Zadanie 210

Jadwiga Świerczyńska

4 stycznia 2022

Mamy daną funkcję f ciągłą na $[0,1]$, taką że $f(0) = f(1)$. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Oznaczmy $g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)$ - oczywiście g jest określona na $\left[0, \frac{n-1}{n}\right]$ i jest ciągła na tym przedziale. Zauważmy, że jeśli $g(0) = 0$, to dla $x = 0$ mamy, że $f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$. Rozważmy zatem przypadek, gdy $g(x) \neq 0$ (bez straty ogólności $g(x) > 0$). Załóżmy nie wprost, że dla każdego $0 < k < n$ mamy $g\left(\frac{k}{n}\right) > 0$, czyli $f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right) > 0$, równoważne z $f\left(\frac{k}{n}\right) > f\left(\frac{k+1}{n}\right)$. Wobec tego otrzymujemy $f(0) > f\left(\frac{1}{n}\right) > \ldots > f\left(\frac{n-1}{n}\right) > f(1)$, czyli sprzeczność, ponieważ $f(0) = f(1)$. Zatem dla pewnego k, takiego że $0 < k < n$ zachodzi $g\left(\frac{k}{n}\right) < 0$. Z własności Darboux istnieje $x \in \left[0, \frac{k}{n}\right]$, taki że $g(x) = 0$, czyli $f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$. To kończy dowód. $\square$

Udowodnimy teraz, że stwierdzenie nie jest prawdziwe dla dowolnego $c \in (0,1)$. Niech $f(x) = \sin(2\pi x)$. Oczywiście f jest ciągła na $[0,1]$. Weźmy $c = \frac{3}{4}$. Wówczas dla $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ mamy:

- jeśli $x = 0$, to $f(x) = 0$, natomiast $f(x + \frac{3}{4}) = f(\frac{3}{4}) = \sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$,
- jeśli $x > 0$, to $f(x) > 0$, natomiast $x + \frac{3}{4} > \frac{3}{4}$. Stąd $\sin\left(2\pi\left(x + \frac{3}{4}\right)\right) = \sin\left(2\pi x + \frac{3\pi}{2}\right) \leq 0$.

Zatem dla każdego $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ mamy, że $f(x) \neq f(x + c)$, co kończy dowód. $\square$