Zadanie 201

Jadwiga Świerczyńska

13 grudnia 2021

Szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \tag{2}$$

są zbieżne. Pokażemy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{3}$$

nie musi być zbieżny. Weźmy a_n takie, że

$$a_k = \frac{1}{\frac{k+1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{k+1}{2}}$$

gdy k jest nieparzyste oraz

$$a_k = 0$$

gdy k jest parzyste.

Wówczas mamy

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \cdot (-1)^{\frac{1+1}{2}} + 0 + \frac{1}{\frac{3+1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{3+1}{2}} + 0 + \frac{1}{\frac{5+1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{5+1}{2}} + 0 \\ + \frac{1}{\frac{7+1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{7+1}{2}} + 0 + \ldots + \frac{1}{\frac{k+1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{k+1}{2}} + 0 + \ldots = \\ = -1 + 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{4} + 0 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot (-1)^n\end{aligned} \tag{4}$$

Jako że $c_n = \frac{1}{n}$ jest ciągiem malejącym zbieżnym do 0 oraz sumy częściowe ciągu $b_n = (-1)^n$ są ograniczone, to z kryterium Dirichleta szereg (4) (a zatem także szereg (1)) jest zbieżny.

Pokażemy, że także szereg (2) jest zbieżny. Istotnie, mamy:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n &= (-1)^2 \cdot 1 \cdot (-1)^{\frac{1+1}{2}} + (-1)^3 \cdot 0 + (-1)^4 \cdot \frac{1}{\frac{3+1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{3+1}{2}} + \dots \\ &= -1 + 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{3} \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\end{aligned} \tag{5}$$

Wobec tego, jako że (1) jest zbieżny, to także (2) jest zbieżny.

Wystarczy teraz wykazać, że szereg $|a_n|$ jest rozbieżny.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| &= |-1| + |0| + \left|\frac{1}{2}\right| + |0| + \left|-\frac{1}{3}\right| + |0| + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty\end{aligned} \tag{6}$$

Zatem zbieżność (1) i (2) nie implikuje zbieżności (3). $\square$