Zadanie 208

Jadwiga Świerczyńska

4 stycznia 2022

Mamy daną funkcję f wyrażoną wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{gdy } x = \frac{m}{n}, \text{ gdzie } m \perp n,\ n \geq 1 \\ 0 & \text{gdy } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Nieciągłość f w punktach wymiernych. Weźmy dowolny $x = \frac{m}{n}$, gdzie $m \perp n, n \geq 1$. Wówczas $f(x) = \frac{1}{n}$. Weźmy ciąg a_k, taki że $a_k = x + \frac{\sqrt{2}}{k}$. Wówczas oczywiście $\lim_{k\to\infty} a_k = x$, a także dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy $a_k \notin \mathbb{Q}$. Stąd $\lim_{k\to\infty} f(a_k) = 0 \neq \frac{1}{n} = f(x)$. Wobec tego f jest nieciągła w każdym punkcie wymiernym.

Ciągłość f w punktach niewymiernych. Weźmy dowolny $x \notin \mathbb{Q}$. Wówczas $f(x) = 0$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech $k \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $\frac{1}{k} < \varepsilon$. Dla każdego $i \in \mathbb{N}, i \neq 0$ oznaczmy przez c_i liczbę całkowitą, taką że $\frac{c_i}{i} < x < \frac{c_i+1}{i}$. Dla każdego $i \in \mathbb{N}, i \neq 0$ takie c_i istnieje, ponieważ $x \notin \mathbb{Q}$. Niech

$$\delta = \min_{0<i\leq k} \left\{ \left| x - \frac{c_i}{i} \right|, \left| x - \frac{c_i+1}{i} \right| \right\}.$$

Oczywiście $\delta > 0$, a także $\delta \leq \frac{1}{k}$. Weźmy dowolne x', takie że $|x - x'| < \delta$. Jeśli $x' \notin \mathbb{Q}$, to $f(x') = 0 < \varepsilon$. W przeciwnym przypadku $x' = \frac{m}{n}$, gdzie $m \perp n$ i $n \geq 1$. Załóżmy nie wprost, że $n \leq k$. Wówczas

$$|x - x'| = \left| x - \frac{m}{n} \right| \geq \min \left(\left| x - \frac{c_n}{n} \right|, \left| x - \frac{c_n+1}{n} \right| \right) \geq \delta,$$

czyli sprzeczność. Zatem $x' = \frac{m}{n}$, gdzie $n > k$. Oznacza to, że $f(x') = \frac{1}{n} < \frac{1}{k} < \varepsilon$. Wobec tego f jest ciągła w x, czyli jest ciągła w każdym punkcie niewymiernym.