#05-1. 수학적 귀납법

나정휘
https://justiceHui.github.io/

목차

페아노 공리계

자연수 집합을 정의하는 방법

- 자연수 x에 대해, $x = x$ 자연수의 동일성은 반사관계
- 자연수 x, y에 대해, $x = y$이면 $y = x$ 자연수의 동일성은 대칭관계
- 자연수 x, y, z에 대해, $x = y$이고 $y = z$이면 $x = z$ 자연수의 동일성은 추이관계
- 자연수 x에 대해, $x = y$이면 y도 자연수 자연수 집합은 동일성에 대해 닫혀 있음

- 1은 자연수
- 자연수 n에 대해, $S(n)$은 자연수 자연수 집합은 따름수 함수 S에 대해 닫혀 있음
  - 1은 자연수, 1의 다음 수인 2도 자연수, 2의 다음 수인 3도 자연수, …
- 자연수 n에 대해, $S(n) \neq 1$
- 자연수 n, m에 대해, $S(n) = S(m)$이면 $n = m$ S는 단사 함수
  - $\{1, S(1), S(S(1)), \cdots\}$는 서로 다른 원소로 이루어져 있으므로 자연수는 무한히 많음

- 1이 K의 원소이고, 자연수 n이 K의 원소일 때 $S(n)$이 K의 원소이면 K는 모든 자연수를 포함함
  - 수학적 귀납법: $P(1)$이 참이고, 임의의 자연수 n에 대해 $P(n)$이 참일 때 $P(n+1)$도 참이면 모든 자연수에서 참

수학적 귀납법

수학적 귀납법

- 자연수에 대한 명제 P(n)이 모든 자연수에 대해 참임을 증명
- 또는 어떤 정수 n_0에 대해, $n \geq n_0$을 만족하는 모든 n에 대해 P(n)은 참

- (기저 조건) $P(n_0)$이 참이다.
- (귀납 조건) $n \geq n_0$일 때 P(n)이 참이면 P(n+1)이 참이다.

- $n \geq n_0$인 모든 정수 n에 대해 P(n)은 참
  - $P(n_0) \Rightarrow P(n_0+1) \Rightarrow P(n_0+2) \Rightarrow P(n_0+3) \Rightarrow \cdots$

수학적 귀납법

강한 수학적 귀납법

- 자연수에 대한 명제 P(n)이 모든 자연수에 대해 참임을 증명
- 또는 어떤 정수 n_0에 대해, $n \geq n_0$을 만족하는 모든 n에 대해 P(n)은 참

- (기저 조건) $P(n_0)$이 참이다.
- (귀납 조건) $n \geq n_0$일 때 $P(n_0)$, $P(n_0+1)$, … , P(n)이 참이면 P(n+1)이 참이다.

- $n \geq n_0$인 모든 정수 n에 대해 P(n)은 참
  - $P(n_0) \Rightarrow P(n_0+1)$
  - $P(n_0), P(n_0+1) \Rightarrow P(n_0+2)$
  - $P(n_0), P(n_0+1), P(n_0+2) \Rightarrow P(n_0+3)$

수학적 귀납법

자연수의 정렬성 원리 (Well-ordering Principle)

- 자연수 집합 N의 부분집합 $S \neq \emptyset$는 항상 최소 원소를 찾는다.
- 대충 맞는 얘기인 것 같으니 넘어가자…

- 수학적 귀납법, 강한 수학적 귀납법, 정렬성 원리가 모두 서로 필요 충분 조건임을 보일 수 있음
  - 따라서 수학적 귀납법은 자연수 집합이 아니더라도 잘 정렬할 수 있는 집합에 대해 모두 사용할 수 있음
  - 정렬한 다음 순서대로 자연수를 배정한다고 생각하면 편함

- 귀류법을 엮어서 무한강하법을 사용할 수도 있음

질문?

수학적 귀납법의 예시

예시 1. 1이 아닌 모든 자연수는 소수 여러 개의 곱으로 표현할 수 있음

- (기저 조건) $n = 2$이면 $2 = 2$로 쓸 수 있음
- (귀납 조건) $2, 3, \cdots, n-1$을 소수 여러 개의 곱으로 표현할 수 있을 때 n도 가능함을 보이자.
  - n이 소수이면 그 소수 하나만 쓰면 됨
  - n이 합성수이면 2 이상 $n-1$ 이하의 약수 d를 찾을 수 있음
  - 귀납 가정에 의해 $2 \le d, n/d < n$는 소수의 곱으로 표현할 수 있으므로 두 결과를 곱하면 됨

수학적 귀납법의 예시

예시 2. $2^n \times 2^n$크기의 격자에서 한 칸을 제거한 것은 ㄴ 모양 타일로 채울 수 있음

- BOJ 14601. 샤워실 바닥 깔기 (Large)

- $n \geq 1$일 때 크기가 $2^{n-1} \times 2^{n-1}$인 한쪽 사분면을 제외한 나머지 부분을 ㄴ 모양 타일로 채울 수 있음
  - (기저 조건) $n = 1$이면 ㄴ 모양으로 3칸 비어 있으므로 그대로 넣으면 됨
  - (귀납 조건) $n \geq 2$이면 아래와 같이 $n - 1$짜리 형태 4개로 나눌 수 있고, 귀납 가정에 의해 각 조각을 채울 수 있음
    - XXAA
    - XXBA
    - CBBD
    - CCDD

- (기저 조건) $n = 0$이면 모든 칸이 채워져 있는 상태
- (귀납 조건) $n \geq 1$이면
  - 제거된 칸이 있는 사분면은 귀납 가정에 의해 채울 수 있고
  - 나머지 부분은 위에서 증명한 보조 정리에 의해 채울 수 있음

수학적 귀납법의 예시

예시 3

- $N \times N$ 격자에서 M칸은 검은색, 나머지는 흰색으로 칠해져 있음
- 가장 위에 있는 줄과 오른쪽에 있는 줄은 흰색으로 고정
- 나머지 칸들은 1초가 지날 때마다 (자기 자신), (한 칸 위), (한 칸 오른쪽) 중 더 많은 색으로 바뀜
- M초 후에 모든 칸이 흰색으로 바뀜

- (기저 조건) $M = 1$이면 자명하게 1초 뒤에 없어짐
- (귀납 조건) M칸이 M초 이내에 모두 없어진다고 할 때, $M + 1$칸은 $M + 1$초 이내에 모두 없어짐
  - 검은색 점의 좌표 중, x좌표의 최솟값을 x', y좌표의 최솟값을 y'이라고 하자
  - $x = x'$인 점들은 $x > x'$인 점에 영향을 미치지 못하고, $y = y'$인 점들도 $y > y'$인 점에 영향을 못 미침
  - 따라서 M초 뒤에 $x > x'$인 점은 모두 없어지고, 마찬가지로 $y > y'$인 점도 모두 없어짐
  - M초가 지난 이후에 검은색 점이 남아있을 수 있는 곳은 (x', y')이 유일하고, 이건 $M + 1$초에 없어짐

질문?