Zadanie 112

Jadwiga Świerczyńska

15 grudnia 2021

Niech m będzie żądaną odległością, na którą chcemy wysunąć górną cegłę. Zauważmy, że gdy $m = 0$, to rozwiązanie jest oczywiste. Będziemy rozważać zatem $m > 0$. Weźmy $k \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\sum_{n=2}^{k-1} \frac{1}{n} < m \leq \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n}$$

Istnieje takie k, ponieważ

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Rozważmy wobec tego k cegieł ułożonych w następujący sposób: pierwsza cegła stoi na stole, druga jest wysunięta o $\frac{1}{k}$ względem pierwszej, trzecia o $\frac{1}{k-1}$ względem drugiej, ..., k-ta o $\frac{1}{2}$ względem $(k-1)$-tej. Wówczas ostatnia cegła jest wysunięta względem brzegu pierwszej o

$$\sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n} \geq m$$

Aby uzyskać żądaną odległość wystarczy przesunąć górną cegłę w lewo (przesunięcie będzie nie większe niż $\frac{1}{k}$, czyli możemy je wykonać, nie sprawiając, że przedostatnia cegła stanie się cegłą najbardziej wysuniętą w prawo).

Wystarczy wykazać, że przedstawione ułożenie spełnia prawa fizyki. Oznacza to, że środek masy tej konstrukcji nie może być położony o dalej niż $\frac{1}{2}$ od prawego brzegu dolnej cegły. Oszacujmy zatem współrzędną środka masy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{k} \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{k-i+2} &= \frac{1}{k} \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n} \cdot (n-1) = \frac{1}{k} \sum_{n=2}^{k} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{k-1}{k} - \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

W przedstawionym rachunku nie uwzględniliśmy ewentualnego przesunięcia w lewo górnej cegły - jednak to może sprawić tylko, że środek masy przesunie się w lewo, dzięki czemu nie wpłynie na stabilność konstrukcji. To kończy dowód. □