4. 일차결합과 연립일차방정식

#선형대수 #프리드버그

일차결합

정의

- 조건1 : 벡터공간 V의 공집합이 아닌 부분집합 S, S에 속하는 유한 개의 벡터 $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$과 스칼라 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$이 존재
- 조건2 :벡터공간 V에 속한 벡터 v가 $v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \ldots + a_nv_n$을 만족
- 일차결합 : v
- 일차결합의 계수 : $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

연립일차방정식과 일차결합

관계

- 일차결합은 다수의 벡터와 스칼라 간 사칙연산을 통해 신규 벡터를 만들어내는 것이다. 그렇기에 연립방정식을 사용하면 쉽게 일차결합 벡터 여부를 판단할 수 있다.

쉽게 문제를 풀기 위한 연립방정식 조건

- 각 방정식에서 처음 등장하는 0이 아닌 계수는 1
- 어떤 미지수가 어떤 방정식에 처음 등장하면 그 외의 다른 행에서는 등장하지 않음
- 처음 등장하는 미지수의 첨자는 다음 행으로 내려갈 때마다 반드시 증가

생성공간

정의

- 조건 : 벡터공간 V의 공집합이 아닌 부분집합 S
- 생성공간 : S의 벡터를 사용하여 만든 모든 일차결합의 집합
  - span(S) : 생성공간
  - span(void) : {0}

정리

- 벡터공간 V의 임의 부분집합 S의 생성공간은 S를 포함하는 V의 부분공간. S를 포함하는 V의 부분공간은 반드시 S의 생성공간을 포함
- 증명
  - S = 공집합이면 span(공집합) = {0} 이다. {0}은 S = 공집합을 포함하고 V의 모든 부분공간에 포함된다
  - S != 공집합이면
    - S에 속하는 벡터 x에 대하여 0x = 0 이고 0은 span(S)에 속한다.
    - x + y, cx 전부 span(S)에 속함
    - S 원소에 벡터 x가 있을 때 x = 1 * x 이고 cx는 span(S)에 속하므로 S 또한 span(S)에 포함

생성

- 벡터공간 V의 부분집합 S에 대하여 span(S) = V이면 S는 V를 생성한다

응용

R^3

- R^3은 세 벡터 (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)의 일차결합

P2(R)

- x^2 + 3x - 2, 2x^2 + 5x - 3, -x^2 - 4x + 4. 세 다항식의 일차결합이 P2(R)이다

M2*2(R)

- ((1, 1), (1, 0)), ((1, 1), (0, 1)), ((1, 0), (1, 1)), ((0, 1), (1, 1)) 네 행렬의 일차결합.

평면의 방정식

- 시점이 원점인 경우, x = su + tv
- R^3에 포함되는 원소 x가 u, v의 일차결합이기 위한 필요충분조건은 x, u, v가 같은 평면에 있는 것이다.

연습문제

명제 진위 판별

- (a) 영벡터는 공집합이 아닌 임의의 집합의 일차결합이다
  - T : 계수를 0으로 두면 어떤 집합의 일차결합이든 영벡터가 나온다
- (b) 공집합의 생성공간은 공집합이다.
  - F : span(공집합) = {0}
- (c) 벡터공간 V의 부분집합 S에 대하여, span(S)는 S를 포함하는 V의 모든 부분공간의 교집합
  - T : 생성공간은 근본이 되는 해당집합의 원소들을 더하고 스칼라를 곱하면서 이루어진 결과물이다. 부분공간은 포함된 원소들에 대한 벡터합과 스칼라곱에 닫혀 있으므로 당연하게도 S의 벡터합과 스칼라곱도 닫혀 있다.
- (d) 연립일차방정식을 풀 때, 임의의 상수를 방정식에 곱해도 해집합은 바뀌지 않는다
  - F : 상수로 0을 곱하면 식 하나가 완전히 바뀌기 때문에 해집합도 바뀐다
- (e) 연립일차방정식을 풀 때, 한 방정식에 임의의 스칼라를 곱하여 다른 방정식에 더해도 해집합은 바뀌지 않는다
  - T : 연립일차방정식 자체가 임의의 스칼라를 곱한 뒤에 다른 방정식과 더하거나 빼는 식으로 해를 결정한다.
- (f) 모든 연립일차방정식에는 해가 있다.
  - F : a = 0, b = 1, a + b = 3. 이렇게 각 식에 대한 값이 각 미지수에 대한 공통된 값을 보장하지 못하는 경우에는 해가 없다.

일차결합 가능 여부 판단

- 아래가 R^3 벡터일 때, 첫 번째 벡터가 나머지 두 벡터의 일차결합으로 표현이 가능한가?
- (-2, 0, 3), (1, 3, 0), (2, 4, -1)
  - T : a + 2b = -2, 3a + 4b = 0, -b = 3 -> a = 4, b = 3.

- (-2, 2, 2), (1, 2, -1), (-3, -3, 3)
    - T : a - 3b = -2, 2a - 3b = 2, -a + 3b = 2 -> a = 4, b = 2
- 아래가 P3(R)일 때, 첫 번째 다항식이 나머지 두 다항식의 일차결합으로 표현이 가능한가?
- x^3 - 3x + 5, x^3 + 2x^2 - x + 1, x^3 + 3x^2 - 1
    - (a + b)x^3 + (2a + 3b)x^2 -(a)x a - b = x^3 - 3x + 5
    - a + b = 1, 2a + 3b = 0, a = 3, a - b = 5 -> a = 3, b = -2
    - T

벡터 공간 생성 가능 여부 판단

- 세 벡터 (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)이 F^3을 생성함을 보여라
- 증명
    - 세 벡터의 일차결합에 쓰일 각각 곱해질 스칼라를 a, b, c로 분류하고 F^3의 벡터를 (x1, x2, x3)로 가정.
    - a(1, 1, 0) + b(1, 0, 1) + c(0, 1, 1) = (x1, x2, x3)
    - a + b = x1, a + c = x2, b + c = x3
    - a = 1/2(x1 + x2 - x3), b = 1/2(x1 - x2 + x3), c = 1/2(-x1 + x2 + x3)
    - 위 조건식을 만족하는 스칼라가 존재하므로 세 벡터는 F^3을 생성할 수 있다

일차결합 유일성 증명

- 벡터공간 V의 부분집합 S에 대하여 S의 원소 v1, v2, ..., vn이 있고 a1v1 + a2v2 + ... + anvn = 0일 때, a1 = a2 = ... = an = 0이다. 이 때, span(S)의 모든 벡터는 S의 일차결합으로 표현하는 방법이 유일한가?
- 증명
    - a1v1 + a2v2 + ... + anvn = b1v1 + b2v2 + ... + bnvn
    - (a1 - b1)v1 + (a2 - b2)v2 + ... + (an - bn)vn = 0
    - 문제에서 주어진 스칼라곱에 대한 정의 의거, (a1 - b1) = 0, (a2 - b2) = 0, (a3 - b3) = 0, ... (an - bn) = 0
    - 모든 a, b에 대해 a = b이므로 S의 일차결합을 통해 a와 b를 모두 추론 가능하다.