

# **Matemática Aplicada**



**Cruzeiro do Sul Virtual**  
Educação a distância



# Material Teórico



Função Quadrática

**Responsáveis pelo Conteúdo:**

Prof.ª M.ª Adriana Domingues Freitas  
Prof.ª Dra. Jussara Maria Marins

**Revisão Textual:**

Prof.ª Dra. Selma Aparecida Cesarin



# UNIDADE

## Função Quadrática



- Função Quadrática
- Valor Numérico da Função Quadrática em um Ponto
- Zero da Função Quadrática
- Representação Gráfica das Raízes
- Vértice da Parábola
- Estudo do Sinal
- Exemplos de Resolução de Exercícios



### OBJETIVO DE APRENDIZADO

- Identificar a Função Quadrática e suas características;
- Reconhecer a parábola como representação gráfica de uma Função Quadrática;
- Compreender as alterações gráficas da parábola a partir dos coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ ;
- Calcular o vértice e classificar como ponto máximo ou mínimo;
- Compreender o sinal da Função Quadrática.





# Orientações de estudo

Para que o conteúdo desta Disciplina seja bem aproveitado e haja uma maior aplicabilidade na sua formação acadêmica e atuação profissional, siga algumas recomendações básicas:



## Assim:

- ✓ Organize seus estudos de maneira que passem a fazer parte da sua rotina. Por exemplo, você poderá determinar um dia e horário fixos como o seu “momento do estudo”.
- ✓ Procure se alimentar e se hidratar quando for estudar, lembre-se de que uma alimentação saudável pode proporcionar melhor aproveitamento do estudo.
- ✓ No material de cada Unidade, há leituras indicadas. Entre elas: artigos científicos, livros, vídeos e sites para aprofundar os conhecimentos adquiridos ao longo da Unidade. Além disso, você também encontrará sugestões de conteúdo extra no item **Material Complementar**, que ampliarão sua interpretação e auxiliarão no pleno entendimento dos temas abordados.
- ✓ Após o contato com o conteúdo proposto, participe dos debates mediados em fóruns de discussão, pois irão auxiliar a verificar o quanto você absorveu de conhecimento, além de propiciar o contato com seus colegas e tutores, o que se apresenta como rico espaço de troca de ideias e aprendizagem.

# Função Quadrática

Uma função  $f$ : de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  chama-se Quadrática quando existem números reais  $a$ ,  $b$ , e  $c$ , com  $a \neq 0$ , tal que  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Vejamos alguns exemplos de Função Quadrática:

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1, \text{ onde } a = 3, b = -2 \text{ e } c = 1$$

$$f(x) = x^2 - 1, \text{ onde } a = 1, b = 0 \text{ e } c = -1$$

$$f(x) = -x^2 + 5x, \text{ onde } a = 1, b = 5 \text{ e } c = 0$$

$$f(x) = -2x^2, \text{ onde } a = -2, b = 0 \text{ e } c = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x, \text{ onde } a = \frac{1}{2}, b = 4 \text{ e } c = 0$$

A Função Quadrática aparece em vários fenômenos e situações do dia a dia. Entre eles, podemos citar: a relação entre dois números, quando conhecemos a soma e o produto entre ambos, nos fenômenos físicos, como, por exemplo, na queda livre de corpos, no lançamento de um projétil que atinge o ponto máximo, cuja trajetória gráfica (parábola) pode ser escrita por uma Função Quadrática, entre outros.

## Valor Numérico da Função Quadrática em um Ponto

Identificar o valor da Função Quadrática em um ponto consiste em calcular o valor resultante da função para determinado  $x$ .

### Exemplo

Seja a função  $f(x) = x^2 + 4x + 2$ , o valor numérico da função para  $x_0 = 3$ , ou seja,  $f(3)$  é dado por:

$$f(x) = x^2 + 4x + 2$$

$$f(3) = (3)^2 + 4(3) + 2 = 23$$

Ou seja, na função dada, quando temos  $x = 3$ ,  $f(x) = 23$  em par ordenado, podemos denotar por:  $P = (3, 23)$ .

### Exemplo

Seja a função  $f(x) = x^2 + 5x$ , o valor numérico da função para  $x_0 = -1$ , ou seja,  $f(-1)$  é dado por:

$$f(x) = x^2 + 5x$$

$$f(-1) = (-1)^2 + 5(-1) = 1 - 5 = -4$$

Ou seja, na função dada, quando temos  $x = -1$ ,  $f(x) = -4$  em par ordenado, podemos denotar por:  $P = (-1, -4)$ .



### Em Síntese

Para calcular o valor numérico de uma função, basta substituir o valor de  $x$  na função e calcular seu resultado.

## Gráfico da Função Quadrática

O gráfico de uma Função Quadrática é uma parábola. Vamos relembrar a definição geométrica de uma parábola?

Consideremos um ponto  $F$  e uma reta  $d$  que não o contém. Chamamos de parábola de foco  $F$  e de reta diretriz  $d$  ao conjunto de pontos do plano que distam igualmente de  $F$  e  $d$ , conforme ilustrado na imagem a seguir:

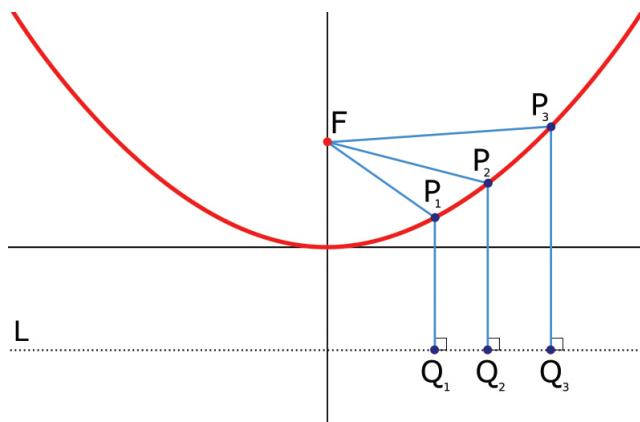


Figura 1 – Parábola

**#ParaTodosVerem:** Representação de Parábola. Apresentada em plano cartesiano há a construção de uma parábola (linha curva) na cor vermelha, de concavidade para cima, utilizando os quadrantes 1 e 2. No quadrante 1, a parábola possui 3 pontos  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ , ligados a um mesmo ponto  $F$  do eixo vertical, e cada um deles a um ponto  $Q$  na parte inferior, indicada em linha tracejada  $L$ , e os três pontos marcados no quadrante 4, nomeados  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$ . Fim da descrição.

A reta perpendicular à diretriz que contém o foco chama-se eixo da parábola. O Ponto ( $V$ ) da parábola mais próximo da diretriz chama-se vértice. O vértice ( $V$ ) é o ponto médio do segmento cujos extremos são o foco e a intersecção do eixo com a diretriz.

O traçado gráfico da curva formada pela função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  é uma parábola que pode ter variações gráficas de acordo com os coeficientes  $a$ ,  $b$ , e  $c$ .

A seguir veremos cada uma dessas variações:

# Parâmetros da Função Quadrática e suas Alterações Gráficas

## Coeficiente $a$ e a Concavidade da Parábola

A parábola que representa a Função Quadrática pode ter sua concavidade para cima ou para baixo. Algebricamente, tal fato é determinado pelo valor do coeficiente  $a$ .

Se  $a$  é positivo ( $a > 0$ ), a concavidade é dita “para cima”; se  $a$  é negativo ( $a < 0$ ), a concavidade é dita “para baixo”.

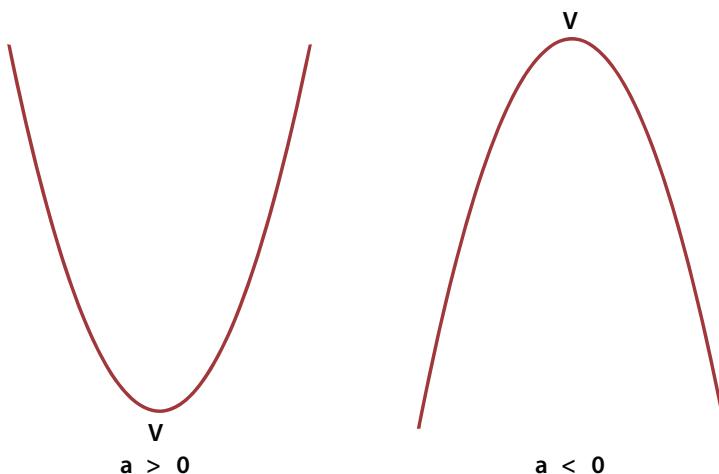


Figura 2 – Concavidade da parábola e o coeficiente  $a$

**#ParaTodosVerem:** Representação das concavidades da parábola. No lado esquerdo, a parábola de concavidade para cima, seu ponto mais baixo indicado pela letra “V” e a descrição “ $a > 0$ ”. No lado direito, a parábola de concavidade para baixo, seu ponto mais alto indicado pela letra “V” e a descrição “ $a < 0$ ”. Fim da descrição.

O Vértice é o ponto mais próximo da diretriz  $D$  e é, por esse motivo, chamado de ponto extremo da parábola. Esse extremo poderá ser Máximo ou Mínimo, dependendo da concavidade da parábola.



### Importante!

Quando a concavidade está **VOLTADA PARA CIMA**, o vértice (V) é o **PONTO MÍNIMO** da parábola; mas quando está **VOLTADA PARA BAIXO**, o vértice (V) é o ponto **MÁXIMO**.

Além de interferir na concavidade da parábola, o valor do coeficiente  $a$  também irá determinar a abertura da curva:

- Quanto maior o valor do coeficiente  $a$ , menor será a abertura da parábola;
- Quanto menor o valor do coeficiente  $a$ , maior será a abertura da parábola.

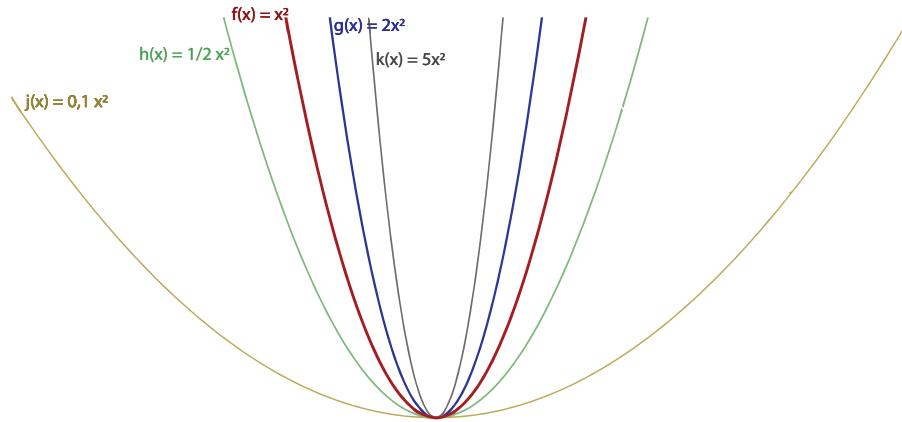


Figura 3 – Alterações gráficas na parábola em decorrência do parâmetro a

**#ParaTodosVerem:** Representação de alterações gráficas. Apresenta a construção de 5 parábola, indicadas pelo mesmo ponto baixo, em cores diferentes, conforme a indicação das equações de sua elaboração. Da maior parábola para a menor, sempre em direção ao centro, as equações são:  $j(x)=0,1x$  ao quadrado;  $h(x)=1/2x$  ao quadrado;  $f(x)=X$  ao quadrado;  $g(x)=2x$  ao quadrado;  $k(x)=5x$  ao quadrado. Fim da descrição.

## Parâmetro b

---

Indica se a parábola intercepta o eixo y no ramo crescente ou decrescente:

Se  $b > 0$ , a parábola intercepta o eixo y no **ramo crescente**.

Se  $b < 0$ , a parábola intercepta o eixo y no **ramo decrescente**.

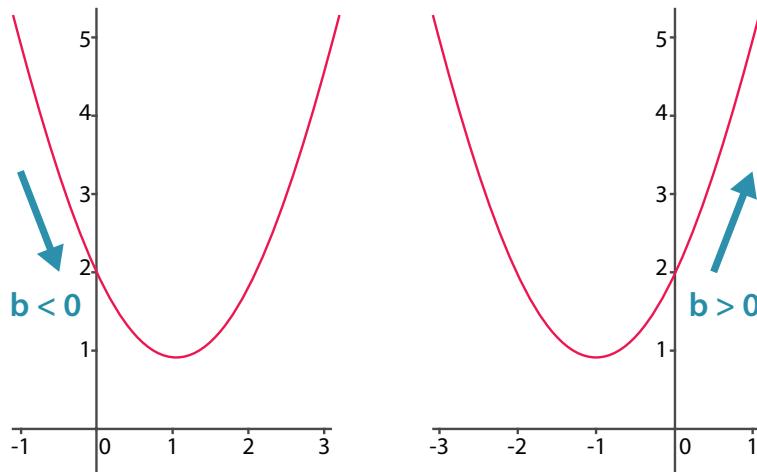
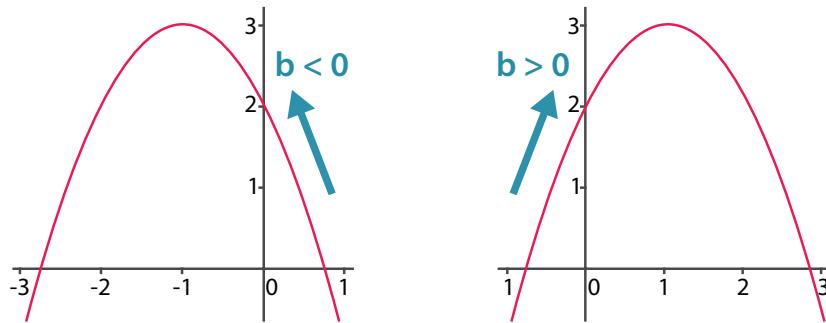


Figura 4 – Alterações gráficas na parábola em decorrência do parâmetro b

**#ParaTodosVerem:** Representação gráfica por parâmetro. Apresenta dois gráficos de parábola, sendo o da direita no plano cartesiano de eixo horizontal de -1 a 3 e eixo vertical de 0 a 5, com a parábola, de concavidade para cima, cortando a coordenada (0, 2) e o ponto mais baixo inserido no primeiro quadrante, com a indicação de uma seta na cor azul, com a descrição " $b < 0$ "; o da esquerda no plano cartesiano de eixo horizontal de -3 a 1 e eixo vertical de 0 a 5, com a parábola, de concavidade para cima, cortando a coordenada (0, 2) e o ponto mais baixo inserido no segundo quadrante, com a indicação de uma seta na cor azul, com a descrição " $b > 0$ ". Fim da descrição.

Figura 5 – Alterações gráficas na parábola em decorrência do parâmetro  $b$ 

**#ParaTodosVerem:** Representação gráfica por parâmetro. Apresenta dois gráficos de parábola, sendo o da direita no plano cartesiano de eixo horizontal do  $-3$  a  $1$  e eixo vertical de  $0$  a  $3$ , com a parábola, de concavidade para baixo, cortando a coordenada  $(0, 2)$  e o ponto mais alto inserido no segundo quadrante, com a indicação de uma seta na cor azul, com a descrição “ $b < 0$ ”; o da esquerda no plano cartesiano de eixo horizontal do  $-1$  a  $3$  e eixo vertical de  $0$  a  $3$ , com a parábola, de concavidade para baixo, cortando a coordenada  $(0, 2)$  e o ponto mais alto inserido no primeiro quadrante, com a indicação de uma seta na cor azul, com a descrição “ $b > 0$ ”. Fim da descrição.

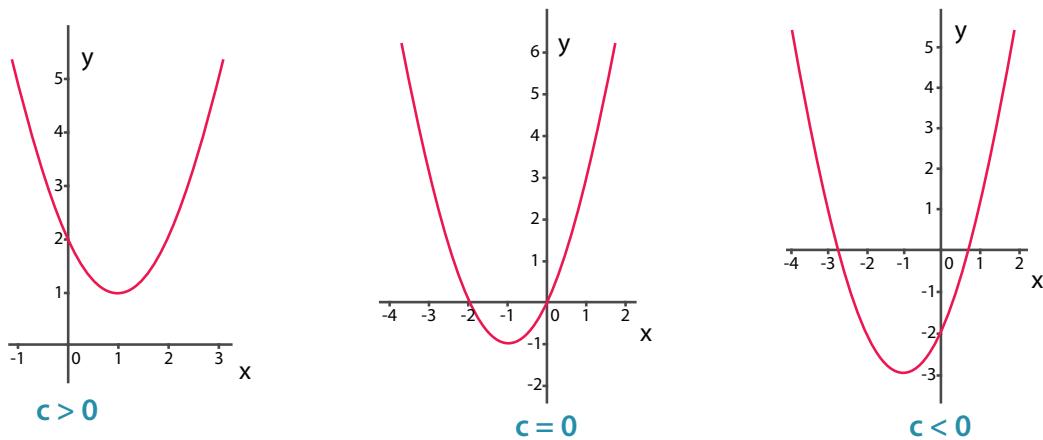
## Parâmetro $c$

O parâmetro  $c$ , também denominado termo independente, indica em qual ponto a parábola intercepta o eixo  $y$ , pois esse ponto é determinado por  $(x, c)$ :

Se  $c > 0$ , a parábola intercepta o eixo  $OY$  acima do eixo das abscissas.

Se  $c < 0$ , a parábola intercepta o eixo  $OY$  a seguir do eixo das abscissas

Se  $c = 0$ , a parábola intercepta o eixo  $OU$  na origem.

Figura 6 – Alterações gráficas na parábola em decorrência do parâmetro  $c$ 

**#ParaTodosVerem:** Representação de parábolas por parâmetro. Apresenta três gráficos por parábolas, construído dentro do plano cartesiano: o primeiro com eixo  $X$  de  $-1$  a  $3$  e eixo  $y$  de  $0$  a  $5$ , parábola na cor vermelha, cortando a coordenada  $(0, 2)$  concavidade para cima, o ponto mais baixo no primeiro quadrante, e abaixo a descrição “ $c > 0$ ”;

o segundo com eixo X de -4 a 2 e eixo y de -2 a 6, parábola na cor vermelha, cortando as coordenadas (-2, 0) e (0, 0), concavidade para cima, o ponto mais baixo no terceiro quadrante, e abaixo a descrição “c = 0”; o terceiro com eixo X de -4 a 2 e eixo y de -3 a 5, parábola na cor vermelha, cortando a coordenadas em concavidade para cima, o ponto mais baixo no terceiro quadrante, e abaixo a descrição “c < 0”. Fim da descrição.

## Zero da Função Quadrática

Chamamos de **ZERO da função**, ou **RAIZ da equação**, ao número real que é atribuído à variável  $x$  e que faz com que  $f(x)$  seja igual a zero. Uma Função Quadrática pode apresentar uma, duas ou nenhuma raiz real.

Uma das formas de calcular as raízes é resolver a da equação de segundo grau:

$ax^2 + bx + c = 0$  , em que  $x$  é a raiz e será determinado por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Considerando:  $\Delta = b^2 - 4ac$ , temos que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nessa fórmula, por meio do cálculo do discriminante  $\Delta$  chamado de delta, podemos identificar se a função terá, ou não, raízes.

Pois, considerando:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

temos que:

$\Delta = 0$  , teremos uma única raiz real, que é chamada de raiz dupla:

$\Delta > 0$ , teremos duas raízes reais distintas

$\Delta < 0$ , não teremos raízes reais

## Representação Gráfica das Raízes

Vimos que uma Função Quadrática pode conter:

- **Uma única raiz real dupla;**
- **Duas raízes reais distintas;**
- **Nenhuma raiz real.**

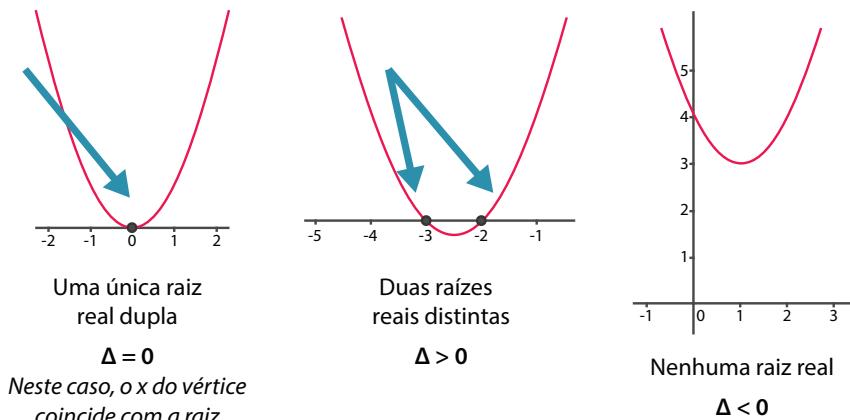


Figura 7 – Representação gráfica das raízes de uma Função Quadrática

**#ParaTodosVerem:** Representação gráfica de raízes. Apresenta três gráficos: o da esquerda com um segmento de reta indicado de  $-2$  a  $2$ , parábola na cor vermelha, cortando a ordenada  $(0,0)$  em seu ponto mais baixo (concavidade para cima), abaixo a descrição “uma única raiz real dupla, delta = 0, neste caso o X do vértice coincide com a raiz”; o central com um segmento de reta indicado de  $-5$  a  $-1$ , parábola na cor vermelha, cortando as raízes  $-3$  e  $-2$  (concavidade para cima), abaixo a descrição “duas raízes reais distintas, delta > 0; o da direita com um segmento de reta horizontal indicado de  $-1$  a  $3$  e eixo y de  $0$  a  $5$ , parábola na cor vermelha, cortando a ordenada  $(0,4)$  concavidade para cima e o ponto mais baixo no quadrante 1, abaixo a descrição “nenhuma raiz real, delta < 0. Fim da descrição.

Verificamos na imagem acima que, dependendo da Função Quadrática, podemos ter uma única raiz real ( $\Delta = 0$ ), o que graficamente representa que a parábola “tocará” em apenas um único ponto no eixo OX, independente se a concavidade da parábola é para cima ou para baixo.

Já quando a função apresenta duas raízes reais distintas ( $\Delta > 0$ ), graficamente a parábola intercepta o eixo OX em dois pontos, independente se a concavidade da parábola é para cima ou para baixo.

E quando a função não apresenta raiz ( $\Delta < 0$ ), graficamente a parábola não intercepta o eixo OX. Ou seja: o ponto máximo ou mínimo está a seguir ou acima do eixo OX, sem interceptá-lo.

### Exemplos

As raízes da função  $f(x) = x^2 - 5x - 6$  são  $x_1 = -1$  e  $x_2 = 6$ , vamos detalhar os cálculos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2} \\ x_1 &= \frac{5 + 7}{2} = 6 \end{aligned}$$

$$x_2 = \frac{5-7}{2} = -1$$

A existência dessas duas raízes  $x_1 = 6$  e  $x_2 = -1$  também é evidenciada graficamente na parábola, que representa a função, que intercepta o eixo OX nos pontos P (-1,0) e Q (6, 0), conforme podemos verificar na imagem a seguir:

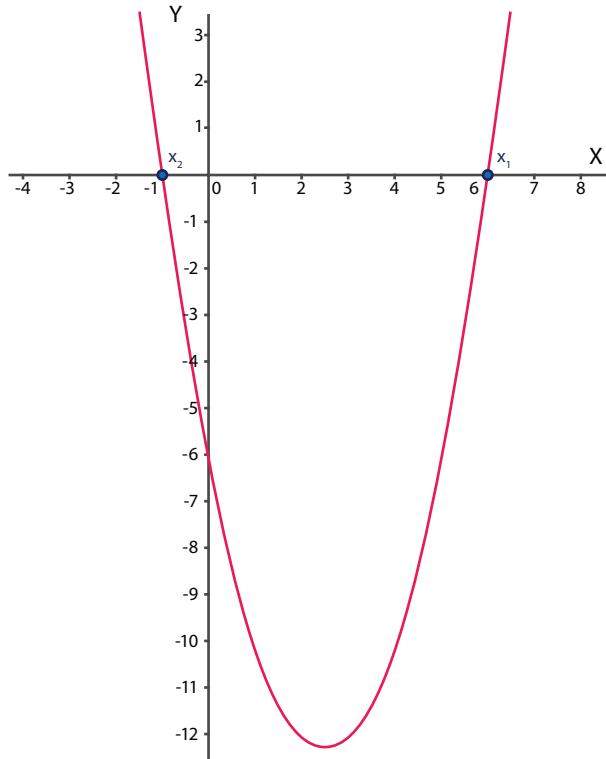


Figura 8 – Gráfico da Função  $f(x) = x^2 - 5x - 6$

**#ParaTodosVerem:** Representação do gráfico da função  $f(x) = X$  elevado ao quadrado  $- 5x - 6$ . Apresenta um plano cartesiano de eixo X indicado de -4 a 8 e eixo Y indicado de -12 a 3. No centro, a construção de uma parábola, com raízes em X nos valores -1 e 6, concavidade para cima e ponto mais baixo no quarto quadrante. Fim da descrição.

Já para a função  $f(x) = x^2 - 2x + 1$ , ao calcular a equação  $x^2 - 2x + 1 = 0$ , temos apenas uma raiz real (chamada também de raiz real dupla), e podemos observar que, de fato, temos  $\Delta = 0$ .

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} \\ &= \frac{2 \pm 0}{2} = 1 \end{aligned}$$

Graficamente, notamos que a parábola “toca” o eixo OX em um único ponto, que é justamente P (1,0), conforme figura a seguir:

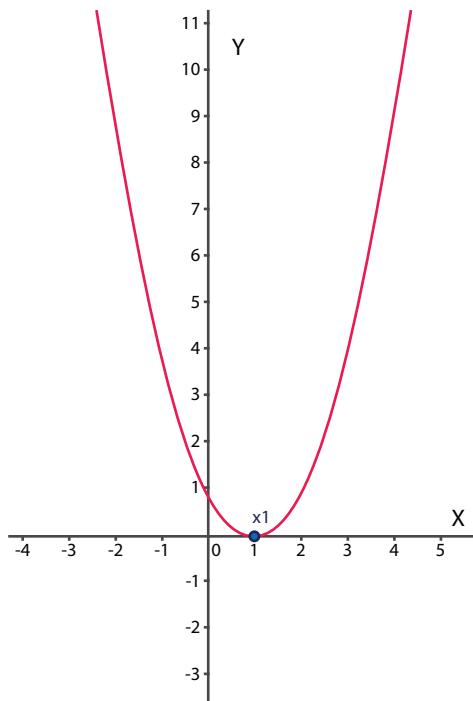


Figura 9 – Gráfico da função  $f(x) = 2x^2 - 2 + 1$

**#ParaTodosVerem:** Representação do gráfico da função  $f(x) = 2x^2 - 2 + 1$ . Apresenta um plano cartesiano de eixo X indicado de -4 a 5 e eixo Y indicado de -3 a 11. No centro, a construção de uma parábola, com raízes X no valor 0, 1, concavidade para cima e ponto mais baixo no primeiro quadrante. Fim da descrição.

Já para a função  $f(x) = x^2 + 2x + 3$ , ao calcular a equação  $x^2 + 2x + 3 = 0$ , temos:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

Como  $\Delta = -8$ , não temos a existência de uma raiz real, portanto, nesse caso, não há zero da função.

Evidenciamos esse fato graficamente, no traçado da parábola que representa  $f(x) = x^2 + 2x + 3$ , em que o ponto mínimo na função está acima do eixo OX. Além disso, possui concavidade para cima e não intercepta o eixo OX.

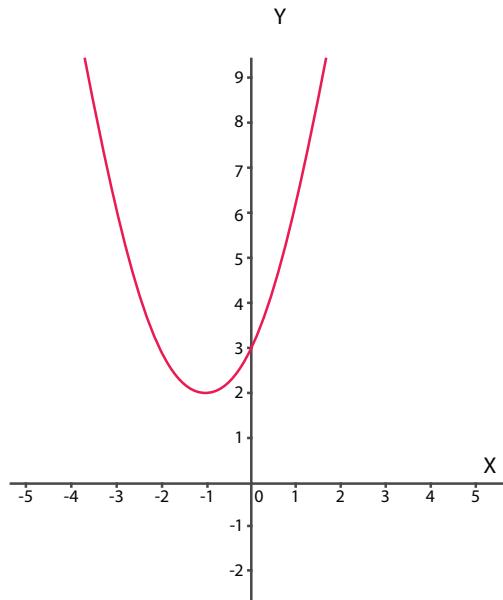


Figura 10 – Gráfico da função  $f(x) = x^2 + 2x + 3$

**#ParaTodosVerem:** Representação do gráfico da função  $f(x) = X$  elevado ao quadrado +  $2x + 3$ . Apresenta um plano cartesiano de eixo X indicado de -5 a 5 e eixo Y indicado de -2 a 9. No centro, a construção de uma parábola na cor vermelha, cortando a coordenada  $(0, 3)$ , concavidade para cima e ponto mais baixo no segundo quadrante. Fim da descrição.

## Vértice da Parábola

O Vértice de uma parábola, como vimos, é o ponto mais próximo da diretriz; isso o torna um ponto crítico da parábola que, dependendo da concavidade, pode ser:

- **PONTO MÁXIMO** que a parábola atinge, ou seja, o maior valor da imagem  $f(x)$ ;
- **PONTO MÍNIMO** que a parábola atinge, ou seja, o menor valor da imagem  $f(x)$ .

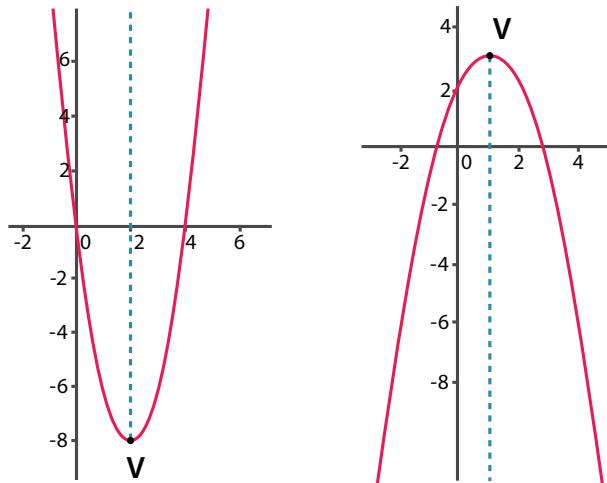


Figura 11

**#ParaTodosVerem:** Representação do vértice da parábola. Apresenta dois gráficos de função do segundo, sendo: o da esquerda com eixo horizontal indicado de -2 a 6 e eixo

vertical de  $-8$  a  $6$ , com parábola na cor vermelha, concavidade para cima, cortando as coordenadas  $(0, 0)$  e  $(4, 0)$  e vértice V indicado por linha tracejada e ponto marcado na ordenada  $(2, -8)$ ; o da direita com eixo horizontal indicado de  $-2$  a  $4$  e eixo vertical de  $-8$  a  $4$ , com parábola na cor vermelha cortando a ordenada  $(0, 2)$ , concavidade para baixo e ponto mais alto no primeiro quadrante e vértice V indicado por linha tracejada e ponto marcado na ordenada  $(1, 3)$ . Fim da descrição.

O vértice de uma parábola da função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  é um ponto, definido por:

$$V = \left( \frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$$

Lembrando que  $\Delta = b^2 - 4ac$

Como o Vértice assume um ponto máximo ou mínimo da função, devemos observar que a ordenada do ponto vértice, ou seja, a imagem ( $y$ ) do vértice, delimita a imagem da Função Quadrática.

Voltamos ao exemplo da função  $f(x) = x^2 - 5x - 6$ , que já sabemos, conforme cálculo efetuado no exemplo anterior, que as raízes são  $x_1 = 6$  e  $x_2 = -1$ .

Vamos calcular o ponto vértice e classificá-lo em ponto Mínimo ou Máximo.

$$V = \left( \frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right) = \left( \frac{-(-5)}{2 \cdot 1}, \frac{-49}{4 \cdot 1} \right) = \left( \frac{5}{2}, -\frac{49}{4} \right)$$

Podemos, ainda, classificar o ponto V como ponto mínimo, vez que a concavidade da parábola é para cima, e tal análise é realizada a partir da observação do coeficiente  $a$ , que é positivo.



### Importante!

Lembrando-se de que se a concavidade está **VOLTADA PARA CIMA** ( $a > 0$ ), o vértice ( $V$ ) é o **PONTO MÍNIMO** da parábola, mas se está **VOLTADA PARA BAIXO** ( $a < 0$ ), o vértice ( $V$ ) é o ponto **MÁXIMO**.

Graficamente, visualizamos a seguir o gráfico da função  $f(x) = x^2 - 5x - 6$  e, além das duas raízes, destacamos o ponto V, que é o vértice, que nesse caso é  $V = \left( \frac{5}{2}, -\frac{49}{4} \right)$  e é o ponto mínimo da função.

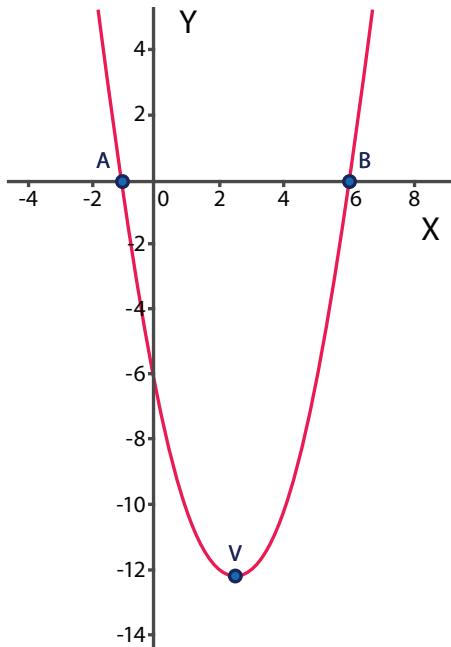


Figura 12 – Gráfico da função  $f(x) = x^2 - 5x - 6$  e o vértice V

**#ParaTodosVerem:** Representação do gráfico da função  $f(x) = X$  elevado ao quadrado  $- 5x - 6$ . Apresenta um plano cartesiano de eixo X indicado de  $-4$  a  $8$  e eixo Y indicado de  $-14$  a  $4$ . No centro, a construção de uma parábola, com raízes A  $(-1, 0)$  e B  $(6, 0)$ , concavidade para cima e vértice V no quarto quadrante. Fim da descrição.

Devemos observar que o vértice, como ponto máximo ou mínimo de uma Função Quadrática, está diretamente ligado ao conjunto imagem da função.

No exemplo acima, vimos que o vértice  $V = \left(\frac{5}{2}, -\frac{49}{4}\right)$  é o ponto  $(x, y)$  mínimo de  $f(x) = x^2 - 5x - 6$ , logo  $y = -49/4$  será o menor valor assumido pela ordenada  $y$ . Ou seja, ele limitará o conjunto imagem em  $-49/4$ . Assim, a imagem  $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -49/4\}$ , o que representa que todos os valores de  $y$  maiores ou iguais a  $-49/4$  serão imagem dessa função, o que já não ocorre com números menores de  $-49/4$ .

Ou seja: a imagem de uma Função Quadrática tem ligação direta com a ordenada  $y$  do ponto vértice V.



### Importante!

A ordenada  $y$  do Vértice é a imagem da função que será o extremo máximo ou mínimo.

Se V é o ponto mínimo, temos que Imagem da Função =  $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq y_v\}$ .

Se V é o ponto máximo, temos que Imagem da Função =  $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq y_v\}$ .

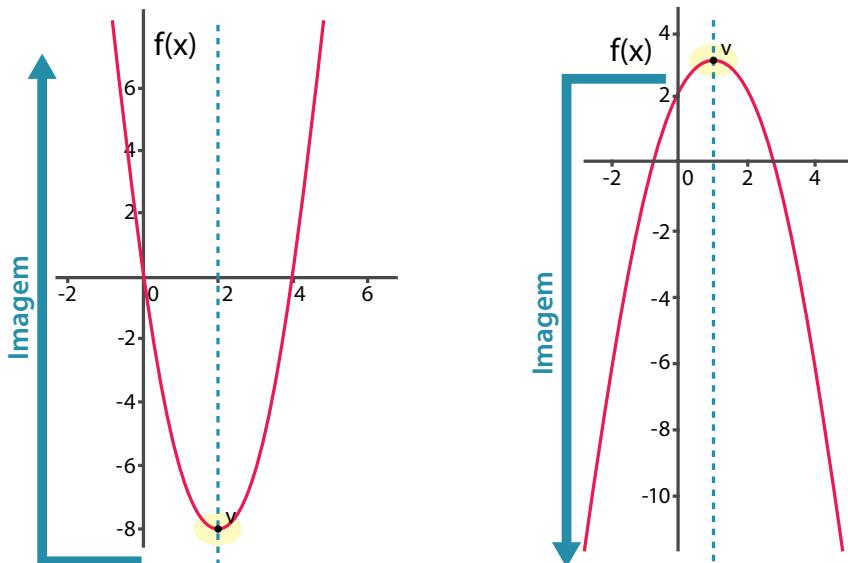


Figura 13 – Vértice e imagem da Função Quadrática

**#ParaTodosVerem:** Representação do vértice da parábola. Apresenta dois gráficos de função do segundo, sendo: o da esquerda com eixo horizontal indicado de  $-2$  a  $6$  e eixo vertical de  $-8$  a  $6$ , com parábola na cor vermelha, concavidade para cima, cortando as coordenadas  $(0, 0)$  e  $(4, 0)$  e vértice  $V$  indicado por linha tracejada e ponto marcado na coordenada  $(2, -8)$  e descrição “imagem” na lateral esquerda, com uma seta para cima; o da direita com eixo horizontal indicado de  $-2$  a  $4$  e eixo vertical de  $-10$  a  $4$ , com parábola na cor vermelha cortando a coordenada  $(0, 2)$ , concavidade para baixo e ponto mais alto no primeiro quadrante e vértice  $V$  indicado por linha tracejada e ponto marcado na coordenada  $(1, 3)$  e descrição “imagem” na lateral esquerda, com uma seta para baixo. Fim da descrição.

## Estudo do Sinal

Realizar o estudo do sinal de uma função é analisar, além dos pares ordenados que fazem parte do traçado do gráfico ou do resultado da função, o comportamento da função em determinados intervalos.

Por exemplo: para quais intervalos de  $x$ , quando atribuídos à função, teremos para  $y$  (ou  $f(x)$ ) resultados numericamente positivos? Ou ainda. Para quais intervalos de  $x$ , teremos resultados numericamente negativos, ou ainda: iguais a zero?

Em relação à Função Quadrática, essa análise se dá por meio da observação das raízes reais e da concavidade da parábola.

Na imagem a seguir, temos o esboço de uma parábola em relação ao eixo  $Ox$  (eixo das abscissas) e, nesse exemplo, a concavidade é para cima e a função possui duas raízes ( $x_1$  e  $x_2$ ).

Devemos observar que, exatamente nas duas raízes, o valor de  $f(x)$  é nulo, isto é: igual à zero. Antes da raiz  $x_1$ , ou seja, para qualquer  $x_i < x_1$ , o valor da função será positivo, o que ocorrerá também com os valores de  $x$  que são maiores do que  $x_2$ , ou seja  $x_i > x_2$ . Porém, o comportamento do resultado da função (valores de  $y$ ) mudam entre as duas raízes. Note, na figura a seguir, que entre as duas raízes, o valor da função, ou seja o valor de  $y$ , é negativo, pois estão a seguir do eixo  $Ox$ .

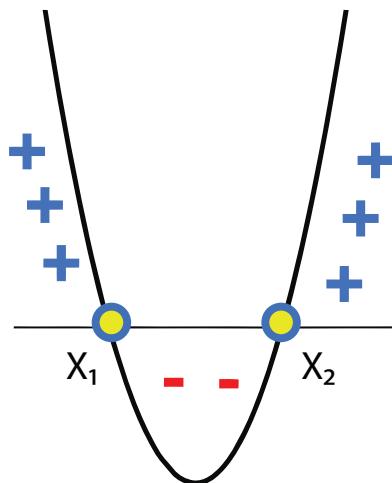


Figura 14 – Estudo do sinal da Função Quadrática

**#ParaTodosVerem:** Representação de estudo de sinal da função quadrática. Apresenta uma linha horizontal e o desenho de uma parábola de concavidade para cima. A parábola corta o eixo horizontal, sendo que seu ponto mínimo está abaixo da linha do eixo, com dois sinais “de menos” ou “negativos” representados na cor vermelha. Acima, em cada lado da concavidade, estão representados sinais “de mais” ou “positivos” na cor azul. Sobre o eixo, estão marcados dois pontos na cor amarela, representando as raízes  $X_1$  e  $X_2$  da função. Fim da descrição.

Resumindo a análise do estudo do sinal, para esse esboço, temos:

**f(x) = 0;**  $x = x_1$  ou  $x = x_2$ , ou seja: a função é **NULA** (igual a zero) nas raízes.

**f(x) < 0;**  $x_1 < x < x_2$ , ou seja: a função será **NEGATIVA** no intervalo entre as duas raízes, todos os números reais  $x$  que sejam maiores do que  $x_1$  e menores do que  $x_2$ .

**f(x) > 0;**  $x < x_1$  e  $x > x_2$ , ou seja: a função será **POSITIVA** para valores menores do que  $x_1$  e para valores maiores do que  $x_2$ .

No próximo exemplo, temos o esboço de uma parábola de concavidade para baixo e com duas raízes. Observamos, novamente, o comportamento do sinal de  $f(x)$ , ou seja os resultados de  $y$ , lembrando que: para valores a seguir do eixo  $OX$ , o sinal de  $y$  será negativo, e para valores acima do eixo  $OX$ , o sinal de  $y$  será positivo.

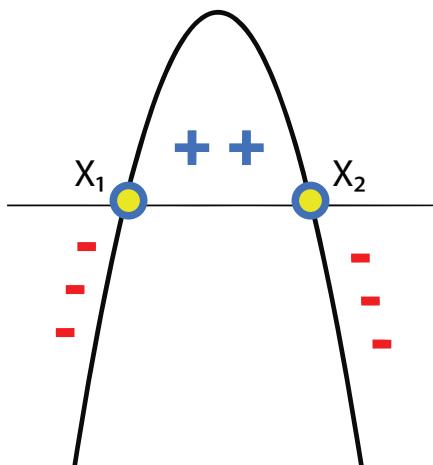


Figura 15 – Estudo do sinal da Função Quadrática

**#ParaTodosVerem:** Representação de estudo de sinal da função quadrática. Apresenta uma linha horizontal e o desenho de uma parábola de concavidade para baixo. A parábola corta o eixo horizontal, sendo que seu ponto máximo está acima da linha do eixo, com dois sinais “de mais” ou “positivos” representados na cor azul. Abaixo, em cada lado da concavidade, estão representados sinais “de menos” ou “negativos” na cor vermelha. Sobre o eixo, estão marcados dois pontos na cor amarela, representando as raízes  $X_1$  e  $X_2$  da função. Fim da descrição.

Ao finalizar a observação do estudo do sinal, temos:

$f(x) = 0$ ;  $x = x_1$  ou  $x = x_2$ . A função será **NULA** nas raízes.

$f(x) > 0$ ;  $x_1 < x < x_2$ . Ou seja: a função será **POSITIVA** no intervalo entre as duas raízes; todos os números reais  $x$  que sejam maiores do que  $x_1$  e menores do que  $x_2$ .

$f(x) < 0$ ;  $x < x_1$  ou  $x > x_2$ . Ou seja: a função será **NEGATIVA**, para valores menores do que  $x_1$  e para valores maiores do que  $x_2$ .

No próximo exemplo, conforme figura 15 a seguir, temos o esboço de uma parábola com uma única raiz real (ou raiz dupla) e concavidade para cima.

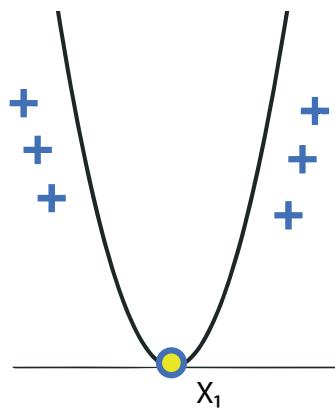


Figura 16 – Estudo do sinal da Função Quadrática

**#ParaTodosVerem:** Representação de estudo de sinal da função quadrática. Apresenta uma linha horizontal e o desenho de uma parábola de concavidade para cima. A parábola corta o eixo horizontal, sendo que seu ponto mínimo está sobre a linha do eixo,

com sinais “de mais” ou “positivos” na cor azul, representados próximo da concavidade. Sobre o eixo, está marcado um ponto na cor amarela, representando as raízes  $X_1$  e  $X_2$  da função. Fim da descrição.

Nesse exemplo, notamos que, exceto a raiz, todo o traçado da parábola está acima do eixo OX, ou seja, são valores positivos para y.

$f(x) = 0; x = x_1$  a função será **NULA** na raiz.

$f(x) > 0; x < x_1$  ou  $x > x_1$   **$f(x) > 0$** . Ou seja: a função será **POSITIVA** para valores menores do que  $x_1$  e para valores maiores do que  $x_1$ . Podemos escrever, também, que será positiva para valores diferentes de  $x_1$ .

Nos dois exemplos a seguir, temos o esboço de duas parábolas de funções que não possuem raízes, uma de concavidade para baixo e outra de concavidade para cima. Nesse caso, como não temos raízes, os valores de y serão todos positivos (concavidade para acima) ou todos negativos (concavidade para baixo).

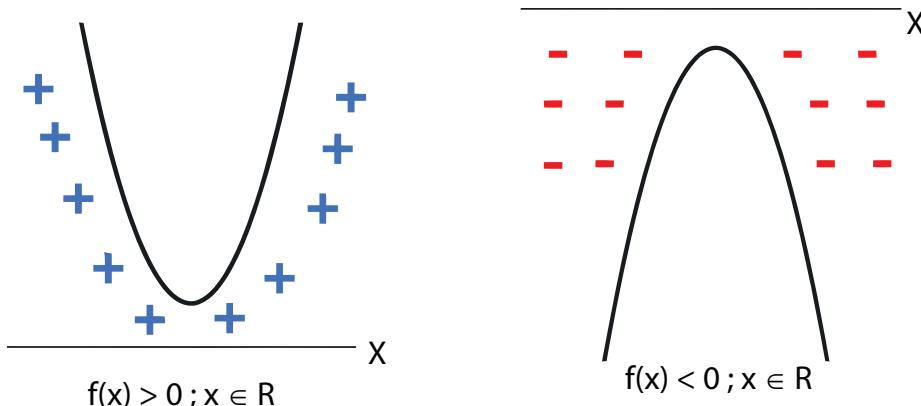


Figura 17 – Estudo do sinal da Função Quadrática

**#ParaTodosVerem:** Representação de estudo de sinal da função quadrática. Apresenta duas construções gráficas sobre estudo de sinais. À esquerda, acima do eixo horizontal representado por X, está uma parábola de concavidade para cima e, ao seu redor a representação de sinais “de mais” ou “positivos” na cor azul, sendo que abaixo da linha está descrito “ $f(x) > 0$ ; x pertence aos números reais”. À direita, abaixo do eixo horizontal representado por X, está uma parábola de concavidade para baixo e, próximo do ponto máximo, a representação de sinais “de menos” ou “negativos” na cor vermelha, sendo que abaixo da linha está descrito “ $f(x) < 0$ ; x pertence aos números reais”. Fim da descrição.

### Exemplos de Resolução de Exercícios

1. Consideraremos a função  $f(x) = -x^2 + 2x + 8$  e realizamos um estudo no qual responderemos:
  - a) Se possui e quais são as raízes;
  - b) Analisaremos a concavidade da parábola;
  - c) O ponto em que intercepta o eixo OU;
  - d) Vértice da parábola e classificação em ponto máximo ou mínimo;
  - e) Esboço do gráfico;

- f) Estudo do sinal;  
g) Imagem da Função.

### Respostas

a) Para responder se possui ou não raízes, vamos ao cálculo da equação  $-x^2 + 2x + 8 = 0$ :

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 8}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{-2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{-2} = \frac{-2 \pm 6}{-2}$$

De onde temos que:

$$x_1 = \frac{-2 + 6}{-2} = -2 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-2 - 6}{-2} = 4$$

Portanto a função possui duas raízes distintas:  $x_1 = -2$  e  $x_2 = 4$ ;

- b) A concavidade da parábola é voltada para baixo, visto que o coeficiente  $a = -1$ ;  
 c) A parábola intercepta o eixo OY em  $y = 8$ , visto que o coeficiente  $c = 8$ ;  
 d) Vértice da parábola será dado por  $V = \left( \frac{-2}{2 \cdot (-1)}, \frac{-36}{4 \cdot (-1)} \right) = (1, 9)$ ;  
 e) O esboço do gráfico pode ser realizado apontando quatro itens principais: as duas raízes, o vértice, o ponto no qual a parábola intercepta o eixo OY.

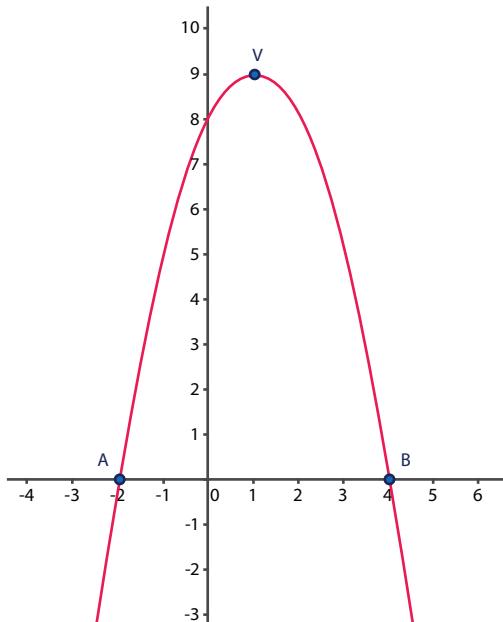


Figura 18

**#ParaTodosVerem:** Representação do gráfico de parábola Apresenta um plano cartesiano de eixo X indicado de -4 a 6 e eixo Y indicado de -3 a 10. No centro, a construção de uma parábola, com raízes em X nos valores -2 e 4, concavidade para baixo e vértice no primeiro quadrante. Fim da descrição.

f) Para o estudo do sinal temos:

**f(x) = 0;**  $x = -2$  ou  $x = 4$  A função será **NULA** nas raízes.

**f(x) > 0;**  $-2 < x < 4$ . Ou seja: a função será **POSITIVA** no intervalo entre as duas raízes, todos os números reais  $x$  que sejam maiores do que  $-2$  e menores do que  $4$ .

**f(x) < 0;**  $x < -2$  ou  $x > 4$ . Ou seja: a função será **NEGATIVA**, para valores menores do que  $-2$  e para valores maiores do que  $4$ ;

g) A imagem da função pode ser respondida a partir da análise do  $y$  do ponto vértice que, nesse caso, é o ponto máximo da função. Nesse caso:  $\text{Im}(f) = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \leq 9 \}$ .

2. O traçado do movimento de um projétil, lançado para cima verticalmente, é descrito pela função  $f(x) = -20x^2 + 180x$ , onde  $y$  é a altura, em metros, atingida pelo projétil no tempo de  $x$  segundos após o lançamento. Determine a altura máxima atingida e o tempo em que esse projétil permanece no ar.

### Resposta

A partir da análise da função  $f(x) = -20x^2 + 180x$ , identificamos que se trata de uma Função Quadrática e que, portanto, possui como representação gráfica uma parábola. A parábola será com concavidade para baixo, visto que o coeficiente  $a$  é negativo ( $a = -20$ ); portanto, teremos um ponto máximo nessa trajetória.

O ponto máximo será o ponto vértice, logo:  $V = \left( \frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$ .

Para responder a altura em metros, basta calcular o  $y$  do vértice:

$$\left( \frac{-\Delta}{4a} \right) = \frac{-[(180)^2 - 4(-20).0]}{4(-20)} = \frac{-32.400}{-80} = 405$$

Ou seja: a altura máxima a ser atingida pelo projétil, que corresponde ao  $y$  do vértice da parábola que possui o ponto máximo, é de 405 metros.

O tempo que esse projétil permanece no ar é o intervalo entre as raízes. Calculando as raízes, temos  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 9$ ; portanto, o projétil permanece no ar por 9 segundos.

Nesta Unidade, estudamos a Função Quadrática, suas características, o traçado da parábola que a representa graficamente, o cálculo das raízes, do vértice, a classificação e a compreensão de que o vértice pode ser ponto máximo ou mínimo de uma função e, ainda, o estudo do sinal dessa função.

Bons estudos!

# Material Complementar

## Indicações para saber mais sobre os assuntos abordados nesta Unidade:



Livros

### Trama Matemática: Princípios e Novas Práticas no Ensino Médio

No Livro Trama Matemática, você pode explorar o assunto sobre Função Quadrática. O livro está disponível na Biblioteca Virtual Universitária – BARRETO, M. Trama Matemática: Princípios e novas práticas no ensino médio. Campinas: Papirus 2013.



Vídeos

### Representação Gráfica de uma Função Quadrática

Nesse link, você tem acesso a um vídeo da Khan Academy a respeito da representação gráfica da Função Quadrática;

<https://youtu.be/WCTFeKbpFTQ>

### Calculando Raízes de uma Equação do Segundo Grau

Nesse link, você tem acesso a outro vídeo da Khan Academy, sobre a resolução de equações do segundo grau.

<https://youtu.be/ODLYsJ1ezHU>

## Referências

- BARRETO, M. **Trama Matemática**: Princípios e novas práticas no ensino médio. Campinas: Papirus 2013.
- IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar**. v.1. Conjuntos – Funções. São Paulo: Editora Atual, 2013.
- LIMA, E. L. *et al.* **Matemática do Ensino Médio**. v.1. Rio de Janeiro: SBM, 2003.



**Cruzeiro do Sul**  
Educacional