Centroid Decomposition

나정휘

https://justiceHui.github.io/

목차

- Prerequisites
- Motivation
- Centroid Decomposition
- Centroid Tree
- Convert to Binary Tree

Prerequisites

Prerequisites

- DFS
- Divide and Conquer

Prerequisites

- Divide and Conquer
  - 수열에 대한 분할 정복
    - 수열의 모든 연속한 부분 수열을 고려하는 문제
      - ex. 히스토그램에서 가장 큰 직사각형, 구간 합이 K인 연속 부분 수열의 개수, ...
    - 해결 방법
      - 구간 [l, r]의 중간 지점 m을 잡고
      - m을 포함하는 모든 부분 수열을 처리
      - 고려하지 않은 부분 수열은 [l, m-1] 또는 [m+1, r]에 속함
      - T(n) = 2T(n/2) + f(n)

Motivation

Motivation

- Divide and Conquer
  - 수열에서의 분할 정복이 효율적인 이유
    - 수열의 크기가 절반이 되도록 나눌 수 있음
    - $f(n) \in o(n^2)$이면 $T(n) = 2T(n/2) + f(n) \in o(n^2)$라서 $O(n^2)$보다 효율적
      - Big-O Notation과 Small-O Notation의 차이를 주의해야 함

  - 트리에서 모든 경로를 고려하는 문제
    - 트리에서도 분할 정복을 할 수 있을까?
    - 어떤 점을 기준으로 분할해야 하지?
    - 리프 정점은 어림도 없어 보이는데...
      - 1:n-1 분할
    - 루트 정점은 어떨까?
      - 루트의 차수가 1이라면...

Motivation

- Divide and Conquer
  - 트리에서의 분할 정복
    - 재귀 깊이가 O(log n)이 되도록 보장하는 방법?
    - 정점을 제거했을 때 모든 컴포넌트의 크기가 상수 배 이하가 되어야 함

- Centroid
  - 제거했을 때 모든 컴포넌트의 크기가 절반 이하가 되는 정점
  - 항상 존재할까?
  - 항상 존재한다면 어떻게 찾을 수 있을까?
  - ...
  - 를 알아봅시다.

질문?

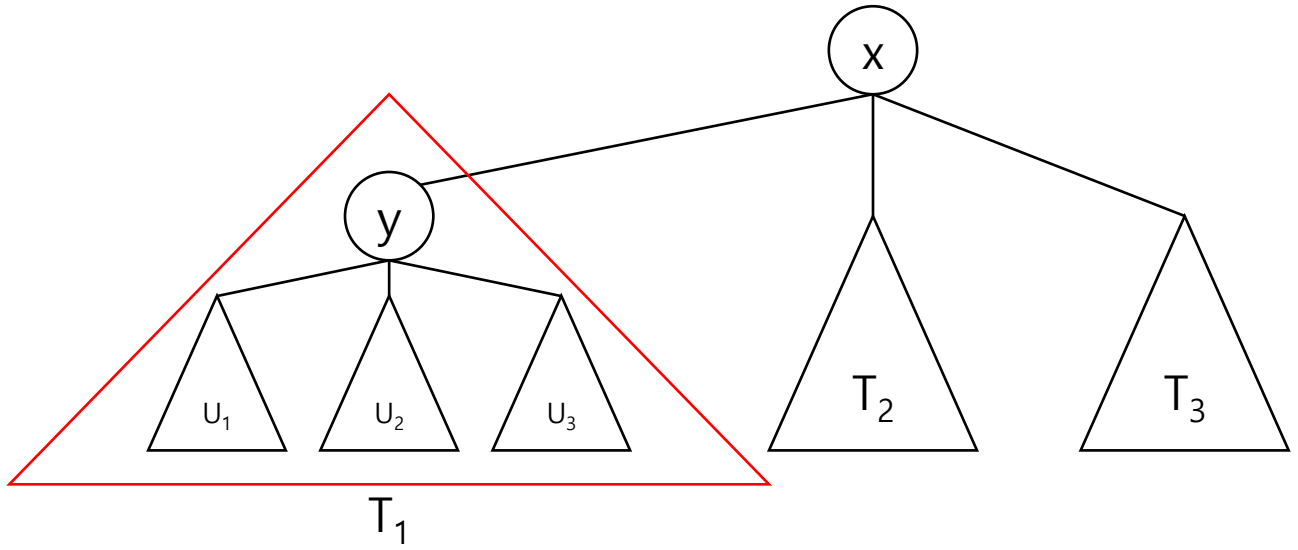
Centroid

Centroid

- Centroid
  - 제거했을 때 모든 컴포넌트의 크기가 원본 트리의 절반 이하가 되는 정점
    - max_size(v) := v를 제거했을 때 나눠지는 컴포넌트들의 크기 최댓값
    - max_size(v) ≤ n/2 이면 v는 센트로이드
  - Lemma 1. 트리에서 센트로이드는 항상 존재한다.
    - 센트로이드를 찾는 매우 간단한 알고리즘
  - Lemma 2. 센트로이드가 여러 개 존재한다면, 서로 인접한 위치에 존재한다.
    - 센트로이드는 최대 2개 존재

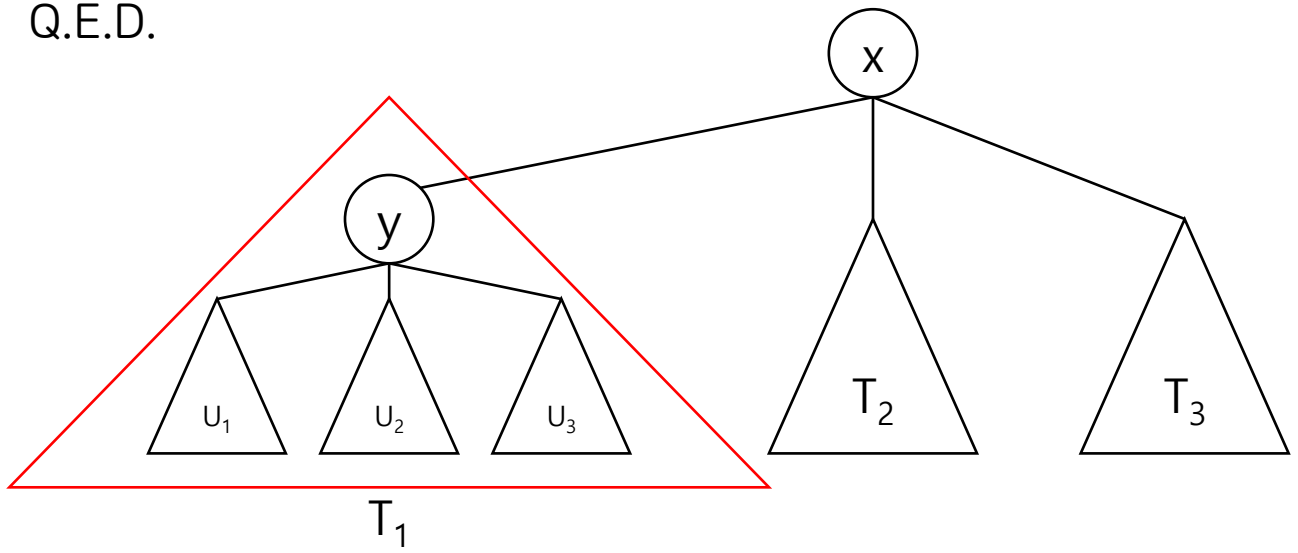
Centroid

- Centroid
  - Lemma 1. 트리에서 센트로이드는 항상 존재한다.
    - (귀류법) 센트로이드가 없는 크기 N짜리 트리 T가 있다고 하자.
    - T에서 max_size(v)가 최소인 정점을 x라고 하자.
    - 가정에 의해 x를 제거했을 때 쪼개지는 가장 큰 서브트리 T_1은 $|T_1| > N/2$를 만족함
    - T_1에 속하면서 x와 인접한 정점 y를 생각해 보자.



Centroid

- Centroid
  - Lemma 1. 트리에서 센트로이드는 항상 존재한다.
    - T_1에 속하면서 x와 인접한 정점 y를 생각해 보자.
    - $|T_1| > N/2$ 이므로 $|T - T_1| < N/2$를 만족함
    - y 밑에 있는 서브 트리 U_i들의 크기는 $|T_1|$ 보다 작음
    - 따라서 max_size(x) > max_size(y)
    - max_size(v)가 최소인 정점이 x라는 가정이 모순이므로 트리에는 항상 센트로이드가 존재
    - Q.E.D.



Centroid

- Centroid
  - Corollary 1. 아래 알고리즘은 항상 센트로이드를 찾는다.

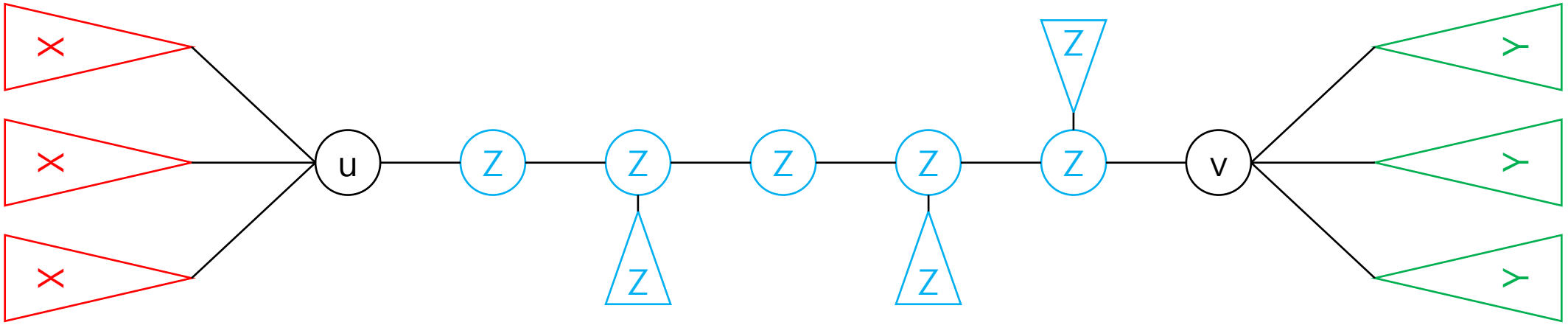
```cpp
vector<int> g[SZ]; // adjacent list
int size[SZ];

void getSize(int v, int b=-1){
    size[v] = 1;
    for(auto i : g[v]) if(i != b) size[v] += getSize(i, v);
    return size[v];
}

int getCent(int v, int sz=n, int b=-1){
    for(auto i : g[v]){
        if(i != b && size[i] * 2 > sz) return getCent(i, sz, v);
    }
    return v;
}
```

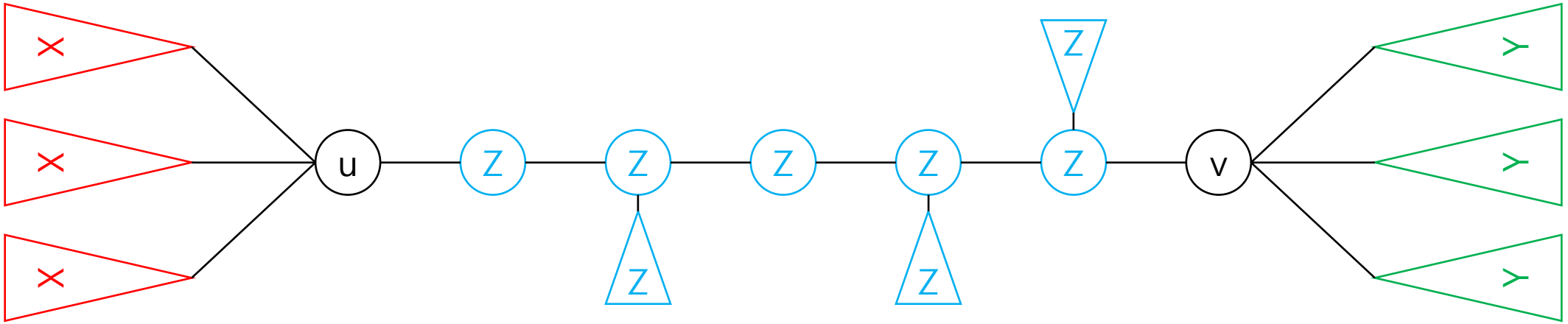
Centroid

- Centroid
  - Lemma 2. 센트로이드가 여러 개 존재한다면, 서로 인접한 위치에 존재한다.
    - 트리의 두 센트로이드를 u, v라고 하자.
    - u를 루트라고 할 때, 다음을 정의하자.
      - X[i] = u의 자식 정점을 루트로 하는 서브 트리의 크기, 단 v를 포함하는 서브 트리는 제외
      - Y[i] = v의 자식 정점을 루트로 하는 서브 트리의 크기
      - Z = X, Y, u, v에 포함되지 않은 다른 모든 정점들의 개수



Centroid

- Centroid
  - Lemma 2. 센트로이드가 여러 개 존재한다면, 서로 인접한 위치에 존재한다.
    - N개의 정점으로 구성된 트리이므로 X + Y + Z + 2 = N
    - u가 센트로이드이므로 Y + Z + 1 ≤ N/2
    - v가 센트로이드이므로 X + Z + 1 ≤ N/2
    - 두 식을 연립하면 X + Y + 2Z + 1 = N + Z ≤ N
    - Z ≥ 0이므로 Z = 0일 때만 부등식이 성립
    - 따라서 u와 v는 인접한 위치에 있어야 함
    - Q.E.D.



Centroid

- Centroid
  - Corollary 2. 센트로이드는 1개 또는 2개 존재한다.
    - 센트로이드는 항상 존재하므로 1개 이상 있음
    - 센트로이드가 3개 이상이면 인접하지 않은 두 정점이 존재하므로 2개 이하로 존재

Centroid

- 정리
  - 센트로이드: 제거했을 때 모든 컴포넌트의 크기를 n/2 이하로 만드는 정점
  - 센트로이드는 DFS를 이용해 쉽게 구할 수 있음
  - 센트로이드는 1개 또는 2개 존재
  - 센트로이드가 2개 존재한다면 두 정점은 인접함

질문?

Centroid Decomposition

Centroid Decomposition

- BOJ 5820 경주 (IOI'11 D1P2 Race)
  - 간선의 가중치가 양수인 트리
  - 길이가 정확히 K ($\leq 10^6$)인 인 경로의 최소 간선 개수를 구하는 문제

  - 수열에서는 어떻게 풀까?
    - S[i] = A[1] + ... + A[i]
    - 0 ≤ i < j ≤ N이면서 S[j] – S[i] = K를 만족하는 j – i의 최솟값을 구해야 함

    - 중간 지점 m 고정, m을 포함하는 모든 구간을 고려
    - j = m, m+1, ..., r을 보면서
    - S[l..m-1] 에서 S[i] = S[j] – K 인 i의 최댓값을 구하면 됨
    - K ≤ 10^6 임을 이용하면 T(n) = 2T(n/2) + O(n) = O(n log n)에 해결 가능
      - C[x] = S[l..m-1] 에서 가장 뒤에 있는 x의 위치, x ≤ K 인 것만 기록

Centroid Decomposition

- BOJ 5820 경주 (IOI'11 D1P2 Race)
  - 센트로이드 c를 잡아서, c를 지나는 모든 경로를 처리하자.
    - 다른 경로는 c를 제거해서 생기는 컴포넌트들에 대해 재귀적으로 처리하면 됨

    - D[x] : c에서 x까지의 거리, DFS를 이용해 O(n)에 구할 수 있음
    - D[u] + D[v] = K를 만족하면서 서로 다른 서브 트리에 속하는 u, v를 모두 확인하면 됨

    - V[x] : c와의 거리가 x인 최소 깊이 ($x \le K$, 각 서브 트리마다 DFS로 전처리)
    - 다른 서브 트리에서 c와 K- x 만큼 떨어진 정점이 있다면
    - (현재 정점의 깊이) + (c와 K-x 만큼 떨어진 정점의 최소 깊이)로 정답 갱신

    - 센트로이드가 고정되었을 때 O(N), 전체 O(N log N)에 해결할 수 있음

Centroid Decomposition

- BOJ 5820 경주 (IOI'11 D1P2 Race)
  - 구현 팁
    - 센트로이드 자체도 하나의 서브 트리로 취급하면 편함
    - 서브 트리의 정보를 병합하는 방식으로 구현
      - T_1: 이미 처리한 서브 트리들의 정보를 모두 합친 것
      - T_2: 이번에 처리하는 서브 트리
      - T_1과 T_2에서 각각 정점을 하나씩 뽑은 경로를 고려
      - 이후 T_2의 정보를 T_1에 더함
      - 아직 처리하지 않은 서브 트리 T_2를 잡고 반복

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
constexpr int INF = 0x3f3f3f3f;

int N, K, R = INF, S[202020], U[202020], V[1010101];
vector<pair<int,int>> G[202020];
vector<int> Used;

int GetSize(int v, int b=-1){
    S[v] = 1;
    for(auto [i,w] : G[v]) if(i != b && !U[i]) S[v] += GetSize(i, v);
    return S[v];
}

int GetCent(int v, int sz, int b=-1){
    for(auto [i,w] : G[v]) if(i != b && !U[i] && S[i]*2 > sz) return GetCent(i, sz, v);
    return v;
}

void Update(int v, int b, int dst, int dep){
    if(dst > K) return;
    V[dst] = min(V[dst], dep); Used.push_back(dst);
    for(auto [i,w] : G[v]) if(i != b && !U[i]) Update(i, v, dst+w, dep+1);
}

void Apply(int v, int b, int dst, int dep){
    if(dst > K) return;
    R = min(R, V[K-dst] + dep);
    for(auto [i,w] : G[v]) if(i != b && !U[i]) Apply(i, v, dst+w, dep+1);
}

void Solve(int v){
    v = GetCent(v, GetSize(v));
    U[v] = 1; V[0] = 0; Used.push_back(0);
    for(auto [i,w] : G[v]) if(!U[i]) Apply(i, v, w, 1), Update(i, v, w, 1);
    for(auto i : Used) V[i] = INF; Used.clear();
    for(auto [i,w] : G[v]) if(!U[i]) Solve(i);
}

int main(){
    ios_base::sync_with_stdio(false); cin.tie(nullptr);
    cin >> N >> K;
    for(int i=1,u,v,w; i<N; i++){
        cin >> u >> v >> w; u++; v++;
        G[u].emplace_back(v, w);
        G[v].emplace_back(u, w);
    }
    memset(V, 0x3f, sizeof V);
    Solve(1);
    cout << (R < INF ? R : -1);
}
```

질문?

Centroid Tree

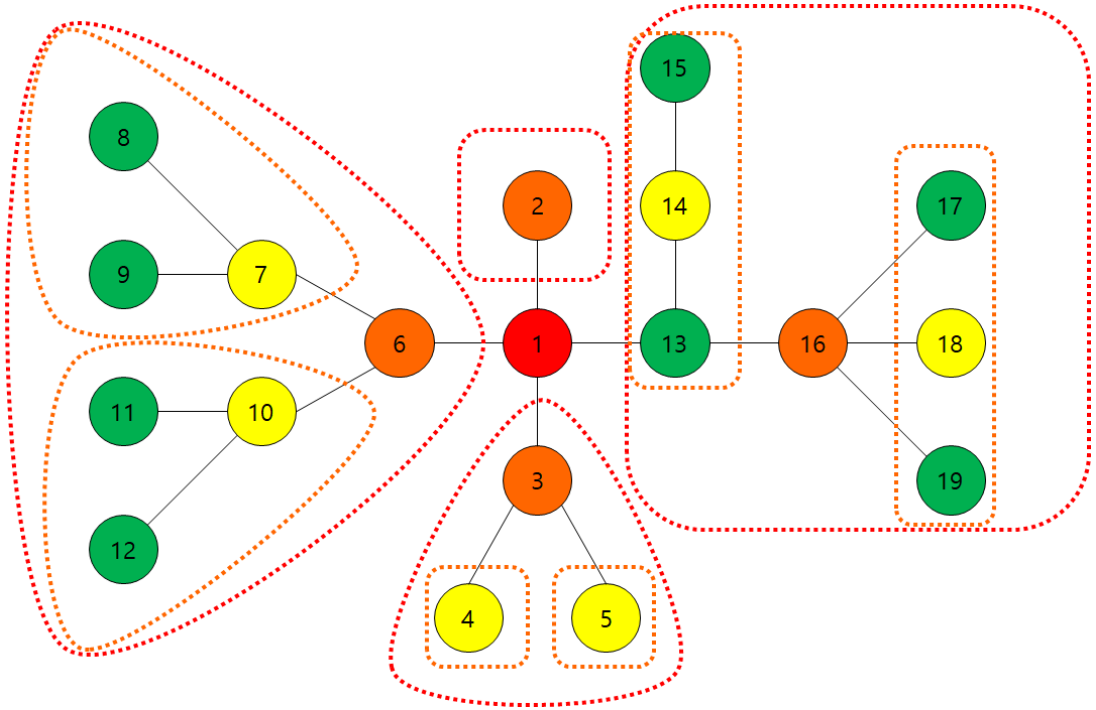
Centroid Tree

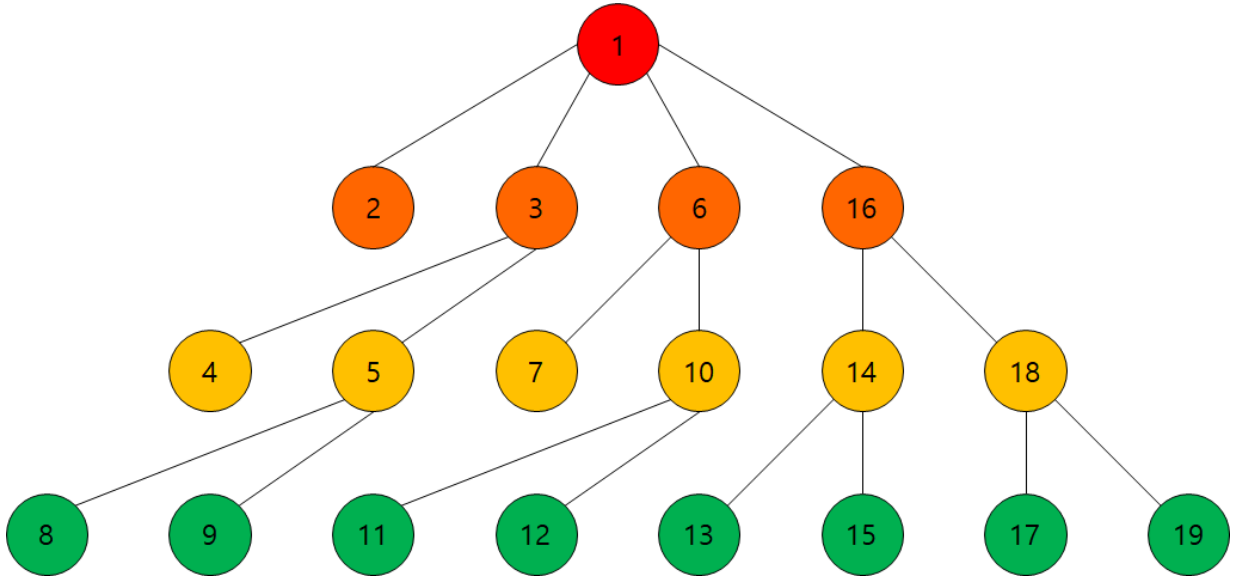
- Centroid Tree
  - 이진 탐색 트리: 이진 탐색 과정을 트리로 나타낸 것
  - 머지 소트 트리: 합병 정렬 과정을 트리로 나타낸 것
  - 세그먼트 트리: 분할 정복 과정을 트리로 나타낸 것
  - 센트로이드 트리: ???

Centroid Tree

- Centroid Tree
  - 이진 탐색 트리: 이진 탐색 과정을 트리로 나타낸 것
  - 머지 소트 트리: 합병 정렬 과정을 트리로 나타낸 것
  - 세그먼트 트리: 분할 정복 과정을 트리로 나타낸 것
  - 센트로이드 트리: 센트로이드 분할 과정을 트리로 나타낸 것

Centroid Tree





Centroid Tree

- Centroid Tree
  - 트리의 높이는 O(log N)
    - 매번 크기가 절반 이하로 감소
  - 원본 트리의 u – v 경로는 센트로이드 트리에서의 LCA(u, v)에 의해 2개로 분할됨
    - p = LCA_c(u, v)라고 하면, u – p 경로와 p – v 경로에 중복 정점이 없음 (p 제외)
  - 센트로이드 트리에서 v의 조상을 P_1, …, P_k라고 하면 v에서 출발하는 경로를 k개의 그룹으로 나눌 수 있음
    - P_1을 지나는 경로, P_2를 지나는 경로, …
    - 센트로이드 트리의 각 정점마다 서브 트리에 있는 정점들의 정보를 저장하면
    - 어떤 정점 v를 지나는 모든 경로를 고려하는 대신 v의 조상 정점(k ≤ log N 개)의 서브 트리만 확인하면 됨

Centroid Tree

- BOJ 13514 트리와 쿼리 5
  - 1 v: 정점 v의 색을 바꾸는 쿼리 (흰색/검은색)
  - 2 v: v와 가장 가까운 흰색 정점의 거리를 구하는 문제

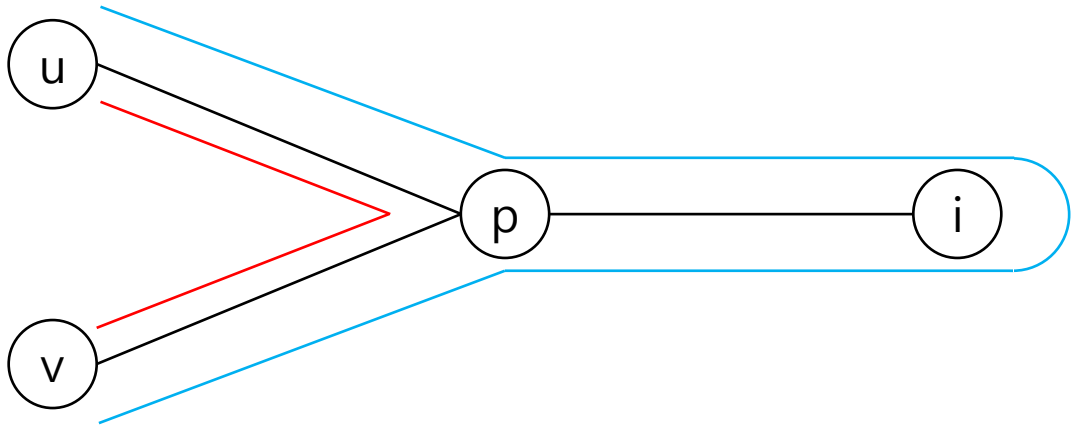
  - v에서 출발하는 모든 경로를 확인하는 대신, 센트로이드 트리에서 v의 조상을 확인
    - 센트로이드 트리의 각 정점에서 multiset을 관리하자.
    - S[i] : i를 루트로 하는 서브 트리에 있는 흰색 정점까지의 거리
      - 거리는 원본 트리 상에서의 거리, LCA로 구할 수 있음

    - 센트로이드 트리에서 v의 조상을 보면서, Dist(v, i) + *S[i].begin() 의 최솟값을 구하면 됨

Centroid Tree

- BOJ 13514 트리와 쿼리 5
  - multiset의 원소를 확인할 때 서로 다른 서브 트리에서 왔는지 확인해야 할까?
    - 최솟값을 구하는 문제이므로 확인할 필요 없음
    - 같은 서브 트리에서 왔다면 Dist(i에서 가장 가까운 정점, v) > Dist(v, i) + *S[i].begin()

    - 만약 최댓값을 구하는 문제라면 서로 다른 서브 트리에서 왔는지 확인해야 함



Centroid Tree

```
void Build(int v, int b=-1){
    v = GetCent(v, GetSize(v));
    U[v] = 1; CP[v] = b;
    for(auto i : G[v]) if(!U[i]) Build(i, v);
}

void Update(int v){
    A[v] ^= 1;
    for(int i=v; i!=-1; i=CP[i]){
        if(A[v]) ST[i].emplace(Dist(v, i), v);
        else ST[i].erase(make_pair(Dist(v, i), v));
    }
}

int Query(int v){
    int res = INF;
    for(int i=v; i!=-1; i=CP[i]) if(!ST[i].empty()) res = min(res, Dist(v, i) + ST[i].begin()->first);
    return res < INF ? res : -1;
}
```

Centroid Tree

- BOJ 13513 트리와 쿼리 4
  - 가장 먼 두 흰색 정점의 거리를 구하는 문제
    - v의 조상 정점을 루트로 하는 서브 트리의 정점들을 볼 때
    - v와 다른 곳에서 유래한 정점만 확인해야 함

  - S1[i] = i를 루트로 하는 서브 트리에 속한 정점들의 거리
  - S2[i] = i의 자식을 루트로 하는 서브 트리에서 가장 멀리 있는 정점들을 모은 것
    - S1[c_1]의 최댓값, S1[c_2]의 최댓값, … , i
    - 어떤 자식 정점 밑에 있는 건지 함께 저장

    - S2[i]에서 가장 큰 값 / 두 번째로 큰 값만 보면 됨

질문?

Convert to Binary Tree

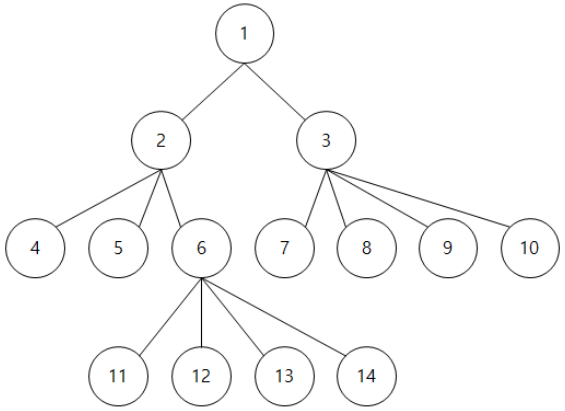
Convert to Binary Tree

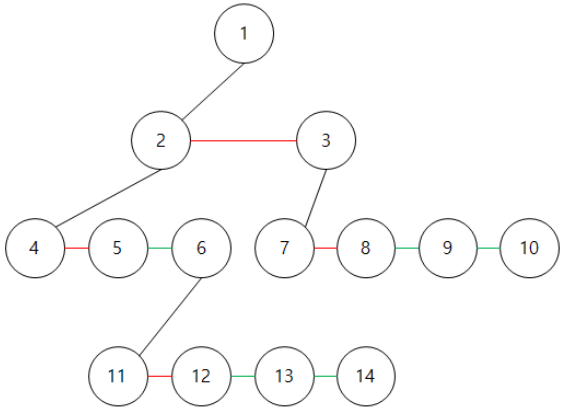
- Convert to Binary Tree
  - 이진 트리의 장점
    - 모든 정점의 차수가 3 이하
    - 센트로이드 분할 과정에서 $O(deg^2)$ 만큼의 시간이 걸려도 상수로 취급할 수 있음
      - for(auto i : G[v]) for(auto j : G[v])
        if(!U[i] && !V[i]) f(i, j);

Convert to Binary Tree

- Convert to Binary Tree
  - 모든 트리는 N-1개의 정점을 추가해서 조상-자손 관계가 동일한 이진 트리로 바꿀 수 있음

  - 트리를 표현하는 방법
    - 계층 구조
      - 그래프의 인접 리스트로 표현
    - left child right sibling
      - 한 포인터는 가장 왼쪽 자식, 다른 포인터는 오른쪽 형제

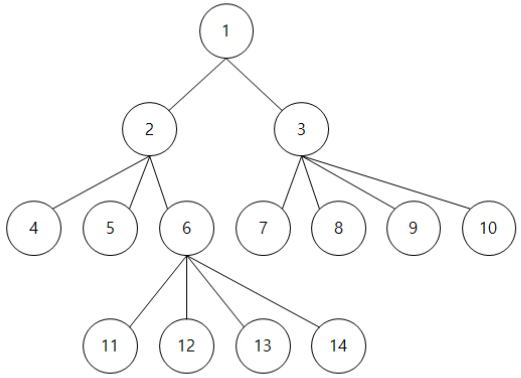


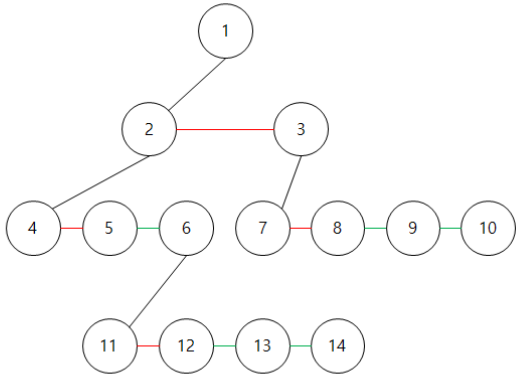


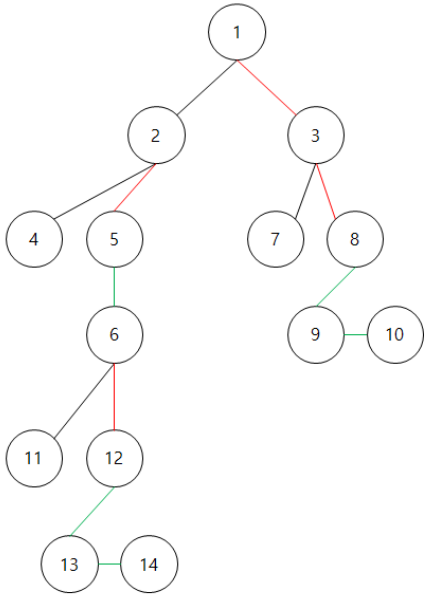
Convert to Binary Tree

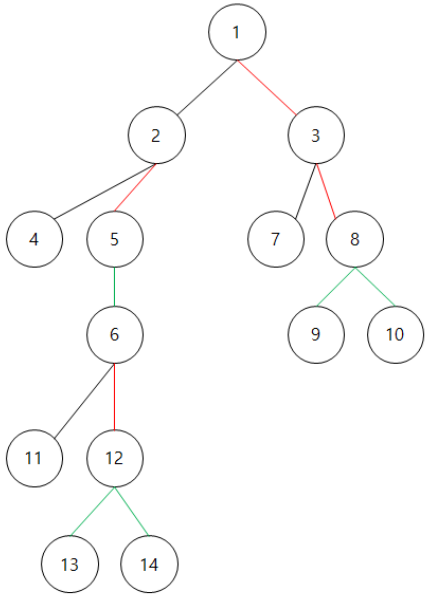
- Convert to Binary Tree
  - left child right sibling
    - 초록색 간선(두 번째 자식 이후 오른쪽 간선)을 형제 정점의 자식으로 넣어도 조상-자손 관계 유지

    - 형제 관계는 어떻게 유지할 수 있을까?
    - 거리는 어떻게 유지할 수 있을까?



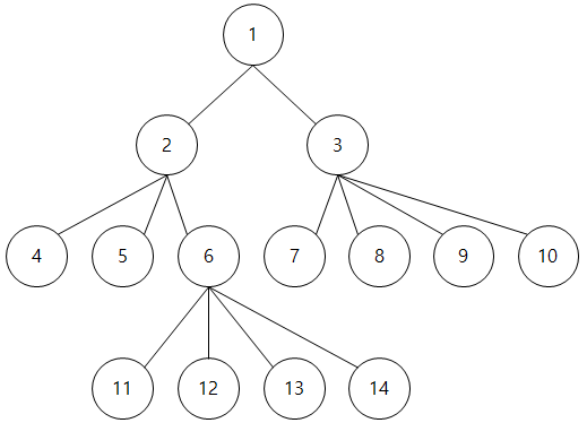


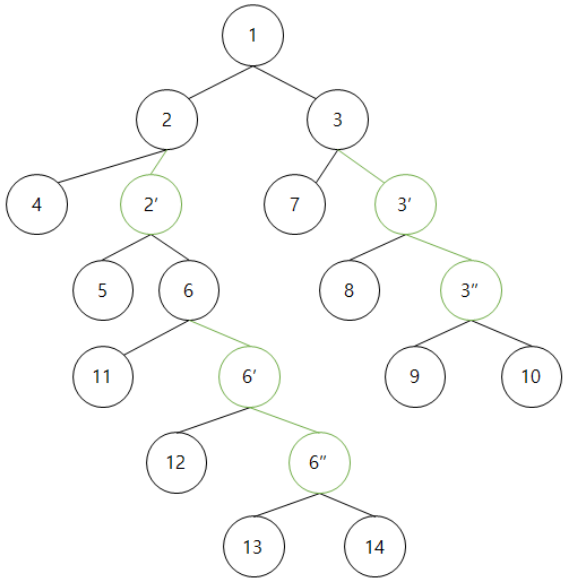




Convert to Binary Tree

- Convert to Binary Tree
  - 형제 관계/거리 유지
    - right sibling 간선을 밑으로 내릴 때마다 더미 정점 추가
    - 더미 정점은 최대 N-1개 추가됨
    - 연두색 간선 가중치 0으로 하면 거리 관계 유지 가능





Convert to Binary Tree

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

int N;
vector<pair<int,int>> Inp[101010], G[202020];

// original vertex, virtual vertex, back, adjacent list idx
void make_binary(int ori=1, int vir=1, int b=-1, int idx=0){
    for(int x=idx; x<Inp[ori].size(); x++){
        auto [i,w] = Inp[ori][x]; if(i == b) continue;
        if(G[vir].empty() || x+1 == Inp[ori].size() || x+2 == Inp[ori].size() && Inp[ori][x+1].first == b){
            G[vir].emplace_back(i, w);
            make_binary(i, i, ori);
            G[i].emplace_back(vir, w);
            continue;
        }
        int nxt = ++N;
        G[vir].emplace_back(nxt, 0);
        make_binary(ori, N, b, x);
        G[nxt].emplace_back(vir, 0);
        break;
    }
}
```

질문?

Convert to Binary Tree

- BOJ 17969 Gene Tree (2019 ICPC Seoul Regional B)
  - 모든 리프 정점 쌍에 대해, 거리 제곱의 합을 구하는 문제
  - 이진 트리만 주어지므로 굳이 바꿀 필요는 없음
    - BOJ 16121 사무실 이전 문제는 이진 트리로 바꾸면 똑같은 문제

  - 센트로이드 c를 지나는 경로를 모두 처리하자.
    - 두 서브 트리 A, B에서 리프 정점을 하나씩 골라서 경로를 만들었을 때 거리 제곱의 합
      - a1 = A의 리프 정점 깊이 합
      - a2 = A의 리프 정점 깊이 제곱 합
      - a3 = A의 리프 정점 개수
      - b1, b2, b3도 똑같이 정의하면
      - 정답은 (a3 * b2) + (b3 * a2) + 2 * a1 * b1 만큼 증가
    - c와 인접한 모든 정점 쌍(≤ 6가지) 모두 고려해도 됨

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
using ll = long long;

struct Info{
    ll s1, s2, cnt;
    Info() : Info(0, 0, 0) {}
    Info(ll v) : Info(v, v*v, 1) {}
    Info(ll s1, ll s2, ll cnt) : s1(s1), s2(s2), cnt(cnt) {}
    ll calc(const Info &t) const { return cnt * t.s2 + t.cnt * s2 + 2 * s1 * t.s1; }
    Info& operator += (const Info &t) { s1 += t.s1; s2 += t.s2; cnt += t.cnt; return *this; }
    Info operator + (const Info &t) const { return Info(*this) += t; }
};

int N, S[101010], U[101010]; ll R;
vector<pair<ll,ll>> G[101010];

int GetSize(int v, int b=-1){
    S[v] = 1;
    for(auto [i,w] : G[v]) if(i != b && !U[i]) S[v] += GetSize(i, v);
    return S[v];
}

int GetCent(int v, int sz, int b=-1){
    for(auto [i,w] : G[v]) if(i != b && !U[i] && S[i]*2 > sz) return GetCent(i, sz, v);
    return v;
}

Info DFS(int v, int b, int d){
    Info res;
    if(G[v].size() == 1) res += d;
    for(auto [i,w] : G[v]) if(i != b && !U[i]) res += DFS(i, v, d + w);
    return res;
}

void Solve(int v){
    v = GetCent(v, GetSize(v)); U[v] = 1;
    vector<Info> ch;
    if(G[v].size() == 1) ch.emplace_back(0);
    for(auto [i,w] : G[v]) if(!U[i]) ch.push_back(DFS(i, -1, w));
    for(int i=0; i<ch.size(); i++) for(int j=0; j<i; j++) R += ch[i].calc(ch[j]);
    for(auto [i,w] : G[v]) if(!U[i]) Solve(i);
}

int main(){
    ios_base::sync_with_stdio(false); cin.tie(nullptr);
    cin >> N;
    for(int i=1,s,e,w; i<N; i++) cin >> s >> e >> w, G[s].emplace_back(e, w), G[e].emplace_back(s, w);
    Solve(1);
    cout << R;
}
```

질문?