2. 벡터공간

#선형대수 #프리드버그

체

정의

- 체 F는 두 연산(덧셈, 곱셈)이 주어진 집합
- 모든 원소 a, b, c 가 F에 속할 때, 해당 원소들은 다음 조건이 성립
  - 교환법칙 : a + b = b + a, a * b = b * a
  - 결합법칙 : (a + b) + c = a + (b + c), (a * b)*c = a*(b*c)
  - 항등원 : 0 + a = a, 1 * a = a인 0과 1의 원소가 체 F에 존재
  - 역원 : F에 속하는 a, b(b는 0이 아닌 원소) 원소에 대해 a + c = 0, b * d = 1인 c와 d원소가 F에 존재
  - 분배법칙 : a * (b + c) = a * b + a * c
- 직관적으로 보면 사칙연산 법칙이 적용되는 집합이라 보면 된다

벡터공간의 정의

정의

- 체 F에서 벡터공간(vector space) 또는 선형공간(linear space) V는 8가지 조건을 만족하는 두 연산 합과 스칼라 곱을 가지는 집합

조건

- 합
  - vs1) 교환법칙 : 모든 x, y에 대하여 x + y = y + x
  - vs2) 결합법칙 : 모든 x, y, z에 대하여 (x + y) + z = x + (y + z)

    - vs3) 항등원 : 모든 x에 대하여 x + 0 = x인 0이 존재
    - vs4) 역원 : 각 x마다 x + y = 0인 y가 존재
- 스칼라곱
    - vs5) 항등원 : 각 x에 대하여 1x = x
    - vs6) 결합법칙 : 모든 a, b와 모든 x에 대하여 (ab)x = a(bx)
    - 분배법칙
        - vs7) 모든 a와 모든 x, y에 대하여 a(x + y) = ax + ay
        - vs8) 모든 a, b와 모든 x에 대하여 (a + b)x = ax + bx

벡터공간 표현

용어

- R : 실수집합(real number set)
- C : 복소수 집합(complex number set)
- n순서쌍(n-tuple) : a1, a2, ..., an이 체 F의 원소일 때, (a1, a2, ..., an)을 나타낸 것
- 성분(entry 또는 component) : 순서쌍을 구성하는 각각의 원소
- 같다(equal) : (a1, a2, ..., an) = (b1, b2, ..., bn) -> ai = bi

행렬 표현

- F^n 벡터는 열벡터(column vector)로 표현. 열 기준으로 나열된 행렬로 표기.
    - 행벡터 : F^n, 1 * n 행렬
    - 열벡터 : F^m, m * 1 행렬
- 영행렬 : 모든 성분이 0인 m * n 행렬
- 정사각행렬 : 행의 개수 = 열의 개수인 행렬
- 같다 : 행렬 A, B의 모든 성분이 동일
- 성분이 체 F의 원소인 모든 m * n 행렬의 집합은 Mm*n(F)로 표기
    - 벡터합 : (A + B)ij

- 스칼라곱 : $(cA)_{ij}$
- i는 행, j는 열을 뜻한다.

함수 표현

- $F(S, F)$: 집합 S에서 F로 가는 모든 함수의 집합
- 같다 : $F(S, F)$에서 S에 속하는 모든 원소 s에 대하여 $f(s) = g(s)$
- 벡터합 : $(f + g)(s) = f(s) + g(s)$
- 스칼라곱 : $(cf)(s) = c[f(s)]$
- 체 F의 원소인 다항식에서 적용
  - $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... +a_1x + a_0$
  - 영 다항식 : $a_n = a_{n-1} = ... = a_0 = 0$
  - 같다 : $g(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... b_1x + b_0$ 일 때, $f(x)$와 $g(x)$ 간, $m = n$이고 $a_i = b_i$일 때 성립
  - 아래와 같은 조건이 성립할 때 F에서 벡터 공간($P(F)$)이 성립한다
  - $f(x) + g(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + ... + (a_0 + b_0)$
  - $cf(x) = cf(x) = ca_nx^n + ca_{n-1}x^{n-1} + ... + ca_1x + ca_0$

벡터합, 스칼라곱과 벡터공간

- 벡터공간인 경우
  - F 위에서 정의된 수열은 자연수 집합을 정의역, F를 공역으로 하는 함수
  - F에서 정의된 모든 수열의 집합이 V일 때, 두 수열 (a_n), (b_n)과 스칼라 t에 대하여 합과 스칼라곱을 아래와 같이 정의
    - $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$, $t(a_n) = (ta_n)$
- 벡터공간이 아닌 경우
  - 정의역과 공역 전부 실수 집합인 수열 (a_1, a_2), (b_1, b_2)가 있을 때 합과 스칼라곱을 아래와 같이 정의
    - $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 - b_2)$, $c(a_2, a_2) = (ca_1, ca_2)$
    - 위배 정책
      - 덧셈의 교환법칙 : $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) \neq (b_1, b_2) + (a_1, a_2)$
      - 덧셈의 결합법칙 : $((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) + (c_1, c_2) \neq (a_1, a_2) + ((b_1, b_2) + (c_1 + c_2))$

    - 스칼라곱 분배법칙 : (b + c)(a1, a2) != b(a1, a2) + c(a1, a2)

벡터 합의 소거법칙

법칙

- 벡터 공간에 속하는 모든 x, y, z 원소는 x + z = y + z일 때, x = y이다

증명

- 역원에 의거 z + v = 0인 벡터 v가 존재. 따라서 덧셈의 결합법칙과 항등원을 적용
- x = x + 0 = x + (z + v) = (x + z) + v = (y + z) + v = y + (z + v) = y + 0 = y

따름정리

- 벡터공간에서 항등원을 만족하는 벡터 0(영벡터)은 유일하다
- 벡터공간에서 역원을 만족하는 벡터 y(덧셈에 대한 x의 역벡터, -x)는 유일하다

스칼라곱의 기본성질

정리

- 모든 벡터 x에 대하여 0x = 0
- 모든 스칼라 a와 모든 벡터 x에 대하여 (-a)x = (-ax) = a(-x)
- 모든 스칼라 a에 대하여 a0 = 0

증명

- 스칼라곱 분배법칙, 덧셈의 항등원, 덧셈의 교환법칙을 근거로 0x + 0x = (0 + 0)x = 0x = 0x + 0 = 0 + 0x이다

연습문제

명제 진위판별

- (a) 모든 벡터 공간에서는 영벡터가 존재
  - T : vs3에 의거하여 벡터 공간에서 항등원이 존재한다
- (b) 벡터 공간에는 두 개 이상의 영벡터가 있을 수도 있다
  - F : 벡터합 소거법칙의 따름정리 의거 영벡터는 유일함
- (c) 모든 벡터 공간에 대하여 ax = bx이면 a = b
  - F : 벡터 x가 영벡터인 경우에는 모름
- (d) 모든 벡터 공간에 대하여 ax = ay이면 x = y
  - F : 스칼라 a가 0인 경우에는 모름
- (e) F^n에 속한 벡터와 Mn*1(F)에 속한 행렬은 서로 같다
  - T : F^n은 n 개의 행을 가진 열벡터이다.
- (f) m * n 행렬은 m개의 열과 n개의 행으로 이루어짐
  - F : m은 행, n은 열
- (g) P(F)에서 다항식의 합은 두 다항식의 차수가 같을 때만 정의
  - F : 상관없음
- (h) 두 다항식 f와 g의 차수가 n일 때, 다항식 f + g의 차수는 n
  - T : 덧셈으로 인한 차수 변동은 없음
- (i) 다항식 f의 차수가 n이고 c가 0이 아닌 스칼라이면 다항식 c의 차수는 n이다
  - T : 스칼라는 0이 아닌 이상 벡터의 차수에 영향을 미치지 않는다
- (j) 체 F의 0이 아닌 스칼라와 P(F)의 차수가 0인 다항식은 서로 같다고 생각할 수 있다
  - T : P(F)의 차수가 0이면 스칼라값 밖에 존재하지 않는다. 고로 같다.
- (k) 함수 f, g -> F(S, F)에 대하여 f = g이기 위한 필요충분조건은 S의 모든 원소에 대하여 같은 함숫값을 가지는 것이다
  - T

벡터 법칙 규명

- S = {0, 1} 일 때, F(S, R)에 속한 세 함수 f(t) = 2t + 1, g(t) = 1 + 4t - 2t^2, h(t) = 5^t + 1
  - f = g : 2t + 1 = 1 + 4t - 2t^2 -> 2t^2 - 2t = 0 = 2t(t - 1)

    - t = 0이면 2t = 0이므로 0, t = 1이면 t - 1 = 0이므로 0. 둘 다 S의 원소를 대입했을 때 결과값이 0이므로 식을 만족하고 0은 실수 집합에 속하기에 치역 범위가 공역을 넘어서지 않는다. 고로 참.
  - f + g = h : 2 + 6t - 2t^2 = 5^t + 1 -> 0 = 2t^2 - 6t + 5^t - 1
    - t = 0이면 0 - 0 + 1 - 1 = 0. t = 1이면 2- 6 + 5 - 1 = 0을 만족한다

벡터합 및 스칼라곱 증명

- 가정) (a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by, 스칼라는 a, b이고 벡터는 x, y
- 증명
  - (a + b)x + (a + b)y
  - ax + bx + ay + by
  - ax + ay + bx + by

벡터합 소거법칙의 따름정리 증명

- 소거법칙) 벡터 공간에 속하는 모든 원소 x, y, z는 x + z = y + z일 때, x = y이다.
- 따름정리1) 벡터공간에서 항등원을 만족하는 벡터 0(영벡터)은 유일하다
- 증명
  - 항등원) x + 0 = x
  - 영벡터가 n개있다고 가정(0x, 0y, ... 0n)
  - x + 0x = x, x + 0y = x, ... x + 0n = x 이므로 소거법칙 의거 0x + x = 0y + x = ... = 0n + x = x
  - 0x = 0y = ... = 0n은 동일하므로 결국 항등원을 만족하는 영벡터는 유일하다
- 따름정리2) 벡터공간에서 역원을 만족하는 벡터 y(덧셈에 대한 x의 역벡터, -x)는 유일하다
- 증명
  - 역원) x + y = 0
  - 역벡터가 n개 있다고 가정(ya, yb, ... yn)
  - x + ya = x + yb = ... = x + yn = 0이므로 ya = ya = ... = yn이기에 결국 역원을 만족하는 역벡터는 유일하다

벡터공간 증명

- 체 F에 대하여 집합 V = {(a1, a2): a1, a2 => F}. (a1, a2), (b1, b2)가 V에 속하고 스칼라 c가 F에 속할 때, 벡터합과 스칼라 곱은 다음과 같다
  - (a1, a2) + (b1, b2) = (a1 + b1, a2 + b2), c(a1, a2) = (a1, 0)
- V는 F-벡터공간인가?
  - 벡터합
    - 교환법칙 : (a1, a2) + (b1, b2) = (b1, b2) + (a1, a2) = (a1 + b1, a2 + b2)
    - 결합법칙 : ((a1, a2) + (b1, b2)) + (c1, c2) = (a1, a2) + ((b1, b2) + (c1, c2)) = (a1 + b1 + c1, a2 + b2, c2)
    - 항등원 : (a1, a2) + (0, 0) = (a1, a2)
    - 역원 : (a1, a2) + (-a1, -a2) = (0, 0)
  - 스칼라곱
    - 항등원 : 1 * (a1, a2) = (a1, 0) != (a1, a2)
- 답) 스칼라곱 법칙 위배로 F-벡터공간에 속하지 않는다.

벡터공간 증명2

- V, W는 F-벡터공간. 집합 Z와 합, 스칼라곱이 다음과 같다
- Z = {(v, w): v는 V 집합에 속하고 w는 W집합에 속한다}
- 합 : (v1, w1) + (v2, w2) = (v1 + v2, w1 + w2), 곱 : c(v1, w1) = (cv1, cw1)
- Z는 F-벡터공간인가?
  - 벡터합
    - 교환법칙 : (v1, w1) + (v2, w2) = (v2, w2) + (v1, w1) = (v1 + v2, w1 + w2)
    - 결합법칙 : ((v1, w1) + (v2, w2)) + (v3, w3) = (v1, w2) + ((v2, w2) + (v3, w3)) = (v1 + v2 + v3, w1 + w2 + w3)
    - 항등원 : (v1, w1) + (0, 0) = (v1 + 0, w1 + 0) = (v1, w1)
    - 역원 : (v1, w1) + (-v1, -w1) = (0, 0)
  - 스칼라곱
    - 항등원 : 1 * (v1, w1) = (v1, w1)
    - 결합법칙 : a(b(v1, w1)) = (ab)(v1, w1) = (abv1, abw1)
    - 분배법칙
      - (a + b)(v1, w1) = (av1, aw1) + (bv1, bw1) = ((a + b)v1, (a + b)w1)

            - a((v1, w1) + (v2, w2)) = (av1, aw1) + (av2, aw2) = (av1 + av2, aw1 + aw2)
    - 법칙을 전부 성립한다

벡터공간 증명3

- 체 Z2는 두 원소 0, 1로 이루어져 있으며 덧셈과 곱셈을 다음과 같이 정의한다
    - 0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1 + 0 = 1, 1 + 1 = 0, 0*0 = 0, 0*1 = 1*0 = 0, 1*1 = 1
- 이 때, 벡터공간 Mm*n(Z2)에 속한 행렬의 개수를 구하라
- 전개
    - 한 행에서 나오는 경우의 수는 2^n
    - 위를 모든 행 갯수만큼 반복하므로 2^(mn)이다