Envariabelanalys
Sammanfattning av definitioner och satser

Jacob Adlers

March 17, 2016

Contents

1 Funktioner

1.1 Definition

En funktion f är en regel som för varje element i en mängd, definitionsmängden av f, tilldelar ett unikt element i värdemängden av f.

1.2 Definition

Om $f(x)$ är en funktion definerad på ett intervall I så säger vi att $f(x)$ är:

1. Strängt växande på I om $\forall x_1, x_2 \in I \quad x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$
2. Växande på I om $\forall x_1, x_2 \in I \quad x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$
3. Strängt avtagande på I om $\forall x_1, x_2 \in I \quad x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$
4. Avtagande på I om $\forall x_1, x_2 \in I \quad x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$

1.3 Definition

Vi säger att $f(x)$ är injektiv om $f(x_1) = f(x_2 \Rightarrow x_1 = x_2)$.

1.4 Sats (Bevis sid 51)

$cos(s-t) = cos(s)cos(t) + sin(s)sin(t)$

1.5 Sats

Om $f(x)$ är både jämn och udda då är $f(x) = 0 \quad \forall x$

1.6 Sats

Om $p(x)$ är ett polynom och $p(a) = 0$ så finns det ett polynom $q(x)$ sådant att $p(x) = q(x)(x-a)$

2 Gränsvärden

2.1 Definition

Vi säger att $f(x)$ går mot $L \in \mathcal{R}$ när x går mot oändligheten ($f(x) \to L$ då $x \to \infty$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$).
Det gäller om det $\forall \varepsilon > 0$ existerar ett R_ε sådant att om $x > R_\varepsilon$ så $|f(x) - L| < \varepsilon$

2.2 Definition

Vi säger att en funktion $f(x)$ går mot L då x går mot a om det $\forall \varepsilon > 0$ existerar ett $\delta_\varepsilon > 0$ sådant att $0 < |x-a| < \delta_\varepsilon$. Det medför att $|f(x) - L| < \varepsilon$

2.3 Sats

1. $\lim_{x \to \infty} \frac{\log_a(x)}{x^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha > 0$

2. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^\alpha}{a^x} \quad \forall a > 1, \alpha \in \mathcal{R}$

3 Kontinuitet

3.1 Definition

Vi säger att en funktion $f(x)$ är kontinuerlig i en inre punkt c av sitt definitionsområde om $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

3.2 Definition

Vi säger att $f(x)$ är vänster/(höger)-kontinuerlig i en punkt c om: $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c) \quad (\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c))$

3.3 Sats

Om $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga så kommer $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$ och $f(g(x))$ att vara kontinuerliga där de är definerade.

3.4 Sats

Om $f(x)$ är kontinuerlig på ett slutet och begränsat intervall $[a, b]$ då kommer det att finnas två punkter $p, q \in [a, b]$ sådant att $f(p) \leq f(x) \leq f(q) \quad \forall x \in [a, b]$

3.5 Sats om mellanliggande värden

Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$ och om s ligger mellan $f(a)$ och $f(b)$ då finns det ett $x \in [a, b]$ sådant att $f(x) = s$

4 Derivata

4.1 Definition

Vi säger att derivatan av en funktion $f(x)$ ges av $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ om gränsvärdet existerar.

4.2 Definition

Om $f(x)$ är deriverbar i punkten x_0 så är linjen $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ tangenten till $f(x)$ i x_0.

4.3 Definition

Vi säger att c är ett lokalt max/(min) om det finns α, β sådana att:
$f(c) \geq f(x) \quad (f(c) \leq f(x)), \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$.
(LÄGG IN KOPPLING TILL DERIVATA (föreläsning 12))

4.4 Sats

Om $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara så gäller följande:

1. $D(f(x) \overset{+}{\scriptstyle(-)} g(x))$ (Summaregeln)
2. $D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (Produktregeln)
3. $D(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ (Kvotregeln) Om $g(x) \neq 0$

4.5 Sats

Om en funktion $g(x)$ är deriverbar i x_0 så är $g(x)$ kontinuerlig i x_0. Alltså, $g(x)$ deriverbar $\Rightarrow g(x)$ kontinuerlig.

4.6 Sats

1. $Dx = 1$
2. $Dx^r = rx^{r-1} \quad r \in \mathcal{R}$
3. $D\sin(x) = \cos(x)$
4. $D\cos(x) = -\sin(x)$

4.7 Medelvärdessatsen

Om $f(x)$ är kontinuerlig på ett intervall $[a, b]$ och $f(x)$ är deriverbar på (a, b) då finns en punkt $c \in (a, b)$ så att: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

4.8 Följdsats till medelvärdessatsen

Antag att $f'(x) > 0$ på (a, b). Då är $f(x)$ strängt växande på samma intervall.

5 Differentialekvationer

5.1 Definition

Vi säger att $y_h(x)$ är en homogen lösning om $y_h''(x) + ay_h'(x) + by_h(x) = 0$

5.2 Definition

Vi säger att $y_p(x)$ är en partikulärlösning till $y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$ om $y_p(x)$ är någon funktion som uppfyller ekvationen.

5.3 Lösningsstrategi

$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x), \quad y(x_0) = \alpha, \quad y'(x_0) = \beta$

1. Hitta alla homogena lösningar $y_h(x)$
   (a) Hitta rötterna till det karakteristiska polynomet
   $r^2 + ar + b = 0 \Rightarrow r_1, r_2 = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a}{2})^2 - b}$
   (b) i. Om $r_1 \neq r_2$ och $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$ då är:
   $y_h(x) = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}$ för några $C, D \in \mathcal{R}$
   ii. Om $r_1 = r_2$ och $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$ då är:
   $y_h(x) = Cxe^{r_1 x} + De^{r_1 x}$ för några $C, D \in \mathcal{R}$
   iii. Om $r_1, r_2 = k \pm i\omega$ då är:
   $y_h(x) = Ce^{kx} \sin(\omega x) + De^{kx} \cos(\omega x)$ för några $C, D \in \mathcal{R}$
2. Om $f(x) \neq 0$ gissa en partikulärlösning enligt tabellen och bekräfta den.

$f(x)$	Gissning av y_p
Konstant	$y_p =$ Konstant
Polynom	$y_p =$ Polynom av samma grad
$e^{\lambda x}$	$y_p = Ae^{\lambda x}$
$e^{\mu x} \sin(\lambda x)$ eller $e^{\mu x} \cos(\lambda x)$	$y_p = Ae^{\mu x} \sin(\lambda x) + Be^{\mu x} \cos(\lambda x)$

   Om gissningen är en homogen lösning så multiplicera den partikulära lösningen med x alternativt x^2 om multiplikation med x också är en homogen lösning. Kombination av $f(x)$ ger kombination av gissningar enligt tabellen ovan.

3. Ansätt $y(x) = y_h(x)(+y_p(x))$ och beräkna C och D genom att använda initialdatan. Vi får då ett linjärt ekvationsystem på formen:
   $\begin{cases} y(x_0) = \alpha \\ y'(x_0) = \beta \end{cases}$

6 Taylorpolynom

Det finns fler satser som leder fram till Taylorpolynomet under föreläsning 12.

6.1 Defintion

Om $f(x)$ är n gånger deriverbar i punkten a, då är Taylorpolynomet av ordning n till funktionen f i punkten a:
$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

6.2 Taylors sats

Om $f(x)$ är $(n+1)$ gånger deriverbar i något öppet intervall kring a och P_n är Taylorpolynomet i a. Då gäller att $f(x) - P_n(x) = \frac{f^{n+1}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}$ för något s mellan a och x.

7 Integraler

7.1 Definition

Om det finns exakt ett tal I sådant att $\exists f(x)$ definerad på $[a,b]$, för varje indelning p säger vi att:
$L(f,p) \leq I \leq U(f,p) \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)dx$

7.2 Sats

Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a,b]$ så är $f(x)$ integrerbar, dvs $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ existerar.

7.3 Analysens huvudsats

Antag att $f(x)$ är kontinuerlig på ett intervall I (öppet eller slutet) och $a \in I$. Då:

1. Om $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ så kommer $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$
2. Om $G(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$, dvs $(G'(x) = f(x))$, och $b \in I$ så kommer $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$

7.4 Definition

Ytan mellan $f(x)$ och $g(x)$ då $a \leq x \leq b$ ges av $\displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$

7.5 Definition generaliserad integral

Om $f(x)$ är kontinuerlig på något intervall $(a, b]$ säger vi att den generaliserade integralen har värdet: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx$

7.6 Sats

Om $0 \leq h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ och:

- $\int_a^b h(x)dx$ divergerar (a, b kan vara $\pm\infty$) så divergerar också $\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b g(x)dx$ konvergerar så konvergerar också $\int_a^b f(x)dx$

7.7 Definition rotationsvolym

Vi säger att rotationsvolymen då ytan under $f(x)$, $a \leq x \leq b$ roteras ett varv kring x-axeln är: $\pi \int_a^b f^2(x)dx$

7.8 Definition längd av kurva

Om $f(x)$ är deriverbar på $[a, b]$ så säger vi att längden av grafen till $f(x)$, $a \leq x \leq b$ är: $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x)^2)}dx$

8 Plan kurva

8.1 Definition

En plan kurva är en mängd punkter (x, y) så att $x = f(t), y = g(t)$ för två kontinuerliga funktioner f, g definerade på ett intervall I.

9 Integrationsmetoder

9.1 Variabelsubstitution

9.1.1 Förklaring

Om $F(x)$ är en primitiv till $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbar. Då kommer $F(g(x))$ vara en primitiv funktion till $f(g(x))g'(x)$. Variabelsubstitution används för att beräkna integraler på form $\displaystyle\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))\Big|_a^b$

9.1.2 Exempel

$$\int_1^2 \frac{x}{(x^2+4)^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2x}{(x^2+4)^2}dx = \left\{\begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{x^2} \\ g(x) = x^2+4 \\ g'(x) = 2x \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} t = x^2+4, \quad dt = 2xdx \\ x = 1 \Rightarrow t = 5 \\ x = 2 \Rightarrow t = 8 \end{array}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\int_5^8 \frac{1}{t^2}dt = \frac{1}{2}(-\frac{1}{t})\Big|_5^8 = -\frac{1}{2}\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\frac{1}{5} = \frac{1}{10} - \frac{1}{16} = \frac{8}{80} - \frac{5}{80} = \frac{3}{80}$$

9.2 Partiell integration

9.2.1 Förklaring

Partiell integration följer av derivatans produktregel. Enligt produktregeln så ska $D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Hittar vi sedan den primitiva funktionen till $f(x)g(x) = \displaystyle\int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$ som kan skrivas om till:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(x)G(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)dx$$

9.2.2 Exempel

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)dx = \left\{\begin{array}{l} f(x) = x \\ g(x) = sin(x) \end{array}\right\} = x \cdot -\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx$$

$$= -x\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

9.3 Partialbråksuppdelning

9.3.1 Förklaring

Partialbråksuppdelning är en metod för att göra integreringen av $\displaystyle\int_a^b \frac{p(x)}{q(x)}dx$ då $p(x)$ och $q(x)$ är polynom enklare.

9.3.2 Strategi

1. Reducera problemet till ett problem $\displaystyle\int_a^b \frac{p(x)}{q(x)}dx$ där $\deg(p(x)) < \deg(q(x))$

2. Faktorisera nämnaren, dvs skriv:
$q(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdot (x-\alpha_2)^{k_2} \cdots (x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{l_1} \cdot (x^2+\beta_2 x+\gamma_2)^{l_2}$

3. Gör ansättningen:
$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_1}{(x-\alpha_1)} + \frac{a_2}{(x-\alpha_1)^2} + \ldots + \frac{ak_1}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{b_1 x + c_1}{(x^2+\beta_1+\gamma_1)}$$
$$+\frac{b_2 x + c_2}{(x^2+\beta_1+\gamma_1)^2} + \ldots + \frac{b_{l_1} x + c_{l_1}}{(x^2+\beta_1+\gamma_1)^{l_1}}$$
Alltså om:

$q(x)$ har faktorn	så ska HL innehålla
$(x-\alpha)^k$	$\frac{a_1}{(x-\alpha)} + \frac{a_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{a_k}{(x-\alpha)^k}$
$(x^2+\beta x+\gamma)^k$	$\frac{b_1 x + c_1}{(x^2+\beta x+\gamma)} + \frac{b_2 x + c_2}{(x^2+\beta x+\gamma)^2} + \ldots + \frac{b_k x + c_k}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}$

4. Förläng höger led och vänster led med $q(x)$ och beräkna koefficienterna.

5. Lös den nya integralen.

9.3.3 Exempel

$\displaystyle\int_a^b \frac{3x^3+11x^2+9x+2}{x^4+4x^3+5x^2+4x+4}dx =$ (1.)Polynomet i nämnaren är av högre grad än det i täljaren (2.)så vi faktoriserar nämnaren: $\displaystyle\int_a^b \frac{3x^3+11x^2+9x+2}{(x+2)^2(x^2+1)}$

(3.)Gör ansättningen: $\displaystyle\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a}{(x+2)} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{cx+d}{(x^2+1)}$

(4.) Förläng bägge led med $q(x)$: $\displaystyle\frac{(3x^3+11x^2+9x+2)((x+2)^2(x^2+1))}{(x+2)^2(x^2+1)} =$

$$\frac{a(x+2)^2(x^2+1)}{(x+2)} + \frac{b(x+2)^2(x^2+1)}{(x+2)^2} + \frac{(cx+d)(x+2)^2(x^2+1)}{(x^2+1)} \Rightarrow$$
$$3x^3+11x^2+9x+2 = a(x+2)(x^2+1) + b(x^2+1) + (cx+d)(x+2)^2$$
$$= (a+c)x^3 + (2a+b+4c+d)x^2 + (a+4c+4d)x + (a+b+4d)$$

Lös ekvationssystemet: $\begin{cases} 3 = a+c \\ 11 = 2a+b+4c+d \\ 9 = a+4c+4d \\ 2 = a+b+4d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=2 \\ d=0 \end{cases}$

(5.)Detta ger den nya integralen $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{2x}{x^2+1}dx$ som är betydligt enklare att lösa. (Svar: $\ln(3) + \frac{1}{6}$)