Задание 8.

Для функции, заданной в векторном виде постройте полином Жегалкина тремя разными способами (методом неопределенных коэффициентов, преобразованием СДНФ, с использованием треугольника): $f = 01110010$.

Сначала необходимо построить таблицу истинности данной булевой функции $f(x_1, x_2, x_3)$

x	y	z	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Общий вид полинома Жегалкина для функции трех переменных:

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{123}x_1x_2x_3$$

Последовательно подставляем наборы значений переменных и находим коэффициенты $a_0, a_1, ..., a_{123}$

$f(0,0,0) = a_0 = 0$

$f(0,0,1) = a_0 + a_3 = 1 \Rightarrow 0 + a_3 = 1 \Rightarrow a_3 = 1$

$f(0,1,0) = a_0 + a_2 = 1 \Rightarrow 0 + a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = 1$

$f(0,1,1) = a_0 + a_2 + a_3 + a_{23} = 1 \Rightarrow 0 + 1 + 1 + a_{23} = 1 \Rightarrow a_{23} = 1$

$f(1,0,0) = a_0 + a_1 = 0 \Rightarrow 0 + a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$

$f(1,0,1) = a_0 + a_1 + a_3 + a_{13} = 0 \Rightarrow 0 + 0 + 1 + a_{13} = 0 \Rightarrow a_{13} = 1$

$f(1,1,0) = a_0 + a_1 + a_2 + a_{12} = 1 \Rightarrow 0 + 0 + a_{12} = 1 \Rightarrow a_{12} = 0$

$f(1,1,1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_{12} + a_{13} + a_{23} + a_{123} = 0 \Rightarrow 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + a_{123} = 0 \Rightarrow a_{123} = 0$

Подставляя найденные коэффициенты, получаем полином Жегалкина:

$f(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3 + x_1x_3 + x_2x_3$

Метод треугольника Паскаля

Построим полином Жегалкина, используя треугольник Паскаля.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	Треугольник Паскаля	Слагаемые
0	0	0	0	0 1 1 1 0 0 1 0	1
0	0	1	1	[1] 0 0 1 0 1 1	x_3
0	1	0	1	[1] 0 1 1 1 0	x_2
0	1	1	1	[1] 1 0 0 1	$\mathrm{x}_2 x_3$
1	0	0	0	0 1 0 1	x_1
1	0	1	0	[1] 1 1	$\mathrm{x}_1 x_3$
1	1	0	1	0 0	$\mathrm{x}_1 x_2$
1	1	1	0	0	$\mathrm{x}_1 x_2 x_3$

Поясним, как заполняется треугольник Паскаля. Верхняя строка треугольника задает вектор значений булевой функции $f = (01110010)$.В каждой строке, начиная со второй, любой элемент такого треугольника вычисляется как сумма по модулю 2 двух соседних элементов предыдущей строки.

Левой стороне треугольника Паскаля соответствует наборы значений переменных исходной функции $f(x_1, x_2, x_3)$. Соединяя знаком конъюнкции переменные значения которых в наборе равны 1, мы получим слагаемое в полиноме Жегалкина. Набору (000) соответствует 1, набору (001) соответствует x_3 и т.д

Полином Жегалкина:

$f(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3 + x_1 x_3 + x_2 x_3$

Преобразование ДНФ

По таблице истинности построим СДНФ (метод работает только для СДНФ, просто для ДНФ так делать нельзя!):

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Для построения СДНФ по таблице истинности выбираем наборы, на которых функция f принимает значение, равное 1. Если значение переменной в этом наборе равно 0, то она берется с отрицанием, если значение переменной равно 1, то переменная берется без отрицание. Соединив знаком конъюнкции переменные соответствующего набора, получим элементарную конъюнкцию. Тогда дизъюнкция всех таких элементарных конъюнкций есть СДНФ.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3.$$

Теперь просто заменим дизъюнкцию суммой Жегалкина (так можно сделать из-за того, что СДНФ устроена так, что в каждый одночлен входят ВСЕ переменные, т.е. как минимум одна переменная будет входить в данные одночлены как с отрицанием, так и без него, т.е. при применении формулы $a \vee b = a + b + ab$, конъюнкция будет равна 0.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3.$$

Теперь, воспользовавшись свойством $\bar{a} = a + 1$ и раскрыв скобки получим:

$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 =$
$= (x_1+1)(x_2+1)x_3 + (x_1+1)x_2(x_3+1) + (x_1+1)x_2x_3 + x_1x_2(x_3+1) =$
$= (x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3) + (x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_2) +$
$+ (x_1x_2x_3 + x_2x_3) + (x_1x_2x_3 + x_1x_2).$

И, наконец, воспользуемся свойством0a a , т.е. уберем все скобки и все члены, встречающиеся ЧЕТНОЕ число раз вычеркнем. Получим:

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 + x_2x_3 + x_3 + x_2$

Задание 9.

Для булевой функции найдите представляющий ее полином Жегалкина:

$$x'y'z' \vee x'yz' \vee x'yz \vee xy'z \vee xyz'$$

Решение:

Для нахождения полинома Жегалкина нужно выразить все встречающиеся в данном выражении булевы функции через сумму Жегалкина (сложение по модулю 2) и конъюнкцию, а затем, пользуясь свойствами функций, максимально упростить полученное выражение. Проделаем это для данной булевой функции:

$x'y'z' \vee x'yz' \vee x'yz \vee xy'z \vee xyz' = x'y'z' + x'yz' + x'yz + xy'z + xyz' =$
$= (x+1)(y+1)(z+1)+(x+1)y(z+1)+(x+1)yz+x(y+1)z+xy(z+1) =$
$= (xy + x + y + 1)(z + 1) + (xy + y)(z + 1) + (xyz + yz) + (xy + x)z+$
$+(xyz + xy) =$
$= (xyz + xy + xz + x + yz + y + z + 1) + (xyz + xy + yz + y)+$
$+(xyz + yz) + (xyz + xz) + (xyz + xy) =$
$= 1 + x + z + xy + yz + xyz$