

Matemática Aplicada



Cruzeiro do Sul Virtual
Educação a distância

Material Teórico



Relações e Funções

Responsável pelo Conteúdo:

Prof.ª M.ª Adriana Domingues Freitas
Prof.ª Dra. Jussara Maria Marins

Revisão Textual:

Prof.ª Dra. Selma Aparecida Cesarin

UNIDADE

Relações e Funções



- Relação
- Representações das Relações
- Tipos de Relações
- Função
- Tipos de Funções



OBJETIVO DE APRENDIZADO

- Identificar e classificar uma relação de acordo com suas propriedades;
- Identificar e classificar uma função de acordo com suas propriedades;
- Diferenciar uma função de uma relação.



Orientações de estudo

Para que o conteúdo desta Disciplina seja bem aproveitado e haja uma maior aplicabilidade na sua formação acadêmica e atuação profissional, siga algumas recomendações básicas:

Determine um horário fixo para estudar.

Mantenha o foco! Evite se distrair com as redes sociais.

Procure manter contato com seus colegas e tutores para trocar ideias! Isso amplia a aprendizagem.

Seja original! Nunca plágie trabalhos.

Aproveite as indicações de Material Complementar.

Conserve seu material e local de estudos sempre organizados.

Não se esqueça de se alimentar e se manter hidratado.

Assim:

- ✓ Organize seus estudos de maneira que passem a fazer parte da sua rotina. Por exemplo, você poderá determinar um dia e horário fixos como o seu “momento do estudo”.
- ✓ Procure se alimentar e se hidratar quando for estudar, lembre-se de que uma alimentação saudável pode proporcionar melhor aproveitamento do estudo.
- ✓ No material de cada Unidade, há leituras indicadas. Entre elas: artigos científicos, livros, vídeos e sites para aprofundar os conhecimentos adquiridos ao longo da Unidade. Além disso, você também encontrará sugestões de conteúdo extra no item **Material Complementar**, que ampliarão sua interpretação e auxiliarão no pleno entendimento dos temas abordados.
- ✓ Após o contato com o conteúdo proposto, participe dos debates mediados em fóruns de discussão, pois irão auxiliar a verificar o quanto você absorveu de conhecimento, além de propiciar o contato com seus colegas e tutores, o que se apresenta como rico espaço de troca de ideias e aprendizagem.

Introdução

Nesta Unidade, estudaremos os conceitos de relações e funções.

Atualmente, as redes sociais, principalmente com os programas na *Internet*, utilizam as relações entre as pessoas, que são estabelecidas pelos usos e contatos.

As relações que formam as redes sociais computadorizadas, como Facebook, LinkedIn etc., são formadas por diversos conceitos matemáticos. Essas redes são estabelecidas a partir de relações captadas via uso da própria *Internet* e dadas pelos usuários e estão sendo cada vez mais utilizadas pelos meios de publicidade, com o foco não só em personalizar a navegação do usuário, mas, especialmente, em oferecer produtos que sejam mais adequados ao seu perfil, perfil esse mapeado a partir das navegações e relações do usuário.

Em qualquer área da Matemática, as relações e, principalmente, as funções desempenham papel muito importante. Intuitivamente, uma função é uma máquina que transforma um objeto de entrada num novo objeto de saída, sendo que a maneira como ocorre essa transformação é a sua finalidade, isto é, finalidade e função estão intimamente associadas.

As máquinas em geral desempenham uma ou um agrupamento de funções e podem ser abstratas ou materiais. Uma das primeiras máquinas materiais a executar funções matemáticas, de modo mecânico, foi a máquina inventada por Blaise Pascal, em 1644, quando ele tinha apenas 20 anos, para ajudar seu pai nos cálculos de sua loja.

A Figura 1 mostra a máquina chamada Pascalina.



Figura 1 – Pascalina

Fonte: Wikimedia Commons

#ParaTodosVerem: Representação de uma máquina Pascalina. Imagem de objeto real na cor dourada, formato retangular, com seis círculos, na parte inferior da "tampa" da máquina, com uma espécie de grade em seu interior. Fim da descrição.



Blaise Pascal, além de físico e matemático, era também filósofo e trouxe grandes contribuições para a Ciência. Para conhecer um pouco mais sobre sua via e obra, indicamos o material disponível no link <https://goo.gl/duLHn3>.

Mesmo objetos artísticos, como a imagem da Figura 2, são feitos a partir de uma função. Um fractal é um tipo mais geral de uma curva geométrica que pode ser dividido em partes – as frações – e de cada uma delas geramos outras curvas semelhantes à original.

Existem diversos tipos e algumas são transformadas em belíssimas imagens, como a que se vê a seguir.



Figura 2 – Exemplo de Fractal

Fonte: iStock/Getty Images

#ParaTodosVerem: Representação de um fractal. Apresenta uma imagem em formato giratório, formando uma espécie de túnel em seu centro. Sua abertura inicial é representada na cor azul, em tons que vão se alterando até chegar na cor roxa em seu centro. Fim da descrição.

Uma função transforma um objeto de entrada em outro objeto, que é chamado de saída.

Descrever a função é descrever a transformação ou a **regra** de transformação.

Para termos uma função, precisamos de um conjunto de objetos de entrada e uma maneira de modificá-los, segundo a regra dada, para chegar a um objeto de outro conjunto, o conjunto dos resultados.

Ou seja, a função transforma os objetos do conjunto de entrada nos objetos do conjunto de saída, como podemos ilustrar na Figura a seguir:

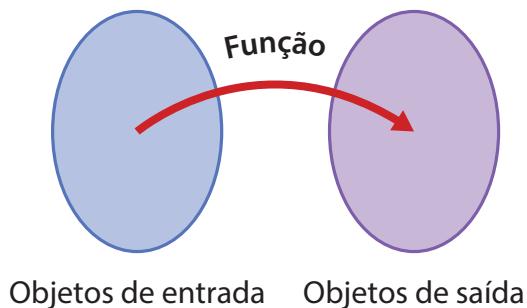


Figura 3 – Ilustração de função entre dois conjuntos

#ParaTodosVerem: Representação de uma função de dois conjuntos. Apresenta duas circunferências, representando diagramas, centralizadas e uma ao lado da outra, com pequeno espaço entre elas, sendo a da esquerda na cor azul e com a descrição abaixo dela “Objetos de Entrada” e a do lado direito na cor roxa e com a descrição abaixo dela “Objetos de Saída”. Partindo do diagrama azul para o diagrama roxo, uma seta na cor vermelha, com curvatura de concavidade para baixo e acima a descrição “Função”. Fim da descrição.

Mas, antes de estudarmos as funções, veremos a definição de relações, que são ainda mais amplas que as funções. Veremos que toda função é feita a partir de uma relação, mas nem toda relação estabelece uma função.

Relação

Veremos que a relação se dá entre dois conjuntos e utilizaremos alguns exemplos numéricos para:

Dados dois conjuntos quaisquer A e B , uma relação de A em B é qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.

Exemplo 1

Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2\}$

Faremos uma **relação de A para B** de forma que cada elemento de A irá se relacionar com todos os elementos de B , formando todos os pares ordenados possíveis (a, b) , ou seja: de A para B .

Logo, o produto cartesiano será dado por:

$$A \times B = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2)\}$$

Verificamos a seguir, na Figura 4, a representação por diagramas da relação de A em B :

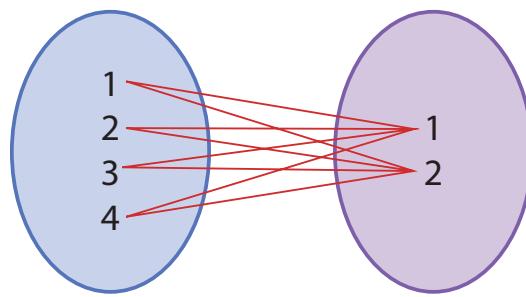


Figura 4 – Relação de A em B

#ParaTodosVerem: Representação de uma função de relação A em B. Apresenta duas circunferências, representando diagramas, centralizadas e uma ao lado da outra, com pequeno espaço entre elas, sendo a da esquerda na cor azul, indicando em seu interior os números 1, 2, 3 e 4 e a do lado direito na cor roxa indicando em seu interior os números 1 e 2. Partindo do diagrama azul para o diagrama roxo, há linhas na cor vermelha que ligam ambos os diagramas, do seguinte modo, considerando da esquerda para à direita: 1 para 1 e 2; 2 para 1 e 2; 3 para 1 e 2; 4 para 1 e 2. Fim da descrição.

Como o produto cartesiano não é comutativo, a **ordem dos conjuntos é relevante**. O primeiro conjunto indicado é o **Conjunto de Partida**, e o segundo é o **Conjunto de Chegada**.



Importante!

Note que, nesse caso, o primeiro elemento do par ordenado será sempre um elemento de A, e o segundo um elemento de B, pois a relação vai de A para B.

Os conjuntos A e B podem ser, inclusive, iguais; **não há impedimento para que dois conjuntos iguais tenham uma relação**.

Representações das Relações

O Produto Cartesiano pode ser representado por diagramas e também no plano cartesiano. Vejamos o exemplo com o produto $A \times B = \{(1,1) (1,2) (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2)\}$.

Na Figura 5, vemos, no primeiro diagrama, o conjunto A, que é chamado conjunto de partida. Note que cada um dos elementos de A possui uma flecha que o relaciona com elementos do conjunto B, representando, no segundo diagrama à esquerda, que é chamado conjunto de chegada.

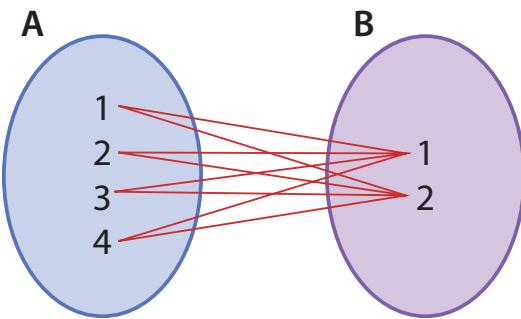


Figura 5 – Diagramas da Relação de A em B

#ParaTodosVerem: representação de um diagrama de relação A em B. Apresenta duas circunferências, representando diagramas, centralizadas e uma ao lado da outra, com pequeno espaço entre elas, sendo a da esquerda na cor azul, indicando em seu interior os números 1, 2, 3 e 4 e no canto superior esquerdo a letra maiúscula "A" e, do lado direito na cor roxa indicando em seu interior os números 1 e 2 e no canto superior esquerdo a letra maiúscula "B". Partindo do diagrama azul para o diagrama roxo, há linhas na cor vermelha que ligam ambos os diagramas, do seguinte modo, considerando da esquerda para à direita: 1 para 1 e 2; 2 para 1 e 2; 3 para 1 e 2; 4 para 1 e 2. Fim da descrição.

A mesma relação $A \times B$ é agora representada no plano cartesiano, no qual o conjunto de partida é o eixo horizontal (eixo x – das abscissas) e o conjunto de chegada é representado pelo eixo vertical (eixo y – das ordenadas).

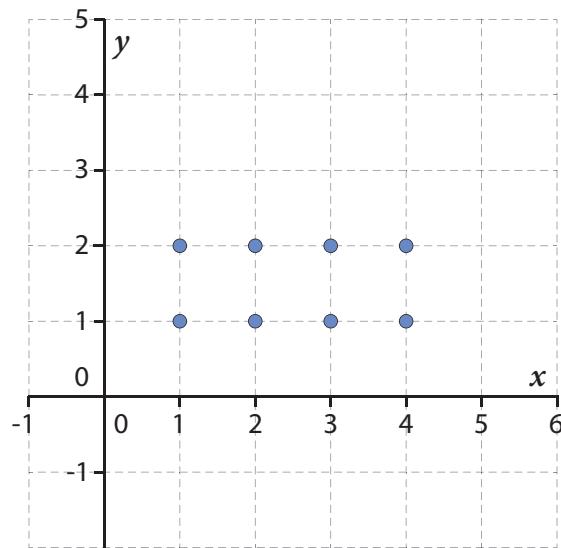


Figura 6 – Representação no Plano Cartesiano da Relação de A em B

#ParaTodosVerem: Representação de um plano cartesiano. Apresenta duas retas perpendiculares, sendo a da horizontal, indicando o eixo "X" e os elementos de -1 a 6, contados a cada unidade e, a da vertical, indicando o eixo "Y" e os elementos de -1 a 5, contados a cada unidade. No plano, há pontos na cor azul, apontados nas seguintes coordenadas: (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2). Fim da descrição.

Na representação $A \times B$ por gráfico, utilizamos o eixo das abscissas (eixo x) para representar os elementos do conjunto de partida e o eixo das ordenadas (eixo y) para representar os elementos do conjunto de chegada.

Exemplo 2

Sejam $A = \{2;3\}$ e $B = \{0;1;2\}$ temos que $A \times B \neq B \times A$

Ou seja, a relação do produto cartesiano não é comutativa.

Podemos verificar facilmente que $A \times B \neq B \times A$

$$A \times B = \{(2,0); (2,1); (2,2); (3,0); (3,1); (3,2)\}$$

$$B \times A = \{(0,2); (0,3); (1,2); (1,3); (2,2); (2,3)\}$$

Graficamente também notamos essa diferença:

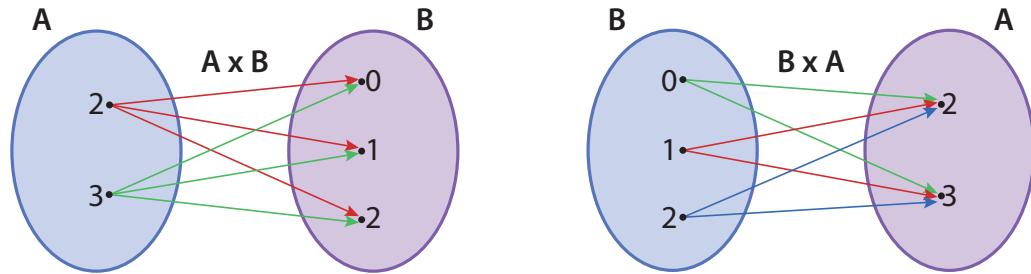


Figura 7 – Relação $A \times B \neq B \times A$

#ParaTodosVerem: Representação da relação $A \times B$ diferente de $B \times A$. Apresenta quatro diagramas, agrupados em duplas, sendo uma à esquerda e a outra à direita. A esquerda o diagrama na cor azul, chamado "A", composto dos elementos 2 e 3 e o diagrama na cor roxa, chamado "B" composto dos elementos 0, 1 e 2, partindo retas do azul para o roxo, sendo na cor vermelha, a relação 2 para 0, 1 e 2 e, na cor verde 3 para 0, 1 e 2. Ao centro a descrição "A x B". A direita o diagrama na cor azul, chamado "A", composto dos elementos 0, 1 e 2 e o diagrama na cor roxa, chamado "B" composto dos elementos 2 e 3, partindo retas do azul para o roxo, sendo na cor verde, a relação 0 para 2 e 3, na cor vermelha, a relação 1 para 2 e 3 e, na cor azul 3 para 2 e 3. Ao centro a descrição "B x A". Fim da descrição.

Exemplo 3

Faremos, agora, uma nova relação, dados dois novos conjuntos A e B. Seja o conjunto A o conjunto dos números naturais menores que 15 e o conjunto B o conjunto dos números naturais menores ou iguais a 20, temos:

$$A \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$B \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

A **relação R de A em B** irá relacionar os elementos de A com os elementos de B, que corresponderem ao **dobro do seu valor**.

O resultado da relação será $R = \{(1,2) (2,4), (3,6), (4,8), (5,10), (6,12), (7,14)\}$.

**Pergunta para reflexão**

Todos os elementos de A se relacionaram aos elementos de B ?

Verificamos que não, pois alguns elementos de A (os elementos 8 e 9) não se relacionaram com qualquer elemento no conjunto B, já que o dobro de 8 e o dobro de 9 não pertencem a B.

Veremos mais adiante que o fato de todos os elementos se relacionarem com um único elemento no conjunto de chegada é fundamental para a relação ser uma função.

Tipos de Relações

Classificamos uma relação de acordo com as propriedades e para dizermos que uma relação é de certo tipo, é necessário que a propriedade **esteja presente em todos os pares da relação**.

Relação Reflexiva

Uma relação R em A é reflexiva se todos os elementos de A estão relacionados consigo mesmos.

Ou seja:

$$(\forall x \in A) [(x, x) \in R].$$

Exemplo

Seja $A = \{10, 12, 14, 16, 18\}$

A Relação $R_1 = \{(10, 10), (10, 18), (12, 12), (12, 14), (14, 14), (14, 16), (16, 16), (16, 18), (18, 18)\}$ é reflexiva pois cada um dos elementos de A se relacionou consigo mesmo. Notamos a existência dos pares reflexivos destacados em vermelho: $R_1 = \{\textcolor{red}{(10, 10)}, (10, 18), \textcolor{red}{(12, 12)}, (12, 14), \textcolor{red}{(14, 14)}, (14, 16), \textcolor{red}{(16, 16)}, (16, 18), \textcolor{red}{(18, 18)}\}$.

Relação Simétrica

Uma relação R em A é simétrica se cada elemento x de A que está relacionado com y também ocorre que y está relacionado com x.

Ou seja:

$$(\forall x, y \in A) [(x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R]$$

Exemplo

Seja $A = \{10, 12, 14, 16, 18\}$

A Relação $R2 A \times A = \{(10, 10), (10, 18), (12, 14), (14, 12), (14, 14), (14, 16), (16, 14), (16, 16), (16, 18), (18, 10), (18, 16), (18, 18)\}$ é simétrica, pois cada um dos elementos de **A que se relacionou com B** teve também o mesmo elemento de B que se relacionou com A.

Citamos aqui a observação de **A que se relacionou com B**, pois na relação não temos a obrigatoriedade de todos os elementos se relacionarem, mas se um elemento de A se relacionou com B, então, o mesmo B deve se relacionar com A. Por exemplo: se temos o par (12, 14), então deveremos ter o par (14, 12).

A Relação $R2 A \times A = \{(10, 10), (10, 18), (12, 14), (14, 12), (14, 14), (14, 16), (16, 14), (16, 16), (16, 18), (18, 10), (18, 16), (18, 18)\}$ é, portanto, simétrica.

Relação Transitiva

Uma relação R em A é transitiva se cada elemento x de A que está relacionado com y e y está relacionado com z; então, ocorre que x está relacionado com z.

$$(\forall x, y, z \in A) [(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R]$$

Exemplo

A relação $x < y$ é transitiva, pois se $x < y$, então, pela definição de ser menor, existe um número k tal que $x + k = y$. Analogamente, se $y < z$, então, existe um número m tal que $y + m = z$.

Para verificar se $x < z$, basta tomar o número k + m e daí $x + (k + m) = z$.

Logo, $x < z$.

Exemplos Numéricos

$5 < 6$ pois $5 + 1 = 6$ e $6 < 10$ pois $6 + 4 = 10$, como $5 + (1 + 4) = 10$; então, $5 < 10$.

Relação Antisimétrica

$$(\forall x, y \in A) [(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \rightarrow x = y]$$

Alguns exemplos

Considere o conjunto A {1,2,3,4,5}

A relação R1 dada por $x \leq y$ na qual temos $\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,3), (3,4), (3,5), (4,4), (4,5), (5,5)\}$

É reflexiva: pois todos os elementos de A se relacionam consigo mesmos;

Não é simétrica: vemos que em alguns pares, x se relaciona com y, mas y não se relaciona com x; como (1,2) já que não temos o par (2,1) na relação;

É transitiva: pois de $1 < 2$ e $2 < 3$, logo $1 < 3$.

Novamente considerando o conjunto A {1, 2, 3, 4, 5}

A relação R2 dada por $x = y$, na qual temos $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$

É reflexiva, simétrica e transitiva.

A relação R3: $\{(1,2), (2,1), (1,4), (4,1), (5,1), (1,5)\}$

Não é reflexiva e nem transitiva, mas é simétrica.

A Relação R4: $\{(1,2), (2,4), (1,4)\}$

É apenas transitiva.

Função

Uma função de A em B é uma relação nos mesmos conjuntos, na qual se satisfazem os dois itens:

$$1. \text{ Dom}(f) = A$$

$$2. \text{ Se } (x,y) \in f \text{ e } (x,z) \in f, \text{ então } y = z$$

$$\forall (x \in A) (\exists y \in B) [\text{Se } (x,y) \in f \text{ e } (x,y') \in f \text{ então } y = y']$$

Ou seja:

Todos os elementos de A possuem algum valor e para cada elemento do Conjunto de Partida A **existe apenas um elemento correspondente** no Conjunto de Chegada B.

O conjunto de partida A passa a ser chamado de Domínio, e o conjunto de chegada B chamado de Contradomínio de f.

A notação de função é:

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \rightarrow y = f(x)$$

Lê-se: função de A em B, onde um x leva a uma função de x.

Em uma função:

- $\text{Dom } (f) = A$ (o que não ocorre necessariamente nas relações, já que nas relações nem todos os elementos precisam se relacionar, mas na função sim, cada um dos elementos do Domínio necessariamente deve se relacionar, e apenas com um único elemento no contradomínio);

- Os elementos do contradomínio que são resultados da função para algum elemento do Domínio constituem a IMAGEM da função, denotada por $\text{Im}(f)$.

$$\text{Im}(f) = \{ f(x) \mid x \in A \}$$

$$\text{Im}(f) \subseteq B$$

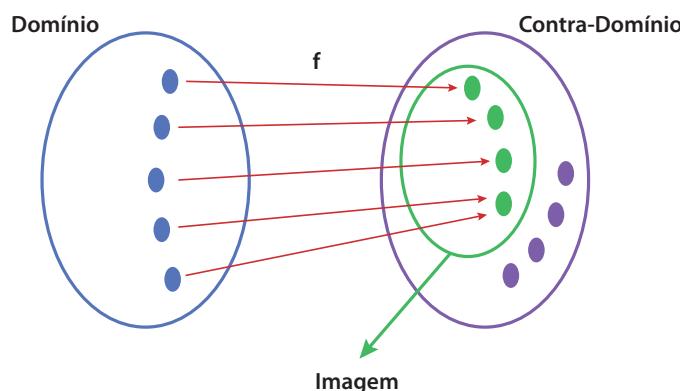


Figura 8 – Diagramas: domínio, contradomínio e imagem de uma função

#ParaTodosVerem: Representação do Domínio, Contradomínio e Imagem da função. Apresenta uma circunferência à esquerda, na cor azul e composta por 5 bolinhas de mesma cor em seu interior; à direita uma circunferência na cor roxa, composta por 4 bolinha somadas ao terceiro conjunto, na cor verde e composto por 4 bolinhas, sendo que do diagrama azul partem 5 setas, na cor vermelha, em direção as bolinhas verdes, repetindo uma delas para duas bolinhas azuis diferentes. Cada diagrama tem a descrição que segue: no azul a indicação "Domínio", no roxo a indicação "Contradomínio" e na cor verde a indicação Imagem. Acima a descrição "f". Fim da descrição.

O termo imagem é usado tanto para o valor da função y para um elemento em x , como para o conjunto de todas as imagens dos elementos de A .

Contradomínio é todo o conjunto B , mesmo que um ou outro elemento não se relacione; já a imagem é um subconjunto do contradomínio formado pelos elementos que são relacionados com os elementos do domínio.

Importante ressaltar, ainda, que todos os elementos do domínio precisam se relacionar com um único elemento do contradomínio.

A seguir, alguns exemplos gráficos:

Nesse exemplo, temos uma função, pois notamos que cada um dos elementos do domínio, à esquerda, relaciona-se com um único elemento no contradomínio, à direita.

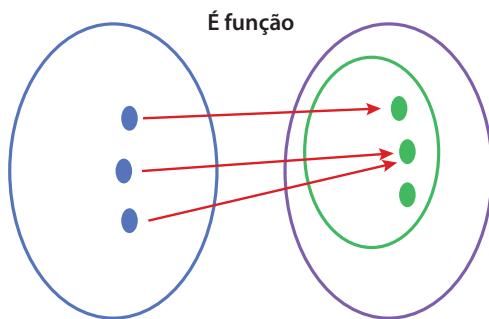


Figura 9 – Exemplo de Função

#ParaTodosVerem: Exemplo de função. Apresenta uma circunferência à esquerda, na cor azul e composta por 3 bolinhas de mesma cor em seu interior; à direita uma circunferência na cor roxa, composta por um terceiro conjunto, na cor verde e composto por 3 bolinhas, sendo que do diagrama azul partem 3 setas, na cor vermelha, em direção as bolinhas verdes, repetindo uma delas para duas bolinhas azuis diferentes e uma bolinha verde ficando sem ligação. Acima a descrição “É função”. Fim da descrição.

Já nesse outro exemplo, não temos uma função, pois um dos elementos do domínio se relacionou com dois elementos do contradomínio.

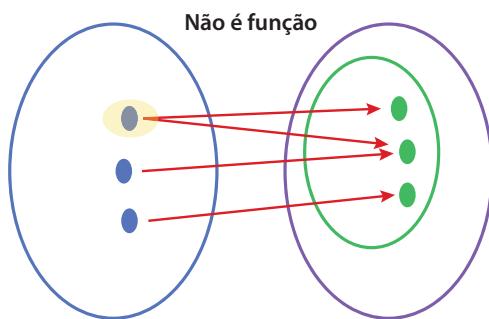


Figura 10 – Exemplo de uma relação que não é função

#ParaTodosVerem: Exemplo de uma não função. Apresenta uma circunferência à esquerda, na cor azul e composta por 3 bolinhas de mesma cor em seu interior; à direita uma circunferência na cor roxa, composta por um terceiro conjunto, na cor verde e composto por 3 bolinhas, sendo que do diagrama azul partem 3 setas, na cor vermelha, em direção as bolinhas verdes, repetindo uma bolinha azul para duas verdes diferentes sendo que uma delas ainda mais uma bolinha azul se relacionando. Acima a descrição “Não é função”. Fim da descrição.

Nesse diagrama, não temos uma função. Notamos que um dos elementos do domínio não se relaciona com o contradomínio. E para ser função, todo e qualquer elemento do domínio deve se relacionar com um elemento do contradomínio.

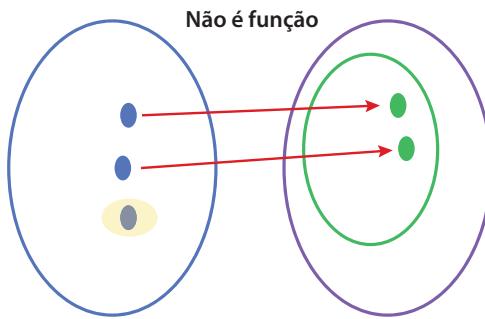


Figura 11 – Exemplo de uma relação que não é função

#ParaTodosVerem: Exemplo de função. Apresenta uma circunferência à esquerda, na cor azul e composta por 3 bolinhas de mesma cor em seu interior; à direita uma circunferência na cor roxa, composta por um terceiro conjunto, na cor verde e composto por 2 bolinhas, sendo que do diagrama azul partem 2 setas, na cor vermelha, em direção as bolinhas verdes, e uma azul fica isolada. Acima a descrição “Não é função”. Fim da descrição.

Temos um exemplo de função, pois cada um dos elementos do domínio se relacionou apenas com um elemento do contradomínio.

Veja que os elementos do contradomínio podem receber a relação de mais de um elemento.

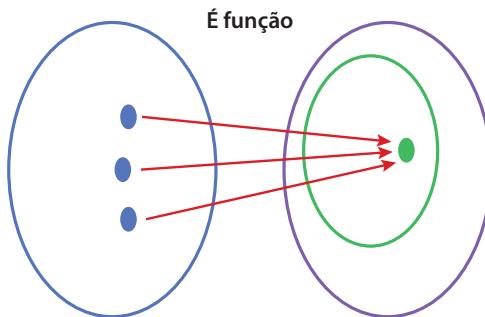


Figura 12 – Exemplo de função

#ParaTodosVerem: Exemplo de função. Apresenta uma circunferência à esquerda, na cor azul e composta por 3 bolinhas de mesma cor em seu interior; à direita uma circunferência na cor roxa, composta por um terceiro conjunto, na cor verde e composto por 1 bolinha, sendo que do diagrama azul partem 3 setas, na cor vermelha, em direção a mesma bolinha verde. Acima a descrição “É função”. Fim da descrição.

Vimos exemplos de funções a partir das representações por diagramas e agora veremos outros exemplos por representações gráficas.

Assim como as relações, as funções podem ser representadas graficamente, em que temos no plano cartesiano os eixos das abscissas (x) e os eixos das ordenadas (y).

No eixo das abscissas, temos a representação do domínio, e no eixo das ordenadas, a representação do contradomínio.

No exemplo a seguir, temos uma função, sendo que, para qualquer que seja o elemento do domínio (x), temos um elemento no contradomínio (y); não temos nenhum “salto” ou interrupção no gráfico.

É função

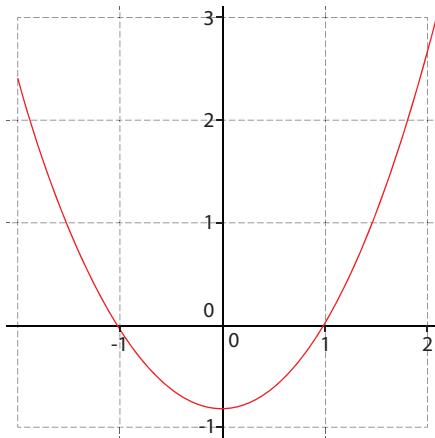


Figura 13 – Exemplo de função

#ParaTodosVerem: Representação de um plano cartesiano em função de segundo grau. Apresenta duas retas perpendiculares, sendo a da horizontal, indicando o eixo "X" e os elementos de -1 a 2, contados a cada unidade e, a da vertical, indicando o eixo "Y" e os elementos de -1 a 3, contados a cada unidade. No plano, há uma parábola, na cor vermelha, de concavidade para cima, que corta o segmento X, nas coordenadas: (-1, 0) e (1, 0), com ponto mais baixo próximo ao -1, do eixo Y. Acima a descrição "É função". Fim da descrição.

Nesse outro exemplo, não temos uma função. Notamos que há elementos em x (eixo das abscissas) que possuem duas imagens, ou seja: relacionaram-se com dois elementos em y (contradomínio). Por exemplo: o número 1, no eixo das abscissas, possui imagem 1 e -1 no eixo das ordenadas.

Não é função

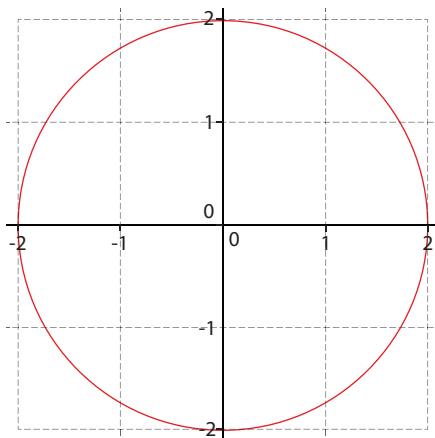


Figura 14 – Exemplo de uma relação que não é função

#ParaTodosVerem: Representação de um plano cartesiano. Apresenta duas retas perpendiculares, sendo a da horizontal, indicando o eixo "X" e os elementos de -2 a 2, contados a cada unidade e, a da vertical, indicando o eixo "Y" e os elementos de -2 a 2, contados a cada unidade. No plano, há uma circunferência que corta os eixos nas coordenadas: (2, 0), (0, 2), (-2, 0) e (0, -2). Acima a descrição "Não é função". Fim da descrição.

Novamente, temos um exemplo no qual não temos uma função, pelo fato de que há elementos do domínio (eixo das abscissas) que possuem mais de uma imagem no contradomínio (eixo das ordenadas).

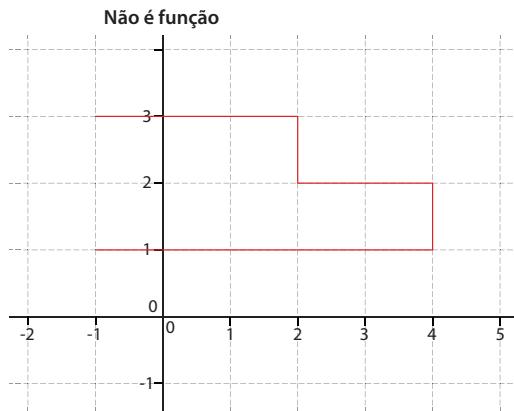


Figura 15 – Exemplo de uma relação que não é função

#ParaTodosVerem: Representação de um plano cartesiano em função de segundo grau. Apresenta duas retas perpendiculares, sendo a da horizontal, indicando o eixo "X" e os elementos de -2 a 5, contados a cada unidade e, a da vertical, indicando o eixo "Y" e os elementos de -1 a 3, contados a cada unidade. No plano, a construção de uma figura geométrica, a partir da ligação da seguinte ordem de coordenadas: (0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (4, 2), (3, 2), (2, 2), (2, 3), (1, 3), (0, 3). Acima a descrição "Não é função". Fim da descrição.

Ao lado, há um exemplo de função, pois todos os elementos do domínio se relacionam uma única vez com os elementos do contradomínio.

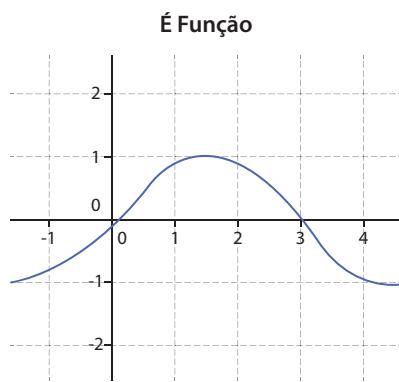


Figura 16 – Exemplo de função

#ParaTodosVerem: Representação de um plano cartesiano em função de segundo grau. Apresenta duas retas perpendiculares, sendo a da horizontal, indicando o eixo "X" e os elementos de -1 a 4, contados a cada unidade e, a da vertical, indicando o eixo "Y" e os elementos de -2 a 2, contados a cada unidade. No plano, há uma parábola, na cor azul, de concavidade para baixo, que corta o segmento X, nas coordenadas: (0, 0) e (1, 3), com ponto mais alto próximo ao 1, do eixo Y. Acima a descrição "É função". Fim da descrição.

Dados os conjuntos A {a,b,c,d} , B {0,2,4} e C {1,3,5,7}

Exemplo 1

$$A \rightarrow B \{(a,0) (b,2) (c,2) (d,4)\}$$

É função, pois são observadas as seguintes determinações: todo elemento de A possui uma relação em B e cada um desses elementos se relacionou apenas com um único elemento em B (ainda que um mesmo elemento em B tenha sido imagem de mais de um elemento de A).

Exemplo 2

$$A \rightarrow B \{(a,0), (a,2), (b,4), (c,4), (d,2)\}$$

Não é função. Embora os elementos de A tenham uma relação em B, ocorre que um elemento (a) se relacionou com mais de um elemento em B.

Exemplo 3

$$A \rightarrow C \{(a,1), (b,3), (c,5), (d,7)\}$$

É função, pois são observadas as seguintes determinações: todo elemento de A possui uma relação em C e cada um desses elementos se relacionou apenas com um único elemento em C.

Exemplo 4

$$A \rightarrow C \{(a,1), (c,3), (d,7)\}$$

Não é função, pois um dos elementos de A, o elemento b, não se relacionou com nenhum elemento do conjunto C e, para ser função, todos os elementos do domínio devem possuir uma imagem a partir da função.

Exemplo 5

$$A \rightarrow C \{(a,1), (b,1), (c,1), (d,1)\}$$

É função, pois todos os elementos de A se relacionaram com um único elemento em C. Importante notar que não há impedimento de que a imagem seja única; é o que chamamos de função constante.

Outros exemplos

Dado o conjunto A {1,2,3,4} e o conjunto B {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}, determine:

a) O conjunto imagem e os pares da função dada por:

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \rightarrow y f(x)$$

$$f(x) = x + 2$$

Vemos que a função é dada pela regra que associa a cada elemento em A um único elemento em B e essa regra, nesse exemplo, é dada por $f(x) = x + 2$.

Então, vamos aplicá-la a cada elemento de A.

Logo, temos:

$$f(x) = x + 2$$

Para $x = 1$ teremos: $f(1) = 1 + 2 = 3$

Para $x = 2$ teremos: $f(2) = 2 + 2 = 4$

Para $x = 3$ teremos: $f(3) = 3 + 2 = 5$

Para $x = 4$ teremos: $f(4) = 4 + 2 = 6$

Após aplicar a função para todos os elementos do domínio, vemos que cada um deles possui uma imagem (resultado da função) no contradomínio.

O conjunto Imagem, ou seja $\text{Im}(f) = \{3, 4, 5, 6\}$

Como resultado da função, temos os seguintes pares ordenados:

$$F = \{(1,3), (2,4), (3,5), (4,6)\}$$

b) A partir dos mesmos conjuntos, determine o conjunto imagem e os pares ordenados a partir de $f(x) = 2x$

Aplicando a função $f(x)$ para todos os elementos do conjunto A $\{1, 2, 3, 4\}$, teremos:

$$f(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$f(3) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$f(4) = 2 \cdot 4 = 8$$

A imagem da função $\text{Im}(f) = \{2, 4, 6, 8\}$, que está contida no contradomínio.

E os pares ordenados da função $f = \{(1,2), (2,4), (3,6), (4,8)\}$

Igualdade entre Funções

Sejam duas funções $f: A \rightarrow B$ e $g: A \rightarrow B$, então f será igual a g somente se para todo elemento do domínio A as imagens de cada termo, em B, forem iguais tanto pela função f como pela função g .

Além disso, Domínio e Imagem devem ser iguais.

Ou seja:

$$(\forall x \in X) [f(x) = g(x)]$$

Exemplos numéricos

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c\}$ temos as funções f e g :

$$f = \{(1,a), (2,b), (3,c)\}$$

$$g = \{(2,b), (1,a), (3,c)\}$$

Vemos que $f = g$, vez que para um mesmo x , a $f(x)$, a imagem de x é exatamente igual a $g(x)$.

Tipos de Funções

Assim como ocorre com as relações, de acordo com as propriedades e regras observadas, também classificamos as funções.

Função Injetora

Uma função $f: A \rightarrow B$ será injetora se:

$$(\forall x_1, x_2 \in A) [f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2]$$

Ou seja, qualquer que seja x do elemento do domínio, ele se relacionará apenas com um elemento do contradomínio (condição necessária para ser função) e se o contradomínio de cada elemento também só se relacionou (isto é: é imagem) de um único elemento do domínio, então chamamos a função de **INJETORA**.

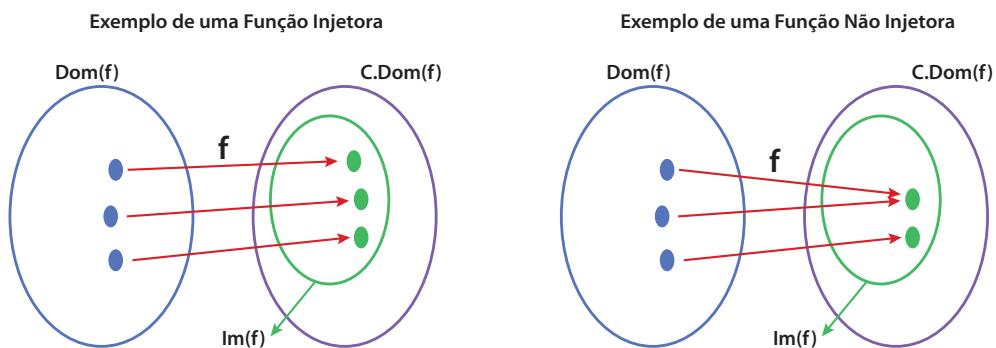


Figura 17 – Exemplo de função injetora e de função não injetora

#ParaTodosVerem: Representação de função injetora. Apresenta quatro diagramas, agrupados em duplas, sendo uma à esquerda e a outra à direita. À esquerda o diagrama na cor azul, chamado "Dom (f)", composto de 3 bolinhas azuis e o diagrama na cor roxa, chamado "C. Dom (f)" composto de um terceiro conjunto, chamado Im (f), na cor verde, contendo 3 bolinhas verdes, partindo setas do azul para o verde, sendo na cor vermelha, e se relacionando com cada uma das bolinhas, sem repetição. Acima a descrição "Exemplo de uma função injetora". A direita o diagrama na cor azul, chamado "Dom (f)", composto de 3 bolinhas azuis e o diagrama na cor roxa, chamado "C. Dom (f)" composto de um terceiro conjunto, chamado Im (f), na cor verde, contendo 2 bolinhas verdes, partindo setas do azul para o verde, sendo na cor vermelha, e se relacionando com cada uma das bolinhas, sendo que a verde se repete para duas azuis diferentes. Acima a descrição "Exemplo de uma função não injetora". Fim da descrição.

Veja que no exemplo de uma função não injetora ocorreu de um elemento do contradomínio $C.Dom(f)$ ser imagem de mais de um elemento, o que não descaracteriza a função, mas deixa de ser injetora.

Função Sobrejetora

Chamamos de **sobrejetora** a função na qual todo o contradomínio é imagem da função, isto é, todo elemento que pertence ao contradomínio é resultado da função.

Uma função $f: A \rightarrow B$ será sobrejetora se:

$$(\forall y \in B) (\exists x \in A)[f(x) = y]$$

Ou seja, a função é sobrejetora se $\text{Im}(f) = B$

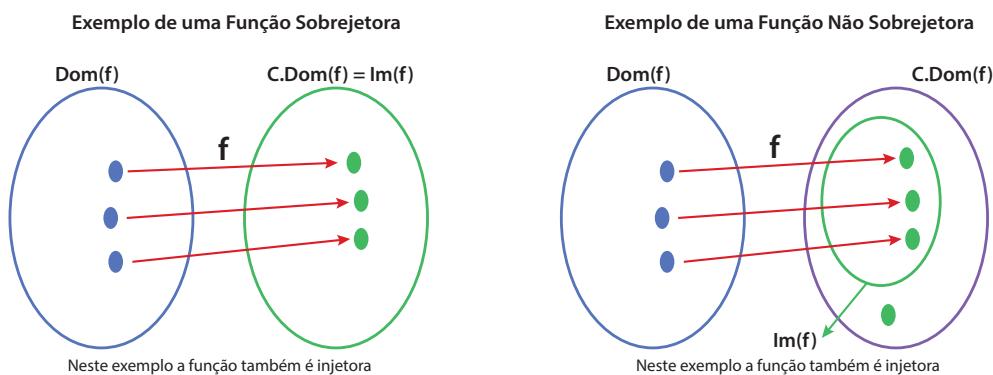


Figura 18 – Exemplo de função sobrejetora e de função não sobrejetora

#ParaTodosVerem: Representação de função sobrejetora. Apresenta quatro diagramas, agrupados em duplas, sendo uma à esquerda e a outra à direita. A esquerda o diagrama na cor azul, chamado “Dom (f)”, composto de 3 bolinhas azuis e o diagrama na cor verde, chamado “C. Dom (f) = Im (f)”, contendo 3 bolinhas verdes, partindo setas do azul para o verde, sendo na cor vermelha, e se relacionando com cada uma das bolinhas, sem repetição. Acima a descrição “Exemplo de uma função sobrejetora” e abaixo “Neste exemplo a função também é injetora”. A direita o diagrama na cor azul, chamado “Dom (f)”, composto de 3 bolinhas azuis e o diagrama na cor roxa, chamado “C. Dom (f)” composto por uma bolinha verde e um terceiro conjunto, chamado $\text{Im} (f)$, na cor verde, contendo 3 bolinhas verdes, partindo setas do azul para o verde, sendo na cor vermelha, e se relacionando com cada uma das bolinhas do terceiro conjunto, sem repetição. Acima a descrição “Exemplo de uma função não sobrejetora” e abaixo “Neste exemplo a função também é injetora. Fim da descrição.

Quando todos os elementos do contradomínio fazem parte da imagem, temos uma função chamada de sobrejetora.

Função Bijetora

Há alguns casos em que além de ser injetora (cada um dos elementos do contradomínio é imagem de apenas um elemento do domínio) a função é também sobrejetora (todos os elementos do contradomínio são imagens de algum elemento do domínio). Quando isso ocorre, chamamos a função de **BIJETORA**.

Uma função $f: A \rightarrow B$ é do tipo BIJETORA se e somente se f é injetora e também sobrejetora.

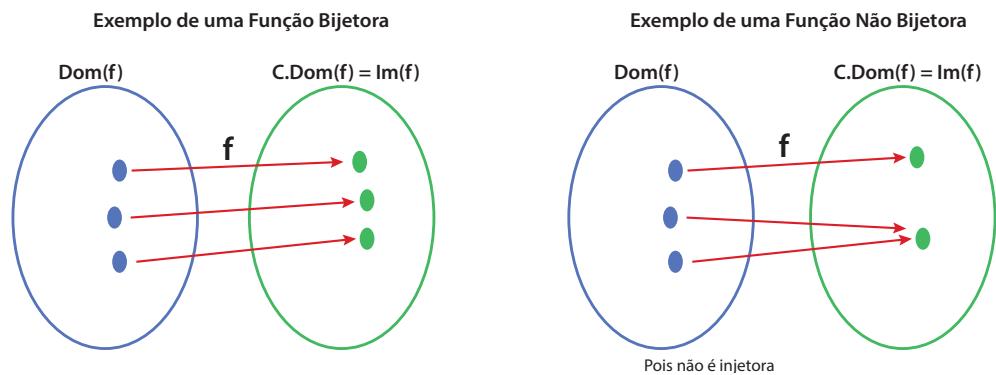


Figura 19 – Exemplo de função bijetora e de função não bijetora

#ParaTodosVerem: Representação de função bijetora. Apresenta quatro diagramas, agrupados em duplas, sendo uma à esquerda e a outra à direita. A esquerda o diagrama na cor azul, chamado "Dom (f)", composto de 3 bolinhas azuis e o diagrama na cor verde, chamado "C. Dom (f) = Im (f)", contendo 3 bolinhas verdes, partindo setas do azul para o verde, sendo na cor vermelha, e se relacionando com cada uma das bolinhas, sem repetição. Acima a descrição "Exemplo de uma função bijetora. A direita o diagrama na cor azul, chamado "Dom (f)", composto de 3 bolinhas azuis e o diagrama na cor verde, chamado "C. Dom (f) = Im (f)", contendo 2 bolinhas verdes, partindo setas do azul para o verde, sendo na cor vermelha, e se relacionando com cada uma das bolinhas, que se repete para duas bolinhas azuis diferentes. Acima a descrição "Exemplo de uma função não bijetora" e abaixo "Pois não é injetora". Fim da descrição.

Alguns exemplos numéricos

Para $A = \{1,2,3,4,5\}$ e $B = \{a,b,c,d\}$, sejam f_1 e f_2 dadas a seguir:

$f_1 = \{(1,c), (2,b), (3,b), (4,d), (5,d)\}$ não é sobrejetora e nem injetora.

$f_2 = \{(1,a), (2,b), (3,c), (4,d), (5,d)\}$ é sobrejetora, mas não é injetora.

Para $C = \{2,4,6,8\}$ e $D = \{a,b,c,d\}$ sejam g_1 e g_2 dadas a seguir:

$g_1 = \{(2,a), (4,c), (6,d), (8,b)\}$ é injetora e sobrejetora, portanto: bijetora.

$g_2 = \{(2,a), (4,a), (6,a), (8,a)\}$ não é injetora e nem sobrejetora.



Para ver outros exemplos de funções, acesse o material disponível no link
<https://goo.gl/JxY221>

Função Inversa

Na função inversa, temos a troca dos papéis entre domínio e imagem, mas na qual a relação se mantém. Por exemplo: temos uma função f de A em B , na qual é A o domínio (conjunto de partida) e B o contradomínio (conjunto de chegada).

Quando fazemos a inversão da função f , isto é, temos f^{-1} , B passa a ser o domínio (conjunto de partida) e A passa a ser a imagem (conjunto de chegada), a relação entre os dois conjuntos se mantém, porém no sentido inverso.

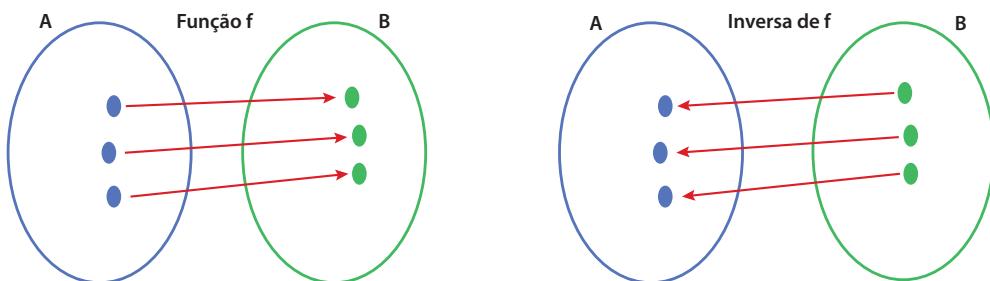


Figura 20 – Função Inversa

#ParaTodosVerem: Representação de função inversa. Apresenta quatro diagramas, agrupados em duplas, sendo uma à esquerda e a outra à direita. A esquerda o diagrama na cor azul, chamado “A”, composto de 3 bolinhas azuis e o diagrama na cor verde, chamado “B”, contendo 3 bolinhas verdes, partindo setas do azul para o verde, sendo na cor vermelha, e se relacionando com cada uma das bolinhas, sem repetição. Acima a descrição “Função f”. A direita o diagrama na cor azul, chamado “A”, composto de 3 bolinhas azuis e o diagrama na cor verde, chamado “B”, contendo 3 bolinhas verdes, partindo setas do verde para o azul, sendo na cor vermelha, e se relacionando com cada uma das bolinhas, sem repetição. Acima a descrição “Inversa de f”. Fim da descrição.

Ou seja na relação (x,y) temos que x passa a ocupar o lugar de y e vice-versa.

Para que uma função possua sua inversa, ela deve ser necessariamente bijetora; somente assim a inversão ocorrerá para todos os elementos em ambos os conjuntos.



Em Síntese

Nesta Unidade, vimos que uma relação é uma Lei ou regra de transformação dos elementos de um conjunto que resulta em elementos em um outro conjunto.

Especialmente nas funções, temos que para todo elemento do conjunto de partida há uma única imagem no conjunto de chegada. Além disso, vimos que, de acordo com propriedades e características, as funções e as relações podem ser classificadas.

Esse conceito de relações e funções, na Matemática, é muito importante, pois vai além das funções matemáticas e lógicas que regem os computadores e as redes de comunicação.

A partir do conceito de funções e relações, da observação e da análise de fenômenos e padrões, é possível prever tendências e acontecimentos como fenômenos da natureza e ocorrências na sociedade: fenômenos atmosféricos, mercado financeiro, nível de produção e redes sociais entre outros.

Material Complementar

Indicações para saber mais sobre os assuntos abordados nesta Unidade:



Livros

Trama Matemática: Princípios e Novas Práticas no Ensino Médio

No livro **Trama Matemática**, das páginas 47 a 60, você pode explorar o assunto de relações e funções. O livro está disponível na Biblioteca Virtual Universitária: BARRETO, M. **Trama matemática: Princípios e novas práticas no ensino médio**. Campinas: Papirus 2013.



Vídeos

O que é uma Função

Nesse *link*, você pode ver o vídeo do renomado Sal Khan, do projeto Khan Academy, sobre funções;

<https://goo.gl/QqJLMK>



Leitura

Relação

<https://goo.gl/drPFo8>

Referências

BARRETO, M. **Trama Matemática**: Princípios e novas práticas no ensino médio. Campinas: Papirus 2013.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra Moderna**. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar**. v.1. Conjuntos – Funções. São Paulo: Atual, 2013.



Cruzeiro do Sul
Educacional