2 Definition

Vi säger att  $f(x)$  är vänster/(höger)-kontinuerlig i en punkt  $c$  om:  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$  ( $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$ )

### 3.3 Sats

Om  $f(x)$  och  $g(x)$  är kontinuerliga så kommer  $f(x) + g(x)$ ,  $f(x) - g(x)$ ,  $f(x)g(x)$  och  $f(g(x))$  att vara kontinuerliga där de är definerade.

### 3.4 Sats

Om  $f(x)$  är kontinuerlig på ett slutet och begränsat intervall  $[a, b]$  då kommer det att finnas två punkter  $p, q \in [a, b]$  sådant att  $f(p) \leq f(x) \leq f(q) \quad \forall x \in [a, b]$

### 3.5 Sats om mellanliggande värden

Om  $f(x)$  är kontinuerlig på  $[a, b]$  och om  $s$  ligger mellan  $f(a)$  och  $f(b)$  då finns det ett  $x \in [a, b]$  sådant att  $f(x) = s$

## 4 Derivata

### 4.1 Definition

Vi säger att derivatan av en funktion  $f(x)$  ges av  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  om gränsvärdet existerar.

### 4.2 Definition

Om  $f(x)$  är deriverbar i punkten  $x_0$  så är linjen  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$  tangenten till  $f(x)$  i  $x_0$ .

### 4.3 Definition

Vi säger att  $c$  är ett lokalt max/(min) om det finns  $\alpha, \beta$  sådana att:  
 $f(c) \geq f(x)$  ( $f(c) \leq f(x)$ ),  $\forall x \in (\alpha, \beta)$ .  
(LÄGG IN KOPPLING TILL DERIVATA (föreläsning 12))

### 4.4 Sats

Om  $f(x)$  och  $g(x)$  är deriverbara så gäller följande:

1.  $D(f(x) \pm g(x))$  (Summaregeln)
2.  $D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$  (Produktregeln)
3.  $D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$  (Kvotregeln) Om  $g(x) \neq 0$

### 4.5 Sats

Om en funktion  $g(x)$  är deriverbar i  $x_0$  så är  $g(x)$  kontinuerlig i  $x_0$ . Alltså,  
 $g(x)$  deriverbar  $\Rightarrow g(x)$  kontinuerlig.

### 4.6 Sats

1.  $Dx = 1$
2.  $Dx^r = rx^{r-1}$   $r \in \mathcal{R}$
3.  $D \sin(x) = \cos(x)$
4.  $D \cos(x) = -\sin(x)$

### 4.7 Medelvärdessatsen

Om  $f(x)$  är kontinuerlig på ett intervall  $[a, b]$  och  $f(x)$  är deriverbar på  $(a, b)$  då finns en punkt  $c \in (a, b)$  så att:  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

### 4.8 Följdsats till medelvärdessatsen

Antag att  $f'(x) > 0$  på  $(a, b)$ . Då är  $f(x)$  strängt växande på samma intervall.

## 5 Differentialekvationer

### 5.1 Definition

Vi säger att  $y_h(x)$  är en homogen lösning om  $y_h''(x) + ay_h'(x) + by_h(x) = 0$

### 5.2 Definition

Vi säger att  $y_p(x)$  är en partikulärlösning till  $y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$  om  $y_p(x)$  är någon funktion som uppfyller ekvationen.

### 5.3 Lösningsstrategi

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x), \quad y(x_0) = \alpha, \quad y'(x_0) = \beta$$

1. Hitta alla homogena lösningar  $y_h(x)$ 
  - (a) Hitta rötterna till det karakteristiska polynomet  
 $r^2 + ar + b = 0 \Rightarrow r_1, r_2 = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$
  - (b)
    - i. Om  $r_1 \neq r_2$  och  $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$  då är:  
 $y_h(x) = Ce^{r_1x} + De^{r_2x}$  för några  $C, D \in \mathcal{R}$
    - ii. Om  $r_1 = r_2$  och  $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$  då är:  
 $y_h(x) = Cxe^{r_1x} + De^{r_1x}$  för några  $C, D \in \mathcal{R}$
    - iii. Om  $r_1, r_2 = k \pm i\omega$  då är:  
 $y_h(x) = Ce^{kx} \sin(\omega x) + De^{kx} \cos(\omega x)$  för några  $C, D \in \mathcal{R}$
2. Om  $f(x) \neq 0$  gissa en partikulärlösning enligt tabellen och bekräfta den.

$f(x)$	Gissning av $y_p$
Konstant	$y_p = \text{Konstant}$
Polynom	$y_p = \text{Polynom av samma grad}$
$e^{\lambda x}$	$y_p = Ae^{\lambda x}$
$e^{\mu x} \sin(\lambda x)$ eller $e^{\mu x} \cos(\lambda x)$	$y_p = Ae^{\mu x} \sin(\lambda x) + Be^{\mu x} \cos(\lambda x)$

Om gissningen är en homogen lösning så multiplicera den partikulära lösningen med  $x$  alternativt  $x^2$  om multiplikation med  $x$  också är en homogen lösning. Kombination av  $f(x)$  ger kombination av gissningar enligt tabellen ovan.

3. Ansätt  $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$  och beräkna  $C$  och  $D$  genom att använda initialdatan. Vi får då ett linjärt ekvationsystem på formen:  
$$\begin{cases} y(x_0) = \alpha \\ y'(x_0) = \beta \end{cases}$$

## 6 Taylorpolynom

Det finns fler satser som leder fram till Taylorpolynomet under föreläsning 12.

### 6.1 Definition

Om  $f(x)$  är  $n$  gånger deriverbar i punkten  $a$ , då är Taylorpolynomet av ordning  $n$  till funktionen  $f$  i punkten  $a$ :

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

### 6.2 Taylors sats

Om  $f(x)$  är  $(n+1)$  gånger deriverbar i något öppet intervall kring  $a$  och  $P_n$  är Taylorpolynomet i  $a$ . Då gäller att  $f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}$  för något  $s$  mellan  $a$  och  $x$ .

## 7 Integraler

### 7.1 Definition

Om det finns exakt ett tal  $I$  sådant att  $\exists f(x)$  definerad på  $[a, b]$ , för varje indelning  $p$  säger vi att:

$$L(f, p) \leq I \leq U(f, p) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

### 7.2 Sats

Om  $f(x)$  är kontinuerlig på  $[a, b]$  så är  $f(x)$  integrerbar, dvs  $\int_a^b f(x) dx$  existerar.

### 7.3 Analysens huvudsats

Antag att  $f(x)$  är kontinuerlig på ett intervall  $I$  (öppet eller slutet) och  $a \in I$ . Då:

1. Om  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  så kommer  $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$
2. Om  $G(x)$  är en primitiv funktion till  $f(x)$ , dvs ( $G'(x) = f(x)$ ), och  $b \in I$  så kommer  $\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$

### 7.4 Definition

Ytan mellan  $f(x)$  och  $g(x)$  då  $a \leq x \leq b$  ges av  $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

## 8 Integrationsmetoder

### 8.1 Variabelsubstitution

#### 8.1.1 Förklaring

Om  $F(x)$  är en primitiv till  $f(x)$  och  $g(x)$  är deriverbar. Då kommer  $F(g(x))$  vara en primitiv funktion till  $f(g(x))g'(x)$ . Variabelsubstitution används för att

beräkna integraler på form  $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) \Big|_a^b$

#### 8.1.2 Exempel

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x}{(x^2+4)^2} dx &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{2x}{(x^2+4)^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{x^2} \\ g(x) = x^2 + 4 \\ g'(x) = 2x \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 + 4, \quad dt = 2x dx \\ x = 1 \Rightarrow t = 5 \\ x = 2 \Rightarrow t = 8 \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int_5^8 \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{t} \right) \Big|_5^8 = -\frac{1}{2} \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \frac{1}{5} = \frac{1}{10} - \frac{1}{16} = \frac{8}{80} - \frac{5}{80} = \frac{3}{80} \end{aligned}$$

### 8.2 Partiell integration

#### 8.2.1 Förklaring

Partiell integration följer av derivatans produktregel. Enligt produktregeln så ska  $D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ . Hittar vi sedan den primitiva funktionen till  $f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$  som kan skrivas om till:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(x)G(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)dx$$

#### 8.2.2 Exempel

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx &= \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x \\ g(x) = \sin(x) \end{array} \right\} = x \cdot -\cos(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx \\ &= -x \cos(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \end{aligned}$$

### 8.3 Partialbråksuppdelning

#### 8.3.1 Förklaring

Partialbråksuppdelning är en metod för att integrera  $\int_a^b \frac{p(x)}{q(x)} dx$  då  $p(x)$  och  $q(x)$  är polynom.

## 8.4 Strategi

1. Reducera problemet till ett problem  $\int_a^b \frac{p(x)}{q(x)} dx$  där  $\deg(p(x)) < \deg(q(x))$
2. Faktorisera nämnaren, dvs skriv:  
 $q(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} \cdot (x - \alpha_2)^{k_2} \cdots (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{l_1} \cdot (x^2 + \beta_2 x + \gamma_2)^{l_2}$
3. Gör ansättningen:  

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_1}{(x - \alpha_1)} + \frac{a_2}{(x - \alpha_1)^2} + \cdots + \frac{a_{k_1}}{(x - \alpha_1)^{k_1}} + \cdots + \frac{b_1 x + c_1}{(x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)} + \frac{b_2 x + c_2}{(x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^2} + \cdots + \frac{b_{l_1} x + c_{l_1}}{(x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{l_1}}$$

Alltså om:

$q(x)$ har faktorn	så ska HL innehålla
$(x - \alpha)^k$	$\frac{a_1}{(x - \alpha)} + \frac{a_2}{(x - \alpha)^2} + \cdots + \frac{a_k}{(x - \alpha)^k}$
$(x^2 + \beta x + \gamma)^k$	$\frac{b_1 x + c_1}{(x^2 + \beta x + \gamma)} + \frac{b_2 x + c_2}{(x^2 + \beta x + \gamma)^2} + \cdots + \frac{b_k x + c_k}{(x^2 + \beta x + \gamma)^k}$

4. Förläng höger led och vänster led med  $q(x)$  och beräkna koefficienterna.
5. Lös den nya integralen.

### 8.4.1 Exempel