Matemática Aplicada

Cruzeiro do Sul Virtual
Educação a Distância

Material Teórico

Matrizes e Sistemas Lineares

Responsáveis pelo Conteúdo:
Profa. Ms. Adriana Domingues Freitas
Profa. Dra. Jussara Maria Marins

Revisão Textual:
Profa. Dra. Selma Aparecida Cesarin

UNIDADE Matrizes e Sistemas Lineares

- Matriz
- Elementos das Diagonais
- Classificação de Matrizes
- Operações Basicas com Matrizes
- Sistemas Lineares

OBJETIVO DE APRENDIZADO

- Identificar os diferentes tipos de matriz;
- Realizar operações: soma, subtração e multiplicação entre matrizes;
- Calcular os determinantes de matrizes quadradas de ordem $n \leq 3$;
- Reconhecer situações que envolvam sistemas lineares;
- Utilizar os métodos Cramer e Gauss para a resolução de sistemas lineares possíveis e determinados.

Orientações de estudo

Para que o conteúdo desta Disciplina seja bem aproveitado e haja uma maior aplicabilidade na sua formação acadêmica e atuação profissional, siga algumas recomendações básicas:

Assim:

- ✓ Organize seus estudos de maneira que passem a fazer parte da sua rotina. Por exemplo, você poderá determinar um dia e horário fixos como o seu "momento do estudo".
- ✓ Procure se alimentar e se hidratar quando for estudar, lembre-se de que uma alimentação saudável pode proporcionar melhor aproveitamento do estudo.
- ✓ No material de cada Unidade, há leituras indicadas. Entre elas: artigos científicos, livros, vídeos e *sites* para aprofundar os conhecimentos adquiridos ao longo da Unidade. Além disso, você também encontrará sugestões de conteúdo extra no item **Material Complementar**, que ampliarão sua interpretação e auxiliarão no pleno entendimento dos temas abordados.
- ✓ Após o contato com o conteúdo proposto, participe dos debates mediados em fóruns de discussão, pois irão auxiliar a verificar o quanto você absorveu de conhecimento, além de propiciar o contato com seus colegas e tutores, o que se apresenta como rico espaço de troca de ideias e aprendizagem.

Matriz

Define-se por Matriz de m × n a um conjunto de m × n (lê-se m por n) elementos que são dispostos em **m** linhas e **n** colunas.

Os elementos que compõem uma determinada matriz são representados por uma letra minúscula acompanhada dos índices **i** (que representa a linha na qual o elemento está posicionado) e **j** (que representa a coluna na qual o elemento está posicionado); a matriz nós representamos por uma letra maiúscula.

Vejamos um exemplo: temos a seguir uma matriz 3 × 3 que denominaremos matriz A.

Veja a estrutura da matriz com os índices i (linhas) e j (colunas):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

E, na sequência, a matriz já com os valores numéricos que, nesse caso, foram estipulados de forma aleatória, somente para exemplificar uma matriz com valores numéricos:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Os elementos da matriz são localizados pelos dois índices: **i** (linha) e **j** (coluna).

A matriz A_{3x3} possui os seguintes elementos:

$a_{11} = 6$; $a_{12} = 2$; $a_{13} = 0$.

$a_{21} = -1$; $a_{22} = -3$; $a_{23} = 1$.

$a_{31} = 3$; $a_{32} = 5$; $a_{33} = 8$.

O elemento $a_{32} = 5$ é elemento que está localizado na 3ª linha e na 2ª coluna.

Elementos das Diagonais

Chamamos de Diagonal Principal (P) a diagonal da matriz quadrada composta pelos elementos aij, onde i = j, isto é, no caso de uma matriz quadrada de ordem 3, a diagonal principal será composta pelos elementos de posição: a_{11}, a_{22} e a_{33}.

Já a Diagonal Secundária (S) é a diagonal composta pelos elementos aij, onde $i + j = n + 1$; no caso da matriz quadrada de ordem 3, a diagonal secundária será composta pelos elementos a_{31}, a_{22} e a_{13}.

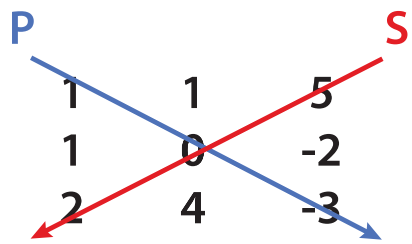

Figura 1 – Diagonais de uma matriz quadrada 3x3

Em uma matriz quadrada de ordem 2, as diagonais principais e secundárias serão compostas da seguinte forma:

Diagonal Principal, elementos a_{11} e a_{22}.

Diagonal Secundária, elementos a_{12} e a_{21}.

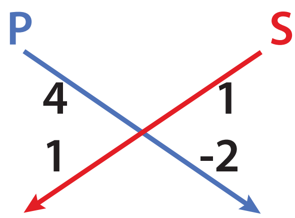

Figura 2

Classificação de Matrizes

As matrizes são classificadas de acordo com o número de linhas e colunas.

- **Matriz linha:** quando temos uma matriz **m = 1**, composta por uma única linha;
- **Matriz coluna:** quando temos uma matriz **n = 1**, composta por uma única coluna;
- **Matriz nula:** quando temos uma matriz cujos elementos são todos iguais a zero;
- **Matriz quadrada:** trata-se da matriz $m \times n$, na qual **m = n**, ou seja, igual número de linhas e colunas. Importante destacar que em toda matriz $m \times n$ quadrada temos duas diagonais que são chamadas: **diagonal principal e diagonal secundária**;
- **Matriz triangular superior:** quando temos uma matriz quadrada $n \times n$, na qual todos os elementos a seguir da diagonal principal são nulos.

Nesta Unidade, o estudo da matriz quadrada é importante, pois a utilizaremos no cálculo do determinante e na solução de sistemas lineares.

Operações Básicas com Matrizes

Soma e Subtração de Matrizes

Considerando duas matrizes $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{ij})_{mxn}$, a matriz $C = (c_{ij})_{mxn}$ será a matriz soma, das matrizes A + B, na qual os elementos c_{ij} serão obtidos por $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Importante!

Cada elemento c_{ij} da matriz soma C será o resultado da soma entre os elementos correspondentes de A e B. Chamamos de correspondentes os termos que possuírem os mesmos índices ij.

Ou seja, associamos, por meio da soma, os elementos que possuem o mesmo índice:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} +B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

Importante!

A soma ou subtração de matrizes somente ocorre entre matrizes de mesma ordem, ou seja, o número de linhas de uma matriz deve ser igual ao número de linhas da outra matriz, assim como o número de colunas.

Exemplos

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} e\ B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} e\ A+B=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} e\ D=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & -5 \end{pmatrix} e\ C+D=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 8 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \text{ Soma de A + C não é possível}$$

Multiplicação de Matrizes

Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{ij})_{mxn}$, a multiplicação entre as matrizes A e B gerará uma nova matriz C na qual:

Todo elemento c_{ij} é calculado multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha i, da matriz A, pelos elementos da coluna j, da matriz B, e somando-se os produtos obtidos.

Para dizer que a matriz C é o produto de A por B, vamos indicá-la por AB.

Só definimos o produto AB de duas matrizes quando o número de colunas da matriz A for igual ao número de linhas de B. Além disso, notamos que a matriz produto AB possui o número de linhas de A e o número de colunas de B.

Assim, se tivermos uma matriz A_{3x2} e uma matriz B_{3x3} não teremos o produto AB, visto que o número de colunas de A não é igual ao número de colunas de B. Porém, se tivermos uma matriz A_{3x3} e uma matriz B_{3x3}, o produto entre as matrizes se dará da forma que se expõe a seguir.

Importante!

A multiplicação entre duas matrizes A e B só ocorre se o número de colunas da matriz A for igual ao número de linhas da matriz B.

Para realizar a multiplicação, associaremos os termos da linha 1 (da primeira matriz) com a coluna 1 (da segunda matriz); posteriormente, os termos da linha 1, com a coluna 2, e na sequência os termos da linha 1 com a coluna 3.

Após finalizar a associação dos termos da linha 1 com todas as colunas, repetiremos o processo com as demais linhas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad *B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}*b_{11}+a_{12}*b_{21}+a_{13}*b_{31} & a_{11}*b_{12}+a_{12}*b_{22}+a_{13}*b_{32} & a_{11}*b_{13}+a_{12}*b_{23}+a_{13}*b_{33} \\ a_{21}*b_{11}+a_{22}*b_{21}+a_{23}*b_{31} & a_{21}*b_{12}+a_{22}*b_{22}+a_{23}*b_{32} & a_{21}*b_{13}+a_{22}*b_{23}+a_{23}*b_{33} \\ a_{31}*b_{11}+a_{32}*b_{21}+a_{33}*b_{31} & a_{31}*b_{12}+a_{32}*b_{22}+a_{33}*b_{32} & a_{31}*b_{13}+a_{32}*b_{23}+a_{33}*b_{33} \end{pmatrix}$$

Importante!

Note que cada termo da linha a_{1n} vai multiplicar um termo na coluna b_{n1}, e faremos a soma dos produtos, obtendo o $c_{11} = a_{11} * b_{11} + a_{12} * b_{21} + a_{13} * b_{31}$.

Para o cálculo de c_{12}, procederemos da mesma forma; porém, cada termo da linha a_{1j} vai multiplicar um termo da coluna b_{i2} e teremos $c_{12} = a_{11}{}^{*}\, b_{12} + a_{12}{}^{*}\, b_{22} + a_{13}{}^{*}\, b_{32}$. E assim sucessivamente também para as demais linhas.

Exemplo

Dadas duas matrizes A_{3x3} e B_{3x2}:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} e\ B \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Inicialmente, devemos verificar se a multiplicação (produto) entre A*B é possível. Nesse caso, temos que o produto entre A e B é possível, vez que a condição para a existência do produto entre duas matrizes, de que o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B, está contemplada.

Assim, a matriz C=A.B será obtida por:

$$A * B = \begin{pmatrix} 2*1+3*2+1*(-1) & 2*2+3*3+1*1 \\ 0*1+1*2+2*(-1) & 0*2+1*3+2*1 \\ 3*1+5*2+1*(-1) & 3*2+5*3+1*1 \end{pmatrix} = C = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 0 & 5 \\ 12 & 22 \end{pmatrix}$$

Determinantes de Matrizes Quadradas até Ordem 3

Uma matriz quadrada tem, associado a ela, um número real chamado **determinante da matriz (Det)**, obtido por meio de operações que envolvem os elementos da matriz.

Nesta Disciplina, estudaremos os determinantes para matrizes de ordem 1, ordem 2 e ordem 3.

Determinante de Matriz Quadrada de Ordem 1

Para matriz quadrada de ordem 1, indicada por $A = [a_{11}]$, por definição, o determinante da matriz será igual ao número do elemento de posição a_{11}.

Exemplo

Seja a matriz A = [5], o determinante de A será det A = 5.

Seja a matriz B = [-2], o determinante de B será det B = 2.

Determinante da Matriz Quadrada de Ordem 2

Para as matrizes quadradas de ordem 2, calculamos o determinante fazendo o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

Exemplo

Calcularemos o determinante da matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Importante!

O determinante será calculado da seguinte forma: do produto da diagonal principal subtraímos o produto da diagonal secundária.

D = produto da diagonal principal: 2*4 = 8

S = produto da diagonal secundária 3*1 = 3

P – S = 8 – 3 = 5. Logo, det(M) = 5

Determinante da Matriz Quadrada de Ordem N = 3

Existem alguns procedimentos para o cálculo do determinante das matrizes quadradas de ordem 3. Um deles, chamado de REGRA DE SARRUS, consiste em copiar as duas primeiras colunas da matriz original:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Copiando novamente a matriz e incluindo, após a terceira coluna, novamente as duas primeiras colunas, teremos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Da matriz quadrada A_{3x3}, teremos, agora, uma nova matriz que possui três diagonais de três elementos no sentido da diagonal principal e três diagonais no sentido das diagonais secundárias.

A seguir, somamos os produtos obtidos nas três diagonais principais e dessa soma subtrairemos a soma dos três produtos obtidos nas três diagonais secundárias.

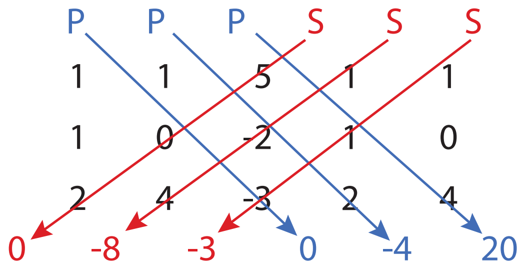

Figura 3 – Cálculo do determinante da matriz de ordem 3 – Regra de Sarrus

Das diagonais principais (P), temos: $0 - 4 + 20 = 16$.

Das diagonais secundárias (S), temos: $0 - 8 - 3 = -11$.

Logo, da soma dos produtos das diagonais principais, subtrairemos a soma dos produtos das diagonais secundárias, ou seja, P – S:

$$16 - (-11) = 16 + 11 = 27$$

$$\text{Det}(A) = 27$$

O determinante será a soma dos produtos das diagonais principais com o oposto da soma dos produtos das diagonais secundárias.

Sistemas Lineares

Quando temos um problema que envolve mais de uma variável e mais de uma equação, de modo que estão vinculadas, então temos um sistema de equações. Por exemplo, se temos as equações E_1 $3x + 2y = 16$ e E_2 $4x - 3y = 20$, temos um sistema, que é, usualmente, indicado por chaves no início:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 16 \\ 4x - 3x = 10 \end{cases}$$

Outro exemplo de sistema de equações, com três variáveis (x, y e z), com três equações, é dado por:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 9 \\ -3x + 2y - 6z = -14 \\ 4x - 5z = 11 \end{cases}$$

Um Sistema de Equações Lineares é um conjunto finito de equações, todas elas nas mesmas incógnitas, que devem ser satisfeitas, simultaneamente.

Uma solução de um sistema linear é uma sequência ordenada de números tais que as substituições das variáveis, por esses números, transformem todas as equações do sistema em identidades verdadeiras.

Resolver um sistema é determinar todas as soluções (sistemas possíveis) ou, ainda, provar que não existe nenhuma (sistemas impossíveis).

É importante considerar que, nesta Disciplina, estudaremos os métodos para resolução de "sistemas lineares possíveis e determinados", ou seja, sistemas que admitem uma única solução; porém, vale observar que em outras situações, que não trataremos aqui, podemos nos deparar com sistemas lineares possíveis e indeterminados, pois apresentam infinitas soluções e ainda sistemas lineares impossíveis, que não admitem soluções.

Os métodos que estudaremos a seguir são: Método de Cramer e Método de Gauss.

Método de Cramer

É o método que envolve o cálculo de determinantes para a resolução de sistemas matriciais.

Considere o sistema a seguir:

$2x + 1y = 3$

$1x - 3y = -2$

A partir desse sistema, nós construiremos uma equação matricial, na qual os coeficientes de x e y serão os elementos de uma matriz A e os resultados do sistema serão elementos de outra matriz B, conforme a figura 4. Note que do produto matricial A*X = B nos permite escrever o sistema como uma equação matricial.

$$\begin{cases} 2x + 1y = 3 \\ 1x - 3y = -2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Figura 4 – Equação Matricial

A seguir, calcularemos os determinantes das matrizes chamados de: det A, det A_x e det A_y.

Para calcular det A_x, basta trocar os elementos da primeira coluna da matriz A (que correspondem aos coeficientes de x), pelos elementos que compõem a matriz B.

Da mesma forma, para calcular o valor do det A_y, basta trocar os elementos da segunda coluna da A (que correspondem aos coeficientes de y) pelos elementos que compõem a coluna da matriz B, como vemos na figura a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} detA &= [(2.(-3)] - [1.(1)] = -6 -1 \\ detA &= -7 \end{aligned}$$

$$Det\ A_x = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} detA_x &= [(3.(-3)] - [1.(-2)] = -9 +2 \\ detA_x &= -7 \end{aligned}$$

$$Det\ B_x = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} detA_y &= [(2.(-2)] - [3.(1)] = -4 -3 \\ detA_y &= -7 \end{aligned}$$

Figura 5 – Cálculo dos determinantes

Os valores de x e y para a solução do sistema serão calculados por:

$$x = \frac{detA_x}{\det A}$$

$$y = \frac{detA_y}{\det A}$$

Logo, os valores de x e y serão:

$$x = \frac{detA_x}{\det A} = \frac{-7}{-7} = 1$$

$$y = \frac{detA_y}{\det A} = \frac{-7}{-7} = 1$$

Portanto, a solução de nosso sistema será x = 1 e y = 1.

Se tivermos um sistema cuja matriz seja quadrada de ordem três, resolveremos det A , det A_x , det A_y e det A_z que deverão ser calculados conforme vimos na Regra de Sarrus e os valores de x, y e z será, respectivamente:

$$x = \frac{detA_x}{\det A}$$

$$y = \frac{detA_y}{\det A}$$

$$z = \frac{detA_z}{\det A}$$

Método de Gauss

Outro método utilizado na resolução de sistemas lineares é o método de Gauss que consiste em transformar o sistema linear original S em um sistema linear equivalente, que chamaremos de S', mas de forma escalonada, ou com matriz triangular superior.

Os sistemas equivalentes são sistemas que admitem uma mesma solução; por vezes, é mais prático trabalhar com sistemas equivalentes que permitem soluções mais rápidas e menos trabalhosas.

Como vimos, um sistema equivalente ao outro é sobretudo um sistema cuja solução é a mesma do sistema original.

Por exemplo: quando temos a equação $2x + 6 = 18$, temos como solução o valor de $x = 6$. Podemos obter uma equação equivalente a $2x + 6 = 18$ realizando qualquer operação nessa equação, desde que façamos a operação para todos os elementos da equação.

Se dividirmos todos os coeficientes da equação $2x + 6 = 18$ por 2 , teremos uma nova equação que será $x + 3 = 9$. Podemos observar que a solução dessa equação continua sendo $x = 3$, ou seja, $2x + 6 = 18$ e $x + 3 = 9$ são equivalentes.

Importante!

Multiplicando-se os membros de uma equação E qualquer de um sistema linear S por um número $K \neq 0$, o novo sistema S' obtido será equivalente a S.

Por exemplo, o sistema S é equivalente aos sistemas S' e S'':

Sistema S	Sistema S'	Sistema S"
$2x + y = 5$	$2x + y = 5$	$6x + 3y = 15$
$-x + 3y = 1$	$-2x + 6y = 2$	$3x - 9y = -3$

Note que a diferença de S' para S é que a segunda equação E_2 em S' é o dobro da E_2 em S. Também devemos notar que em S", a equação 1, ou seja, a E_1, é o triplo da E_1 de S, mas são todos sistemas equivalentes, cuja solução é $x = 2$ e $y = 1$.

Outra transformação importante: "se substituirmos uma equação E de um sistema linear S, pela soma membro a membro (isto é, de seus respectivos coeficientes e variáveis) dela com outra, o novo sistema obtido S' será equivalente a S.

Vamos avaliar novamente nosso sistema S e o equivalente S':

Sistema S	Sistema S'
$2x + y = 5$	$2x + y = 5$
$-x + 3y = 1$	$-2x + 6y = 2$

Em S', podemos substituir a segunda equação E_2 pela soma dela mesma com a primeira E_1, membro a membro, ou seja:

$2x + (-2x) = 0$ e também $y + 6y = 7y$ e por fim $5 + 2 = 7$.

Assim, a segunda equação ficará $0x + 7y = 7$ e o sistema S" obtido com essa nova equação será equivalente a S e S':

$2x + y = 5$

$0x + 7y = 7$

Agora, podemos facilmente determinar o valor de y, pois:

$7y = 7$ então $y = 1$

e se $y = 1$, temos que $2x + (1) = 5$. Então, $x = 2$

Essas transformações são extremamente úteis quando resolvemos um sistema linear buscando uma matriz triangular superior, que é a matriz na qual todos os elementos a seguir da diagonal principal são nulos.

Veremos agora um exemplo no qual temos um sistema 3x3, ou seja, um sistema de três equações e três variáveis.

Para resolver esse sistema de equações, chamaremos de pivô o número pelo qual deveremos multiplicar as equações para que, ao somarmos ou subtrairmos duas equações, possamos anular uma das variáveis, e repetiremos o processo até chegarmos à matriz do triangular superior, isto é, devemos anular os coeficientes a seguir da diagonal principal.

Exemplo

Resolver o sistema linear S

$$S = \begin{array}{l} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{array}$$

O sistema do exemplo é um sistema composto por três equações com as variáveis x, y e z. Para facilitar as transformações e os cálculos, iremos, a partir das equações, construir um modelo chamado de equação matricial, ou seja, uma matriz composta pelos coeficientes das três equações, que chamaremos de E1, E2 e E3, que compõe o sistema:

$$\begin{array}{l} \text{E1:} \\ \text{E2} \\ \text{E3} \end{array} \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{array} \right\}$$

Resolveremos as equações quando obtivermos da matriz original uma matriz triangular superior. Para isso utilizaremos as etapas a seguir:

1ª. etapa: eliminar os elementos que estão em destaque em vermelho, ou seja, os elementos a_{21}, a_{31} e a_{32} da matriz A_{3x3}. Para isso executaremos as multiplicações e somas necessárias:

- **1º passo:** destacar o elemento pivô da primeira etapa, isto é, o elemento a_{11}, pois é por meio dele que anularemos o elemento a_{21}. Assim, definiremos a partir de a_{11} e a_{21} o multiplicador da equação. O elemento pivô é a razão entre os dois elementos (no caso a_{21} e a_{11}) e, por meio desse número, é que realizaremos a transformação em busca de uma equação equivalente.

Para Equação 1 (E1) e Equação 2 (E2) o pivô será:

$$m_1 = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\boxed{m_1 = 2} \quad \begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & -4 \end{array}$$

- **2º passo:** determinar a transformação da segunda equação (E2'), que será dada pela subtração de (E2) com a primeira equação (E1) multiplicada por m_1, ou seja, **E2' = E2 – m_1 * E1**.

Acompanhe a transformação de cada um dos termos da segunda equação E2':

novo a_{21}	novo a_{22}	novo a_{23}	novo a_{24}
$a_{21} - m_1 * a_{11}$	$a_{22} - m_1 * a_{12}$	$a_{23} - m_1 * a_{13}$	$a_{24} - m_1 * a_{14}$
2 – 2(1)	1 – 2(2)	-1 -2(1)	3 – 2(9)
0	-3	-3	-15

Assim, o novo sistema com a substituição de E2 por E2' ficará:

$$\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 3 & -1 & -2 & -4 \end{array}$$

- **3º passo:** anular o termo a_{31}. Nesse caso, o pivô será determinado por a_{11} e o multiplicador (m_2), por a_{11} e a_{31}:

$$m_2 = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\boxed{m_2 = 3}\quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 3 & -1 & -2 & -4 \end{array}\right]$$

- **4º passo:** executar a transformação, mas agora da terceira equação (E3), que será subtraída do triplo da primeira equação (E1).

A nova E3' será dada por:

novo a_{31}	novo a_{32}	novo a_{33}	novo a_{34}
$a_{31} - m_2 \cdot a_{11}$	$a_{32} - m_2 . a_{12}$	$a_{33} - m_2 . a_{13}$	$a_{34} - m_2 . a_{14}$
$3 - 3(1)$	$-1 - 3(2)$	$-2 - 3(1)$	$-4 - 3(9)$
0	-7	-5	-31

O sistema, com a nova equação ficará:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & -7 & -5 & -31 \end{array}\right]$$

- **5º passo:** anular o termo a_{32}. O pivô será determinado por a_{22} e o multiplicador por a_{22} e a_{32}:

$$m_3 = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3}$$

$$\boxed{m_3 = 7/3}\quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & -7 & -5 & -31 \end{array}\right]$$

- **6º passo:** executamos a transformação, mas agora da terceira equação (E3) que será subtraída da segunda equação (E2), multiplicada por $m_3 = 7/3$.

A terceira equação E3' será dada por:

novo a_{31}	novo a_{32}	novo a_{33}	novo a_{34}
$a_{31} - m_3 .\ a_{21}$	$a_{32} - m_3 . a_{22}$	$a_{33} - m_3 . a_{23}$	$a_{34} - m_3 . a_{24}$
0 – 7/3(0)	-7 – 7/3(-3)	-5 -7/3(-3)	-31 – 7/3(-15)
0	0	-5+7 = 2	-31+35 = 4

Dessa forma, nosso sistema ficará:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & 2 & 1 & 9 \\ & -3 & -3 & -15 \\ & & 0 \quad 2 & 4 \end{array}\right]$$

Que compõe uma matriz triangular, na qual prosseguiremos com a segunda etapa.

2ª etapa: resolver as equações E1, E2 e E3.

Iniciamos por E3:

2z = 4

z = 2

Com o valor de z = -2, resolvemos E2:

-3y – 3z = -15

-3y – 3(2) = -15

y = 3

E, por fim, resolvemos E3:

x + 2y + z = 9

x + 2(3) + (2)

x = 1

Portanto, a solução de nosso sistema será S (1, 3, 2).

Vale considerar que, nesse exemplo, lidamos com números inteiros; porém, podemos encontrar sistemas com números racionais e, por vezes, poderemos encontrar pivôs nulos ou próximos de zero, o que pode conduzir a resultados imprecisos com a ampliação de erros de arredondamento. Assim, para contornar problemas como esse, podemos executar algumas manobras como:

a) No início de cada etapa, escolher para pivô o elemento de maior módulo entre os coeficientes;

b) Trocar as linhas das equações, se necessário, para obter um pivô mais conveniente;

c) Promover transformações, por meio da multiplicação em duas equações, simultaneamente, em busca de um pivô mais conveniente.

Para a solução de sistemas lineares, entre os dois métodos estudados, podemos optar por um deles. Cabe uma análise para verificar qual deles fornece menos etapas e, por consequência, é mais prático.

Material Complementar

Indicações para saber mais sobre os assuntos abordados nesta Unidade:

Vídeos

Exercício de Sistemas com Eliminação

Para aprofundar seus conhecimentos acerca da resoluçao dos sistemas linares, você pode acessar o link a seguir do vídeo produzido pela Fundação Khan Academy.

https://youtu.be/jnE7pqWpRbA

Resolvendo Sistemas de Equações por Eliminação

Neste outro vídeo, também da Fundação Khan Academy, temos outro exemplo de resolução de sistemas lineares.

https://youtu.be/URCXvHAvnnA

Multiplicação de Matrizes - Parte 1

O video a seguir, da Khan Academy, mostra a multiplicação entre matrizes.

https://youtu.be/Mqeuw1dRgdQ

Referências

FERNANDES, D. B. F. (org.) **Álgebra Linear**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Sequências, Matrizes, Determinantes. v.4. São Paulo: Atual, 2013.

LIMA, E. L. *et al*. **A Matemática do Ensino Médio. v.3**. Rio de Janeiro: SBM, 2003.

Cruzeiro do Sul Virtual
Educação a Distância

www.cruzeirodosulvirtual.com.br
Campus Liberdade
Rua Galvão Bueno, 868
CEP 01506-000
São Paulo - SP - Brasil
Tel: (55 11) 3385-3000

Cruzeiro do Sul
Educacional