3. 부분공간

#선형대수 #프리드버그

부분공간이란?

정의

- F-벡터공간 V의 부분집합 W가 V에서 정의한 합과 스칼라곱을 가진 F-벡터공간이면 V의 부분공간이다
- {0}은 점공간인 부분공간이라 특별히 칭한다

부분공간 필요충분조건

- W에 속하는 모든 x, y에 대하여 x + y도 W에 속한다(덧셈에 대하여 닫혀있다)
- F에 속하는 모든 c와 W에 속하는 모든 x에 대하여 cx도 W에 속한다(스칼라 곱에 대하여 닫혀있다)
- W는 영벡터를 포함

부분집합에 대한 부분공간 증명

- 전치행렬(transpose matrix) : A^t로 표기하며 A의 행과 열을 바꾸면 된다. 즉 (A^t)ij = Aji
- 대칭행렬(symmetric matrix) : A^t = A인 행렬.
    - 대칭행렬은 합과 스칼라곱에 대해 닫혀 있다.
    - Mn*n(F)의 모든 대칭행렬을 원소로 하는 집합 W는 부분공간이다.
        - 영행렬의 전치행렬은 영행렬이기에 영행렬도 W의 원소.
        - A, B가 부분집합 W에 속한 원소면, A^t = A, B^t = B이고 (A + B)^t = A^t + B^t = A + B이다. 즉, A + B도 W에 속한다.
        - 부분집합 W에 속하는 A원소면 A^t = A이고 임의의 스칼라 a에 대하여 (aA)^t = aA^t = aA이다. 즉, aA도 W에 속한 원소다.

부분공간 대표종류

다항함수

- 음이 아닌 정수 n에 대하여 n 이하의 차수를 가진 다항식 Pn(F). Pn(F)는 P(F)의 부분집합.
    - 영행렬은 차수가 -1. 그러므로 Pn(F)에 속함
    - 차수가 n 이하인 두 다항식을 더하면 n 이하이다.
    - 스칼라를 곱해도 차수가 바뀌지 않는다.
- 위 3가지 조건을 완수했기에 부분공간.

연속함수

- 실수집합 R에서 R로 가는 모든 연속함수의 집합 C(R). C(R)은 F(R, R)의 부분집합
    - F(R, R)에 속한 영함수 f(t) = 0은 모든 실수에 대하여 치역이 0인 연속함수
    - 두 연속함수의 합은 연속함수. 스칼라와 연속함수의 곱도 연속함수.
- 3가지 조건을 만족했기에 부분공간

삼각행렬과 대각행렬

- 상삼각행렬(위삼각행렬, upper triangle matrix) : 대각성분 아래의 성분이 모두 0. i > j일 때, Aij = 0.
- 대각행렬(diagnoal matrix) : 대각성분을 제외한 모든 성분이 0인 정사각행렬. i != j일 때, Mij = 0.
- 증명
    - 영행렬은 대각행렬. n * n 대각행렬 A, B는 i != j일 때, (A + B)ij = Aij + Bij = 0 + 0 = 0, (cA)ij = cAij = c0 = 0
        - 대각행렬의 집합은 Mn*n(F)의 부분공간
    - n*n 행렬 M의 대각합은 모든 대각성분의 합이고 tr(M)으로 표기
        - tr(M) = M11 + M22 + ... + Mnn
        - 대각합이 0인 n * n 행렬의 집합은 Mn*n(F)의 부분공간
- 모든 성분이 음이 아닌 실수인 m * n 행렬의 집합은 Mm*n(R)의 부분공간이 아니다.

부분공간으로 부분공간 제작

정의

- 벡터공간 V의 부분공간들 교집합은 V의 부분공간
- 벡터공간 V의 합집합은 합에 대해서 닫혀있다 단언할 수 없음. 그래서 부분공간이 아님.
    - 각 집합은 집합 내부의 원소들끼리의 합은 보장하지만, 두 집합이 합쳐진 영역에서 두 집합의 각 원소를 더한 합이 존재할 지는 미지수이기 때문이다.

연습문제

명제 진위 판별

- (a) 벡터공간 V의 부분집합 W가 벡터공간이면 W는 V의 부분공간
    - T : 영행렬은 벡터공간이기에 당연히 보유. 벡터공간으로서 벡터합과 스칼라곱 또한 보장하며 W의 모든 원소가 V 내부에 존재하기에 V 부분공간이 맞다.
- (b) 공집합은 모든 벡터공간의 부분공간이다
    - F : 원소에 대한 항등원을 보장할 뿐, 공집합까지 보장하지 않는다
- (c) V가 점공간이 아닌 벡터공간이면 V에는 W != V인 부분공간 W를 포함
    - T : W가 점공간이 되면 된다.
- (d) 벡터공간 V에서 두 부분집합의 교집합은 항상 V의 부분공간이다.
    - F : V1 = {0}, V1 = {1}일 때, 교집합은 공집합이다. 공집합은 부분공간으로 치지 않는다.
- (e) n * n 대각행렬은 0이 아닌 성분의 개수가 n을 초과할 수 없다
    - T : 대각행렬은 대각성분을 제외한 나머지 성분이 0이다. 대각성분은 n개이므로 n을 초과할 수 없다.
- (f) 정사각행렬의 대각합은 대각성분의 곱이다.
    - F : 대각합은 모든 대각성분의 "합"이다
- (g) R^3에서 xy평면을 W = {(a1, a2, 0): a1, a2 => R}이라 하면 W = R^2
    - F : 구조적 관점에서 동형 사상을 가지고 있으나 어디까지나 구조적인 관점에서 봤을 때.

상삼각행렬 부분공간 증명

- 상삼각행렬 Mm*n(F)는 부분공간인가?
- 증명

- 상삼각행렬은 i > j 일 때 원소는 모두 0. 그 외 원소는 값을 따지지 않는다. 그러므로 영행렬을 포함한다.
- A + B = SUM(Aij + Bij)를 만족. i > j 인 경우는 각 원소값이 0이기에 더해도 0이므로 여전히 상삼각행렬의 정의를 준수한다.
- cA 또한 스칼라 c에 대해서 음이든 양이든 값을 곱하더라도 i > j인 경우는 각 원소값이 0이기에 곱해도 0이다. 상삼각행렬 정의 준수.
- 3 조건을 전부 만족하므로 상삼각행렬은 부분공간이다.