#11-4. 최소 신장 트리

나정휘
https://justiceHui.github.io/

최소 신장 트리

용어 정의

- 부분 그래프(Subgraph) : 그래프의 정점과 간선의 일부를 선택해서 만든 그래프
- 신장 부분 그래프(Spanning ~) : 그래프의 모든 정점을 포함하는 부분 그래프
- 신장 포레스트(Spanning Forest) : 사이클이 없는 신장 부분 그래프
- 신장 트리(Spanning Tree) : 모든 정점이 연결된 신장 포레스트
- 최소 비용 신장 트리(Minimum ~) : 간선의 가중치의 합이 최소인 신장 트리

최소 신장 트리

최소 신장 트리 (Minimum Spanning Tree)

- 그래프가 주어지면 최소 신장 트리를 구하는 알고리즘
- = 최소 비용으로 모든 정점을 연결하는 비용을 구하는 알고리즘

- 여러 가지 알고리즘이 있음
  - Prim’s Algorithm (V^2, E log V, E + V log V 등)
  - Kruskal’s Algorithm (E log E)
  - Boruvka’s Algorithm (E log V, 이건 설명 안 함)
    - Sollin’s Algorithm이라고 부르기도 함

Prim’s Algorithm

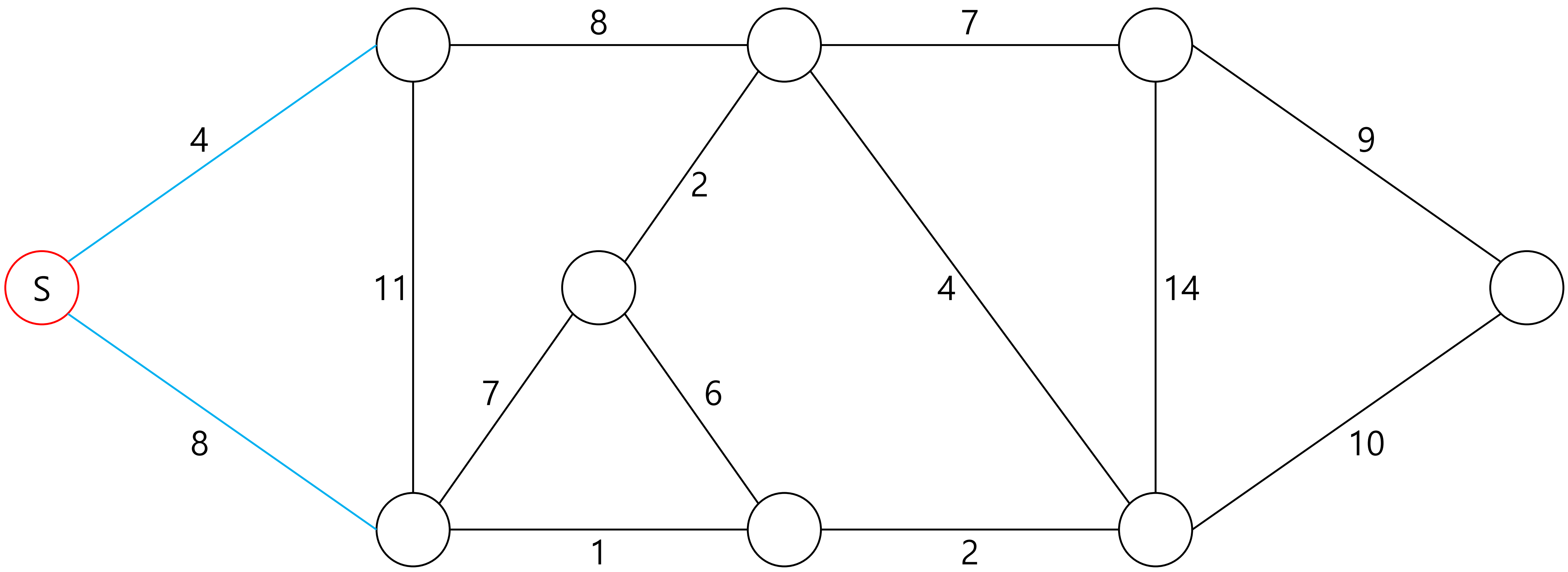
Prim’s Algorithm

- 시간 복잡도: $O(V^2)$ / $O(E \log E)$ / $O(E + V \log V)$

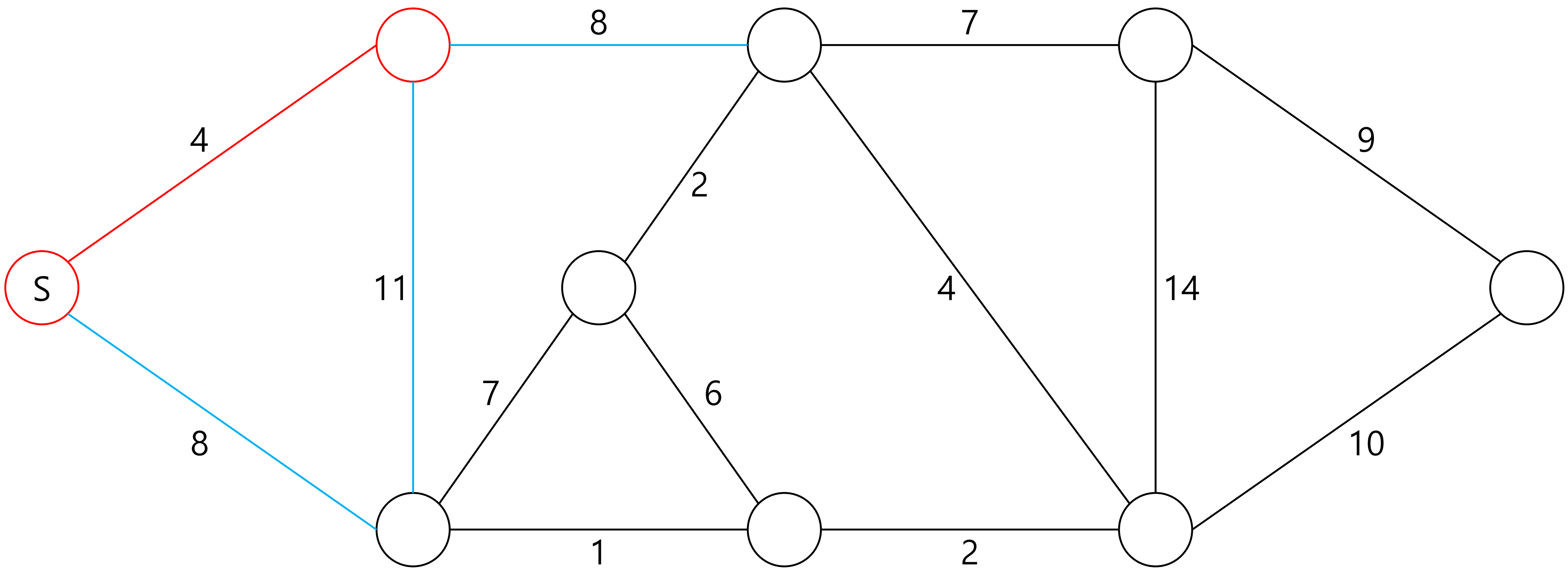
- Spanning Tree에 정점을 하나씩 포함시키면서 확장하는 방식으로 진행

- 그리디 기반 알고리즘
  1. 시작점(S)을 MST에 넣음
  2. 현재 MST에 있는 정점에서 뻗어 나가는 간선 중 가중치가 가장 작은 간선(e) 선택
  3. 만약 MST에 e를 추가할 수 있다면(사이클이 생기지 않는다면) e를 MST에 추가
     - 사이클 판별은 e = (u, v)에서 u와 v가 이미 MST에 포함되었는지 확인하면 됨

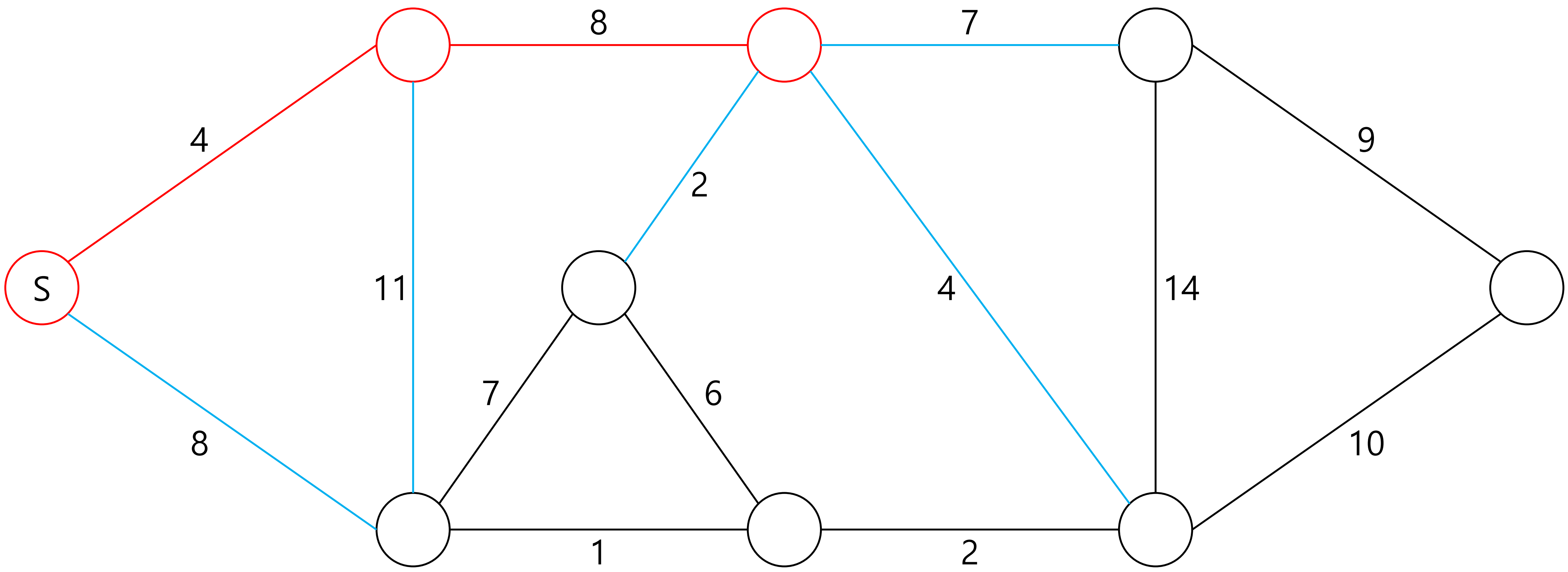
Prim’s Algorithm



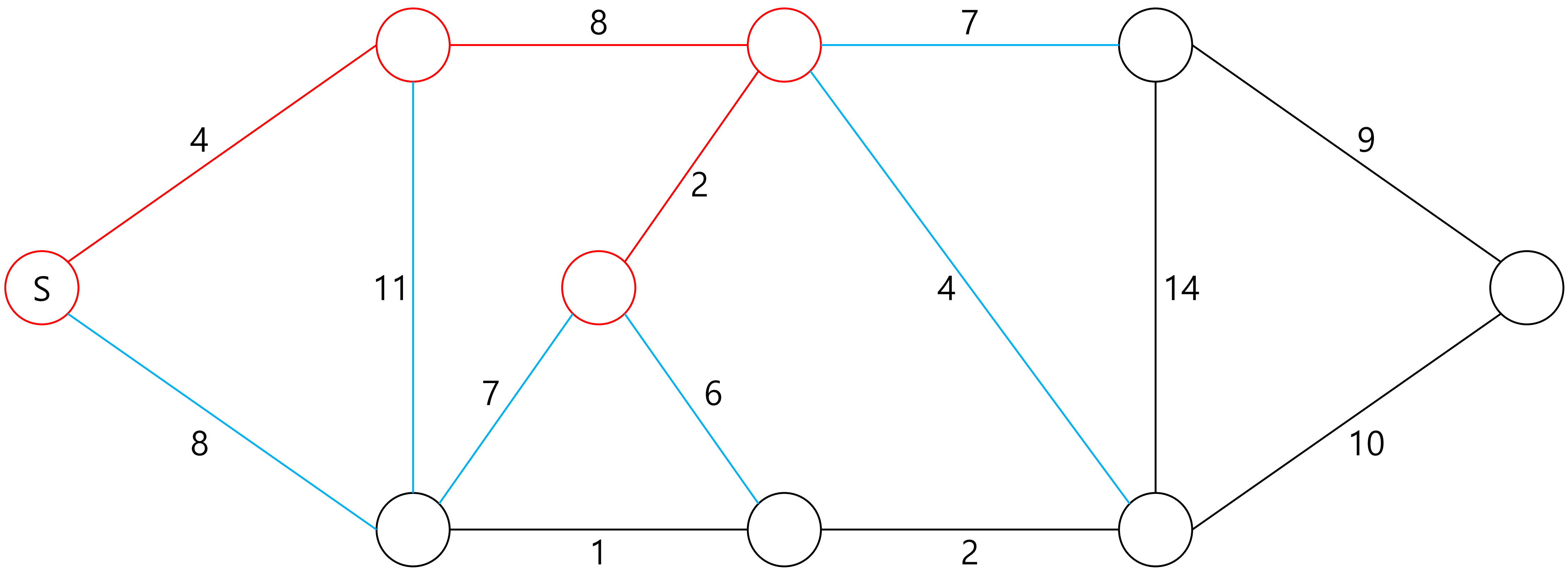
Prim’s Algorithm



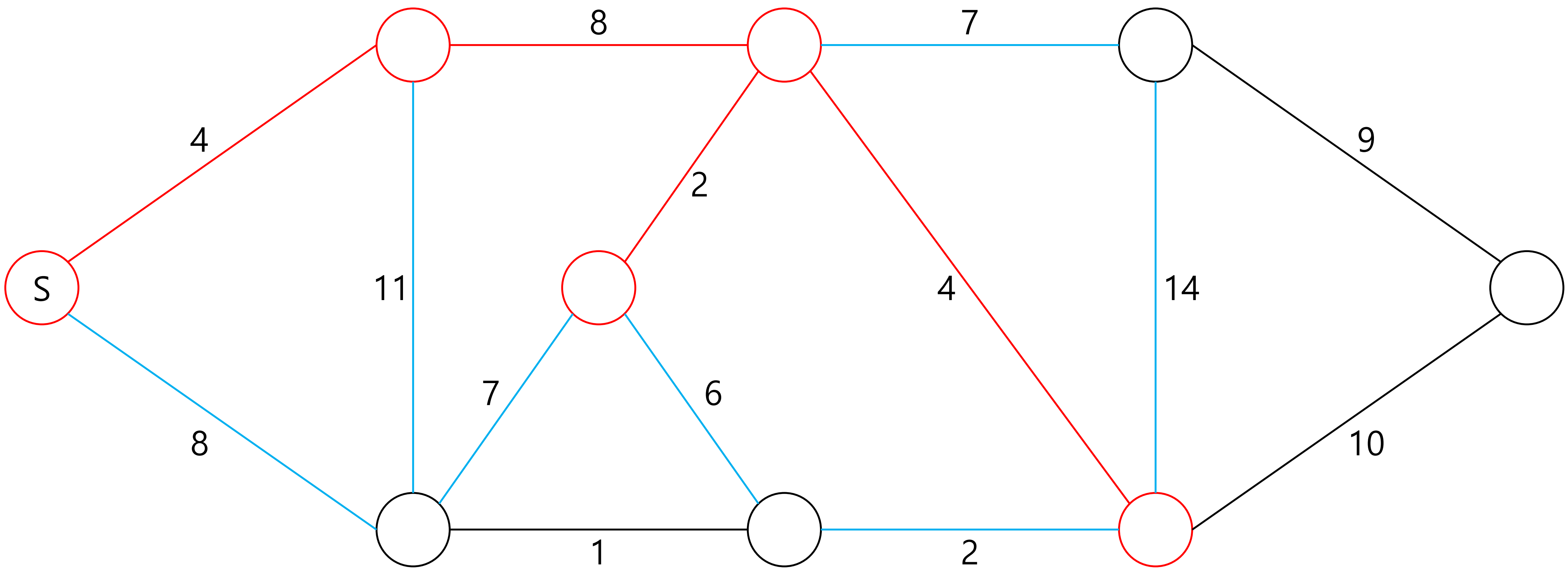
Prim’s Algorithm



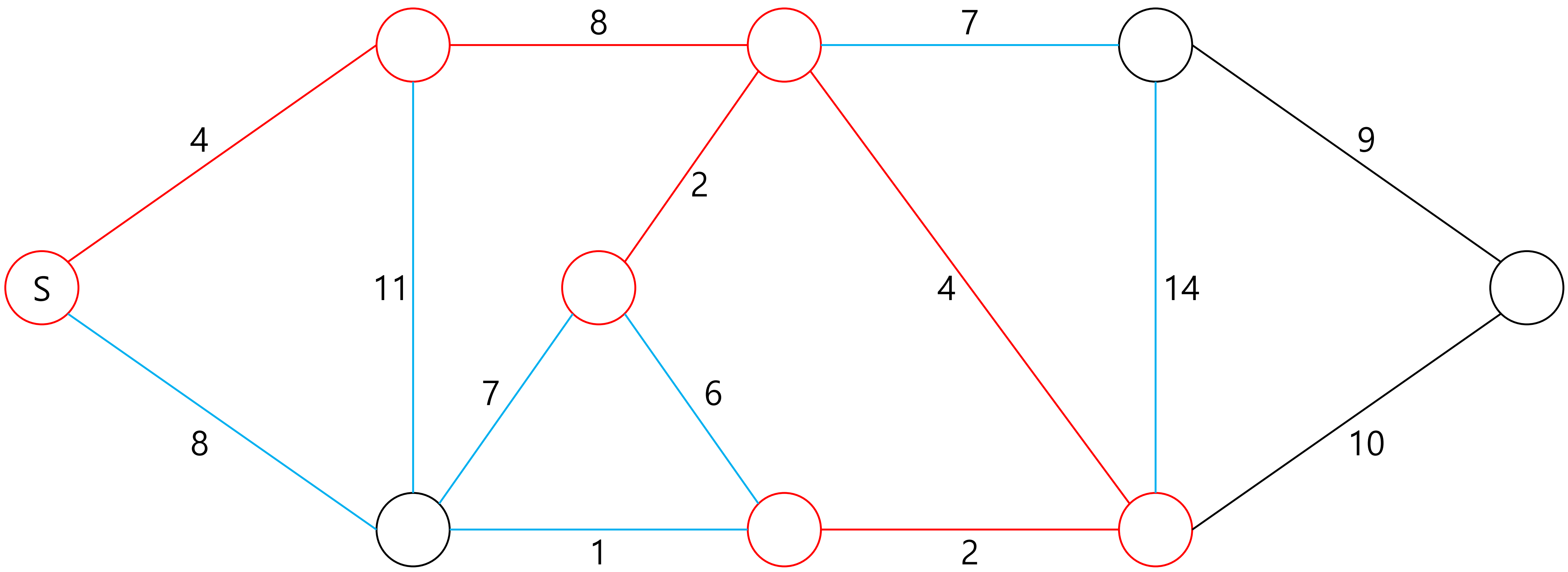
Prim's Algorithm



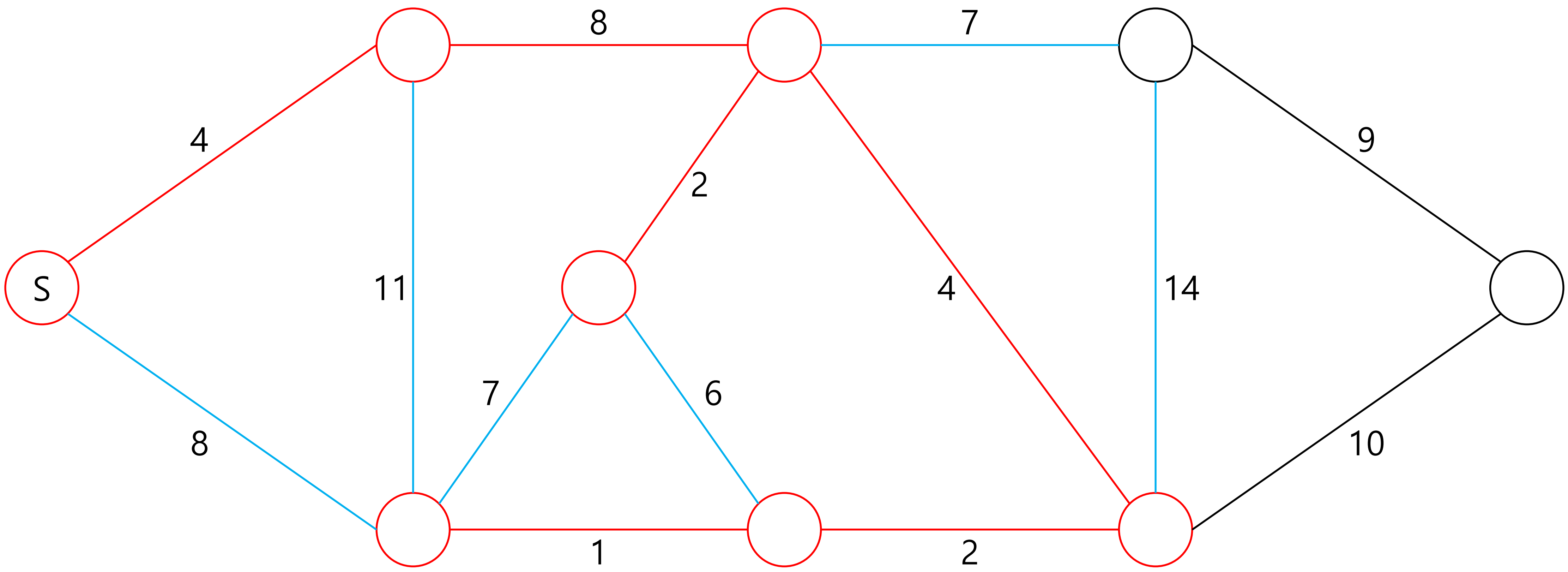
Prim's Algorithm



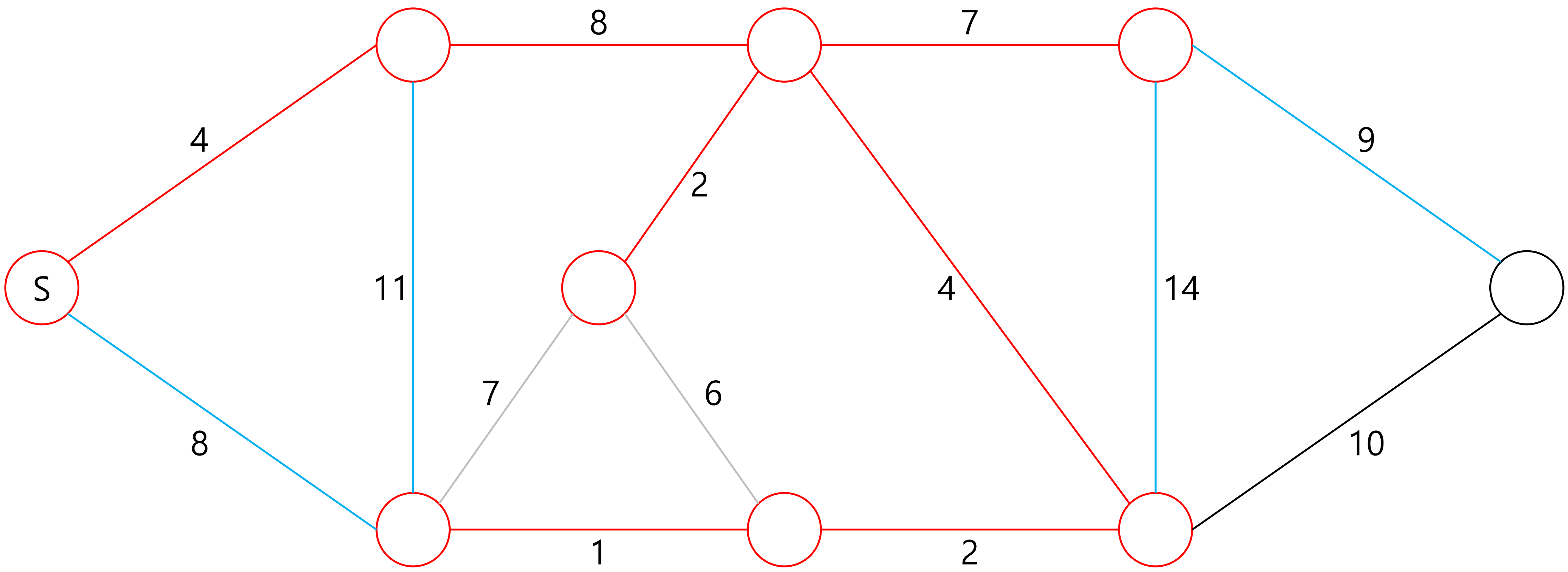
Prim's Algorithm



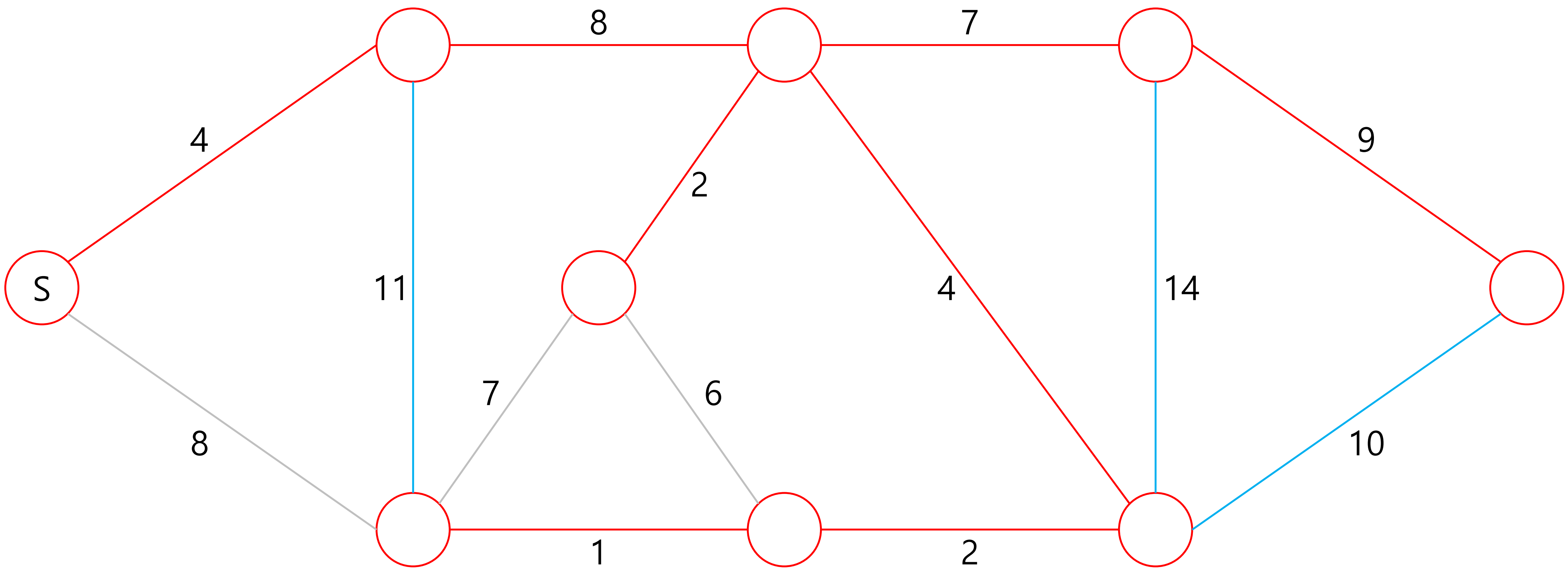
Prim's Algorithm



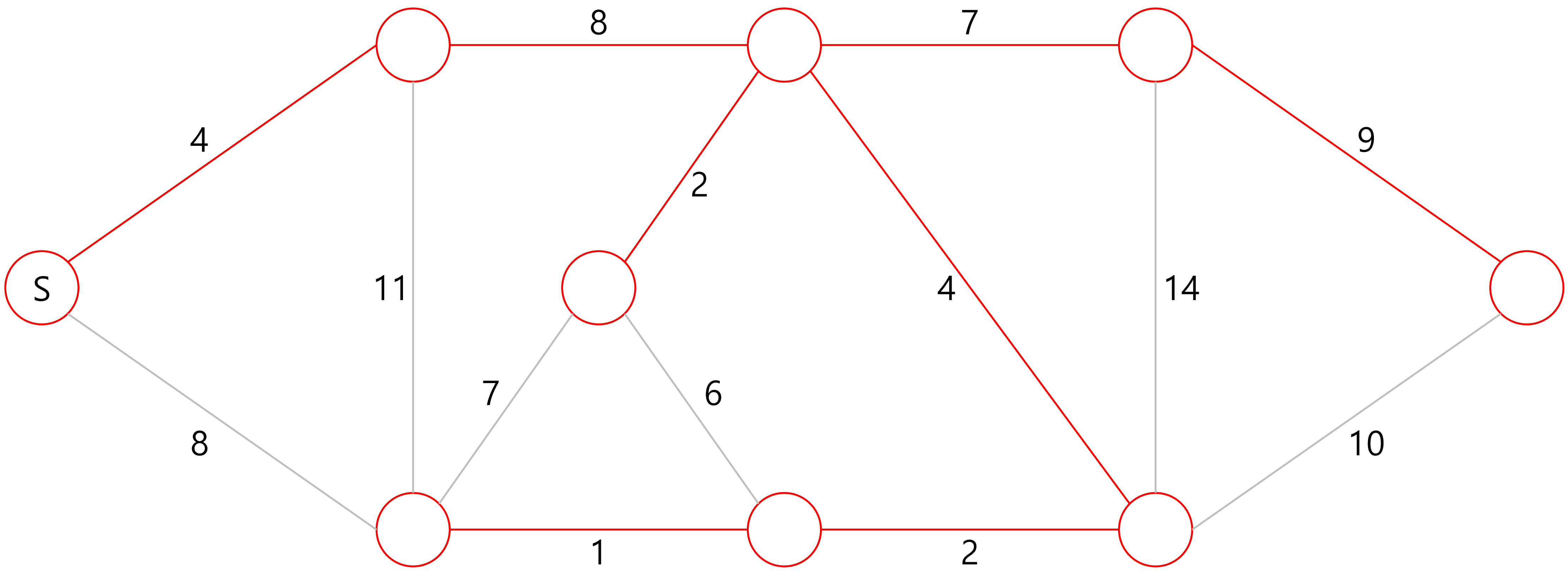
Prim's Algorithm



Prim’s Algorithm



Prim’s Algorithm



Prim’s Algorithm

```cpp
using PII = pair<int, int>;
int N, M, C[10101], D[10101];
vector<PII> G[10101];

int Prim(){
    int ret = 0;
    for(int i=1; i<=N; i++) D[i] = 1e9;            // D[i]: i번 정점을 MST에 추가하기 위해 필요한 비용
    D[1] = 0;
    for(int iter=1; iter<=N; iter++){
        int v = -1;
        for(int i=1; i<=N; i++){
            if(C[i]) continue;                     // 이미 MST에 포함된 정점 스킵
            if(v == -1 || D[v] > D[i]) v = i;
        }
        C[v] = 1; ret += D[v];                     // MST에 간선 추가
        for(auto [i,w] : G[v]) D[i] = min(D[i], w); // v에서 나가는 간선 정보 반영
    }
    return ret;
}
```

Prim’s Algorithm

정당성 증명

- 수학적 귀납법을 사용해 증명
  - 현재까지 만든 포레스트 F를 포함하는 최소 스패닝 트리 T가 존재할 때
  - F와 V-F를 연결하는 최소 간선 e를 추가한 F+e를 포함하는 최소 스패닝 트리 T’이 존재함을 증명

  - 만약 e가 T에 포함되면 T’ = T이다.
  - 그렇지 않은 경우, T+e는 e를 포함하는 단순 사이클 C를 갖는다.
  - 이때 C는 F+e에 속하지 않으면서 F와 V-F를 연결하는 간선 f를 갖는다.
  - e는 F와 V-F를 연결하는 최소 간선이므로 f의 가중치는 e보다 크거나 같아야 한다.
  - 단순 사이클에서 간선 하나를 끊어낸 T-f+e는 트리가 되고, 이것의 가중치는 T 이하이므로
  - T’ = T-f+e는 F+e를 포함하는 최소 스패닝 트리이다.

질문?

Prim's Algorithm

시간 복잡도

- V번의 iteration
  - MST에 포함되지 않은 정점 중 비용이 최소인 정점 찾기 : O(V)
  - v에서 갈 수 있는 정점들의 거리 갱신 : O(deg(v))
- O(sum(V + deg(i))) = O(V^2 + E) = O(V^2)
  - Handshaking Lemma : sum(deg(i)) = 2E

- v에서 뻗어 나가는 간선은 모두 봐야 하므로 O(deg(v))가 하한임
- 비용이 최소인 정점을 빠르게 찾을 수 있을까?
  - Min Heap!

Prim’s Algorithm

```cpp
int Prim(){
    int ret = 0;
    priority_queue<PII, vector<PII>, greater<>> pq; // {거리, 정점} pair를 저장하는 min-heap
    C[1] = 1;                                       // 시작점 S = 1은 MST에 포함
    for(auto [i,w] : G[1]) pq.emplace(w, i);        // S에서 나가는 간선들 Heap에 추가
    while(!pq.empty()){
        auto [c,v] = pq.top(); pq.pop();            // 비용이 가장 작은 정점 v 구함
        if(C[v]) continue;                          // heap에 같은 정점이 여러 번 들어갈 수 있으니 주의
        C[v] = 1; ret += c;                         // MST에 추가
        for(auto [i,w] : G[v]) pq.emplace(w, i);    // v에서 나가는 간선 정보 반영
    }
    return ret;
}
```

Prim’s Algorithm

시간 복잡도

- 각 간선을 한 번씩 보기 때문에 거리 갱신은 최대 O(E)번 발생
- Heap에 원소 O(E)번 삽입
- Heap의 크기는 최대 O(E)이므로 시간 복잡도는 O(E log E)

참고

- 각 정점마다 Heap에 원소가 최대 한 개 존재하도록 구현하면 O(E log V)
- Heap의 decrease key 연산을 O(1)에 구현하면 O(E + V log V)도 가능 (Fibonacci Heap, Thin Heap)
  - 몰라도 됨

질문?

Kruskal’s Algorithm

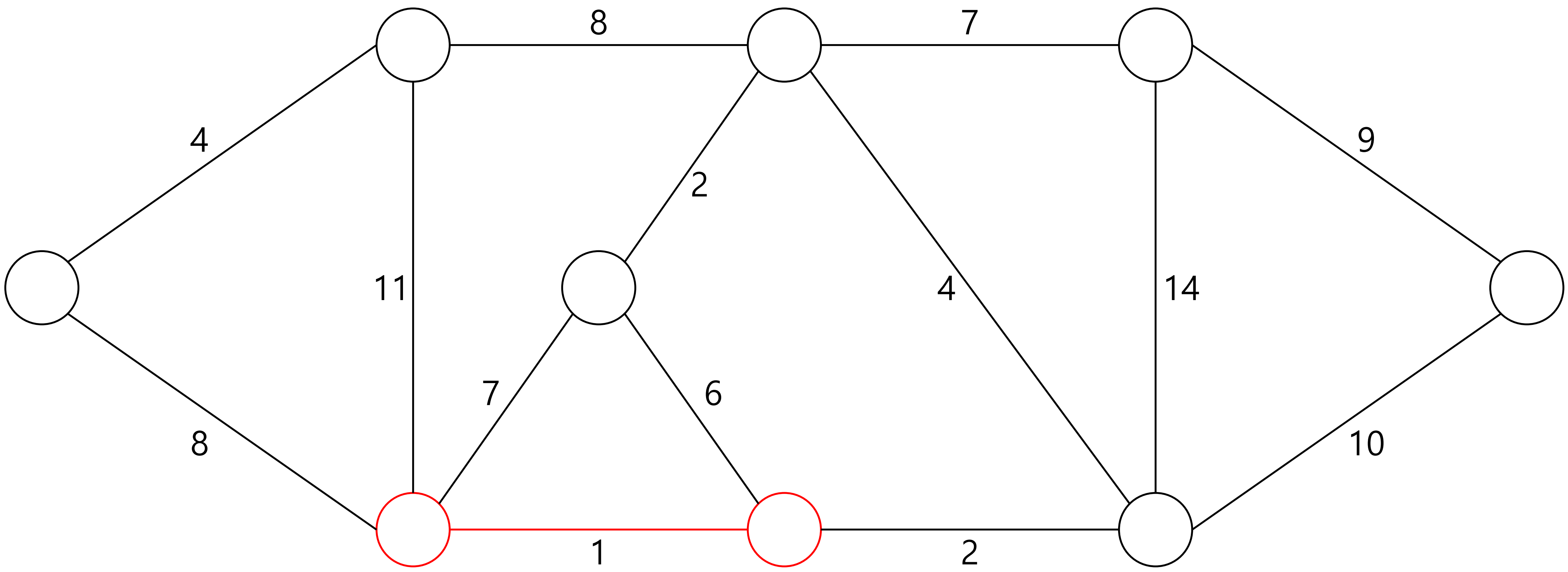
Kruskal’s Algorithm

- 시간 복잡도 : O(E log E)

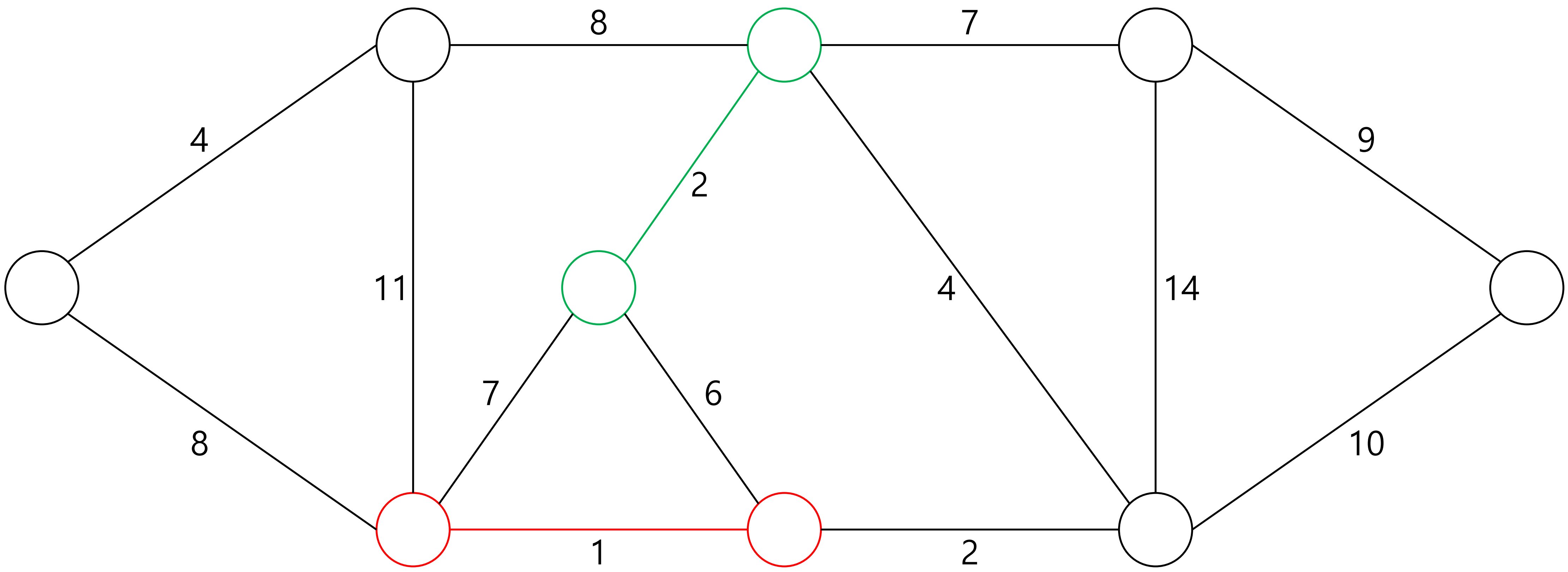
- Spanning Tree에 간선을 하나씩 포함시키는 방식

- 그리디 기반 알고리즘
  1. 모든 간선을 가중치 오름차순으로 정렬
  2. 가중치가 작은 간선부터 보면서, 사이클이 생기지 않는다면 해당 간선을 MST에 추가
     - Prim’s Algorithm과 다르게 알고리즘 진행 도중 트리가 여러 개 있을 수 있음
     - e = (u, v)에서 u와 v가 같은 트리에 있는지 확인해야 함 → Union-Find

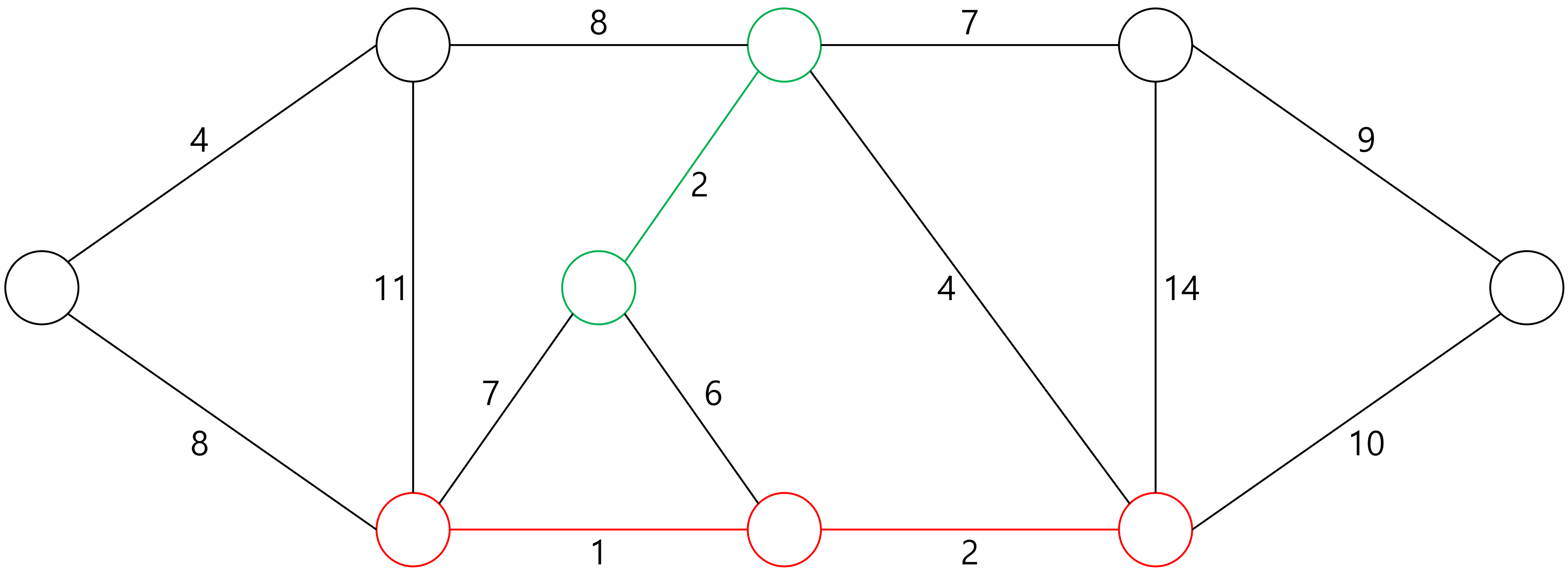
Kruskal's Algorithm



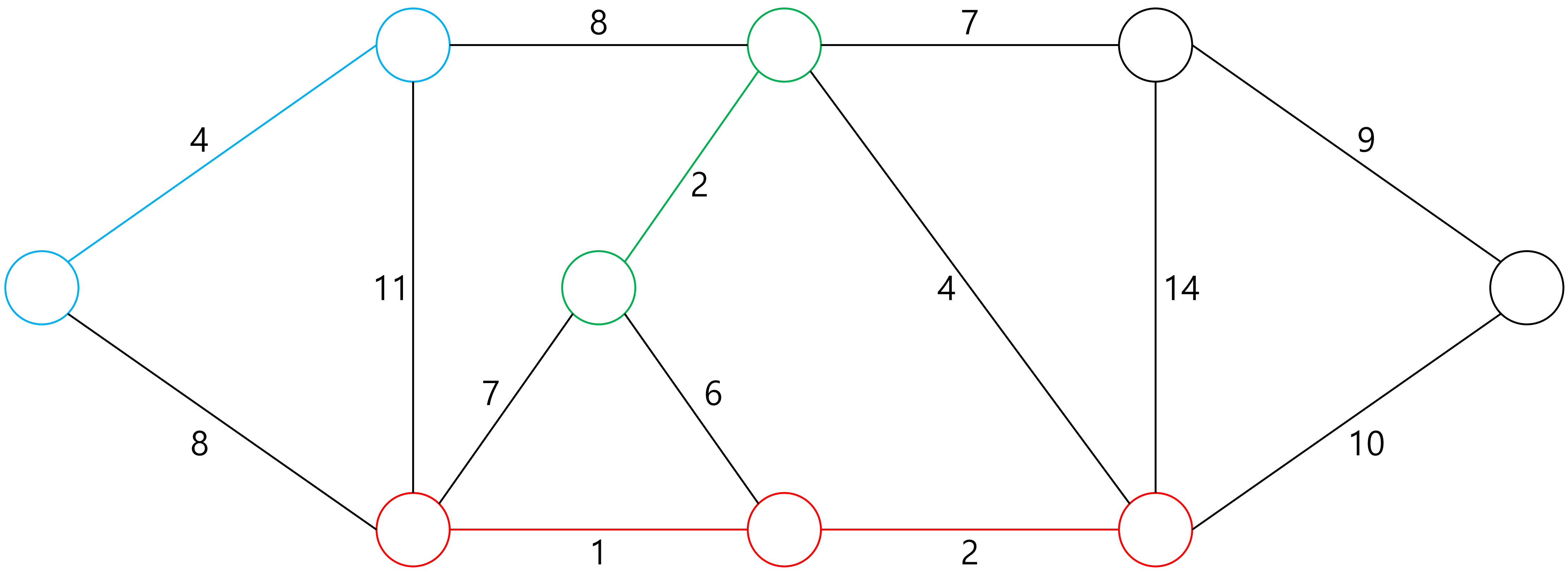
Kruskal’s Algorithm



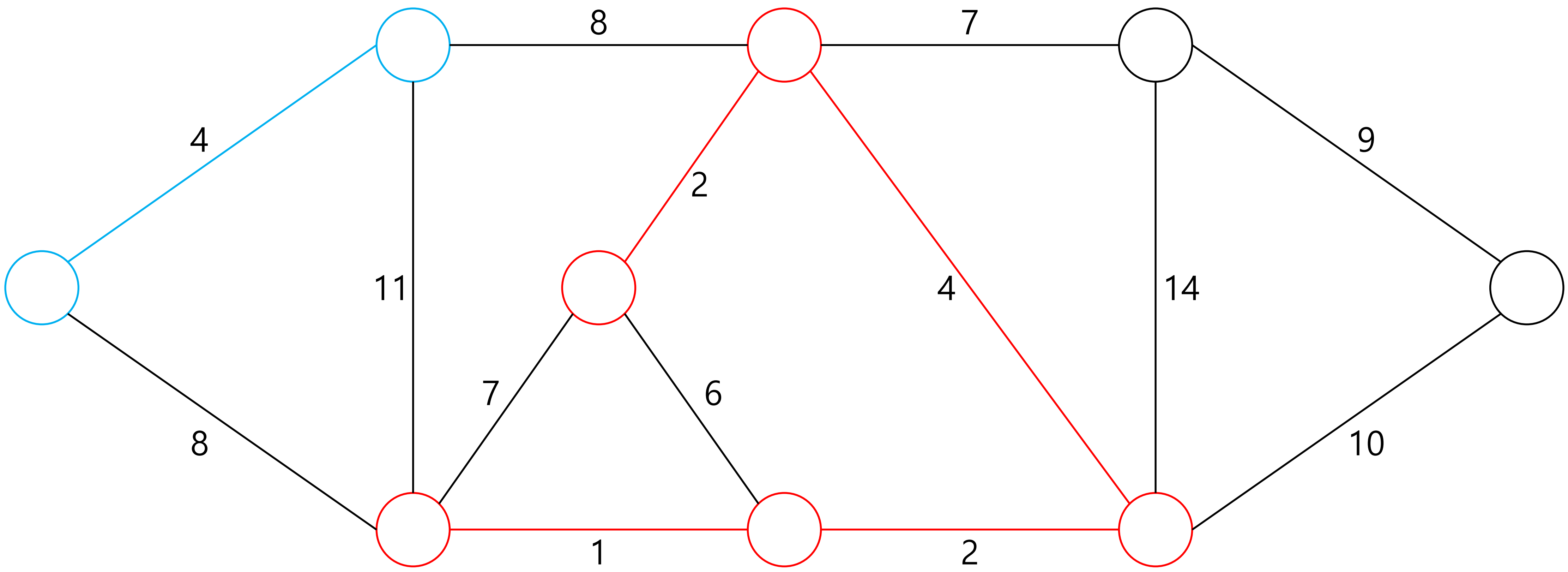
Kruskal’s Algorithm



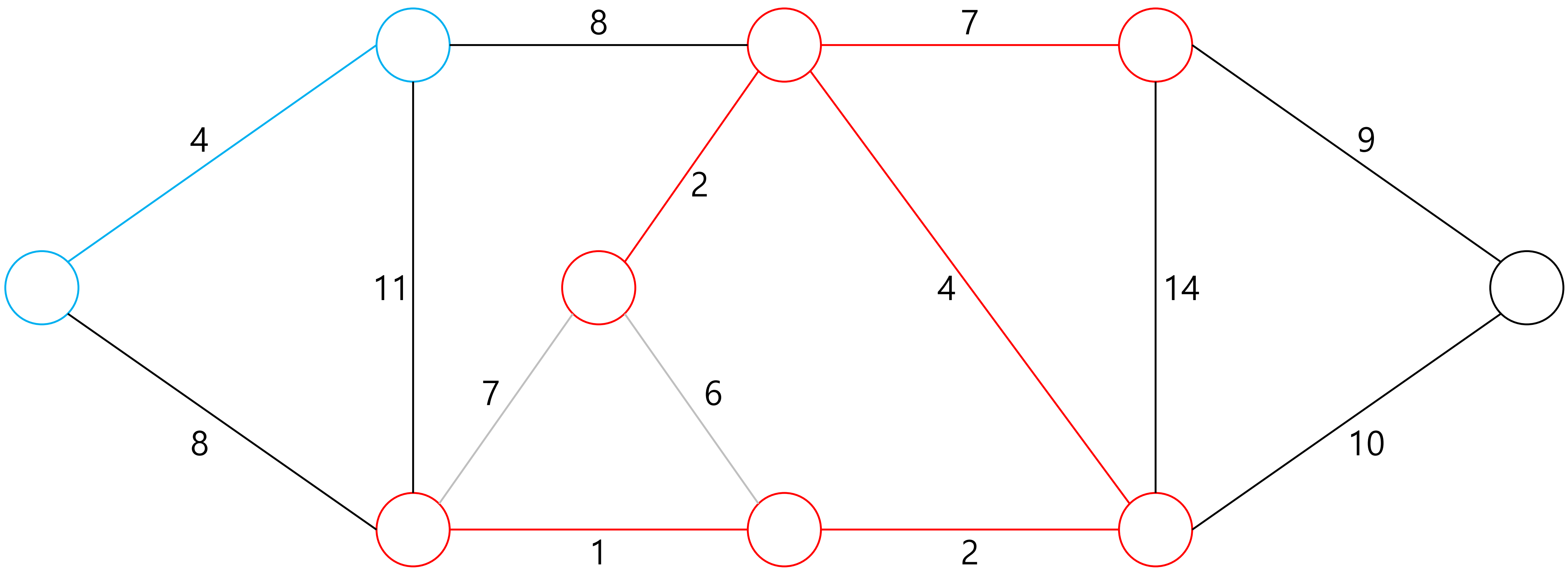
Kruskal's Algorithm



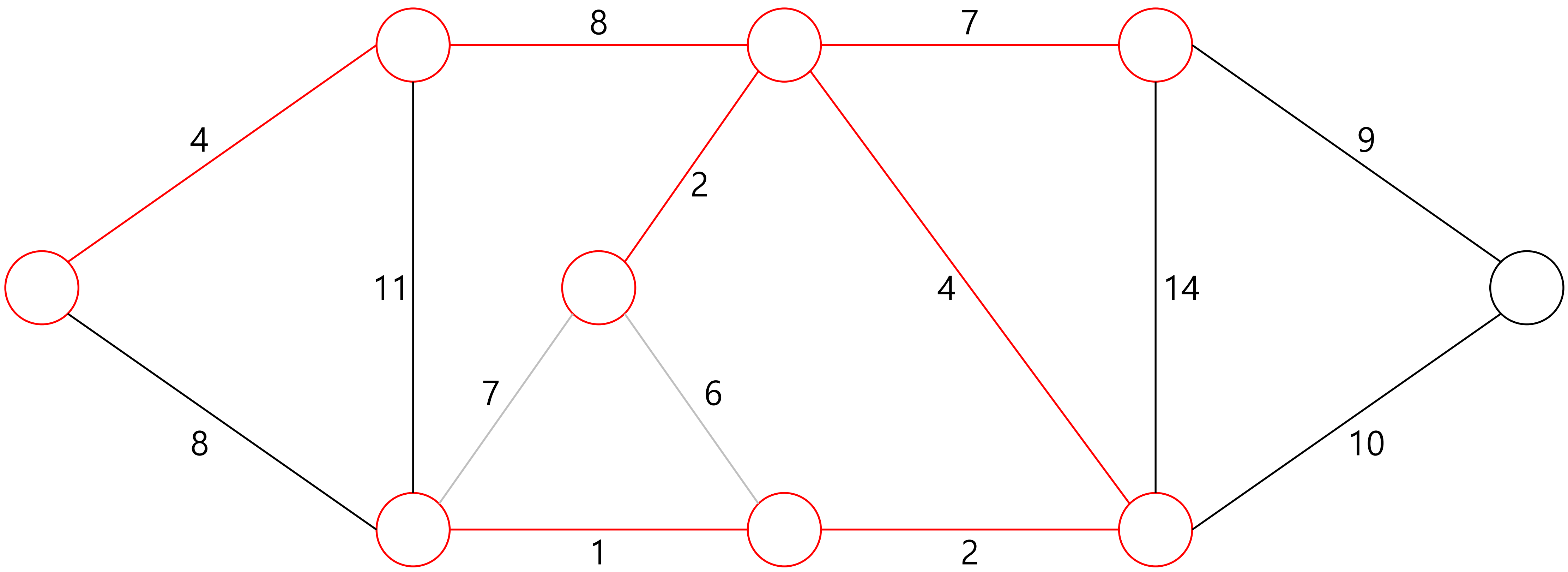
Kruskal's Algorithm



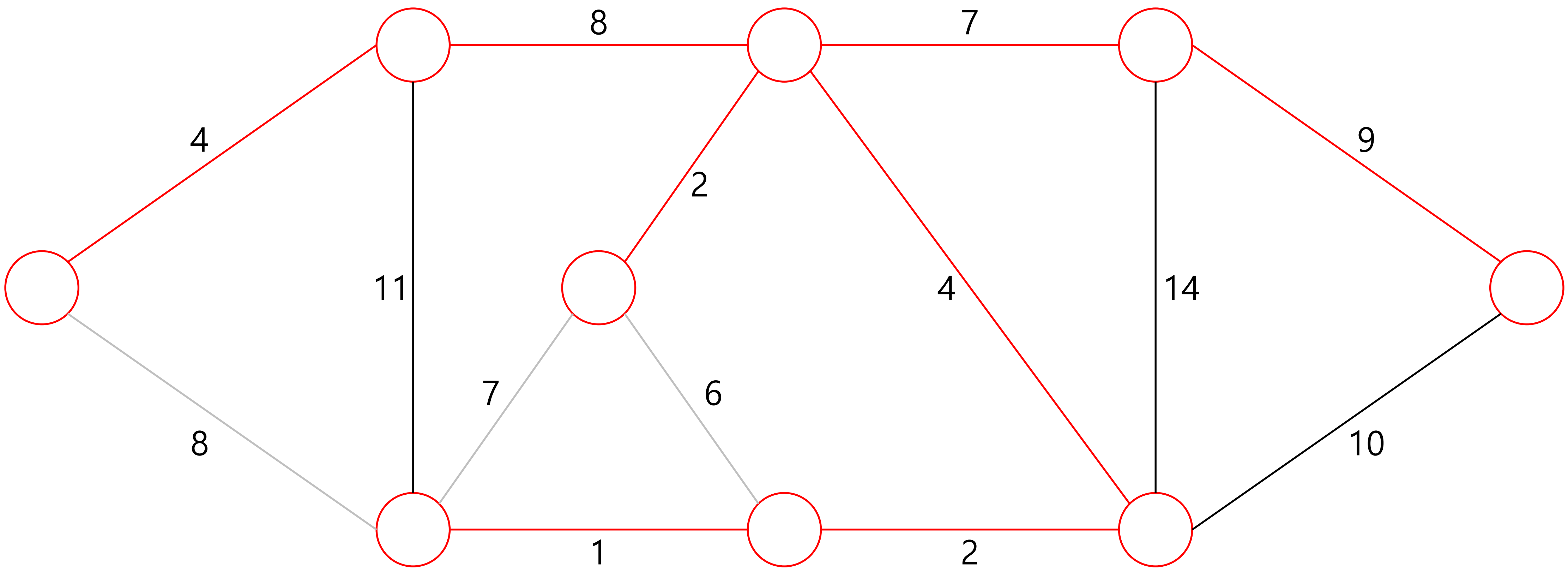
Kruskal’s Algorithm



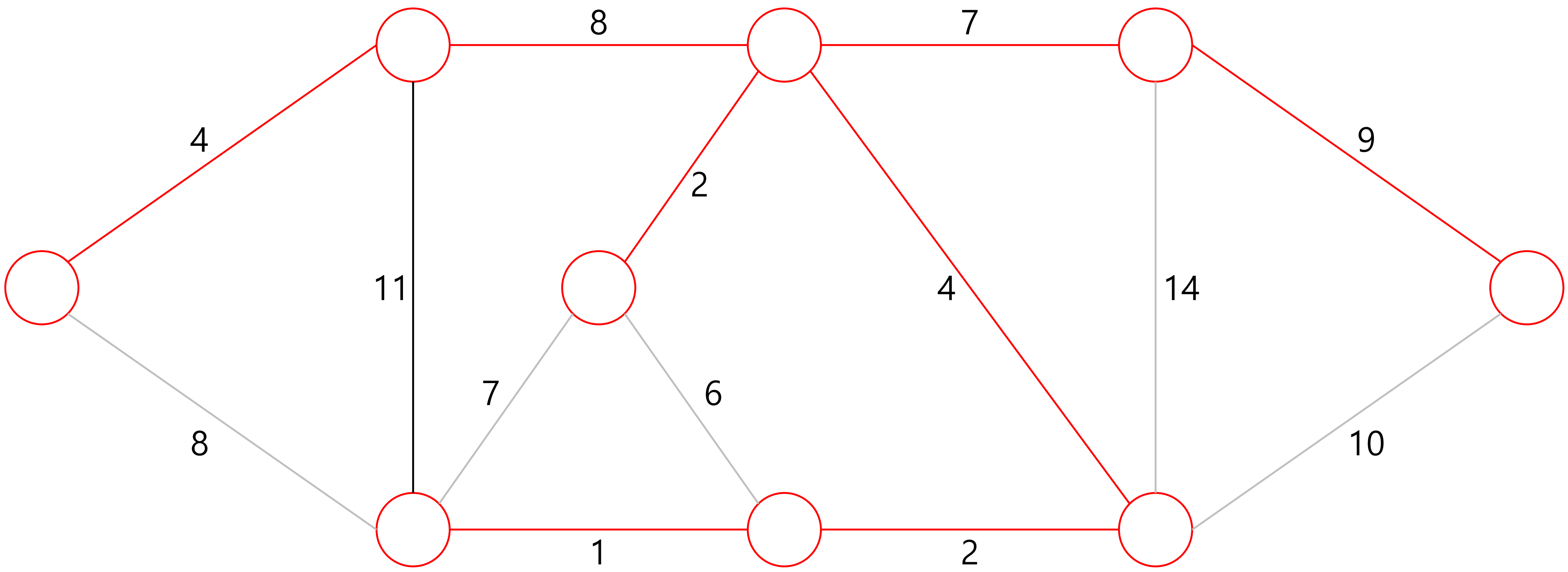
Kruskal’s Algorithm



Kruskal's Algorithm



Kruskal’s Algorithm



Kruskal’s Algorithm

```
int N, M, P[10101];
vector<tuple<int,int,int>> E; // {비용, 정점 1, 정점 2}로 저장

int Find(int v){ return v == P[v] ? v : P[v] = Find(P[v]); }
bool Union(int u, int v){ return Find(u) != Find(v) && (P[P[u]]=P[v], true); }

int Kruskal(){
    int ret = 0;
    for(int i=1; i<=N; i++) P[i] = i;                    // Union-Find 초기화
    sort(E.begin(), E.end());                             // 간선 오름차순으로 정렬
    for(auto [w,u,v] : E) if(Union(u, v)) ret += w; // 사이클이 생기지 않으면 MST에 추가
    return ret;
}
```

Kruskal’s Algorithm

정당성 증명

- 수학적 귀납법을 사용해 증명
  - 현재까지 만든 포레스트 F를 포함하는 최소 스패닝 트리 T가 존재할 때
  - 사이클을 만들지 않는 최소 간선 e를 추가한 F+e를 포함하는 최소 스패닝 트리 T’이 존재함을 증명

  - 만약 e가 T에 포함되면 T’ = T이다.
  - 그렇지 않은 경우, T+e는 e를 포함하는 단순 사이클 C를 갖는다.
  - 이때 C는 F+e에 속하지 않으면서 F와 V-F를 연결하는 간선 f를 갖는다.
  - f는 아직 알고리즘 과정에서 고려되지 않았으므로 e보다 가중치가 크거나 같아야 한다.
  - 단순 사이클에서 간선 하나를 끊어낸 T-f+e는 트리가 되고, 이것의 가중치는 T 이하이므로
  - T’ = T-f+e는 F+e를 포함하는 최소 스패닝 트리이다.

Kruskal’s Algorithm

시간 복잡도

- 간선 정렬 : O(E log E)
- Union-Find 연산 : O(log V) 연산을 O(E)번 수행
- 시간 복잡도 : O(E log E)

질문?

최소 신장 트리

Prim vs Kruskal

- 구현: Kruskal이 쉬움
- 속도: Kruskal이 빠름
- Prim: 왜 씀?

- 간선의 가중치가 정점 번호에 대한 수식으로 표현되고, 메모리 제한이 작은 경우
  - $O(V^2)$ Prim's Algorithm은 공간 복잡도 $O(V)$
  - $O(E \log E)$ Prim's Algorithm과 Kruskal's Algorithm은 공간 복잡도 $O(V+E)$
    - Prim은 힙에 간선 E개 들어갈 수 있고, Kruskal은 모든 간선을 다 구해서 정렬해야 함
  - BOJ 20390 완전그래프의 최소 스패닝 트리

최소 신장 트리 – 예시 1

BOJ 28119 Traveling SCCC President

- N개의 정점과 M개의 간선으로 구성된 무향 가중치 그래프가 주어짐
- 각 정점마다 한 번씩 주어진 순서대로 방문해서 회의를 진행해야 함

- 간선을 따라 이동할 때마다 간선의 가중치 만큼의 비용이 들지만
- 한 번 방문한 정점으로는 순간이동을 할 수 있음

- S번 건물에서 출발해서 N개의 회의를 모두 마친 다음 다시 S번 건물로 돌아오는 최소 비용을 구하는 문제
- 같은 정점을 여러 번 방문해도 됨

최소 신장 트리 – 예시 1

BOJ 28119 Traveling SCCC President

- 모든 정점을 최소한 한 번씩 간선을 통해 방문해야 하므로 정답은 최소 신장 트리보다 크거나 같음

- 최소 비용으로 모든 정점을 한 번씩 방문하는 방법
  - MST를 만든 다음, DFS 하듯이 이동하면 MST의 간선만 사용해 모든 정점을 방문할 수 있음
  - 자식 정점으로 내려가는 것은 간선을 통해서, 이전 정점으로 돌아가는 것은 순간이동으로…

- 모든 정점을 한 번씩 다 방문한 다음에는 매번 순간이동으로 이동할 수 있음

- 따라서 정답은 최소 신장 트리의 가중치와 같음
  - 사실 회의 순서는 필요 없고 낚시용으로 넣음

질문?