

Задание 4.

Отношение задано матрицей. Исследовать отношение на симметрию, антисимметрию, асимметрию, рефлексивность, антирефлексивность. Найти транзитивное замыкание отношения.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

1. Данное отношение не является симметричным, так как матрица несимметрична. Например, пара (2,3) принадлежит данному отношению, а пара (3,2) ему не принадлежит.

2. Отношение антисимметрично, так как нет ни одной пары $m_{ij} = m_{ji} = 1, i \neq j$.

3. Отношение антисимметрично, но не асимметрично, так как на диагонали матрицы имеются элементы равные 1.

4. Не все диагональные элементы матрицы равняются 1. Данное отношение не является рефлексивным

5. Отношение не обладает свойством антирефлексивности, так как не все диагональные элементы являются нулевыми

Найдем транзитивное замыкание данного отношения по алгоритму Уоршолла:

Рассматриваем все внедиагональные ($i \neq j$) элементы матрицы. Если $m_{ij} = 1$, то i -ю строку заменяем дизъюнкцией i -й и j -й строк.

1. Элемент $m_{14} = 1$. Первую строку заменяем поэлементной дизъюнкцией первой и четвертой строки:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Данное отношение не является транзитивным, так как, например, пары (1,2) и (2,4) не принадлежат данному отношению, а пара (1,4) ему принадлежит.

2. Элемент $m_{23} = 1$. Вторую строку заменяем поэлементной дизъюнкцией второй и третьей строки:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Элемент $m_{34} = 1$., M_2 является матрицей транзитивного замыкания нашего отношения