Envariabelanalys
Sammanfattning av definitioner och satser

Jacob Adlers

March 14, 2016

1 Funktioner

1.1 Definition

En funktion f är en regel som för varje element i en mängd, definitionsmängden av f, tilldelar ett unikt element i värdemängden av f.

1.2 Sats (Bevis sid 51)

$cos(s-t) = cos(s)cos(t) + sin(s)sin(t)$

1.3 Sats

Om $f(x)$ är både jämn och udda då är $f(x) = 0 \quad \forall x$

1.4 Sats

Om $p(x)$ är ett polynom och $p(a) = 0$ så finns det ett polynom $q(x)$ sådant att $p(x) = q(x)(x-a)$

2 Gränsvärden

2.1 Definition

Vi säger att $f(x)$ går mot $L \in \mathcal{R}$ när x går mot oändligheten ($f(x) \to L$ då $x \to \infty$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$).
Det gäller om det $\forall\varepsilon > 0$ existerar ett R_ε sådant att om $x > R_\varepsilon$ så $|f(x)-L| < \varepsilon$

2.2 Definition

Vi säger att en funktion $f(x)$ går mot L då x går mot a om det $\forall\varepsilon > 0$ existerar ett $\delta_\varepsilon > 0$ sådant att $0 < |x-a| < \delta_\varepsilon$. Det medför att $|f(x) - L| < \varepsilon$

2.3 Definition

$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$

3 Kontinuitet

3.1 Definition

Vi säger att en funktion $f(x)$ är kontinuerlig i en inre punkt c av sitt definitionsområde om $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

3.2 Definition

Vi säger att $f(x)$ är vänster/(höger)-kontinuerlig i en punkt c om: $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c) \quad (\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c))$

3.3 Sats

Om $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga så kommer $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$ och $f(g(x))$ att vara kontinuerliga där de är definerade.

3.4 Sats

Om $f(x)$ är kontinuerlig på ett slutet och begränsat intervall $[a, b]$ då kommer det att finnas två punkter $p, q \in [a, b]$ sådant att $f(p) \leq f(x) \leq f(q) \quad \forall x \in [a, b]$

3.5 Sats om mellanliggande värden

Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$ och om s ligger mellan $f(a)$ och $f(b)$ då finns det ett $x \in [a, b]$ sådant att $f(x) = s$

4 Derivata

4.1 Definition

Vi säger att derivatan av en funktion $f(x)$ ges av $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ om gränsvärdet existerar.

4.2 Definition

Om $f(x)$ är deriverbar i punkten x_0 så är linjen $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ tangenten till $f(x)$ i x_0.

4.3 Sats

Om $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara så gäller följande:

1. $D(f(x) \overset{+}{_{(-)}} g(x))$ (Summaregeln)
2. $D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (Produktregeln)
3. $D(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ (Kvotregeln) Om $g(x) \neq 0$

4.4 Sats

Om en funktion $g(x)$ är deriverbar i x_0 så är $g(x)$ kontinuerlig i x_0. Alltså, $g(x)$ deriverbar $\Rightarrow g(x)$ kontinuerlig.

4.5 Sats

1. $Dx = 1$
2. $Dx^r = rx^{r-1} \quad r \in \mathcal{R}$
3. $D\sin(x) = \cos(x)$
4. $D\cos(x) = -\sin(x)$

4.6 Definition

Om $f(x)$ är en funktion definerad på ett intervall I så säger vi att $f(x)$ är:

1. Strängt växande på I om $\forall x_1, x_2 \in I \quad x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$
2. Växande på I om $\forall x_1, x_2 \in I \quad x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$
3. Strängt avtagande på I om $\forall x_1, x_2 \in I \quad x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$
4. Avtagande på I om $\forall x_1, x_2 \in I \quad x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$

4.7 Medelvärdessatsen

Om $f(x)$ är kontinuerlig på ett intervall $[a, b]$ och $f(x)$ är deriverbar på (a, b) då finns en punkt $c \in (a, b)$ så att: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

4.8 Följdsats till medelvärdessatsen

Antag att $f'(x) > 0$ på (a, b). Då är $f(x)$ strängt växande på samma intervall.