

Matemática Aplicada



Cruzeiro do Sul Virtual
Educação a distância

Material Teórico



Conjuntos Numéricos e Operações

Responsável pelo Conteúdo:
Prof.ª M.ª Adriana Domingues Freitas

Revisão Textual:
Prof.ª Dra. Selma Aparecida Cesarin

UNIDADE

Conjuntos Numéricos e Operações



- Introdução
- Axiomas de Peano e o Conjunto dos Números Naturais
- Operações em N
- Comutatividade da Adição e Multiplicação
- Elemento Neutro da Adição
- Elemento Neutro da Multiplicação
- Conjunto dos Números Inteiros Z
- Das Operações de Adição e Multiplicação em Z
- Conjunto dos Números Racionais
- As Representações dos Números Racionais: Q
- Propriedades das Operações da Adição e Multiplicação em Q
- Soma ou Subtração de Racionais como mesmo Denominador
- Soma ou Subtração com Denominadores Diferentes
- Produto entre Racionais (na Representação de Frações)
- Divisão entre Racionais (na Representação de Frações)
- Conjunto dos Reais
- Potência
- Regras de Potenciação
- Potências com Expoentes Negativos
- Potência com Expoente Racional
- Radiciação



OBJETIVO DE APRENDIZADO

- Resgatar o tópico da Teoria dos Conjuntos para reforçar conceitos já aprendidos e formalizar propriedades exploradas da Educação Básica;
- Identificar os principais Conjuntos Numéricos: N, Z, C e R com suas respectivas características e propriedades;
- Realizar as operações numéricas, reconhecer e utilizar propriedades relacionadas a cada operação em seus respectivos conjuntos: adição, subtração, multiplicação, potência e radiciação.

Orientações de estudo

Para que o conteúdo desta Disciplina seja bem aproveitado e haja uma maior aplicabilidade na sua formação acadêmica e atuação profissional, siga algumas recomendações básicas:

Determine um horário fixo para estudar.

Mantenha o foco! Evite se distrair com as redes sociais.

Procure manter contato com seus colegas e tutores para trocar ideias! Isso amplia a aprendizagem.

Seja original! Nunca plágie trabalhos.

Aproveite as indicações de Material Complementar.

Conserve seu material e local de estudos sempre organizados.

Não se esqueça de se alimentar e se manter hidratado.

Assim:

- ✓ Organize seus estudos de maneira que passem a fazer parte da sua rotina. Por exemplo, você poderá determinar um dia e horário fixos como o seu “momento do estudo”.
- ✓ Procure se alimentar e se hidratar quando for estudar, lembre-se de que uma alimentação saudável pode proporcionar melhor aproveitamento do estudo.
- ✓ No material de cada Unidade, há leituras indicadas. Entre elas: artigos científicos, livros, vídeos e sites para aprofundar os conhecimentos adquiridos ao longo da Unidade. Além disso, você também encontrará sugestões de conteúdo extra no item **Material Complementar**, que ampliarão sua interpretação e auxiliarão no pleno entendimento dos temas abordados.
- ✓ Após o contato com o conteúdo proposto, participe dos debates mediados em fóruns de discussão, pois irão auxiliar a verificar o quanto você absorveu de conhecimento, além de propiciar o contato com seus colegas e tutores, o que se apresenta como rico espaço de troca de ideias e aprendizagem.

Introdução

Nesta unidade, estudaremos os Conjuntos Numéricos citando as respectivas operações e propriedades permitidas em cada um dos conjuntos. Veremos que nem todas as operações são definidas em todos os conjuntos.

As operações numéricas mais usadas são a Adição, a Subtração, a Multiplicação e a Divisão. Veremos, também, a Potência e a Radiciação.

Os conjuntos estudados nesta Unidade são:

- » Naturais N;
- » Inteiros Z;
- » Racionais Q;
- » Reais R.



Figura 1

Fonte: iStock /Getty Images

A Aritmética trata do estudo dos Conjuntos Numéricos e das operações entre os diferentes tipos de números e suas propriedades. Esse estudo abrange desde a Aritmética Elementar até a Teoria dos Números, que propicia um bom ferramental para outras áreas, como, por exemplo, a Criptografia, que é o estudo das transformações de uma informação em outra equivalente, mas codificada de forma ilegível, a não ser que o destinatário tenha a chave de códigos que originou a codificação.

O entendimento dos diversos tipos de Conjuntos Numéricos variou muito ao longo do tempo, e foi sedimentado, inicialmente, pelo italiano Giuseppe Peano (1858-1932). Nesta Unidade, vamos nos concentrar na revisão das propriedades fundamentais das operações dos Conjuntos Numéricos.

Para fundamentos da Aritmética, Peano escolheu três conceitos primitivos: **zero, número** (natural no caso), e a função “é sucessor de”. A partir desses três conceitos, satisfez cinco postulados ou axiomas.



Você Sabia?

Axioma ou Postulado é um conceito considerado verdadeiro e inquestionável. São fundamentos de uma demonstração; porém, sem serem demonstráveis matematicamente, mas tido como verdadeiros.

Número é a propriedade de certos conjuntos, os chamados “Conjuntos Padrão”. Assim, associamos o zero ao conjunto vazio: $\emptyset \equiv 0$. A noção de sucessor de x , indicado por $S(x)$ é definida pela união:

$$S(x) \underset{\text{def}}{=} X \cup \{x\}$$

O Zero está associado ao conjunto vazio; já o conjunto com o conjunto vazio é associado ao número Um e ele é o sucessor de Zero. Analogamente, temos os demais números.

Assim, temos:

- 0 = $\emptyset \equiv 0$
- 1 = $s(0)$ ou $1 \equiv \{\emptyset\}$
- 2 = $s(1)$ ou $2 \equiv \{0, 1\}$
- 3 = $s(2)$ ou $3 \equiv \{0, 1, 2\}$
- 4 = $s(3)$ ou $4 \equiv \{0, 1, 2, 3\}$

A partir dos três conceitos primitivos, Peano, então, satisfez cinco axiomas, expostos a seguir.

Axiomas de Peano e o Conjunto dos Números Naturais

1. Zero é um número natural;
2. Se a é um número natural, o sucessor de a também é um número natural.
Se $n \in \mathbb{N}$, então $s(n) \in \mathbb{N}$;
3. Zero não é o sucessor de nenhum número natural;
4. Dois números cujos sucessores são iguais são eles próprios iguais.

Ou seja, se

$$s(n) = s(m), \text{ então } n = m;$$

5. Se um conjunto S de números contém o zero e também o sucessor de todo número de S , então todo número está em S .

A partir desses axiomas, é criado o Conjunto dos Números Naturais, indicado por N , que é infinito e sua representação, por extensão, é simplificadamente:

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \dots, n-1, n, n+1, \dots\}.$$

Podemos dizer que $2 \in N$, $3029 \in N$; porém $-5 \notin N$, $\frac{3}{4} \notin N$, pois não são naturais.



Um vídeo muito interessante resgata a história dos números e sua evolução, que está diretamente ligada à própria evolução da Humanidade. O vídeo é **A História do Número 1**.
<https://youtu.be/3rijdn6L9sQ>

Operações em N

Considere dois conjuntos A e B de intersecção vazia, em que o número de elementos de A é igual a x , ou seja, $\#A = x$, e o número de elementos de B é igual a y , ou seja, $\#B = y$.

A partir desses dois conjuntos, valem as definições a seguir.

Definição: Adição

A soma $x + y$, resultado da operação da adição: $+$ em N é dada por:

$$\begin{aligned} + : N \times N &\rightarrow N \\ (x, y) \rightarrow x + y &\stackrel{\text{def}}{=} \#(A \cup B), \text{ se } A \cap B = \emptyset \end{aligned}$$

Ou seja, a adição é tida como a união do número de elementos. Por isso $2 + 3 = 5$, já que temos aqui a união; porém, cabe destacar que, como estamos tratando de conjuntos, a intersecção entre ambos deverá ser nula.

Definição: Subtração

A diferença $x - y$, resultado da operação de subtração $-$ é definida quando o conjunto B é subconjunto de A :

$$\begin{aligned} - : N \times N &\rightarrow N \\ (x, y) \rightarrow x - y &\stackrel{\text{def}}{=} \#(A - B), \text{ se } B \subseteq A \end{aligned}$$

Ou seja, a diferença é tida como a diferença entre dois conjuntos $A - B$; porém, necessariamente, B precisa estar contido em A . Logo, nos naturais, temos $5 - 2 = 3$ (pois 2 está contido em 5), mas não temos $2 - 5$, visto que 5 não está contido em 2.

Nessa altura, você certamente pensou em -3 como resposta para $2 - 5$; porém, não se esqueça de que estamos tratando, por enquanto, do Conjunto dos Números Naturais (\mathbb{N}) e definindo as operações e propriedades nesse Conjunto.

Definição: Multiplicação

O produto $x \cdot y$, resultado da operação de multiplicação em \mathbb{N} , é dado por:

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(x, y) \rightarrow (x \cdot y) = y + y + y + y + \dots + y$$

Ou seja, a multiplicação é tida como a soma de x parcelas iguais de certo número y , como, por exemplo, $3 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 = 15$, que são três parcelas do número 5 somadas.

Em \mathbb{N} estão definidas e fechadas duas operações: Adição e Multiplicação. Dizemos fechadas pois valem para qualquer que seja o número natural, o que já não ocorre com a subtração, já que vimos que não é válida para qualquer par de números naturais.

Quando temos operações ditas definidas e fechadas, passa a valer um conjunto de propriedades que são utilizadas nas operações a fim de operar os números a partir delas.

Vejamos, então, as propriedades:

1. Fechamento da Adição

Para todos os números, se dois deles quaisquer, x e y são números naturais, então a sua soma $x + y$ resultará também em um número natural.

Em simbologia, conforme a seguir, temos:

$$(\forall x, y \in \mathbb{N})[x + y \in \mathbb{N}]$$

Para exemplificar, você mesmo(a) pode pensar em dois números naturais quaisquer e verá que a soma deles será sempre um terceiro número natural.

2. Associativa da Adição e Multiplicação

Na adição de três números naturais quaisquer x, y, z , tanto faz somarmos o primeiro ao resultado da adição dos dois últimos, como o resultado da soma dos dois primeiros ao terceiro; o resultado será o mesmo:

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{N})[x + (y + z) = (x + y) + z]$$

Para exemplificar, temos: $(4 + 5) + 3 = 4 + (5 + 3)$

O que também ocorre na multiplicação entre naturais:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{N} [x * (y * z) = (x * y) * z]$$

Para exemplificar, temos: $4 * (2 * 5) = (4 * 2) * 5$



Importante!

Mas é importante destacar que isso ocorre quando temos somente uma das operações: ou a soma ou a multiplicação. Veremos, posteriormente, que não é válido quanto temos mais de uma operação distinta.

Comutatividade da Adição e Multiplicação

Na adição, a ordem das parcelas não altera o resultado da soma.

$$(\forall x, y \in \mathbb{N}) [x + y = y + x]$$

Exemplificando: $2 + 5 = 5 + 2$.

Essa propriedade é válida, também, para a multiplicação; porém, na multiplicação, chamamos os números de fatores e não de parcelas, como chamamos na adição.

Logo, para essa propriedade, dizemos: quaisquer que sejam dois números naturais x e y , temos que a ordem dos fatores na multiplicação entre ambos não altera o resultado:

$$(\forall x, y \in \mathbb{N}) [x * y = y * x]$$

Exemplificando: $4 * 7 = 7 * 4$

Distributividade da Multiplicação para Adição

Quaisquer que sejam os naturais x , y e z , temos que, se x multiplica a soma dos naturais y e z , ou seja, $x * (y + z)$, então, o resultado será o mesmo se x multiplicar cada um dos naturais e , por fim, somarmos o resultado das multiplicações.

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{N}) [x * (y + z) = (x * y) + (x * z)]$$

Exemplificando:

$$\begin{aligned} 4 * (2 + 7) &= (4 * 2) + (4 * 7) \\ 4 * 9 &= 8 + 28 \\ 36 &= 36 \end{aligned}$$

Elemento Neutro da Adição

Existe um único número n que é o Zero, $n = 0$, chamado de neutro aditivo. A partir dessa definição, para todos os demais naturais a ele somado, o resultado será sempre o mesmo número.

$$(\forall x \in N) [n + x = x + n = x]$$

Exemplificando: $3 + 0 = 3$.

Se pensarmos na adição como a soma do número de elementos dos conjuntos, fica intuitivo compreender que qualquer que seja o conjunto somado com o conjunto vazio (união entre os conjuntos), terá como resultado o próprio conjunto.

Elemento Neutro da Multiplicação

Existe um único número i que é o Um, $i = 1$, que é neutro multiplicativo e também chamado de unidade.

Na simbologia matemática o símbolo \exists representa existir. Logo, $\exists a \in N$ representa: existe um número a pertencente aos naturais.

Nessa propriedade, então, destaca-se a unidade, que trataremos na simbologia da propriedade como i (mas não a unidade imaginária dos números Complexos) e essa unidade nos números naturais (e veremos, também, que para todos os números reais) representa 1.

Logo, qualquer que seja o número natural, quando multiplicado pela unidade 1, o resultado será o próprio número natural.

$$(\exists i \in N) (\forall x \in N) [i * x = x * i = x]$$



Importante!

Os números naturais não são suficientes para a solução de todos os problemas matemáticos. Note que a soma ou a multiplicação entre dois naturais será sempre um natural; porém, a diferença entre dois naturais nem sempre resultará em um natural; por isso dizemos que a subtração não é uma operação fechada em N .



Material da Universidade de São Paulo no qual temos um complemento das propriedades dos conjuntos numéricos.

<https://goo.gl/ZXf1EW>

Conjunto dos Números Inteiros Z

O conjunto dos Inteiros, representado por Z, que vem da palavra inteiro "zahl", na língua alemã, é infinito e enumerável.

$$Z = \{\dots, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots, n-1, n, n+1, \dots\}$$

No conjunto dos Inteiros, para quaisquer números x e $y \in Z$, temos que $x - y = w$, e $w \in Z$.

Ou seja, a subtração é uma operação definida e fechada para quaisquer inteiros, o que não ocorre com o conjunto dos Naturais.

Portanto, estão definidas e **fechadas** em Z:

- » Adição;
- » Multiplicação;
- » Subtração.

Das Operações de Adição e Multiplicação em Z

As seis propriedades apresentadas em N também são válidas em Z, e inclui-se agora uma sétima propriedade:

Elemento Oposto ou Inverso Aditivo

Para todo e qualquer número inteiro x , existe outro número inteiro chamado oposto de x , representado por $op(x) = -x$, e a soma entre um número e seu oposto será igual ao elemento neutro 0 “zero”.

$$(\forall x \in Z) (\exists o_p \in Z) [o_p + x = x + o_p = 0]$$

Tal número o_p é o oposto de x , $op(x) = -x$.

Logo, para cada número inteiro, existe um oposto, e a soma de opostos é sempre nula.

Essa propriedade é extremamente importante para o “fechamento” da operação subtração no Conjunto dos Inteiros, pois estão definidos os apostos ($-x$) e a operação passa a se estabelecer para qualquer que seja o número inteiro.

Assim, podemos definir em Z a operação de subtração, estabelecendo que a subtração entre dois números a e $-b$ implica a soma de a com o aposto de b .

$$a + (-b) = a - b$$

Para todos a , e $b \in Z$.

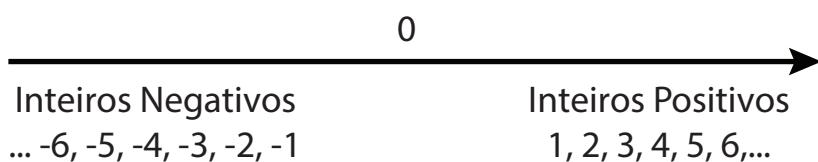
Importante destacar que o oposto não quer dizer que será sempre um número negativo.

O oposto de $a = -a$, logo o oposto de $-a = a$.

Assim, por exemplo: o oposto de $-6 = 6$.

Regras dos Sinais em Z

Os sinais negativo e positivo podem ser associados aos sentidos do eixo de uma reta numerada, na qual o zero está ao centro e à direita temos os inteiros positivos (naturais como subconjunto de Z) e à esquerda os inteiros negativos.



Nas operações entre inteiros, valem as regras que citamos a seguir, sem necessariamente demonstrá-las matematicamente:

1. A soma inteira positiva é positiva;
2. A soma de inteiros negativos é negativa;
3. Se o número tem sinais diferentes, subtraímos o menor do maior, em valor absoluto, e mantemos o sinal do maior, também em valor absoluto;
4. O produto de números inteiros de mesmo sinal é positivo;
5. O produto de números inteiros de sinais diferentes é negativo.

Embora no conjunto dos inteiros já tenhamos definidas e fechadas as operações: adição, subtração e multiplicação, não temos essa possibilidade para a divisão, vez que, assim como nos naturais, **não podemos fazer a divisão entre qualquer par de números**, mas apenas para alguns.



Facilmente identificamos que a divisão $4/2 \in Z$, já que $4/2 = 2$ e $2 \in Z$. Assim como $-10/5 \in Z$; porém, o resultado da divisão $3/2 \notin Z$. Quando a divisão não é inteira, formamos uma fração que representa essa divisão, ou um decimal finito ou infinito.

Para compreender e operar a divisão, precisamos conhecer o conjunto dos números racionais.

Conjunto dos Números Racionais

Nos dois conjuntos anteriores, \mathbb{N} e \mathbb{Z} , não apresentamos a propriedade da divisão e em nenhum deles esta é fechada. Isso passa a ser verdade no conjunto dos racionais \mathbb{Q} , onde temos, por definição:

$$\mathbb{Q} = \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0$$

Na definição temos que o conjunto \mathbb{Q} dos números racionais é o conjunto formado por todos os números que podem ser escritos como uma razão (divisão) entre dois números inteiros quaisquer a e b ; porém, com b sendo diferente de 0 “zero”.

O conjunto tem esse nome pois uma divisão ou fração também é chamada de razão e seu adjetivo é racional.

Agora, nos racionais, exceto quando $b = 0$, a divisão é uma operação fechada.

Exemplo de racionais: $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{4}, -\frac{2}{5}, -\frac{9}{10}$.

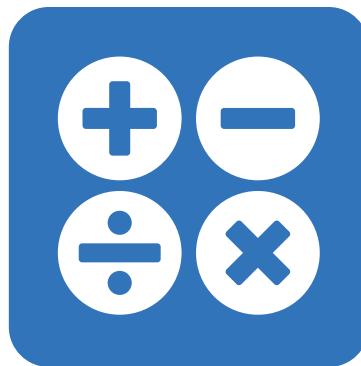


Figura 3

As Representações dos Números Racionais: \mathbb{Q}

Vale uma atenção especial para a representação dos números racionais, pois podem ser representados por razões a/b (ou uma barra de divisão), mas possuem, também, a representação decimal que é obtida quando dividimos o numerador **a** pelo denominador **b**.

Decimal Finito

O racional $\frac{1}{2}$, por exemplo, na forma decimal, é representado por 0,5. Mas também por outros racionais ditos equivalentes como $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{50}{100}$, que também representam $\frac{1}{2} = 0,5$.

Decimal Dízima Periódica Simples

O racional $1/3$ na forma decimal é representado por $0,33333\dots$ número que que possui infinitos dígitos que se repetem e é racional, assim como outras dízimas que podem ser escritas na forma fracionária. Nesse caso, são as chamadas dízimas periódicas.

O racional $23/99$ tem como representação decimal a dízima periódica $0,232323\dots$

Decimal Dízima Periódica Composta

O racional $177/990$ tem como representação decimal a dízima periódica composta $0,178787878\dots$ (chamada de composta).

Qualquer número decimal, seja ele finito ou infinito periódico simples ou composto, que possa ser escrito na forma fracionária a/b , é um número racional.

Porém, há números decimais infinitos e não periódicos que não podem ser escritos na forma fracionária; são os chamados **Números Irracionais**.

Entre eles, destacamos:

$\pi = 3,14159265358979\dots$ (que é obtido a partir da razão entre o comprimento de qualquer circunferência pelo seu diâmetro);

$e = 2,718281828\dots$ (número de Neper, utilizado como base de logaritmos);

$\sqrt{2} = 1,4142135\dots$;

$\sqrt{3} = 1,7320508\dots$.

Propriedades das Operações da Adição e Multiplicação em \mathbb{Q}

As propriedades de fechamento da divisão, associatividade da adição e multiplicação, e também a comutatividade, são análogas ao Conjunto dos Inteiros.

1. Fechamento da Divisão

$$(\forall x, y \in \mathbb{Q})[\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}, b \neq 0]$$

Ou seja, a divisão está definida e fechada em \mathbb{Q} para qualquer denominador diferente de zero.

2. Associativa da Adição e Multiplicação

Na adição de três números racionais quaisquer x, y, z , tanto faz somarmos o primeiro ao resultado da adição dos dois últimos, como o resultado da soma dos dois primeiros ao terceiro; o resultado será o mesmo.

$$(\forall x, y, z \in Q) [x + (y + z) = (x + y) + z]$$

O que também ocorre na multiplicação:

$$(\forall x, y, z \in Q) [x * (y * z) = (x * y) * z]$$

3. Comutatividade da Adição e Multiplicação

Na adição, a ordem das parcelas não altera o resultado da soma:

$$(\forall x, y \in Q) [x + y = y + x]$$

Assim como na multiplicação, a ordem dos fatores não altera o resultado:

$$(\forall x, y \in Q) [x * y = y * x]$$

4. Distributividade da Multiplicação para Adição

Quaisquer que sejam os racionais x, y e z , temos que, se x multiplica a soma dos racionais y e z , ou seja $x * (y + z)$, então, o resultado será o mesmo se x multiplicar cada um dos racionais e, por fim, somarmos o resultado dessas multiplicações:

$$(\forall x, y, z \in Q) [x * (y + z) = (x * y) + (x * z)]$$

5. Elemento Neutro da Adição

Também no conjunto dos racionais existe um único número n , que é o Zero, $n = 0$, chamado de neutro aditivo, e qualquer que seja o racional a ele somado, o resultado será o próprio racional que foi somado.

$$(\forall x \in Q) [n + x = x + n = x]$$

6. Elemento Neutro da Multiplicação

Nos racionais, o elemento neutro da multiplicação, assim como nos naturais e inteiros, é a unidade 1.

$$(\exists i \in Q) (\forall x \in Q) [i * x = x * i = x]$$

7. Elemento Oposto ou Inverso Aditivo

Para todo e qualquer número racional x (sendo $x = a/b$ com $b \neq 0$), existe outro número racional chamado oposto de x , representado por $o_p(x) = -x$, e a soma entre um número e seu oposto será igual ao elemento neutro 0 “zero”.

$$(\forall x \in Q)(\exists o_p \in Q)[o_p + x = x + o_p = 0]$$

Tal número o_p é o oposto de x , $o_p(x) = -x$.

Ou seja, se $x = a/b$, então $-x = -a/b$.

Chamamos atenção, agora, para a oitava propriedade, que não tínhamos no Conjunto dos Inteiros, mas é válida para os racionais.

8. Elemento Inverso Multiplicativo

Qualquer que seja um número racional x (logo $x = a/b$, com $b \neq 0$), existe um elemento inverso que denotaremos por e_i .

Ao realizarmos a multiplicação entre um número racional e seu inverso, o resultado será igual ao elemento neutro da multiplicação:

$$(\forall x \in Q)(\exists e_i \in Q)[x * e_i = e_i * x = 1]$$

Tal inverso de x é $e_i = e_i = x^{-1} = \frac{1}{x}$ $e x * x^{-1} = x^{-1} * x = 1$

Exemplificado:

$1/2$ seu inverso é $2/1$, então, temos que $1/2 * 2/1 = 1$.

$2/3$ seu inverso é $3/2$, então, temos que $2/3 * 3/2 = 1$.

$-4/5$ seu inverso é $-5/4$, então, temos que $-4/5 * (-5/4) = 1$.



No conjunto dos Racionais, a divisão é fechada, mas nem todas as operações que usamos são fechadas. Além disso, existem números que não são expressos por frações, conforme já vimos. **Unindo o conjunto dos racionais com os números irracionais, formamos o Conjunto dos Reais R.**

Vamos relembrar as operações de soma, subtração e multiplicação entre os racionais.

Soma ou Subtração de Racionais como mesmo Denominador

Para somar ou subtrair frações de mesmo denominador, basta somar os numeradores e manter o respectivo denominador comum.

Exemplos:

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{1+3}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{5}{3} - \frac{7}{3} = \frac{5-7}{3} = \frac{-2}{3}$$

Soma ou Subtração com Denominadores Diferentes

Neste caso, é necessário escrever as frações originais com frações equivalentes que contenham o mesmo denominador para, somente após esse procedimento, somarmos os numeradores. Para obtermos o mesmo denominador, é necessário determinarmos o menor múltiplo comum às frações em questão.

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

Note que a fração 1/2 foi substituída pela fração 2/4, pois são frações equivalentes e ambas possuem o valor de 0,5 na representação decimal.

Na figura a seguir temos outro exemplo:

$$\frac{1}{2} + \frac{7}{5} = \frac{5}{10} + \frac{14}{10} = \frac{19}{10}$$

Neste caso o MMC é 10 pois 5 e 2 são primos

$\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ Note que de 2 para 10 o denominador foi multiplicado por 5, assim como o numerador também, pois foi de 1 para 5.

$\frac{7}{5} = \frac{14}{10}$ Note que de 5 para 10 o denominador dobrou, assim como o numerador também, pois foi de 7 para 14.

Figura 4

#ParaTodosVerem: Representação da soma ou subtração de denominadores diferentes. Na lateral esquerda apresenta o cálculo “Fração 1 sobre 2 somado a fração 7 sobre 5, que equivale a fração 5 sobre 10 somada a fração 14 sobre 10 que resulta na fração 19 sobre 10. Abaixo das frações iniciais está a descrição “Neste caso o MMC é 10 pois 5 e 2 são primos”. Na lateral direita, na parte superior a descrição “fração 1 sobre 5 é igual

a fração 5 sobre 10, note que de 2 para 10 o denominador foi multiplicado por 5, assim como o numerador também, pois foi de 1 para 5". Na parte inferior a descrição "fração 7 sobre 5 é igual a 14 sobre 10, note que de 5 para 10 o denominador dobrou, assim como o numerador também, pois foi de 7 para 14". Fim da descrição.



Para relembrar o procedimento do cálculo do Mínimo Múltiplo Comum (MMC), indicamos a leitura no site Só Matemática: <https://goo.gl/Bx4U>

Produto entre Racionais (na Representação de Frações)

A multiplicação consiste em multiplicar os numeradores, gerando o numerador do resultado final, e realizar o mesmo procedimento com o denominador.

De forma genérica temos:

$$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{ac}{db}$$

Com b e d $\neq 0$.

Exemplificando:

$$\frac{2}{3} * \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Exemplificando:

$$\frac{-2}{7} * \frac{2}{4} = \frac{-4}{28} = \frac{-1}{7}$$

Sempre que possível, devemos “simplificar” as frações obtendo a fração equivalente irredutível. Para isso, basta dividir numerador e denominador por um mesmo divisor comum.

Divisão entre Racionais (na Representação de Frações)

A divisão consiste em realizar uma multiplicação. Para isso, mantemos o dividendo e invertemos (numerador por denominador) o divisor.

De forma genérica temos:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c}$$

Exemplificando:

$$\frac{2}{3} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3} * \frac{2}{1} = \frac{4}{3}$$

Exemplificando:

$$\frac{5}{6} : 2 = \frac{5}{6} * \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$$



Para recordar o cálculo do Mínimo Múltiplo Comum (MMC): <https://goo.gl/DPFvE9>

Conjunto dos Reais

Este Conjunto é bem mais novo que os demais e causa muito espanto, pois de fato ele é **contínuo** e não possui os “buracos” dos racionais. Esse infinito é de natureza diferente dos Naturais e dos Conjuntos Enumeráveis. Esse infinito é **mais potente**. O Conjunto R não é enumerável.

O Conjunto R possui todas as propriedades dos racionais e muitas outras; porém, além desse Conjunto, temos, ainda, o Conjunto dos números complexos, no qual temos a unidade imaginária i e a definição de $i^2 = 1$, que não detalharemos nesta Disciplina, pois não é o foco de nossos estudos.

Veremos, agora, duas outras operações importantes: a Potenciação e a Radiciação.

Potência

Seja a um número real e n um número natural, então, a potência de “ a elevado a n ” é definida por:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \dots a$$

onde $a \cdot a \cdot a$ será definido por n vezes

O valor de a é chamado de base e o valor de n é chamado de expoente. O resultado, chamamos de potência.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots \cdot a}_{\text{Multiplicação de } n \text{ fatores}}$$

Base Expediente

Potências são valores que representam uma multiplicação sucessiva de um número.

Assim, ao realizar a potência, devemos ficar atentos atentar ao valor da base, que é o número que é multiplicado sucessivamente, e do respectivo expoente, que é o número de multiplicações da base.



Importante!

Qualquer que seja a base a , temos que $a^0 = 1$.

Regras de Potenciação

Sejam a, b números reais e n, m números naturais:

$$1. \ a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Para multiplicar potências de mesma base, no resultado, conservamos a base, e o novo expoente é a soma dos expoentes dados.

Exemplificando:

$$2^2 * 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32.$$

$$2. \ a^n \div a^m = a^{n-m}$$

Para dividir potências de mesma base, no resultado, conservamos a base, e o novo expoente é a subtração dos expoentes dados: o numerador menos o denominador.

Exemplificando:

$$\frac{2^6}{2^4} = 2^{6-4} = 2^2 = 4$$

$$3. \ (a^m)^n = a^{mn}$$

Potência de potência, no resultado, conservamos a base, e o novo expoente é o produto dos expoentes dados.

Exemplificando:

$$(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12} = 4096$$

$$4. \left(\frac{a}{b} \right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Potência de uma fração é a fração das potências, ou seja, o resultado é uma nova fração, na qual os termos são os mesmos, com o expoente repetido no numerador e no denominador

Além das regras temos algumas definições matemáticas importantes para as potências, apresentadas a seguir.

Potências com Expoentes Negativos

Seja **a** um número real e **n** um número natural, então, a potência de a elevado a **-n** é definida por:

$$a^{-1} = \frac{1}{a^1}$$

Exemplificando:

$$3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{1} = 4$$

Um importante teorema das Potências: seja **a** um número real, se o expoente é natural e par, $n = 2k$, então, o resultado é positivo.

$$(-a)^{2k} = [(-a)^2]^k = [(-a) \cdot (-a)]^k = [a^2]^k = a^{2k}$$



Importante!

$-2^4 \neq (-2)^4$, veja a seguir:

-2^4 , ou seja, $-(2^4) = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -(16) = -16$ (o sinal negativo não pertence à base)

$(-2)^4 = 16$ (nesse caso, o sinal pertence à base)

ou seja, $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$.

No primeiro caso, o uso dos parênteses não é necessário, mas no segundo caso, se o sinal de negativo faz parte da base, necessariamente, deve-se colocar o símbolo de parênteses.

Potência com Exponente Racional

Sendo **a** um número real e **n** e **m** números naturais (com $n \neq 0$), então, temos que **a** elevado a m/n é definido por:

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Ou seja, o denominador (**n**) do expoente racional passa a ser o índice da raiz, enquanto que o numerador (**m**) do expoente passa a ser o expoente do radicando.

Exemplificando:

$$3^{1/2} = \sqrt[2]{3^1}$$

$$5^{3/2} = \sqrt[2]{5^3} = \sqrt{125}$$

$$2^{3/4} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$$

Radiciação

O cálculo da raiz está associado à operação inversa à da potenciação. Por exemplo, se sabemos que um quadrado tem 49m^2 de área, então, seu lado tem 7m, por meio da operação da radiciação, pois $\sqrt{49} = 7$.

Assim, seja **a** um número real positivo e **n** um número natural não nulo. A expressão $\sqrt[n]{a}$ representa o número real **x** para o qual temos que $x^n = a$.

Ou seja, definimos a radiciação por:

$$\sqrt[n]{a} \leftrightarrow x^n = a$$

O número **n** é chamado de índice, o valor de **a** é chamado de radicando e o valor de **x** é chamado de raiz.

$$\sqrt[n]{a} = x$$

Índice Raiz
 ↑ →
 Radicando

Importante observar que, em alguns casos, podemos estender o conceito acima para qualquer número real **a** e definir a raiz quando existir o número **x** tal que $x^n = a$.

Se o índice **n** for par, haverá dois números **x** tais que $x^n = a$, mas a definição de raiz é dada, somente, ao valor que tem o mesmo sinal de **a**, quando existir.

Em certos casos, podemos estar interessados nos dois valores, e simbolizamos por $\pm a$.

Porém, devemos chamar a atenção para o fato de que tal número pode não existir. Se, por exemplo, **a** é negativo e **n = 2**, então, não teremos uma raiz, já que não existe nenhum número real **x** que, elevado ao quadrado, resulte em um valor negativo.

Essa possibilidade existe no Conjunto dos Números Complexos, no qual uma unidade imaginária **i** tem por definição o resultado de $i^2 = -1$ e, por consequência $\sqrt{-1} = i$. Essa definição, assim como o conjunto dos numéricos complexos, possui aplicações bem interessantes no cálculo de circuitos elétricos.

Propriedades da Radiciação

Sejam **a**, **b** números reais e **n**, **m** e **p** inteiros, sendo **n**, **m** > 1 , temos que:

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Exemplificando:

$$\sqrt[3]{2 \cdot 10} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{10}$$

2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Exemplificando:

$$\sqrt[3]{\frac{9}{5}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{5}}$$

$$3. \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Exemplificando:

$$\left(\sqrt[3]{4}\right)^2 = \sqrt[3]{4^2}$$

$$4. \sqrt[pn]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt{pn}a$$

Exemplificando:

$$\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64}$$

Vimos as operações nos conjuntos numéricos e suas propriedades, que são importantes ferramentas para realizar as operações. Além disso, vale destacar algumas observações importantes.

Em uma expressão numérica, a multiplicação ou a divisão são prioritárias à adição e à subtração. Então, por exemplo, na expressão $2 + 5 * 3$, o resultado será obtido primeiro realizando a multiplicação $5 * 3$ e, por fim, somando ao 2.

$$2 + 5 * 3 = 2 + 15 = 17$$

Se tivermos uma expressão como $3 - 4 : 4 + 9 - 3$, novamente deveremos iniciar com a operação que é prioritária, ou seja, $3 - 4 : 4 + 9 - 3 = 3 - 1 + 9 - 3$ e, nesse momento, como temos soma e subtração, a ordem das parcelas não altera o resultado (lembrem-se dessa propriedade?). Então temos: $3 - 4 : 4 + 9 - 3 = 3 - 1 + 9 - 3 = 8$.

Em outro exemplo, temos que a potência é prioritária à multiplicação e à divisão:
 $-4 * 5^2 - 3 = -4 * 25 - 3 = -100 - 3 = -103$.

Porém, os símbolos de parênteses (), colchetes [] e chaves {}, definem prioridades, a saber: primeiro resolvemos os parênteses, depois os colchetes e, por fim, as chaves.

Exemplo:

$$-4 * \{ 2 * [(-6+3) / (-2+5)] + 6 \}$$

Resolvemos inicialmente os parênteses: $-4 * [2 * (-3/3) + 6]$

Na sequência, os colchetes: $-4 * [2 * (-1) + 6]$, logo: $-4 * 4 = -16$

Exemplo:

$$-4^2 * (3 - 5) + [(-2)^3 + 3^2 - (-2)^4] * 3$$

Algumas observações importantes:

$$-4^2 = -4 \cdot 4 = -16$$

Logo:

$$-16 * (-2) + [-8+9-(16)] * 3 = 32 + (1)*3 = 32 + 3 = 35$$

Exercícios

1. Calcule o resultado das expressões numéricas a seguir:

a) $-3 + 5 \cdot 4 - 2^3 + 1 =$

b) $-1 + 3 \cdot 4 : 2 - 4 + 7 =$

c) $2^{-1} \cdot 6 + 3 \cdot 2^3 - 5 =$

d) $\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - 4 + \frac{1}{2} =$

e) $\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{5} =$

f) $-2^3 + 3^2 \cdot 3^3 - \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} =$

g) $5 \cdot 2^3 + (-2)^4 - 3^2 =$

h) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} =$

2. Utilize as propriedades de potência para simplificar as expressões a seguir:

a) $\frac{2^5 \cdot 2^3 \cdot 2^1}{2^4 \cdot 2^3} =$

b) $\frac{4^3 \cdot 4^{-1} \cdot 4}{4^4 \cdot 4^3} =$

c) $\frac{a^x \cdot b^y \cdot a^z}{a^x b^{-y}} =$

Respostas

1. Calcule o resultado das expressões numéricas a seguir

a) $-3 + 5 \cdot 4 - 2^3 + 1 = -3 + 20 - 8 + 1 = 10$

b) $-1 + 3 \cdot 4 : 2 - 4 + 7 = -1 + 6 + 3 = 8$

c) $2^{-1} \cdot 6 + 3 \cdot 2^3 - 5 = \frac{1}{2} \cdot 6 + 3 \cdot 8 - 5 = \frac{6}{2} + 24 - 5 = 3 + 24 - 5 = 22$

d) $\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - 4 + \frac{1}{2} = \frac{3 + 8 - 48 + 6}{12} = \frac{-31}{12}$

e) $\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{2}{15} + \frac{3}{5} = \frac{2 + 9}{15} = \frac{11}{15}$

f) $-2^3 + 3^2 \cdot 3^3 - \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = -8 + 3^5 - 4^3 = -8 + 243 - 64 = 171$

g) $5 * 2^3 + (-2)^4 - 3^2 = 5 * 8 + 16 - 9 = 40 + 7 = 47$

h) $\sqrt[3]{2} * \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8} = 2$

2. Utilize as propriedades de potência para simplificar as expressões a seguir:

a) $\frac{2^5 * 2^3 * 2^1}{2^4 * 2^3} = \frac{2^9}{2^7} = 2^2$

b) $\frac{4^3 * 4^{-1} * 4}{4^4 * 4^3} = \frac{4^3}{4^7} = 4^{-4} = \frac{1}{4^4}$

c) $\frac{a^x * b^y * a^z}{a^x b^{-y}} = b^{2y} * a^z$

Material Complementar

Indicações para saber mais sobre os assuntos abordados nesta Unidade:



Livros

Trama Matemática: Princípios e Novas Práticas no Ensino Médio

No primeiro capítulo do livro **Trama Matemática: Princípios e novas práticas no ensino médio**, do autor Márcio Barreto, você poderá aprofundar o que estudamos sobre Conjuntos Numéricos. O livro está disponível na Biblioteca Virtual Universitária:

Referências

BARRETO, M. **Trama matemática:** Princípios e novas práticas no ensino médio. Campinas: Papirus 2013.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar.** v.1. Conjuntos – Funções. São Paulo: Atual, 2013.



Cruzeiro do Sul
Educacional