수학이란 무엇인가?

SeungJae Bang

AI와 수학: 집합의 확장

May 21, 2025

강사 약력

1. 2018.02 보인중학교 졸업
2. 2021.02 보인고등학교 졸업

강사 약력

1. 2018.02 보인중학교 졸업
2. 2021.02 보인고등학교 졸업
3. 2021 서울대학교 입학
4. 현 주전공: 수리과학부 수리과학전공, 복수전공: AI

Contents

수학과의 이모저모

장점

1. 자유로운 학풍: 공부하고자 하는 사람들을 절대 막지 않는다.
2. 수업들의 퀄리티가 굉장히 좋다.
3. 다른 학문의로의 확장성이 좋다. 학과계의 조커카드!
4. 공부하기 정말 좋은 환경!

(대다수가 안 좋게 볼 것이라고 추정되는)단점

1. 6:4

수학과의 이모저모

장점

1. 자유로운 학풍: 공부하고자 하는 사람들을 절대 막지 않는다.
2. 수업들의 퀄리티가 굉장히 좋다.
3. 다른 학문의로의 확장성이 좋다. 학과계의 조커카드!
4. 공부하기 정말 좋은 환경!

(대다수가 안 좋게 볼 것이라고 추정되는)단점

1. 6:4 = 남자: 여자

수학과의 이모저모

장점

1. 자유로운 학풍: 공부하고자 하는 사람들을 절대 막지 않는다.
2. 수업들의 퀄리티가 굉장히 좋다.
3. 다른 학문의로의 확장성이 좋다. 학과계의 조커카드!
4. 공부하기 정말 좋은 환경!

(대다수가 안 좋게 볼 것이라고 추정되는)단점

1. 6:4 $=$ 장발 남자: 여자

수학과의 이모저모

장점

1. 자유로운 학풍: 공부하고자 하는 사람들을 절대 막지 않는다.
2. 수업들의 퀄리티가 굉장히 좋다.
3. 다른 학문의로의 확장성이 좋다. 학과계의 조커카드!
4. 공부하기 정말 좋은 환경!

(대다수가 안 좋게 볼 것이라고 추정되는)단점

1. 6:4 = 장발 남자: 여자
2. 공부하기 정말 좋은 환경!

수학과에서는 무엇을 하나요?

Roughly speaking...

1. 고등학교의 "수학"?... 여러분들이 하고 있는 것은 수학이 아니다.
2. 대학교의 수학은 논리게임
3. 고등학교의 수학을 잘 한다고 대학교 수학을 잘 하는 것은 아니다. 또한, 고등학교 수학을 못 한다고 대학교 수학을 못 하는 것도 결코 아니다!

수학과의 철학

철학

1. 간단한 공리들을 설정하기
2. 자연에 존재하는 개념을 직관에 알맞게 **정의하기**
3. "정의"와 "공리"들을 이용해 다양한 정리들을 만들고 증명하기
4. 반직관적인 일들을 철저히 논리로 헤쳐나가는 학문.

Example1- Clopen

정의: 열린구간

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

두 숫자 사이에 있는 숫자들의 집합.

Example1- Clopen

정의: 열린구간

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

두 숫자 사이에 있는 숫자들의 집합.

일반화된 정의: $\mathbb{R}$의 열린 집합

어떤 집합이 실수 상에서 열린 구간들의 합집합으로 나타내어질 수 있다면, 우리는 그것을 **열린 집합**이라고 부른다.

예시: $(1, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\} = \bigcup_{n=2}^{\infty} (1, n)$

Example1- Clopen

닫힌 집합

어떤 집합의 여집합이 열린 집합이면 그 집합은 **닫힌 집합**이다.

예시: $[1, 2] = \mathbb{R} - ((-\infty, 1) \cup (2, \infty))$

Example1- Clopen

질문

열려있으면서 닫혀있는 집합, 혹은 구간이 있을까?

Example1- Clopen

질문

열려있으면서 닫혀있는 집합, 혹은 구간이 있을까?

먼저, 공집합도 열린 집합(구간)임을 관찰하자. $(a, a) = \emptyset$이기 때문이다.

Example1- Clopen

질문

열려있으면서 닫혀있는 집합, 혹은 구간이 있을까?

먼저, 공집합도 열린 집합(구간)임을 관찰하자. $(a, a) = \emptyset$이기 때문이다.

그리고, 전체집합 $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(-n, n)$이므로 역시 열린 집합이다.

Example1- Clopen

질문

열려있으면서 닫혀있는 집합, 혹은 구간이 있을까?

먼저, 공집합도 열린 집합(구간)임을 관찰하자. $(a, a) = \emptyset$이기 때문이다.

그리고, 전체집합 $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(-n, n)$이므로 역시 열린 집합이다.

그런데, 공집합은 전체 집합의 여집합이므로,$(\emptyset = \mathbb{R} - \mathbb{R})$ 공집합은 닫힌 집합이다.

Example1- Clopen

질문

열려있으면서 닫혀있는 집합, 혹은 구간이 있을까?

먼저, 공집합도 열린 집합(구간)임을 관찰하자. $(a, a) = \emptyset$이기 때문이다.

그리고, 전체집합 $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(-n, n)$이므로 역시 열린 집합이다.

그런데, 공집합은 전체 집합의 여집합이므로,$(\emptyset = \mathbb{R} - \mathbb{R})$ 공집합은 닫힌 집합이다.

따라서 공집합은 **열려있으면서 닫혀있는** 집합이다. 반대로, 전체 집합도 **열려있으면서 닫혀있는** 집합이다.

Example2-Numbers

질문

짝수의 개수와 홀수의 개수는 같을까?

Example2-Numbers

질문

짝수의 개수와 홀수의 개수는 같을까?

집합의 크기

어떤 **집합의 크기**는 그 집합에 속해 있는 원소의 개수를 말한다.

Example2-Numbers

질문

짝수의 개수와 홀수의 개수는 같을까?

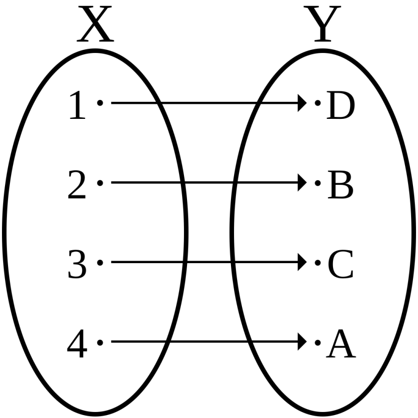
집합의 크기

어떤 **집합의 크기**는 그 집합에 속해 있는 원소의 개수를 말한다.

크기가 같은 집합

어떤 두 집합의 **크기가 같다**는 것은, 두 집합 사이에 일대일대응 함수가 존재한다는 것이다.

Example2-Numbers



Example2-Numbers

짝수와 홀수 간에는 일대일대응이 존재한다. 예를 들어, 다음과 같은 함수

$$\begin{aligned} f: \text{짝수의 집합} &\to \text{홀수의 집합} \\ 2n &\mapsto 2n-1 \end{aligned}$$

를 들 수 있다.

Example2-Numbers

더 나아가, 우리는 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

Example2-Numbers

더 나아가, 우리는 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

1. 짝수와 자연수의 개수는 같다. $(f(2n) = n)$

Example2-Numbers

더 나아가, 우리는 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

1. 짝수와 자연수의 개수는 같다. ($f(2n) = n$)
2. 자연수와 정수의 개수는 같다.

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ 짝수} \\ -\frac{n-1}{2} & n \text{ 홀수} \end{cases}$$

Example2-Numbers

더 나아가, 우리는 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

1. 짝수와 자연수의 개수는 같다. ($f(2n) = n$)
2. 자연수와 정수의 개수는 같다.

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ 짝수} \\ -\frac{n-1}{2} & n \text{ 홀수} \end{cases}$$

3. 정수와 음이 아닌 정수의 개수는 같다.

Example2-Numbers

더 나아가, 우리는 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

1. 짝수와 자연수의 개수는 같다. $(f(2n) = n)$
2. 자연수와 정수의 개수는 같다.

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ 짝수} \\ -\frac{n-1}{2} & n \text{ 홀수} \end{cases}$$

3. 정수와 음이 아닌 정수의 개수는 같다.
4. 음이 아닌 정수와 유리수의 개수는 같다.

Example2-Numbers

더 나아가, 우리는 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

1. 짝수와 자연수의 개수는 같다. ($f(2n) = n$)
2. 자연수와 정수의 개수는 같다.

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ 짝수} \\ -\frac{n-1}{2} & n \text{ 홀수} \end{cases}$$

3. 정수와 음이 아닌 정수의 개수는 같다.
4. 음이 아닌 정수와 유리수의 개수는 같다.
5. 따라서, 짝수와 유리수의 개수는 같다.

Example2-Numbers

1. 정수 $\to$ 음이 아닌 정수

$$f(n) = \begin{cases} 2n & n \geq 0 \\ 2(-n) - 1 & n < 0 \end{cases}$$

2. 음이 아닌 정수 $\to$ 유리수
   1. $f(0) = 0$
   2. $f(2n+1) = \dfrac{1}{f(n)+1}$ for all $n \geq 0$.
   3. $f(2n) = f(n) + 1$, for $n > 0$.

Example2-Numbers

유리수의 개수와 실수의 개수는 같을까?

Example2-Numbers

유리수의 개수와 실수의 개수는 같을까?

유리수의 개수 $\lnsim$ 실수의 개수

Example2-Numbers

유리수의 개수와 실수의 개수는 같을까?

유리수의 개수 $\lneq$ 실수의 개수

그렇다면, 원소의 개수가 유리수보다 많지만, 실수보다 적은 집합이 존재할까?

Example2-Numbers

유리수의 개수와 실수의 개수는 같을까?

유리수의 개수 $\lneq$ 실수의 개수

그렇다면, 원소의 개수가 유리수보다 많지만, 실수보다 적은 집합이 존재할까?

연속체 가설: 우리의 공리계에서는 증명이 불가능함이 증명됨.

AI와 수학

공학과 AI

수학은, 방금 우리가 봤던 것처럼 순수한 논리로 여러가지 법칙을 세워나가는 학문이다. 그리고 공학은, 그러한 법칙들을 **어떻게 활용할지** 고민하는 학문이다. 그리고, 그 중 수학을 가장 강력하게 사용할 수 있는 방안은 단연코 AI이다.

그렇다면, AI는 어떻게 수학을 활용할까?

Vector의 거친 정의

벡터란 여러 개의 수(성분)를 일정한 순서로 나열한 것으로, 다음과 같이 나타낸다:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{또는} \quad (v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n)$$

여기서 $v_1, v_2, \ldots, v_n$은 각각의 성분이다. 이때 벡터들 간에는 성분별 합과 상수배가 정의되어 있다.

Veoctor Space의 거친 정의

어떤 집합 V가 **벡터 공간**이라는 것은, 그 집합 V의 원소들이 전부 벡터라는 것이다.

예시: 실수평면은 (a, b)라는 벡터들로 이루어져있다. (a, b는 실수)

예시: n차 이하의 다항식 공간 $P_n(x)$는 $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$이라는 벡터들로 이루어져 있다. 이를 $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$이라는 묶음으로 표현할 수 있다. (a_i는 실수)

AI와 수학

선형 변환

어떤 벡터 공간들 V_1, V_2사이에서 정의된 함수 $L : V_1 \to V_2$가 **선형변환**이라는 것은, 다음을 만족할 때이다:

1. 임의의 벡터 $v, w \in V_1$에 대하여 $L(v + w) = L(v) + L(w)$가 성립한다.
2. 임의의 벡터 $v \in V_1$와 임의의 실수 $\alpha \in \mathbb{R}$에 대해 $L(\alpha v) = \alpha L(v)$가 성립한다.

직관적으로, $y = kx$함수의 그래프를 생각하면 쉽다. 실제로 $f(x) = kx$는 공역과 치역이 모두 $\mathbb{R}$인 선형변환에 해당한다.

AI와 수학

이러한 수학적 개념들을 어떻게 활용할 수 있을까? 다음을 살펴보자:

AI와 수학

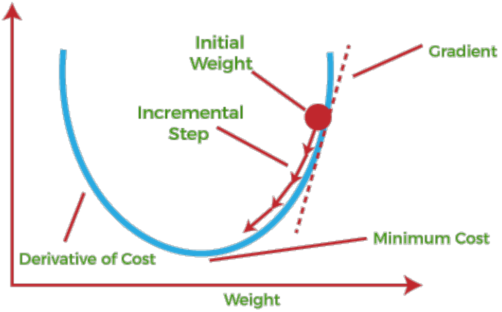
이러한 수학적 개념들을 어떻게 활용할 수 있을까? 다음을 살펴보자:

1. 이 세상에 있는 모든 데이터들은 위와 같은 벡터로 나타내어질 수 있다.

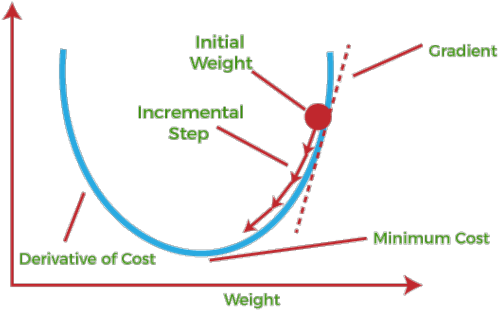
AI와 수학

이러한 수학적 개념들을 어떻게 활용할 수 있을까? 다음을 살펴보자:

1. 이 세상에 있는 모든 데이터들은 위와 같은 벡터로 나타내어질 수 있다.
2. AI의 작동원리 중에는, Gradient Descent라는 것이 있다.



AI와 수학



AI가 작동하는 원리

1. data set 벡터 공간 위에서 정의된 함수를 미분한다.
2. 값이 감소하는 방향으로 계속해 나아가 최솟값을 찾는다.

AI와 수학

3. Gradient descent는 미분이 필수적인데, 이 미분 연산자가 사실 함수 공간에서 함수 공간으로 가는 선형 변환이다.

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = f'(x)+g'(x), \quad \frac{d}{dx}(c \cdot f(x)) = c \cdot f'(x)$$

AI와 수학

3. Gradient descent는 미분이 필수적인데, 이 미분 연산자가 사실 함수 공간에서 함수 공간으로 가는 선형 변환이다.

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = f'(x)+g'(x), \quad \frac{d}{dx}(c \cdot f(x)) = c \cdot f'(x)$$

4. 뿐만 아니라 data set도 벡터공간이 되므로, 데이터를 변형하고 최적화를 할 때 여러가지 벡터공간과 선형변환에 대한 수학적 지식을 활용한다.

AI와 수학

3. Gradient descent는 미분이 필수적인데, 이 미분 연산자가 사실 함수 공간에서 함수 공간으로 가는 선형 변환이다.

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = f'(x)+g'(x), \quad \frac{d}{dx}(c \cdot f(x)) = c \cdot f'(x)$$

4. 뿐만 아니라 data set도 벡터공간이 되므로, 데이터를 변형하고 최적화를 할 때 여러가지 벡터공간과 선형변환에 대한 수학적 지식을 활용한다.
5. 무엇보다, 수학적으로 사고하는 것이 알고리즘을 직관적으로 짜는 데에 압도적으로 유리하다.

여러분이 앞으로 가져야 할 태도

1. 공부를 즐길 것. (재밌지 않나요?)
2. 대학에 가서 놀지 말고, 더 넓은 세계를 향해 나아갈 수 있도록 준비할 것.
3. 학점 절대 버리지 말 것.(복수전공, 혹은 전과, 멀리 보면 편입을 위해서라도)