Zadanie 206

Jadwiga Świerczyńska

5 stycznia 2022

Mamy dany szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{en!\}}{n}.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
\{en!\} &= \left\{ n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \right\} = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \right\} = \left\{ n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \right\} \\
&= \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2) \cdot \ldots \cdot k} \right\} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2) \cdot \ldots \cdot k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2) \ldots (n+k)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k} - 1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} - 1 \\
&= \frac{n+1}{n+1-1} - 1 = \frac{n+1-n}{n} = \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Wobec tego mamy

$$0 \leq \frac{\{en!\}}{n} \leq \frac{\frac{1}{n}}{n} = \frac{1}{n^2}.$$

Wiemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny. Wobec tego z kryterium porównawczego także szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{en!\}}{n}$ także jest zbieżny, co kończy rozwiązanie zadania. □