

12.6 Análise granulométrica via série de Fourier

Em estudos petrográficos, principalmente de rochas sedimentares, existe o método da análise granulométrica para inferência das propriedades geométricas dos seus grãos. Basicamente por meio de seções laminares de amostras de rochas, o estudo granulométrico pode ser feito com imagens microscópicas digitais, similares à imagem mostrada pela Figura 12.21.

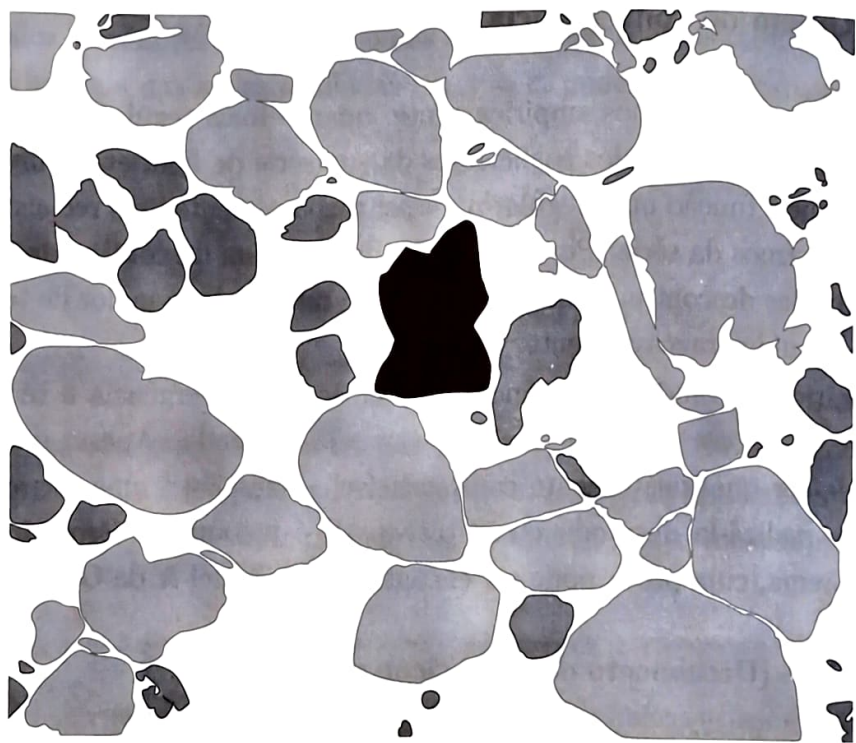


Figura 12.21: Imagem simplificada em tons de cinza de uma lâmina de rocha sedimentar: os grãos da rocha são os corpos cinzas e em branco o espaço poroso. O grão central, destacado em preto, é analisado em detalhe no decorrer no texto.

Considere um grão com a forma mostrada pela imagem da Figura 12.22. Por hipótese, consideramos que seu interior é todo preenchido por material homogêneo e que a sua borda é suave por partes.

Como tratamos de imagens bidimensionais, vamos considerar que todos os objetos a serem analisados sejam regiões fechadas e limitadas no plano. Para uma dada região D , consideramos o seu contorno como sendo denotado por Γ . Vamos



Figura 12.22: Um grão de rocha (à esquerda) e seu contorno (à direita).

considerar também que existe um ponto $C \equiv (x_c, y_c)$ interior a D , tal que todo o ponto $X \equiv (x, y)$ do contorno "enxerga" C . Isto quer dizer que todo o segmento de reta que liga C a X está completamente contido em D (veja a Figura 12.23). Esta hipótese equivale a assumir que a curva Γ tem a *forma estrelada* (do inglês, *star-shaped*).

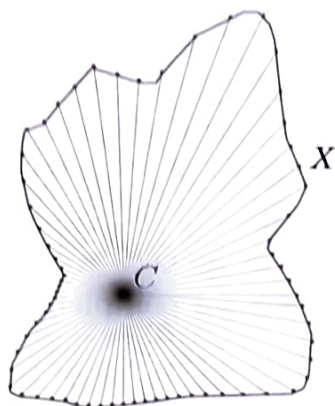


Figura 12.23: O grão analisado tem a forma estrelada, pois existe ao menos um ponto interior C tal que todos os segmentos de retas que o conectam a pontos da borda são interiores ao grão.

Para cada ponto $X \equiv (x, y) \in \Gamma$, construímos o segmento de reta CX e consideramos duas quantidades: a distância r de C a X e o ângulo θ que CX faz com o eixo horizontal, dados, respectivamente, por

$$r = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}, \quad (12.39)$$

$$\theta = \arctan \left(\frac{y - y_c}{x - x_c} \right). \quad (12.40)$$

Como a curva Γ é em forma estrelada, podemos afirmar que para cada θ existe somente um único r , de modo que podemos construir uma função que relaciona θ e r , isto é, podemos considerar

$$r = f(\theta), \quad (12.41)$$

para $\theta \in (0, 2\pi]$. Por exemplo, o contorno do grão mostrado na Figura 12.22 dá origem à função radial mostrada Figura 12.24.

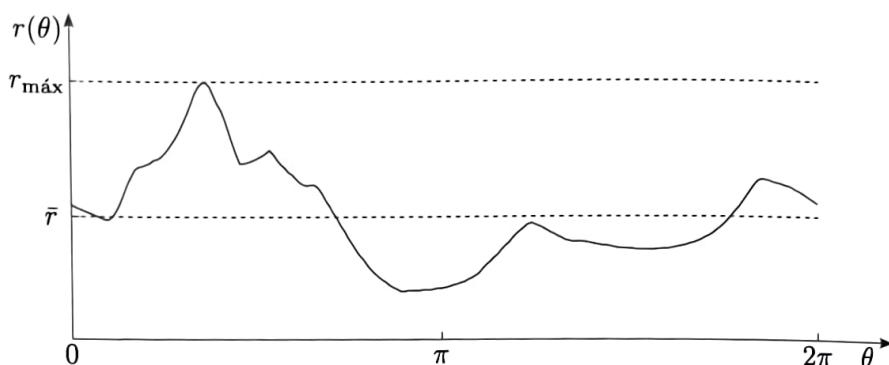


Figura 12.24: A função radial $r = f(\theta)$ obtida a partir do contorno do grão da Figura 12.22. Observe que r é periódica com período 2π .

O que torna tão interessante a função radial (12.41) é que se trata de uma função periódica e, portanto, apta a ser completamente representada pela série de Fourier dada por

$$r = f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta),$$

onde os coeficientes a_0 , a_n e b_n , para $n = 1, 2, \dots$, são respectivamente dados por (12.12), (12.13) e (12.14). Reproduzimos aqui tais equações, especializando-as para $L = \pi$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Entretanto, a partir da representação da série de Fourier, existe uma outra representação alternativa, mais adequada ao problema de caracterização de contorno, dada por

$$r = r_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos(n\theta - \phi_n),$$

onde $r_0 = a_0/2$ é o raio médio do contorno, r_n e ϕ_n são respectivamente a amplitude e fase do n -ésimo harmônico.

Uma interpretação geométrica é que cada harmônico n dá uma contribuição qualitativamente diferente ao formato da curva. Com efeito, os termos de ordem baixa fornecem o formato mais geral do contorno, enquanto os de ordem elevada fornecem os detalhes. Para ilustrar esta interpretação, observe a Figura 12.25.

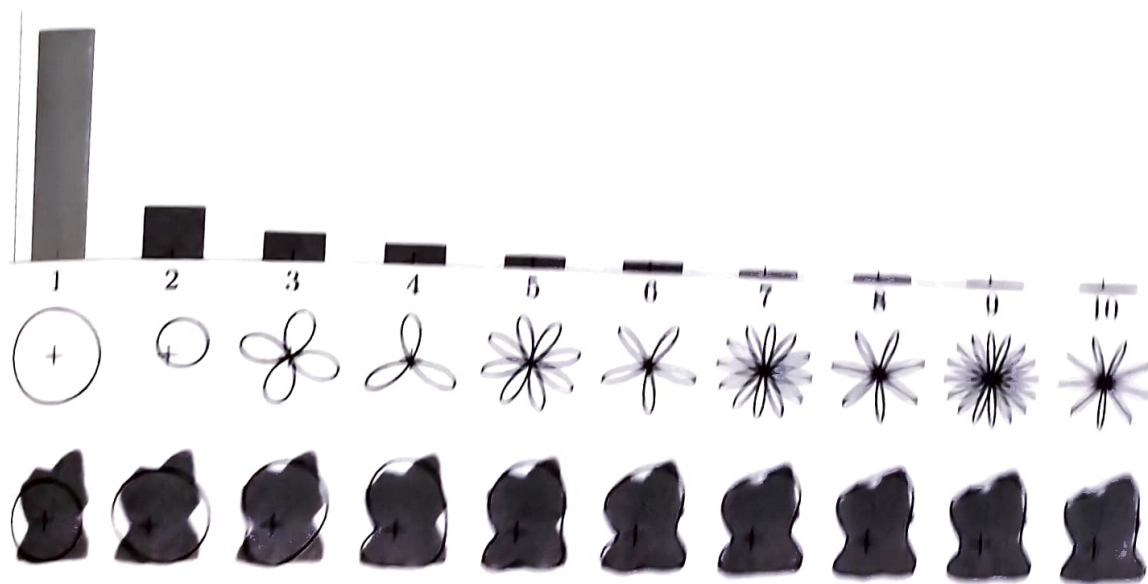


Figura 12.25: Harmônicos do contorno do grão da Figura 12.22. Na linha superior são mostrados os pesos relativos dos harmônicos, que são mostrados na linha do meio. Na linha inferior são mostrados os contornos parcialmente sintetizados com os termos de 1 até a ordem do harmônico.

Proseguindo com a interpretação geométrica, podemos criar, por exemplo, versões suavizadas do contorno analisado. Por exemplo, truncando a série de Fourier para $N = 1, 2, 4$ e 16 , produzimos os contornos filtrados, mostrados na Figura 12.26.

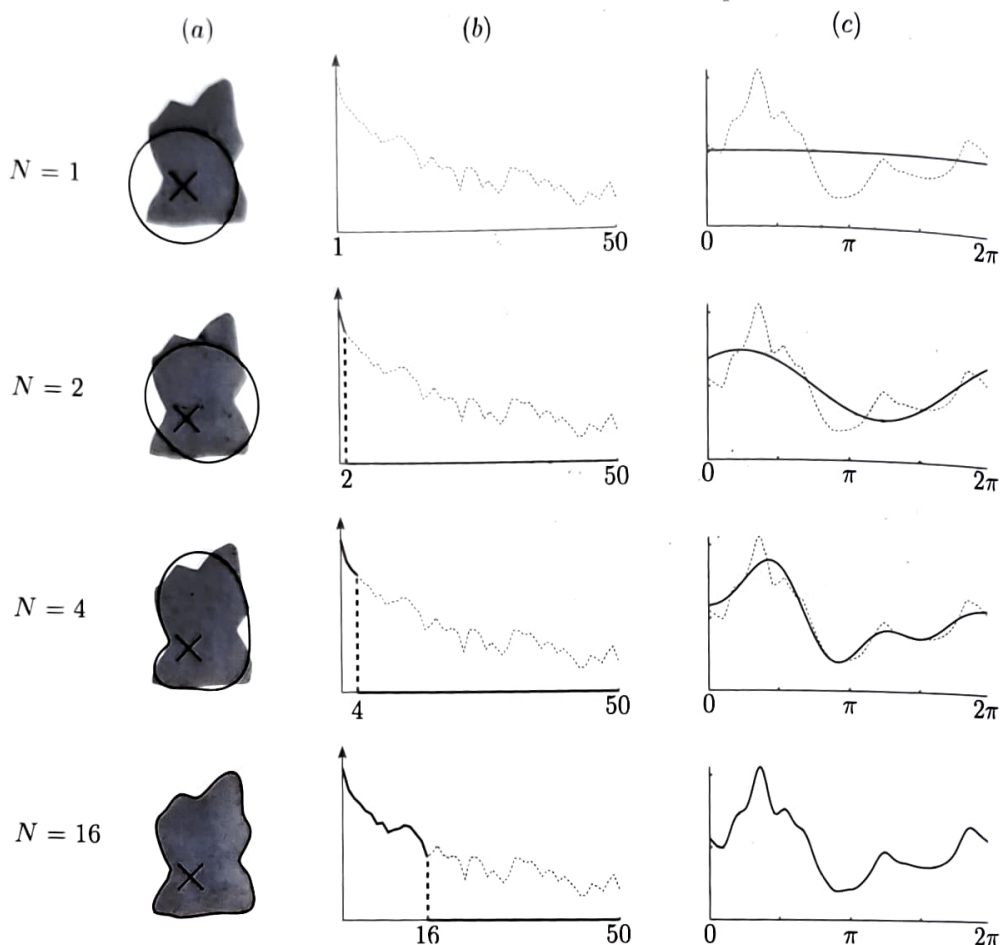


Figura 12.26: Versões filtradas do contorno do grão da Figura 12.22. Na coluna (a) é mostrada a imagem original do grão em cinza sobreposta pelo contorno produzido com um número finito de termos. Na coluna (b) são mostrados as amplitudes dos coeficientes em função do índice do harmônico. Na coluna (c) são mostrados os raios sintetizados com um número finito de termos em função do ângulo.

12.6.1 Descritores de forma

Na análise granulométrica existem os descritores de forma, que são atributos que caracterizam a geometria dos grãos, por meio dos quais pode se classificar e qualificar os grãos que compõem uma amostra. Segundo Barret (1980), os mais importantes são os denominados forma, arredondamento e textura, os quais, nesta ordem, qualificam o contorno do grão em nível crescente de detalhes. A forma mede o

formato geral do grão, o arredondamento dá uma medida da suavidade do contorno e a textura exprime o comportamento de micro escala do contorno.

Em uma tentativa de definir quantitativamente os três descritores, Ehrlich & Weinberg (1970) propuseram uma medida denominada *coeficiente de rugosidade* e definida como

$$P_{jk} = \left[\frac{1}{2} \sum_{n=j}^k a_n^2 + b_n^2 \right]^{1/2}$$

(12.42)

onde a_n e b_n são os coeficientes da série de Fourier que descreve o contorno. Os índices j e k são escolhidos de tal modo a cobrirem uma faixa de índices dos harmônicos. Tipicamente, são escolhidas três faixas de índices, que cobrem, respectivamente os harmônicos de baixa, média e alta ordem.

Por exemplo, para os dois grãos mostrados na Figura 12.27, calculamos três coeficientes de rugosidade, cujos resultados estão dispostos na própria figura.

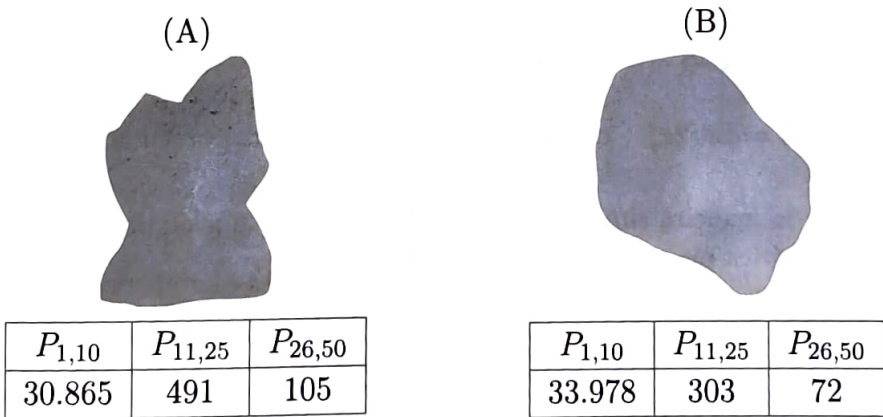


Figura 12.27: Os dois grãos em análise de rugosidade.

Observe que a razão entre os coeficientes $P_{11,25}$ e $P_{1,10}$ é sensivelmente menor no grão B do que no grão A. Isso quer dizer que na composição o contorno do grão B existe uma concentração mais alta de harmônicos de baixa ordem, indicando que o grão B é mais circular que o grão A. Similarmente, analisando a relação $P_{26,50}/P_{1,10}$, concluimos que o grão A é mais texturizado que o grão B.