Pracownia z Analizy numerycznej (M)

Sprawozdanie do zadania **P1.4**

Jadwiga Świerczyńska

Wrocław, 18.11.2022 r.

1 Wstęp

Ciągi, czyli funkcje ze zbioru liczb naturalnych w pewien inny zbiór, są używane w niemal każdej nauce ścisłej, a w szczególności są podstawą analizy matematycznej. Wyznaczanie kolejnych wyrazów ciągu może mieć wieloraki cel - na przykład może posłużyć do przybliżania wartości granicy ciągu.

Wiele ciągów wyraża się skomplikowanym wzorem, przez to obliczanie ich wyrazów tradycyjnie tj. bez użycia komputera, może nastręczyć trudności. Badanie różnych sposobów jest zatem zadaniem nie tylko ważnym, ale także bardzo często spotykanym. Niestety metody używające komputera niosą ze sobą pewne ryzyko błędu numerycznego. W wielu przypadkach nie jest możliwe uzyskanie dokładnego wyniku, aczkolwiek programista może wpłynąć na wielkość odchylenia od prawdziwej wartości.

W poniższym sprawozdaniu porównano różne metody obliczania kolejnych wyrazów ciągu zadanego następującym wzorem jawnym:

$$x_k = A(1+\sqrt{3})^k + B(1-\sqrt{3})^k. \tag{WJaw}$$

W badaniach użyto wzoru jawnego oraz rekurencyjnego, którego poprawność jest opisana w rozdziale 2. Wyrazy ciągu obliczano przy pomocy programu napisanego w języku `Julia` w arytmetykach `single` (32 bity) i `double` (64 bity).

2 Zależność rekurencyjna

W tej sekcji udowodnimy, że zależność rekurencyjna, z której korzystamy, jest poprawna oraz wyliczymy stałe A, B dla ustalonych x_1, x_2.

Lemat 2.1. *Dla dowolnych stałych A, B ciąg*

$$x_k = A(1+\sqrt{3})^k + B(1-\sqrt{3})^k$$

spełnia związek rekurencyjny

$$x_k = 2(x_{k-1} + x_{k-2}) \qquad (k = 3, 4, \ldots). \tag{WRek}$$

Dowód. Korzystając ze wzoru jawnego na ciąg x_k, przeprowadzamy następujący rachunek.

$$\begin{aligned} 2(x_{k-1} + x_{k-2}) &\overset{\text{def.}}{=} 2\left(A(1+\sqrt{3})^{k-1} + B(1-\sqrt{3})^{k-1} + A(1+\sqrt{3})^{k-2} + B(1-\sqrt{3})^{k-2}\right) \\ &= 2\left(A(1+\sqrt{3})^{k-2}(1+\sqrt{3}+1) + B(1-\sqrt{3})^{k-2}(1-\sqrt{3}+1)\right) \\ &= 2\left(A(1+\sqrt{3})^{k-2}\cdot\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})^2 + B(1-\sqrt{3})^{k-2}\cdot\frac{1}{2}(1-\sqrt{3})^2\right) \\ &= A(1+\sqrt{3})^k + B(1-\sqrt{3})^k \overset{\text{def.}}{=} x_k \end{aligned}$$

□

Lemat 2.2. *Jeśli dla ciągu $x_k = A(1+\sqrt{3})^k + B(1-\sqrt{3})^k$ mamy $x_1 = 1$ i $x_2 = 1-\sqrt{3}$, to $A = 0$ oraz $B = (1-\sqrt{3})^{-1}$.*

Dowód. Mamy następujący układ równań:

$$\begin{aligned} x_1 &= A(1+\sqrt{3}) + B(1-\sqrt{3}) \\ x_2 &= A(1+\sqrt{3})^2 + B(1-\sqrt{3})^2. \end{aligned}$$

Obliczmy wyznacznik macierzy $W = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ (1+\sqrt{3})^2 & (1-\sqrt{3})^2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det W = \begin{vmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ (1+\sqrt{3})^2 & (1-\sqrt{3})^2 \end{vmatrix} &= (1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})^2 - (1+\sqrt{3})^2(1-\sqrt{3}) \\ &= -2(1-\sqrt{3}) + 2(1+\sqrt{3}) = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

Wykorzystując wzory Cramera, otrzymujemy:

$$A = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & 1-\sqrt{3} \\ x_2 & (1-\sqrt{3})^2 \end{vmatrix}}{\det W} = \frac{x_1(1-\sqrt{3})^2 - x_2(1-\sqrt{3})}{4\sqrt{3}} = \frac{x_1(-2-2\sqrt{3}) - x_2(1-\sqrt{3})}{4\sqrt{3}}$$

oraz

$$B = \frac{\begin{vmatrix} 1+\sqrt{3} & x_1 \\ (1+\sqrt{3})^2 & x_2 \end{vmatrix}}{\det W} = \frac{x_2(1+\sqrt{3}) - x_1(1+\sqrt{3})^2}{4\sqrt{3}} = \frac{x_2(1+\sqrt{3}) - x_1(4+2\sqrt{3})}{4\sqrt{3}}$$

.

W przypadku, gdy $x_1 = 1$ i $x_2 = 1 - \sqrt{3}$:

$$A = \frac{1(-2-2\sqrt{3}) - (1-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{4\sqrt{3}} = \frac{-2-2\sqrt{3}+2+2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = 0$$

oraz

$$\begin{aligned} B &= \frac{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) - 1(4+2\sqrt{3})}{4\sqrt{3}} = \frac{-2-4-2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{-6-2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \\ &= \frac{-2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{4\sqrt{3}} = \frac{-(\sqrt{3}+1)}{2} = \frac{2}{2(1-\sqrt{3})} = \frac{1}{1-\sqrt{3}} \end{aligned}$$

□

Lemat 2.3. *Dla stałych $A = 0$ oraz $B = (1-\sqrt{3})^{-1}$ granica ciągu x_k jest równa 0. Ponadto, zbieżność ciągu x_n jest liniowa.*

Dowód. Zauważmy, że dla powyższych A, B mamy $x_k = (1-\sqrt{3})^{k-1}$. Ponadto zachodzi

$$\left|1-\sqrt{3}\right| < 1.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} (1-\sqrt{3})^{k-1} = 0.$$

Aby pokazać, że zbieżność ciągu jest liniowa, zauważmy, że:

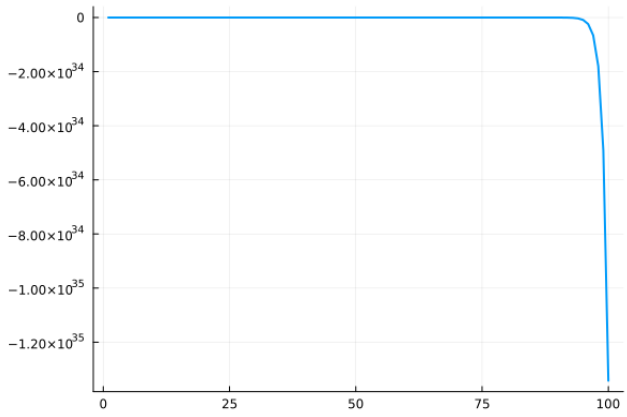
$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left|(1-\sqrt{3})^{k+1}\right|}{\left|(1-\sqrt{3})^{k}\right|} = \left|1-\sqrt{3}\right|.$$

Ponadto $0 < \left|1-\sqrt{3}\right| < 1$, co dowodzi liniowej zbieżności. □

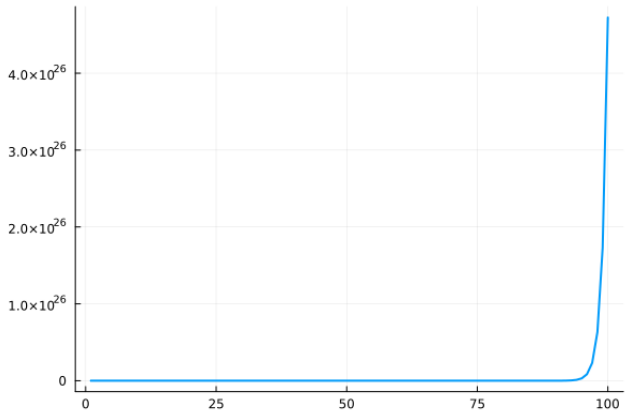
3 Obliczanie wyrazów ciągu

3.1 Sposób 1 – wzór rekurencyjny

Wartości kolejnych wyrazów ciągu mogą zostać wyznaczone przy użyciu udowodnionego wzoru rekurencyjnego (WRek).



Rysunek 1: Wyrazy ciągu obliczone przy użyciu wzoru rekurencyjnego w arytmetyce 32–bitowej.



Rysunek 2: Wyrazy ciągu obliczone przy użyciu wzoru rekurencyjnego w arytmetyce 64–bitowej.

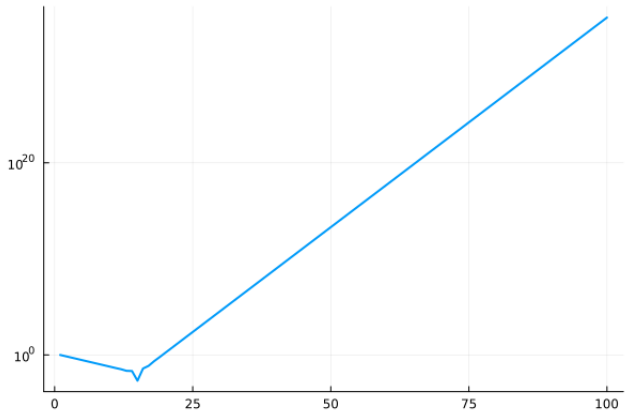
Można zauważyć, że zaczynają się robić bardzo duże co do wartości bezwzględnej. Przyjrzyjmy się temu uważniej.

i	x_i
10	-0.06044674
11	0.044008255
12	-0.03287697
13	0.022262573
14	-0.02122879
15	0.002067566
16	-0.03832245
17	-0.072509766
18	-0.22166443
19	-0.5883484
20	-1.6200256
$\vdots$	$\vdots$
96	$-2.4096418 \cdot 10^{33}$
97	$-6.5832636 \cdot 10^{33}$
98	$-1.798581 \cdot 10^{34}$
99	$-4.913815 \cdot 10^{34}$
100	$-1.3424792 \cdot 10^{35}$

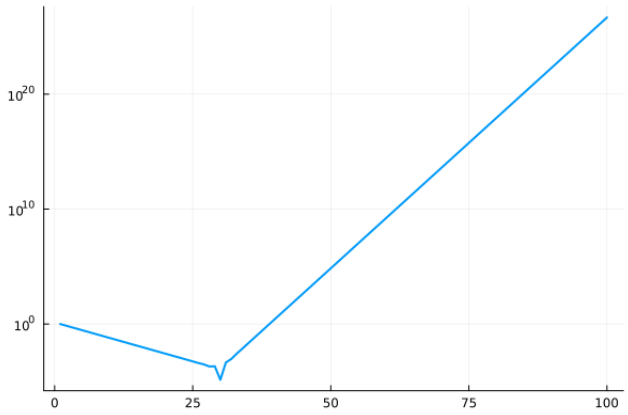
Tabela 1: Obliczanie wyrazów ciągu przy użyciu arytmetyki 32–bitowej.

i	x_i
25	0.0005619005387416109
26	-0.00040833884304447565
27	0.0003071233913942706
28	-0.00020243090330041014
29	0.0002093849761877209
30	0.0000139081457746215
31	0.0004465862439246848
32	0.0009209887793986127
33	0.002735150046646595
34	0.007312277652090415
35	0.02009485539747402
$\vdots$	$\vdots$
96	$8.479372232653297 \cdot 10^{24}$
97	$2.3166075755897554 \cdot 10^{25}$
98	$6.3290895977101705 \cdot 10^{25}$
99	$1.7291394346599854 \cdot 10^{26}$
100	$4.724096788862005 \cdot 10^{26}$

Tabela 2: Obliczanie wyrazów ciągu przy użyciu arytmetyki 64–bitowej.



Rysunek 3: Wykres funkcji $f(n) = \ln(|x_n|)$, gdzie x_n obliczono przy użyciu wzoru rekurencyjnego w arytmetyce 32–bitowej.



Rysunek 4: Wykres funkcji $f(n) = \ln(|x_n|)$, gdzie x_n obliczono przy użyciu wzoru rekurencyjnego w arytmetyce 64–bitowej.

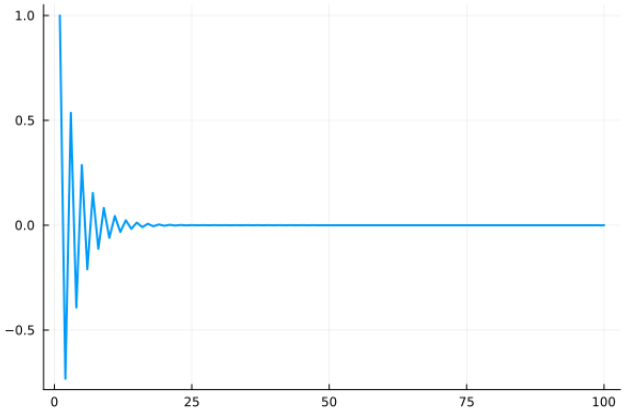
Jak widać w tabeli w arytmetyce 32–bitowej wyrazy o indeksach 16 i 17 mają ten sam znak, natomiast w arytmetyce 64–bitowej dzieje się tak dla wyrazów o indeksach 29 i 30. Na wykresach 3 i 4 możmy zaobserwować, że rzeczywiście dla wyrazów o mniejszych indeksach obserwujemy, że maleją one z szybkością wykładniczą, natomiast od tego miejsca zaczynają wykładniczo rosnąć.

Istotnie, łatwo zauważyć, że gdy x_i oraz x_{i+1} mają ten sam znak, to także x_{i+2} będzie tego samego znaku. Ponadto na mocy wzoru (WRek) otrzymamy, że $|x_{i+2}| = 2\,|x_i + x_{i+1}| \geqslant 2\,|x_{i+1}|$.

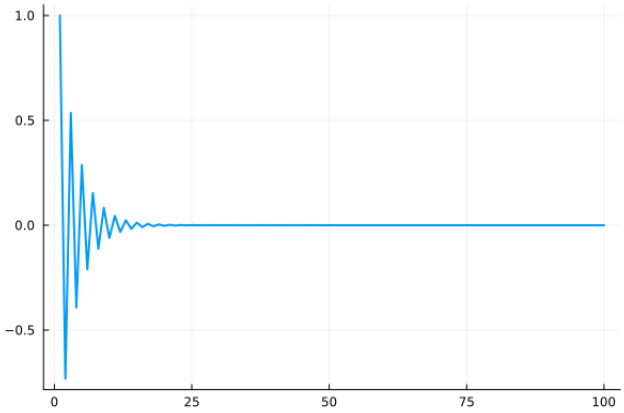
Ze wzoru (WJaw) można wywnioskować, że dla dowolnego i znak x_i powinien być różny od znaku x_{i+1}. Stąd wnioskujemy, że jesteśmy świadkami poważnego błędu numerycznego, który sprawia, że ciąg x_k zamiast zbiegać do 0, zaczyna rozbiegać do $\pm\infty$.

3.2 Sposób 2 – wzór jawny

W tej sekcji skorzystamy ze wzoru (WJaw) dla stałych A, B wyliczonych w Lemacie 2.2.



Rysunek 5: Wyrazy ciągu obliczone przy użyciu wzoru jawnego w arytmetyce 32–bitowej.



Rysunek 6: Wyrazy ciągu obliczone przy użyciu wzoru jawnego w arytmetyce 64–bitowej.

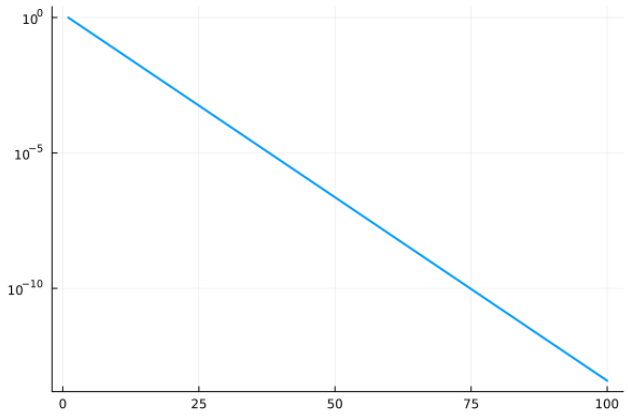
Z wykresu odczytujemy, że tak obliczone wyrazy ciągu zbiegają do 0. Przyjrzyjmy się bliżej wynikom.

i	x_i
90	$-8.7936765 \cdot 10^{-13}$
91	$6.437418 \cdot 10^{-13}$
92	$-4.712517 \cdot 10^{-13}$
93	$3.4498023 \cdot 10^{-13}$
94	$-2.5254305 \cdot 10^{-13}$
95	$1.8487436 \cdot 10^{-13}$
96	$-1.3533743 \cdot 10^{-13}$
97	$9.907387 \cdot 10^{-14}$
98	$-7.2527115 \cdot 10^{-14}$
99	$5.3093536 \cdot 10^{-14}$
100	$-3.8867167 \cdot 10^{-14}$

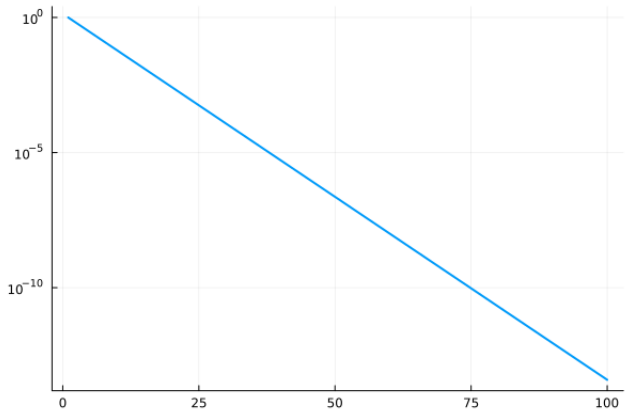
Tabela 3: Obliczanie wyrazów ciągu przy użyciu arytmetyki 32–bitowej

i	x_i
90	$-8.793645256554909 \cdot 10^{-13}$
91	$6.437395111535248 \cdot 10^{-13}$
92	$-4.712500290039321 \cdot 10^{-13}$
93	$3.4497896429918525 \cdot 10^{-13}$
94	$-2.525421294094934 \cdot 10^{-13}$
95	$1.8487366977938358 \cdot 10^{-13}$
96	$-1.3533691926021965 \cdot 10^{-13}$
97	$9.907350103832773 \cdot 10^{-14}$
98	$-7.252683644378381 \cdot 10^{-14}$
99	$5.309332918908782 \cdot 10^{-14}$
100	$-3.8867014509391976 \cdot 10^{-14}$

Tabela 4: Obliczanie wyrazów ciągu przy użyciu arytmetyki 64–bitowej



Rysunek 7: Wykres funkcji $f(n) = \ln(|x_n|)$, gdzie x_n obliczono przy użyciu wzoru jawnego w arytmetyce 32–bitowej.



Rysunek 8: Wykres funkcji $f(n) = \ln(|x_n|)$, gdzie x_n obliczono przy użyciu wzoru jawnego w arytmetyce 32–bitowej.

Istotnie ten wzór podaje nam wyrazy ciągu z dobrym przybliżeniem. Widzimy, że ciąg maleje z szybkością wykładniczą, a jego zbieżność do 0 jest liniowa. Taki wynik mogliśmy przypuszczać, ponieważ nie wykonujemy tutaj żadnych „ryzykownych” numerycznie operacji.

3.3 Wyjaśnienie

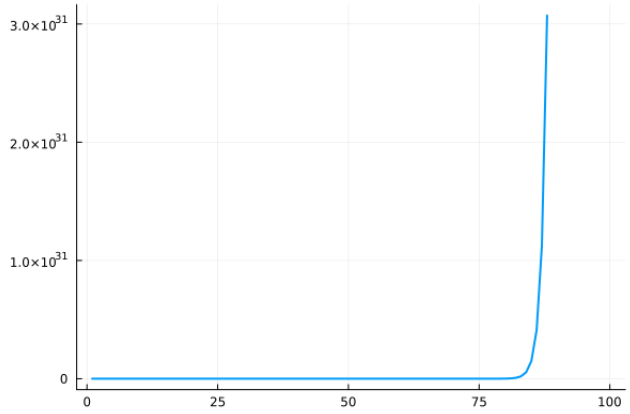
Należy zadać sobie pytanie, dlaczego w sposobie pierwszym błąd był aż tak drastyczny. Zauważmy, że gdy mamy $x_2 = 1 - \sqrt{3}$, to w komputerze jest tak naprawdę $x_2 = \mathrm{fl}(1 - \sqrt{3})$. Wobec tego wyrazy ciągu, które obliczamy korzystając z uprzednio wyliczonych wyrazów, są obarczone błędem numerycznym. Oszacujemy wielkość $\tilde{A}$ we wzorze rekurencyjnym z błędem wynikającym z zaokrągleń w reprezentacji maszynowej, a w tym celu skorzystamy ze wzorów uzyskanych w dowodzie Lematu 2.2.

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \frac{\mathrm{fl}(x_1)(-2-2\sqrt{3}) - \mathrm{fl}(x_2)(1-\sqrt{3})}{4\sqrt{3}} = \frac{-2-2\sqrt{3}-(1-\sqrt{3})(1+\epsilon)(1-\sqrt{3})}{4\sqrt{3}} \\ &= \frac{-2-2\sqrt{3}-(1-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})-\epsilon(-2-2\sqrt{3})}{4\sqrt{3}} \\ &= \frac{-\epsilon(-2-2\sqrt{3})}{4\sqrt{3}} = \frac{\epsilon(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}},\end{aligned}$$

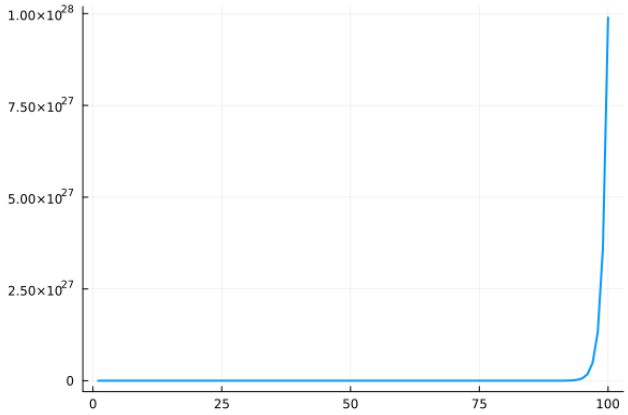
gdzie $|\epsilon| \leqslant 2^{-t-1}$. Wobec tego

$$|\epsilon| > \left|\tilde{A}\right| > \left|\frac{\epsilon}{2}\right| > 0,$$

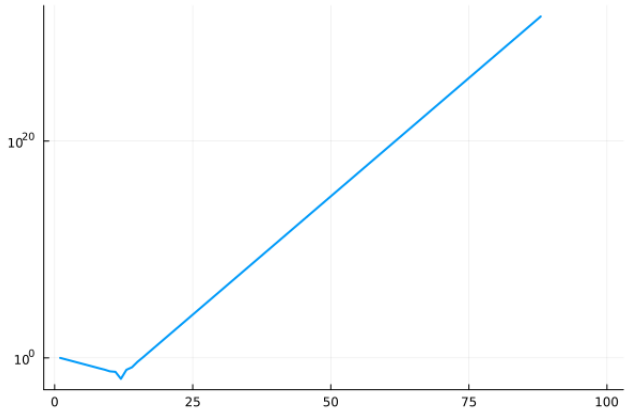
ponieważ $\epsilon \neq 0$.
W szczególności $\tilde{A} \neq 0$. Wobec tego zaobserwujmy, co się dzieje, gdy $\tilde{A} \neq 0$. Przyjmijmy $\tilde{A}$ bardzo małe co do wartości bezwzględnej, na przykład $\tilde{A} = 2^{-t}$.



Rysunek 9: Wyrazy ciągu obliczone przy użyciu wzoru jawnego dla $\tilde{A} = 2^{-t}$ w arytmetyce 32–bitowej.

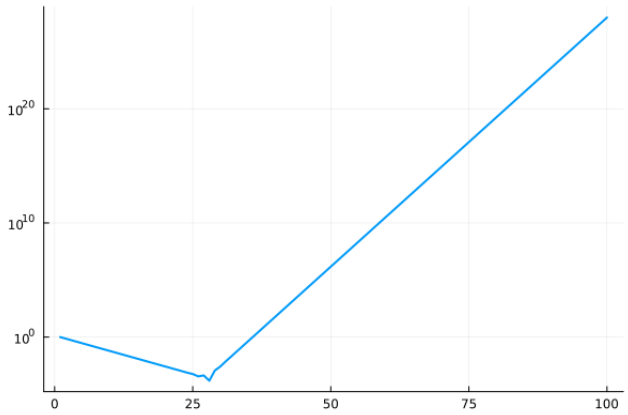


Rysunek 10: Wyrazy ciągu obliczone przy użyciu wzoru jawnego dla $\tilde{A} = 2^{-t}$ w arytmetyce 64–bitowej.



Rysunek 11: Wykres funkcji $f(n) = \ln(|x_n|)$, gdzie x_n obliczono przy użyciu wzoru jawnego w arytmetyce 32–bitowej dla $\tilde{A} = 2^{-t}$.

Istotnie nawet dla bardzo małego $\tilde{A} \neq 0$ widzimy, że ciąg rozbiega do ∞ i to z szybkością wykładniczą, co ilustrują wykresy 11 i 12. Możemy zauważyć, że są one zbliżone kształtem do wykresów 3 oraz 4. Wobec tego błąd numeryczny powstały w Sposobie 1 wynikał z zaokrąglenia maszynowego $x_2 = 1 - \sqrt{3}$.



Rysunek 12: Wykres funkcji $f(n) = \ln(|x_n|)$, gdzie x_n obliczono przy użyciu wzoru jawnego w arytmetyce 64–bitowej dla $\tilde{A} = 2^{-t}$.

4 Podsumowanie

Reasumując, wzór jawny i rekurencyny służący obliczaniu wyrazów ciągu x_n różnią się poprawnością numeryczną. Przy wzorze jawnym (WJaw) wykonujemy bezpieczne numerycznie operacje (wielokrotnie mnożymy). Nie powinno nas zatem dziwić, że uzyskujemy ciąg zbieżny do 0, czyli zgodny z oczekiwaniami.
Natomiast we wzorze rekurencyjnym (WRek) wyliczamy wyrazy ciągu również zadanego wzorem (WJaw), ale dla zmienionych stałych A, B – a zmiana wynika z błędu powstałego przy zaokrągleniu. Wobec tego składnik $(1+\sqrt{3})^k$ zaczyna rozbiegać do ∞, dominując składnik $(1-\sqrt{3})^k$, który zbiega do 0.
Zdecydowanie lepszy, bardziej poprawny wynik uzyskujemy przy wykorzystaniu wzoru jawnego (WJaw) do wyliczenia wyrazów ciągu x_n.