# Miara i całka

## Zadanie domowe

Jadwiga Świerczyńska

### Wybrane zadania

**Problem 1.11.B**
Udowodnić, że dla dowolnego zbioru $X$, $|X| \leqslant \mathfrak{c}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w $\mathcal{P}(X)$ przeliczalna rodzina zbiorów $\mathcal{F}$, taka że $\sigma(\mathcal{F})$ zawiera wszystkie punkty.

**Problem 1.11.F**
Przeprowadzić następującą konstrukcję zbioru Vitali'ego: Dla $x, y \in [0,1)$, niech

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Sprawdzić, że $\sim$ jest relacją równoważności. Niech $Z$ będzie zbiorem, który z każdej klasy abstrakcji tej relacji wybiera dokładnie jeden element. Sprawdzić, że $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}(Z \oplus q) = [0,1)$, gdzie $\oplus$ oznacza dodawanie mod 1. Zauważyć, że $\lambda$ jest niezmiennicza na $[0,1)$ względem działania $\oplus$; wywnioskować stąd, że powyższy zbiór $Z$ nie jest mierzalny w sensie Lebesgue'a.

**Problem 1.11.H i 1.11.I**
(*Twierdzenie Steinhausa*). Jeśli $A \subseteq \mathbb{R}$ jest mierzalny i $\lambda(A) > 0$ to zbiór $A - A$ (różnica kompleksowa) zawiera odcinek postaci $(-\delta, \delta)$ dla pewnego $\delta > 0$.

Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie takim zbiorem mierzalnym, że $\lambda(A \triangle (x + A) = 0$ dla każdej liczby wymiernej $x$. Udowodnić, że $\lambda(A) = 0$ lub $\lambda(\mathbb{R} \setminus A) = 0$.

**Problem 2.6.C**
Wykazać, że nie istnieje ciąg funkcji ciągłych $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zbieżny punktowo do funkcji $\chi_{\mathbb{Q}}$ (czyli funkcji charakterystycznej zbioru $\mathbb{Q}$).

**Problem LD(A)**
Niech $\mu$ i $\nu$ będą dwiema bezatomowymi miarami probabilistycznymi, określonymi na borelowskich podzbiorach $[0,1]$. Udowodnić, że istnieje przedział $[a,b] \subseteq [0,1]$, taki że

$$\mu([a,b]) = \nu([a,b]) = \frac{1}{2}.$$

9 stycznia 2023

# Spis treści

# 1 Problem 1.11.B

## 1.1 Treść

Udowodnić, że dla dowolnego zbioru $X$, $|X| \leqslant \mathfrak{c}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w $\mathcal{P}(X)$ przeliczalna rodzina zbiorów $\mathcal{F}$, taka że $\sigma(\mathcal{F})$ zawiera wszystkie punkty.

## 1.2 Rozwiązanie

Ustalmy dowolny zbiór $X$. Przeprowadzimy dowód przez pokazanie implikacji w obie strony.

($\Longrightarrow$) Ustalmy $\varphi : X \to \mathbb{R}$, taką że $\varphi$ jest różnowartościowa. Oznaczmy

$$\mathcal{F} = \{\varphi^{-1}[(a,b)] : a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Wówczas $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Ponadto, ponieważ istnieje funkcja różnowartościowa z $\mathcal{F}$ w $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, więc $|\mathcal{F}| \leqslant \aleph_0$. Zatem $\mathcal{F}$ jest przeliczalną rodziną podzbiorów $X$. Wystarczy teraz pokazać, że $\sigma(\mathcal{F})$ zawiera wszystkie punkty.
Ustalmy dowolny $x \in X$ oraz $a \in \mathbb{R}$, takie że $\varphi(x) = a$. Niech $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$, takie że $a_n \nearrow a$ oraz $b_n \searrow a$. Oznaczmy $A_n = \varphi^{-1}[(a_n, b_n)]$. Wówczas mamy

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots,$$

ponieważ $(a_1, b_1) \supseteq (a_2, b_2) \supseteq (a_3, b_3) \supseteq \ldots$. Niech $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Oczywiście $A \in \sigma(\mathcal{F})$. Ponadto dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy $a \in (a_n, b_n)$, a więc $x \in A_n$. Natomiast dla dowolnego $y \neq x$ mamy $\varphi(y) \neq \varphi(x)$ (bez straty ogólności $\varphi(y) < \varphi(x)$). Istnieje zatem $n \in \mathbb{N}$, takie że $\varphi(y) < a_n < a$. Wobec tego $y \notin A_n$, a co za tym idzie $y \notin A$. Zatem $A = \varphi^{-1}[\{a\}] = \{x\}$. Otrzymujemy ostatecznie, że $\{x\} \in \sigma(\mathcal{F})$, co kończy dowód. □

($\Longleftarrow$) Ustalmy $\mathcal{F}$ – przeliczalną rodzinę podzbiorów $X$, taką że $\sigma(\mathcal{F})$ zawiera wszystkie punkty. Udowodnimy następujący lemat.

**Lemat 1.1** (Rekurencyjna konstrukcja $\sigma$–ciała)**.** *Niech $B_0 = \mathcal{F} \cup \{X\}$ oraz*

$$B_\alpha = \left\{ \bigcup \mathcal{R} : |\mathcal{R}| \leqslant \aleph_0 \textit{ i dla dowolnego } A \in \mathcal{R} \textit{ istnieje } \beta < \alpha\textit{, takie że } A \in B_\beta \textit{ lub } X \setminus A \in B_\beta \right\}.$$

*Wówczas*

$$\bigcup_{\alpha < \aleph_1} B_\alpha = \sigma(\mathcal{F}).$$

*Dowód.* Pokażemy zawieranie w obie strony.
($\subseteq$). Przeprowadzimy dowód indukcyjny względem $\alpha < \aleph_1$.

- Dla $\alpha = 0$ mamy $B_\alpha = B_0 = \mathcal{F} \cup \{X\} \subseteq \sigma(\mathcal{F})$.
- (krok następnikowy). Załóżmy, że $B_\beta \subseteq \sigma(\mathcal{F})$ dla dowolnego $\beta \leqslant \alpha$. Pokażemy, że $B_{\alpha+1} \subseteq \sigma(\mathcal{F})$. Ustalmy dowolne $S = \bigcup \mathcal{R} \in B_{\alpha+1}$. Wówczas dla dowolnego $A \in \mathcal{R}$ istnieje $\beta < \alpha+1$, taka że $A \in B_\beta$ lub $X \setminus A \in B_\beta$. Wobec tego $A \in \sigma(\mathcal{F})$ z założenia indukcyjnego. Zatem $S = \bigcup \mathcal{R}$ jako przeliczalna suma zbiorów z $\sigma$–ciała także należy do $\sigma(\mathcal{F})$.
- (krok graniczny). Załóżmy, że $B_\beta \subseteq \sigma(\mathcal{F})$ dla dowolnego $\beta < \alpha$ i $\alpha$ – graniczna liczba porządkowa. Pokażemy, że $B_\alpha \subseteq \sigma(\mathcal{F})$. Ustalmy dowolne $S = \bigcup \mathcal{R} \in B_\alpha$. Wówczas dla dowolnego $A \in \mathcal{R}$ istnieje $\beta < \alpha$, taka że $A \in B_\beta$ lub $X \setminus A \in B_\beta$. Wobec tego $A \in \sigma(\mathcal{F})$ z założenia indukcyjnego. Zatem $S = \bigcup \mathcal{R}$ jako przeliczalna suma zbiorów z $\sigma$–ciała także należy do $\sigma(\mathcal{F})$.

Wobec tego dla dowolnego $\alpha < \aleph_1$ mamy $B_\alpha \subseteq \sigma(\mathcal{F})$. Zatem $\bigcup_{\alpha<\aleph_1} B_\alpha \subseteq \sigma(\mathcal{F})$.

($\supseteq$). Wystarczy pokazać, że

1. $\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{\alpha<\aleph_1} B_\alpha$
2. $\bigcup_{\alpha<\aleph_1} B_\alpha$ jest $\sigma$–ciałem.

Oczywiście (1) wynika z tego, że $B_0 = \mathcal{F} \cup \{X\}$.
Pokażemy teraz (2). Oczywiście $X \in \bigcup_{\alpha<\aleph_1} B_\alpha$. Zauważmy, że z definicji zbiorów $B_\alpha$ wynika, że dla $\delta < \eta$ mamy $B_\delta \subseteq B_\eta$. Ustalmy dowolne $A, B, A_n \in \bigcup_{\alpha<\aleph_1} B_\alpha$. Niech $\beta_a < \aleph_1$, takie że $A \in B_{\beta_a}$ (analogicznie określmy $\beta_b$ dla $B$ i $\alpha_n$ dla $A_n$). Wówczas

- Niech $\gamma = max\{\beta_a, \beta_b\}$. Mamy $X \setminus (A \setminus B) = (X \setminus A) \cup B \in B_{\gamma+1}$ oraz $\gamma + 1 < \gamma + 2 < \aleph_1$ (ponieważ $\aleph_1$ jest graniczną liczbą porządkową). Wobec tego
$$A \setminus B \in B_{\gamma+2} \subseteq \bigcup_{\alpha<\aleph_1} B_\alpha.$$
- Niech $\gamma = sup\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$. Wtedy $\gamma < \aleph_1$ (ponieważ ciąg $\alpha_n$ jest ograniczony w $\aleph_1$, jako że jest ciągiem o długości $\aleph_0 < \aleph_1$ oraz $\aleph_1$ jest regularną liczbą kardynalną). Wobec tego
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in B_{\gamma+1} \subseteq \bigcup_{\alpha<\aleph_1} B_\alpha.$$

Zatem $\bigcup_{\alpha<\aleph_1} B_\alpha$ jest $\sigma$–ciałem, a więc
$$\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \bigcup_{\alpha<\aleph_1} B_\alpha.$$
□

**Lemat 1.2** (moc $\sigma$–ciała)**.** *Dla zbiorów $B_\alpha$ określonych jak w 1.1 mamy*
$$|B_\alpha| \leqslant |\mathcal{F}|^{\aleph_0} \leqslant \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c},$$
*a zatem*
$$\left|\bigcup_{\alpha<\aleph_1} B_\alpha\right| \leqslant \aleph_1 \cdot \mathfrak{c} \leqslant \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}.$$

*Dowód.* Dowód przeprowadzimy indukcyjnie względem $\alpha < \aleph_1$.

- $\alpha = 0$. Wówczas $|B_\alpha| = |B_0| = |\mathcal{F} \cup \{X\}| \leqslant \aleph_0 \leqslant \mathfrak{c}$.
- (krok następnikowy). Załóżmy, że teza lematu zachodzi dla dowolnego $\beta \leqslant \alpha$. Pokażemy, że zachodzi także dla $\alpha + 1$. Z definicji $B_{\alpha+1}$ mamy, że dowolny element zbioru $B_{\alpha+1}$ jest sumą pewnej przeliczalnej rodziny elementów (lub ich dopełnień) zbiorów $B_\beta$ dla $\beta \leqslant \alpha$. Wobec tego istnieje różnowartościowa funkcja z $B_{\alpha+1}$ w zbiór wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\bigcup_{\beta\leqslant\alpha} B_\beta \times \{0,1\}$ (zbiór $\{0,1\}$ odpowiada wybieraniu zbioru lub jego dopełnienia – dla mocy to nie będzie miało znaczenia, ale pozostawmy ten zapis dla zwiększenia czytelności). Wobec tego

$$
\begin{aligned}
|B_{\alpha+1}| &\leqslant \left| \bigcup_{\beta \leqslant \alpha} B_\beta \times \{0,1\} \right|^{\aleph_0} \leqslant (|\alpha+1| \cdot |B_\alpha| \cdot 2)^{\aleph_0} \overset{\text{zał. ind.}}{\leqslant} (\aleph_0 \cdot \mathfrak{c} \cdot 2)^{\aleph_0} \\
&\leqslant \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.
\end{aligned}
$$

- (krok graniczny) Załóżmy, że teza lematu zachodzi dla dowolnego $\beta < \alpha$ i $\alpha$ – graniczna liczba porządkowa. Pokażemy, że zachodzi także dla $\alpha$. Analogicznie jak wyżej mamy

$$
|B_\alpha| \leqslant \left| \bigcup_{\beta < \alpha} B_\beta \times \{0,1\} \right|^{\aleph_0} \overset{\text{zał. ind.}}{\leqslant} (|\alpha| \cdot \mathfrak{c} \cdot 2)^{\aleph_0} \leqslant (\aleph_0 \cdot \mathfrak{c} \cdot 2)^{\aleph_0} \leqslant \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.
$$

□

Wobec tego z lematów 1.1 oraz 1.2 wynika, że

$$|\sigma(\mathcal{F})| \leqslant \mathfrak{c},$$

a ponieważ dla dowolnego $x \in X$ mamy $\{x\} \in \sigma(\mathcal{F})$, więc

$$|X| \leqslant |\sigma(\mathcal{F})| \leqslant \mathfrak{c},$$

co kończy dowód. ■

# 2 Problem 1.11.F

## 2.1 Treść

Przeprowadzić następującą konstrukcję zbioru Vitali'ego: Dla $x, y \in [0, 1)$, niech

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

Sprawdzić, że $\sim$ jest relacją równoważności. Niech $Z$ będzie zbiorem, który z każdej klasy abstrakcji tej relacji wybiera dokładnie jeden element. Sprawdzić, że $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}(Z \oplus q) = [0, 1)$, gdzie $\oplus$ oznacza dodawanie mod 1. Zauważyć, że $\lambda$ jest niezmiennicza na $[0, 1)$ względem działania $\oplus$; wywnioskować stąd, że powyższy zbiór $Z$ nie jest mierzalny w sensie Lebesgue'a.

## 2.2 Rozwiązanie

Pokażemy najpierw, że $\sim$ jest relacją równoważności.

- (zwrotność). Ustalmy dowolny $x \in [0, 1)$. Wówczas $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$, czyli $x \sim x$.
- (symetryczność). Ustalmy dowolne $x, y \in [0, 1)$, takie że $x \sim y$. Wówczas $x - y \in \mathbb{Q}$, a zatem $y - x = -(x - y) \in \mathbb{Q}$, czyli $y \sim x$.
- (przechodniość). Ustalmy dowolne $x, y, z \in [0, 1)$, takie że $x \sim y$ oraz $y \sim z$. Mamy zatem $x - y = a \in \mathbb{Q}$ oraz $y - z = b \in \mathbb{Q}$. Wobec tego $x - z = (x - y) + (y - z) = a + b \in \mathbb{Q}$. Wobec tego $x \sim z$.

Zauważmy teraz, że

$$\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}(Z \oplus q) = [0, 1).$$

Inkluzja $\subseteq$ jest oczywista. Weźmy zatem dowolny $x \in [0, 1)$ i pokażemy, że $x \in \bigcup_{q\in\mathbb{Q}}(Z \oplus q)$. Niech $z \in Z$, taki że $z \sim x$. Wówczas $x - z = a \in \mathbb{Q}$, czyli

$$x = z + (x - z) = z \oplus (x - z) \in Z \oplus (x - z).$$

Oznaczmy

$$V = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1)}(Z \oplus q).$$

Mamy

$$\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}(Z \oplus q) = V.$$

Inkluzja $\supseteq$ jest oczywista. Ustalmy zatem dowolny $x \in \bigcup_{q\in\mathbb{Q}}(Z \oplus q)$. Wówczas $x = z \oplus q$ dla pewnego $z \in Z$ oraz $q \in \mathbb{Q}$. Oznaczmy $q = a + r$, gdzie $a \in \mathbb{Z}$ oraz $0 \leqslant r < 1$. Oczywiście mamy $x = z \oplus q = z \oplus r$ i $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$. Wobec tego

$$x \in (Z \oplus r) \subseteq V.$$

Ponadto suma $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1)}(Z \oplus q)$ jest rozłączna. Ustalmy dowolne $x \in V$. Niech $z_1, z_2 \in Z$, $q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$, takie że

$$x = z_1 \oplus q_1 = z_2 \oplus q_2.$$

Wówczas $x \sim z_1$ oraz $x \sim z_2$, czyli z przechodniości $\sim$ mamy $z_1 \sim z_2$. Ponieważ $Z$ jest selektorem klas abstrakcji $\sim$, więc $z_1 = z_2$. Ponadto części ułamkowe liczb $q_1, q_2$ są sobie równe. A ponieważ $q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$, więc $q_1 = q_2$.
Załóżmy nie wprost, że $Z$ jest mierzalny w sensie Lebesgue'a. Pokażemy teraz, że $\lambda(Z) = \lambda(Z \oplus q)$ dla dowolnego $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$. Oznaczmy

$$Z_n = \{x \in Z : n \leqslant x + q < n+1\} \text{ dla } n \in \mathbb{Z}.$$

Oczywiście $Z_i \cap Z_j = \emptyset$ dla $i \neq j$. Ponadto $Z_n \oplus q = Z_n + q - n$, czyli $\lambda(Z_n \oplus q) = \lambda(Z_n)$ . Dalej mamy $(Z_i \oplus q) \cap (Z_j \oplus q) = \emptyset$ dla $i \neq j$ – gdyby istniało $x = z_i \oplus q = z_j \oplus q$, gdzie $z_i \in Z_i$, $z_j \in Z_j$, to $z_i \sim z_j$, a zatem $z_i = z_j$, czyli sprzeczność z rozłącznością $Z_i$ i $Z_j$.
Otrzymujemy dalej (korzystając z niezmienniczości $\lambda$ na przesunięcia):

$$\begin{aligned}\lambda(Z \oplus q) &= \lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} Z_n \oplus q\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda\left(Z_n \oplus q\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda(Z_n) = \lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} Z_n\right) = \lambda(Z).\end{aligned}$$

Wówczas mamy

$$1 = \lambda([0,1)) = \lambda\left(V\right) = \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1)} \lambda(Z \oplus q) = \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1)} \lambda(Z).$$

Mamy dwie możliwości:

- $\lambda(Z) = 0$. Wtedy
$$1 = \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1)} \lambda(Z) = 0.$$

- $\lambda(Z) > 0$. Wtedy
$$1 = \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1)} \lambda(Z) = \infty.$$

W obu przypadkach uzyskujemy sprzeczność. Wobec tego $Z$ nie jest mierzalny w sensie Lebesgue'a. ■

# 3 Problem 1.11.H

## 3.1 Treść

Jeśli $A \subseteq \mathbb{R}$ jest mierzalny i $\lambda(A) > 0$ to zbiór $A - A$ (różnica kompleksowa) zawiera odcinek postaci $(-\delta, \delta)$ dla pewnego $\delta > 0$.

## 3.2 Rozwiązanie

Przytoczmy twierdzenie (w numeracji ze skryptu: 1.6.2):

**Twierdzenie 3.1.** *Jeżeli $A \in \mathfrak{L}$ oraz $\lambda(A) < \infty$, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją odcinki $(a_1, b_1)$, $(a_2, b_2)$, …, $(a_n, b_n)$, takie że*

$$\lambda\left(\left(\bigcup_{j=1}^{n}(a_j, b_j)\right) \triangle A\right) < \varepsilon.$$

Zauważmy, że bez straty ogólności możemy przyjąć, że odcinki w powyższym twierdzeniu są parami rozłączne i niepuste (ale może być $n = 0$).

**Lemat 3.2.** *W twierdzeniu 3.1 możemy przyjąć, że $\lambda(I) \leqslant \lambda(A)$, gdzie $I = \bigcup_{j=1}^{n}(a_j, b_j)$.*

*Dowód.* Istotnie, ustalmy $\varepsilon > 0$ oraz $I = \bigcup_{j=1}^{n}(a_j, b_j)$ – skończoną sumę przedziałów, taką że $\lambda(I \triangle A) < \varepsilon$. Gdyby $\lambda(A) < \varepsilon$, to wystarczy przyjąć $I' = \emptyset$. Załóżmy zatem, że $\lambda(I) > \lambda(A) \geqslant \varepsilon$. Wówczas istnieje $1 \leqslant k \leqslant n$ oraz $a_k \leqslant c_k < b_k$, takie że dla

$$I' = (c_k, b_k) \cup \bigcup_{j=k+1}^{n}(a_j, b_j)$$

mamy $\lambda(I') = \lambda(I) - \varepsilon$. Oczywiście

$$\varepsilon > \lambda(A \triangle I) \geqslant |\lambda(A) - \lambda(I)|,$$

a więc

$$\lambda(A) - \varepsilon < \lambda(I) < \lambda(A) + \varepsilon.$$

Wówczas mamy

$$\lambda(I') = \lambda(I) - \varepsilon < \lambda(A),$$

a ponadto

$$\lambda(A \triangle I') = \lambda(A \triangle I \triangle I \triangle I') \leqslant \lambda(A \triangle I) + \lambda(I \triangle I') \leqslant \varepsilon + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon.$$

Oczywiście $I'$ jest sumą niepustych, parami rozłącznych odcinków. Z dowolności $\varepsilon$ wynika teza lematu. □

**Lemat 3.3.** *Niech $A \subseteq \mathbb{R}$, taki że $\lambda(A) > 0$. Istnieje niepusty odcinek $(a, b)$, taki że*

$$\frac{3}{4}\lambda((a, b)) \leqslant \lambda(A \cap (a, b)).$$

*Dowód.* Przyjmijmy, że $\lambda(A) < \infty$. Wystarczy bowiem znaleźć $n \in \mathbb{N}$, takie że $\lambda(A \cap (-n, n)) > 0$ – a takie $n$ istnieje na mocy ciągłości z dołu $\lambda$. Ustalmy zatem $I = \bigcup_{j=1}^{n}(a_j, b_j)$ – sumę rozłącznych niepustych odcinków, taką że $\lambda(I \triangle A) < \frac{\lambda(A)}{4}$ oraz $\lambda(I) \leqslant \lambda(A)$. Wówczas oczywiście $I \neq \emptyset$. Oznaczmy $I_j = (a_j, b_j)$. Mamy

$$\lambda(A \setminus I) \leqslant \lambda(A \triangle I) < \frac{\lambda(A)}{4},$$

a zatem

$$\lambda(A \cap I) = \lambda(A) - \lambda(A \setminus I) > \frac{3\lambda(A)}{4}.$$

Gdyby dla dowolnego $j$ zachodziło $\frac{3}{4}\lambda(I_j) > \lambda(A \cap I_j)$, to

$$\frac{3}{4}\lambda(I) = \frac{3}{4}\sum_{j=1}^{n}\lambda(I_j) > \sum_{j=1}^{n}\lambda(A \cap I_j) = \lambda(A \cap \bigcup_{j=1}^{n} I_j) = \lambda(A \cap I) > \frac{3\lambda(A)}{4},$$

a zatem $\lambda(I) > \lambda(A)$ – czyli sprzeczność.

□

Ustalmy zatem zbiór mierzalny $A$, taki że $\lambda(A) > 0$. Niech $a, b \in \mathbb{R}$, takie że $a < b$ i

$$\frac{3}{4}\lambda((a, b)) \leqslant \lambda(A \cap (a, b)).$$

Oznaczmy

$$S = (a, b) \cap A.$$

Przyjmijmy $\delta = \frac{1}{8}\lambda((a, b))$. Gdyby zachodziło $(-\delta, \delta) \not\subseteq A - A$, to istniałoby $\eta \in (-\delta, \delta)$ (bez straty ogólności $\eta > 0$), takie że dla dowolnego $x \in S$ mamy $x - \eta \notin S$. Wobec tego

$$(S - \eta) \cap S = \emptyset.$$

Oznaczmy teraz $S' = ((a + \eta, b) \cap A) \subseteq S$. A zatem

$$(S' - \eta) \cap S = \emptyset.$$

Oczywiście

$$(S' - \eta) \subseteq (a, b).$$

Ponadto, jako że $\lambda$ jest niezmiennicza na przesunięcia, mamy

$$\begin{aligned}\lambda(S' - \eta) = \lambda(S') = \lambda((a + \eta, b) \cap A) &\geqslant \lambda((a, b) \cap A) - \lambda((a, a + \eta)) \\ = \lambda(S) - \eta &\geqslant \lambda(S) - \delta.\end{aligned}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned}\lambda((a, b)) &\geqslant \lambda((S' - \eta) \cup S) = \lambda(S' - \eta) + \lambda(S) = \lambda(S') + \lambda(S) \geqslant 2\lambda(S) - \delta \\ &\geqslant 2\frac{3}{4}\lambda((a, b)) - \delta = \frac{3}{2}\lambda((a, b)) - \frac{1}{8}\lambda((a, b)) = \frac{11}{8}\lambda((a, b)).\end{aligned}$$

Otrzymana sprzeczność oznacza, że $(-\delta, \delta) \subseteq S - S \subseteq A - A$, co kończy dowód. ■

# 4 Problem 1.11.I

## 4.1 Treść

Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie takim zbiorem mierzalnym, że $\lambda(A \triangle (x+A)) = 0$ dla każdej liczby wymiernej $x$. Udowodnić, że $\lambda(A) = 0$ lub $\lambda(\mathbb{R} \setminus A) = 0$.

## 4.2 Rozwiązanie

Najpierw udowodnimy następujący lemat.

**Lemat 4.1.** *Niech $A \subseteq \mathbb{R}$, taki że $\lambda(A \triangle (x + A)) = 0$ dla każdej liczby wymiernej $x$. Dla dowolnych $p, q \in \mathbb{Q}$, takich że $p < q$, mamy*

$$\lambda(A \cap (p, q)) = \lambda(A \cap (0, q - p)).$$

*Dowód.* Ustalmy $p, q \in \mathbb{Q}$, takie że $p < q$. Wówczas mamy

$$A \cap (p, q) = (A - p) \cap (0, q - p).$$

Dalej otrzymujemy (z założenia o $A$):

$$\begin{aligned}
0 = \lambda(A \triangle (A - p)) &\geqslant \lambda((A \triangle (A - p)) \cap (0, q - p)) \\
&= \lambda((A \cap (0, q - p)) \triangle ((A - p) \cap (0, q - p))) \\
&\geqslant |\lambda(A \cap (0, q - p)) - \lambda((A - p) \cap (0, q - p))| \\
&= |\lambda(A \cap (0, q - p)) - \lambda(A \cap (p, q))|.
\end{aligned}$$

To oznacza, że

$$\lambda(A \cap (p, q)) = \lambda(A \cap (0, q - p)).$$

□

**Fakt 4.2.** W twierdzeniu 3.1 (a zatem także w lematach 3.2 i 3.3) i możemy przyjąć, że końce odcinków są liczbami wymiernymi (por. zadanie 1.10.30).

Załóżmy nie wprost, że $\lambda(A) > 0$ oraz $\lambda(\mathbb{R} \setminus A) > 0$. Na mocy lematu 3.3 i faktu 4.2 mamy, że istnieje niepusty $(a, b)$, taki że $a, b \in \mathbb{Q}$ oraz

$$\frac{3}{4}\lambda((a, b)) \leqslant \lambda((\mathbb{R} \setminus A) \cap (a, b)),$$

a zatem

$$\frac{1}{4}\lambda((a, b)) \geqslant \lambda(A \cap (a, b)).$$

Ustalmy teraz $c, d \in \mathbb{Q}$, takie że $c < d$ i

$$\frac{3}{4}\lambda((c, d)) \leqslant \lambda(A \cap (c, d)).$$

Ustalmy $n \in \mathbb{N}$, takie że

$$\left\lfloor \frac{b - a}{\frac{d-c}{n}} \right\rfloor \cdot \frac{d - c}{n} \geqslant \frac{1}{2}(b - a).$$

Oznaczmy $h = \frac{d-c}{n}$. Rozważmy teraz przedziały postaci

$$(c, c+h), (c+h, c+2h), \ldots (c+(n-1)h, d).$$

Wtedy na mocy lematu

$$\lambda(A \cap (c, c+h)) = \lambda(A \cap (c+h, c+2h)) = \ldots = \lambda(A \cap (c+(n-1)h, d) = \lambda(A \cap (0, h)).$$

A zatem mamy

$$\lambda(A \cap (0, h)) = \lambda((c+(i-1)h, c+ih) \cap A) \geqslant \frac{3}{4}\lambda((c+(i-1)h, c+ih)) = \frac{3h}{4}$$

dla dowolnego $i$.
Ustalmy teraz $a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_k \leqslant b$, takie że

$$x_1 - a = x_2 - x_1 = \ldots = x_k - x_{k-1} = h \quad \text{oraz} \quad b - x_k < h$$

dla $k = \lfloor \frac{b-a}{h} \rfloor$. Wówczas na mocy lematu

$$\lambda(A \cap (0, h)) = \lambda(A \cap (a, x_1)) = \lambda(A \cap (x_1, x_2)) = \ldots = \lambda(A \cap (x_{k-1}, x_k)) \geqslant \frac{3h}{4}.$$

To oznacza, że (przyjmijmy $x_0 = a$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\lambda((a, b)) \geqslant \lambda(A \cap (a, b)) \geqslant \lambda(A \cap (a, x_k)) = \sum_{j=1}^{k} \lambda(A \cap (x_{j-1}, x_j)) \geqslant \sum_{j=1}^{k} \frac{3h}{4} = k\frac{3h}{4} \\ = \left\lfloor \frac{b-a}{\frac{d-c}{n}} \right\rfloor \cdot \frac{d-c}{n} \cdot \frac{3}{4} \geqslant \frac{1}{2}(b-a) \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}(b-a) > \frac{1}{4}(b-a). \end{aligned}$$

Otrzymana sprzeczność kończy dowód. ■

# 5 Problem 2.6.C

## 5.1 Treść

Wykazać, że nie istnieje ciąg funkcji ciągłych $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zbieżny punktowo do funkcji $\chi_{\mathbb{Q}}$ (czyli funkcji charakterystycznej zbioru $\mathbb{Q}$).

## 5.2 Rozwiązanie

Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ oraz funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiujemy zbiór $F_\varepsilon(f)$ następująco

$$F_\varepsilon(f) = \{x \in \mathbb{R} : osc_x(f) \geqslant \varepsilon\},$$

gdzie $osc_x(f) \geqslant \varepsilon$ oznacza, że

$$\forall \delta > 0 \ \exists x', x'' \in (x-\delta, x+\delta) \quad |f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon.$$

**Lemat 5.1.** *Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ oraz funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mamy, że $F_\varepsilon(f)$ jest domknięty.*

*Dowód.* Pokażemy, że

$$F_\varepsilon(f)^C = \{x \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0 \ \forall x', x'' \in (x-\delta, x+\delta) \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon\}$$

jest otwarty.
Istotnie, ustalmy dowolny $x \in F_\varepsilon(f)^C$. Niech $\delta > 0$ będzie taka, że dla dowolnych $x', x'' \in (x-\delta, x+\delta)$ mamy $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Pokażemy teraz, że

$$(x-\delta, x+\delta) \subseteq F_\varepsilon(f)^C.$$

Weźmy dowolne $y \in (x-\delta, x+\delta)$. Niech

$$\eta = \min\{y - (x-\delta), (x+\delta) - y\}.$$

Wówczas

$$(y-\eta, y+\eta) \subseteq (x-\delta, x+\delta),$$

a zatem dla każdych $y', y'' \in (y-\eta, y+\eta)$ mamy $|f(y') - f(y'')| < \varepsilon$. Wobec tego $y \in F_\varepsilon(f)^C$.
To pokazuje, że $F_\varepsilon(f)^C$ jest otwarty, czyli $F_\varepsilon(f)$ jest domknięty. $\square$

**Fakt 5.2.** Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nie jest ciągła w $x \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\varepsilon > 0$, taki że

$$x \in F_\varepsilon(f).$$

Wobec tego

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{\frac{1}{n}}(f) \overset{\text{ozn.}}{=} D(f)$$

jest zbiorem punktów nieciągłości funkcji $f$.

Przypomnijmy sobie twierdzenie Baire'a.

**Twierdzenie 5.3** (Baire)**.** *Niech $X$ będzie zupełną przestrzenią metryczną i niech $F_n \subseteq X$ będzie ciągiem domkniętych zbiorów o pustym wnętrzu. Niech*

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

*Wówczas $F$ ma puste wnętrze.*

**Lemat 5.4.** *Niech $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcji ciągłych zbieżnych punktowo do $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wówczas dla dowolnego $\varepsilon > 0$ zbiór $F_\varepsilon(f)$ ma puste wnętrze.*

*Dowód.* Ustalmy $\varepsilon > 0$ oraz dowolny przedział $[a, b]$, taki że $a < b$. Pokażemy, że

$$[a, b] \not\subseteq F_\varepsilon(f).$$

Zdefiniujmy

$$E_n = \bigcap_{i=n}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} \left\{ x \in [a, b] : |f_i(x) - f_j(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \right\}.$$

Oczywiście dla dowolnego $n$ oraz $i, j \geqslant n$ funkcja $|f_i - f_j|$ jest ciągła. Wobec tego zbiór

$$\left\{ x \in [a, b] : |f_i(x) - f_j(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \right\}$$

jest domknięty. Zatem także $E_n$ jest domknięty.
Określmy

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Oczywiście $E \subseteq [a, b]$. Pokażemy, że $[a, b] \subseteq E$. Ustalmy dowolny $x \in [a, b]$. Ciąg $f_n(x)$ jest zbieżny, więc spełnia warunek Cauchy'ego – zatem istnieje $n$, takie że dla dowolnych $i, j \geqslant n$ mamy

$$|f_i(x) - f_j(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

Wobec tego $x \in E_n \subseteq E$.
Otrzymujemy zatem, że $E = [a, b]$. Jako że $E$ jest sumą zbiorów domkniętych i wnętrze $E$ jest niepuste, to istnieje $n$, takie że także wnętrze $E_n$ jest niepuste. Niech zatem

$$[c, d] \subseteq E_n \subseteq E = [a, b].$$

Wówczas dla dowolnych $i, j \geqslant n$ oraz $x \in [c, d]$ mamy

$$|f_i(x) - f_j(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4},$$

a więc w szczególności dla $i = n$ i dowolnego $j \geqslant n$

$$|f_n(x) - f_j(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

Czyli dla $x \in [c, d]$ mamy

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4},$$

ponieważ $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$.
Ustalmy dowolne $x \in (c, d)$ oraz $\delta > 0$, $\delta < \min\{x - c, d - x\}$, takie że dla dowolnego $x' \in (x - \delta, x + \delta) \subseteq [c, d]$ mamy

$$|f_n(x) - f_n(x')| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Weźmy dowolne $x', x'' \in (x - \delta, x + \delta)$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned}|f(x') - f(x'')| &= |f(x') - f_n(x') + f_n(x') - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x'') + f_n(x'') - f(x'')| \\ &\leqslant |f(x') - f_n(x')| + |f_n(x') - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x'')| + |f_n(x'') - f(x'')| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{4} + 2\frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4}.\end{aligned}$$

Wobec tego $osc_x(f) \leqslant \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon$, czyli $x \notin F_\varepsilon(f)$. Otrzymujemy ostatecznie

$$[a, b] \nsubseteq F_\varepsilon(f).$$

□

Załóżmy nie wprost, że istnieje $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – ciąg funkcji ciągłych zbieżny punktowo do $\chi_\mathbb{Q}$. Mamy oczywiście $D(\chi_\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Z lematu 5.4, faktu 5.2 oraz twierdzenia 5.3 mamy, że $D(\chi_\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ ma puste wnętrze. Otrzymana sprzeczność kończy dowód. ■

# 6 Problem LD(A)

## 6.1 Treść

Niech $\mu$ i $\nu$ będą dwiema bezatomowymi miarami probabilistycznymi, określonymi na borelowskich podzbiorach $[0,1]$. Udowodnić, że istnieje przedział $[a,b] \subseteq [0,1]$, taki że

$$\mu([a,b]) = \nu([a,b]) = \frac{1}{2}.$$

## 6.2 Rozwiązanie

Udowodnimy najpierw kilka lematów.

**Lemat 6.1.** *Niech $(X, \Sigma, \mu)$ będzie przestrzenią miarową, gdzie $\mu$ jest miarą bezatomową. Wówczas dla dowolnego $x \in X$, takiego że $\{x\} \in \Sigma$, mamy*

$$\mu(\{x\}) = 0.$$

*Dowód.* Załóżmy nie wprost, że istnieje $x \in X$, $\{x\} \in \Sigma$ oraz $\mu(\{x\}) > 0$. Wówczas dla dowolnego $A \subseteq \{x\}$ mamy $A = \emptyset$, a więc $\mu(A) = 0$, lub $A = \{x\}$, a więc $\mu(A) = \mu(\{x\}) > 0$. Wobec tego $\{x\}$ jest atomem – sprzeczność. □

**Wniosek 6.2.** Jeśli $\mu$ jest bezatomową miarą probabilistyczną określoną na $Bor([0,1])$, to dla dowolnych $a, b \in [0,1]$, takich że $a < b$ mamy

$$\mu([a,b]) = \mu([a,b)) = \mu((a,b]) = \mu((a,b)).$$

W dalszych rozważaniach będziemy często używać tego wniosku bez bezpośredniego odwoływania się do niego.

**Lemat 6.3.** *Niech $\mu$ będzie bezatomową miarą probabilistyczną określoną na $Bor([0,1])$. Wówczas dla $x \in [0,1]$ funkcje*

$$\mu([x,\cdot]) : [x,1] \to [0,1]$$

*oraz*

$$\mu([\cdot,x]) : [0,x] \to [0,1]$$

*są ciągłe.*

*Dowód.* Ustalmy $x \in [0,1]$. Pokażemy, że funkcja

$$\mu([x,\cdot]) : [x,1] \to [0,1]$$

jest ciągła (dowód dla drugiej funkcji przebiega analogicznie).
Ustalmy zatem $y \in [x,1]$ oraz $\varepsilon > 0$. Mamy oczywiście

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\left[y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}\right] \cap [x,1]\right) = \mu(\{y\}) = 0$$

(z ciągłości z góry $\mu$ oraz lematu 6.1). Wobec tego istnieje $\delta > 0$, taka że $\mu([y-\delta, y+\delta] \cap [x,1]) < \varepsilon$. Weźmy zatem dowolne $y' \in [y-\delta, y+\delta] \cap [x,1]$ (bez straty ogólności $y' \leqslant y$). Otrzymujemy

$$|\mu([x,y']) - \mu([x,y])| = \mu([y',y]) \leqslant \mu([y-\delta, y+\delta] \cap [0,1]) < \varepsilon,$$

co pokazuje, że $\mu([x,\cdot])$ jest ciągła. □

**Lemat 6.4.** *Niech $\mu$ będzie bezatomową miarą probabilistyczną określoną na $Bor([0,1])$. Będziemy stosować oznaczenie*

$$U_x(\mu) = \left\{ y \in [x,1] : \mu([x,y]) = \frac{1}{2} \right\}.$$

*Dla dowolnego $x \in [0,1]$ mamy*

$$U_x(\mu) = \emptyset \quad \textit{lub} \quad U_x(\mu) = [a,b] \ \textit{dla pewnych}\ 0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1.$$

*Dowód.* Ustalmy dowolne $x \in [0,1]$. Załóżmy, że $U_x(\mu) \neq \emptyset$. Pokażemy najpierw, że $U_x(\mu)$ jest odcinkiem. Ustalmy zatem $y_1, y_2 \in U_x(\mu)$, takie że $y_1 \leqslant y_2$ oraz dowolne $y \in [y_1, y_2]$. Mamy wówczas

$$\mu([y_1, y]) \leqslant \mu([y_1, y_2]) = \mu([x, y_2]) - \mu([x, y_1]) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

czyli $\mu([y_1, y]) = 0$. Wobec tego

$$\mu([x,y]) = \mu([x, y_1]) + \mu([y_1, y]) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2},$$

a zatem $y \in U_x(\mu)$.
Oznaczmy teraz

$$a = \inf U_x(\mu) \quad \text{oraz} \quad b = \sup U_x(\mu).$$

Pokażemy, że $a \in U_x(\mu)$ (dowód dla $b$ przebiega analogicznie). Ustalmy ciąg $a_n \searrow a$, taki że $a_n \in U_x(\mu)$ – istnieje taki, ponieważ $a$ jest infimum. Wówczas z ciągłości z góry $\mu$ otrzymujemy

$$\mu([x,a]) = \lim_{n \to \infty} \mu([x, a_n]) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

a zatem $a \in U_x(\mu)$. □

**Wniosek 6.5.** Niech $x \in [0,1]$, taki że $U_x(\mu) \neq \emptyset$. Wówczas

$$U_x(\mu) = [\inf U_x(\mu), \sup U_x(\mu)].$$

**Lemat 6.6.** *Niech $\mu$ będzie taka, jak wyżej. Wówczas dla $x_1, x_2 \in [0,1]$, takich że $x_1 \leqslant x_2$, jeśli $U_{x_1}(\mu) \neq \emptyset$ oraz $U_{x_2}(\mu) \neq \emptyset$, to dla dowolnego $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ mamy $U_x(\mu) \neq \emptyset$.*

*Dowód.* Ustalmy $x_1, x_2$, takie jak w założeniu oraz $y_1 \in U_{x_1}(\mu)$ i $y_2 \in U_{x_2}(\mu)$. Niech $x \in [x_1, x_2]$. Wówczas

$$\mu([x, y_1]) \leqslant \mu([x_1, y_1]) = \frac{1}{2}$$

oraz

$$\mu([x, y_2]) \geqslant \mu([x_2, y_2]) = \frac{1}{2}.$$

Z ciągłości $\mu([x, \cdot])$ otrzymujemy, że istnieje $y \in [y_1, y_2]$, taki że $\mu([x,y]) = \frac{1}{2}$. Wobec tego $y \in U_x(\mu)$, czyli $U_x(\mu) \neq \emptyset$. □

Ustalmy zatem $\mu, \nu$ – dowolne bezatomowe miary probabilistyczne określone na $Bor([0,1])$. Oznaczmy

$$m_x = \inf U_x(\mu) \quad \text{i } M_x = \sup U_x(\mu)$$

oraz

$$n_x = \inf U_x(\nu) \quad \text{i } N_x = \sup U_x(\nu)$$

dla dowolnego $x \in [0,1]$, takiego że $U_x(\mu), U_x(\nu) \neq \emptyset$.

**Fakt 6.7.** Dla dowolnych $x_1, x_2 \in [0,1]$, takich że $x_1 \leqslant x_2$ oraz $U_{x_1}(\mu), U_{x_1}(\nu), U_{x_2}(\mu), U_{x_2}(\nu) \neq \emptyset$ mamy

$$\begin{aligned} n_{x_1} &\leqslant n_{x_2} \\ N_{x_1} &\leqslant N_{x_2} \\ m_{x_1} &\leqslant m_{x_2} \\ M_{x_1} &\leqslant M_{x_2}. \end{aligned}$$

Z lematu 6.3 wiemy, że $\mu([0,\cdot])$ oraz $\nu([0,\cdot])$ są ciągłe – a w szczególności mają własność Darboux. Oznaczmy zatem $y_0, y_1$, takie że

$$\mu([0,y_0]) = \nu([0,y_1]) = \frac{1}{2}.$$

Wówczas oczywiście

$$\mu([y_0,1]) = \nu([y_1,1]) = \frac{1}{2}.$$

Bez straty ogólności przyjmijmy, że $y_0 \leqslant y_1$.
Mamy oczywiście $U_0(\mu), U_0(\nu), U_{y_0}(\mu) \neq \emptyset$ oraz $U_{y_0}(\nu) \neq \emptyset$ – na mocy lematu 6.6. Gdyby istniał $y \in [0, y_0]$, taki że

$$[m_y, M_y] \cap [n_y, N_y] \neq \emptyset$$

to dla $z \in [m_y, M_y] \cap [n_y, N_y]$ mamy

$$\mu([y,z]) = \nu([y,z]) = \frac{1}{2}.$$

Załóżmy więc (nie wprost), że

$$[m_y, M_y] \cap [n_y, N_y] = \emptyset$$

dla dowolnego $y \in [0, y_0]$. Oznacza to, że $M_0 < n_0$ (gdyż $y_0 \leqslant y_1$, $m_0 \leqslant y_0 \leqslant M_0$, $n_0 \leqslant y_1 \leqslant N_0$) oraz $N_{y_0} < m_{y_0}$ (gdyż $M_{y_0} = 1$).
Zdefiniujmy teraz ciąg przedziałów $[a_n, b_n]$, taki że

$$[a_0, b_0] = [0, y_0]$$

oraz dla $n > 0$

$$[a_n, b_n] = \begin{cases} [s_{n-1}, b_{n-1}] & \text{gdy } M_{s_{n-1}} < n_{s_{n-1}} \\ [a_{n-1}, s_{n-1}] & \text{gdy } N_{s_{n-1}} < m_{s_{n-1}} \end{cases}$$

gdzie $s_n = \frac{a_n + b_n}{2}$. Zauważmy, że przypadki w definicji $[a_n, b_n]$ są jedynymi możliwościami – wynika to z założenia nie wprost. Ponadto definicja ma sens na mocy lematu 6.6.

**Fakt 6.8.** Dla ciągu przedziałów zdefiniowanego jak wyżej zachodzi

$$m_{a_n} \leqslant M_{a_n} < n_{a_n} \leqslant N_{a_n} \quad \text{oraz} \quad n_{b_n} \leqslant N_{b_n} < m_{b_n} \leqslant M_{b_n}$$

dla dowolnego $n$.

Zauważmy teraz, że

$$[a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \ldots$$

oraz

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

Oczywiście z powyższych zależności widzimy, że ciąg postaci

$$a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$$

jest ciągiem Cauchy'ego. Wobec tego

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \overset{\text{ozn.}}{=} y.$$

Z założenia nie wprost mamy

$$[m_y, M_y] \cap [n_y, N_y] = \emptyset.$$

Rozważmy przypadki.

- $M_y < n_y$. Wtedy $y < y_0$ oraz oczywiście $\mu([M_y, n_y]) > 0$. Niech zatem $y < b_n \leqslant y_0$, taki że

$$\mu([y, b_n]) < \frac{1}{2}\mu([M_y, n_y]) \quad \text{oraz} \quad b_n < n_y$$

(istnieje taki z ciągłości $\mu([y, \cdot])$). Wówczas

$$\begin{aligned}\mu([b_n, n_y]) &= \mu([y, n_y]) - \mu([y, b_n]) = \mu([y, M_y]) + \mu([M_y, n_y]) - \mu([y, b_n])\\ &> \mu([y, M_y]) + \frac{1}{2}\mu([M_y, n_y]) > \mu([y, M_y]) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Zatem $M_{b_n} < n_y \overset{6.7}{\leqslant} n_{b_n}$, czyli sprzeczność z faktem 6.8.

- $N_y < m_y$. Wtedy $0 < y$ oraz oczywiście $\mu\left([N_y, m_y]\right) > 0$. Niech zatem $0 \leqslant a_n < y$, taki że

$$\mu([a_n, y] < \mu\left([N_y, m_y]\right) \quad \text{oraz} \quad a_n < N_y$$

(istnieje taki z ciągłości $\mu([\cdot, y])$). Wówczas

$$N_{a_n} \overset{6.7}{\leqslant} N_y.$$

Ponadto $m_{a_n} > N_y$, gdyż

$$\mu\left([a_n, N_y]\right) = \mu([a_n, y]) + \mu([y, m_y]) - \mu\left([N_y, m_y]\right) < \frac{1}{2}$$

Mamy zatem $N_{a_n} \leqslant N_y < m_{a_n}$ – czyli sprzeczność z faktem 6.8.

W obu przypadkach otrzymujemy sprzeczność. Wobec tego istnieje $y \in [0, y_0]$, taki że

$$U_y(\mu) \cap U_y(\nu) \neq \emptyset,$$

czyli mamy $z \in U_y(\mu) \cap U_y(\nu)$, dla którego

$$\mu([y, z]) = \nu([y, z]) = \frac{1}{2}.$$

To kończy dowód. ■