1. 개론

#선형대수 #프리드버그

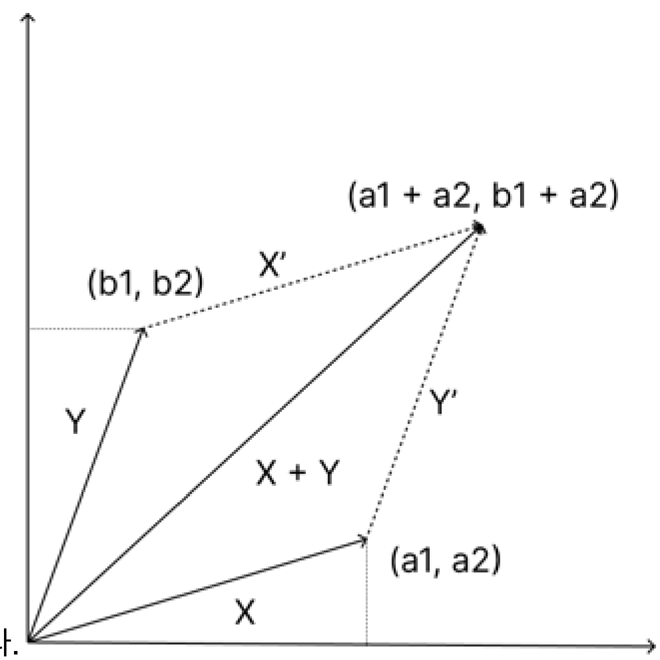
개념

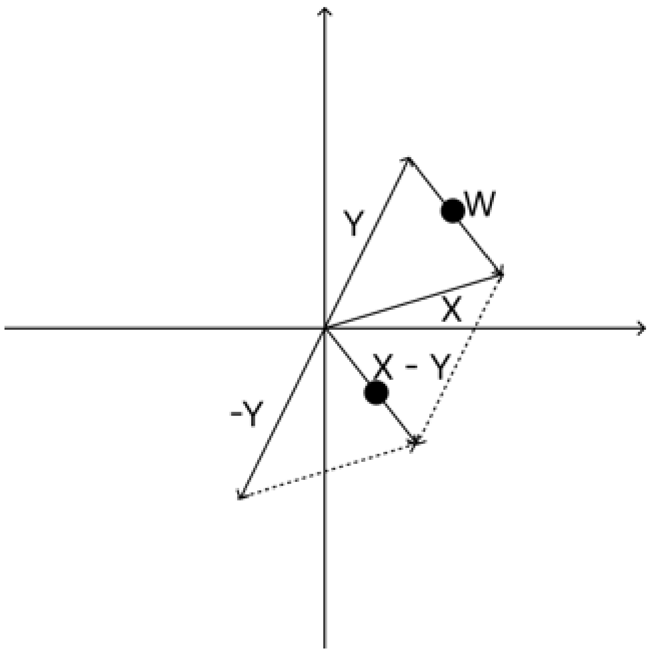
벡터란?

- 크기와 방향을 모두 가진 물리량

벡터합

- 여러 물리량을 결합할 때, 즉, 여러 벡터를 더한 합성벡터를 구한다.
- 두 벡터 결합 규칙 : 평행사변형 법칙
    - 시점이 P인 두 벡터 x, y의 합은 점 P에서 시작하여 이웃한 두 변 x, y로 이루어진 평행사변형의 대각선과 같다
    - 두 벡터를 더할 때는 한 벡터의 종점에 다른 벡터의 시점을 이어서 나타낼 수 있다.



- 스칼라곱
  - 벡터에 실수를 곱하여 벡터의 크기를 늘리거나 줄일 수 있다.
  - 0이 아닌 실수, t를 유향성분 벡터 x에 곱했을 때, 만약 y = tx인 실수 t가 있으면 y와 x는 평행이다
- 벡터의 뺄셈
  - 

  - W가 도달하는 종점은 x의 종점과 같으므로 x의 종점을 구하는 식으로 변환
    - x = y + tw = y + t(x - y)
    - t는 스칼라곱을 적용하기 위한 실수

벡터의 성질

- 벡터합
  - 모든 벡터 x, y에 대하여 x + y = y + z
  - 모든 벡터 x, y, z에 대하여 (x + y) + z = x + (y + z)
  - 모든 벡터 x에 대하여 x + 0 = x를 만족하는 벡터 0이 존재
  - 각 벡터 x마다 x + y = 0을 만족하는 벡터 y가 존재
- 스칼라곱

    - 모든 벡터 x에 대하여 1x = x
    - 모든 실수 a, b와 모든 벡터 x에 대하여 (ab)x = a(bx)
    - 모든 실수 a와 모든 벡터 x, y에 대하여 a(x + y) = ax + ay
    - 모든 실수 a, b와 모든 벡터 x에 대하여 (a + b)x = ax + bx
- 위 성질을 전부 참고했을 때, 벡터는 벡터합과 스칼라곱 관련하여 교환, 결합, 분배 법칙이 성립함을 알 수 있다
- 위 성질이 전부 적용된 공간을 벡터 공간이라 칭한다.

직선의 방정식

- 두 점 a(a1, a2, a3), b(b1, b2, b3)를 지나가는 직선을 구해보자
- A가 시점이고 B가 종점인 벡터와 동일 크기를 가진 벡터 c는 b - a이다.
    - c의 종점은 (b1 - a1, b2 - a2, b3 - a3)
    - b의 종점 : b = a - tc

평면의 방정식

- 공간에서 제각각 다른 직선에 존재하는 세 점 A, B, C가 있다. 이 때, A를 시점으로 B와 C 각각 종점인 벡터를 생각한다
    - A -> B로 향하는 벡터 u, A -> C로 향하는 벡터 v
- 세 점 A, B, C로 이루어진 평면 위 임의의 점 S는 A를 시점으로 하고 su + tv형태이다.
    - A, B, C, S가 포함되는 평면은 시점이 A이며 su + tv이므로 평면 위 임의의 점은 아래와 같이 나타낼 수 있다
    - x = A + su + tv

연습문제

평행조건 판별

- 평행 : 벡터 x, y가 있을 때, y = tx를 만족하는 실수 t가 있으면 평행
- (a) t = (2, 4, 1) -> no
- (b) t = (-3, -3, -3) -> yes
- (c) t = (-1, -1, -1) -> yes

- (d) t = (5/2, all, 2/5) -> no

직선의 방정식 구하기

- 직선의 방정식 : x = A + t(B - A)
- (a) x = (3, -2, 4) + t(-8, 9, -3)
- (b) x = (2, 4, 0) + t(-5, -10, 0)
- (c) x = (3, 7, 2) + t(0, 0, -10)
- (d) x = (-2, -1, 5) + t(5, 10, 2)

평면의 방정식 구하기

- 평면의 방정식 : x = A + su + tv
- (a) x = (2, -5, -1) + s(-2, 9, 7) + t(-5, 12, 2)
- (b) x = (3, -6, 7) + s(-5, 6, -11) + t(2, -3, -9)
- (c) x = (-8, 2, 0) + s(9, 1, 0) + t(14, -7, 0)
- (d) x = (1, 1, 1) + s(4, 4, 4) + t(-7, 3, 1)

영벡터 증명

- 답 : (0, 0)
- 근거
  - 영벡터 0는 x + 0 = x를 만족한다
  - 벡터 x의 종점을 (a, b)로 할 때 벡터합에 근거하여 (a + 0_x, b + 0_y) = (a, b)다.
  - 0_x = 0, 0_y = 0이므로 영벡터 0 = (0, 0)이다

스칼라곱 증명

- 시점 : 원점, 종점 : (a1, a2)인 x가 존재
- 가정 : t가 실수일 때, tx = (ta1, ta2)이다

- 증명
    - while (|t| >= 1) -> x += x, t > 0 -> t - 1, t < 0 -> t + 1
    - |t| > 0 and |t| < 1 -> x += (ta1, ta2)
    - t를 자연수와 소수부로 나누어 벡터합을 지속하면 직접 a1, a2에 t를 곱한 것과 같은 값을 얻을 수 있다

선분의 중점 증명

- 가정 : (a, b)와 (c, d)를 양 끝점으로 하는 선분의 중점의 좌표는 (a + c / 2, b + d / 2) 이다.
- 증명
    - (a, b)와 (c, d)를 양 끝점으로 하는 선분의 종점은 (a, b) + (c - a, b - d)
    - 선분의 가운데 값은 t = 1/2이므로 (a, b) + 1/2(c - a, b - d)
    - 스칼라곱 공식을 적용하면 ((c + a) / 2, (b + d) / 2)가 된다

평행사변형 두 대각선 교점 증명

- 가정) 평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분
- 증명
    - 원점 기준 선분 A와 선분 B를 긋고 평행사변형을 만들었다고 가정
    - 선분 A의 종점 (a, b), 선분 B의 종점 (c, d)로 두었을 때, 각 대각선은 (a, b) -> (c, d), (0, 0) -> (a + c, b + d)이다.
    - (a, b) -> (c, d)의 중점은 ((a + c) / 2, (b + d) / 2), (0, 0) -> (a + c, b + d)의 중점은 ((a + c) / 2, (b + d) / 2)이다.
    - 두 중점이 같으므로 두 대각선은 서로를 이등분한다