

Вариант 7

Задание 1

Универсальное множество состоит из 26 строчных букв латинского алфавита. Заданы множества A , B , C и D . Вычислить мощность множеств X и Y .

Даны множества $A = \{b, f, g, m, o\}$, $B = \{b, g, h, l, u\}$, $C = \{e, f, m\}$, $D = \{e, g, l, p, q, u, v\}$
Вычислить мощность множеств

$$X = (A \setminus C) \cup (B \cap C), Y = (A \cap \bar{B}) \cup (D \setminus C)$$

Решение:

1. Определим элементы множества $X = (A \setminus C) \cup (B \cap C)$.

Для этого найдём сначала разность множеств $A \setminus C$. Для этого вычтем из множества $A = \{b, f, g, m, o\}$ элементы $\{f, m\}$, принадлежащие $C = \{e, f, m\}$. Следовательно, $A \setminus C = \{b, g, o\}$. Затем найдём пересечение множеств $B \cap C$. Множества B и C не имеют общих элементов. Следовательно, $B \cap C = \emptyset$. Таким образом, объединение $(A \setminus C) \cup (B \cap C)$ состоит из трёх элементов $\{b, g, o\}$.

Мощность множества $X = (A \setminus C) \cup (B \cap C)$ равна 3.

2. Определим элементы множества $Y = (A \cap \bar{B}) \cup (D \setminus C)$

Найдём дополнение \bar{B} . Универсальное множество по условию задания состоит из 26 букв $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$. Если отсюда исключить 5 элементов множества B , то получим множество \bar{B} из 21 элемента $\{a, c, d, e, f, i, j, k, m, n, o, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z\}$.

Пересечение множеств $A \cap \bar{B}$ состоит из элементов $\{f, m, o\}$, т.е. всех элементов множества A , которые не принадлежат B .

Для нахождения разности множеств $D \setminus C$ вычтем из множества $D = \{e, g, l, p, q, u, v\}$ элемент $\{e\}$, принадлежащий $C = \{e, f, m\}$. Получим $D \setminus C = \{g, l, p, q, u, v\}$. В итоге

$$Y = (A \cap \bar{B}) \cup (D \setminus C) = \{f, g, l, m, o, p, q, u, v\}$$

Мощность множества Y равна 9. В данном случае множества $D \setminus C$ и $A \cap \bar{B}$ не пересекаются и мощность объединения равна сумме мощностей слагаемых

$$\text{Card } Y = 3 + 6$$

Задание 2

Задайте множество, указанное на рисунке с использованием характеристического свойства множества:

Решение:

Предлагаем вначале выразить это множество через системы и совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq 1, \\ y \geq x \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 \geq 1, \\ y \geq 0, \\ y \leq 1, \\ x \leq 0, \\ x \geq -1, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Теперь запишем с использованием характеристического свойства множества, используя для систем операцию пересечения множеств, а для совокупности - объединения:

$$X = \{(x; y) | x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x\} \cup \{(x; y) | x^2 + y^2 \geq 1, y \geq 0, y \leq 1, x \leq 0, x \geq -1\}$$

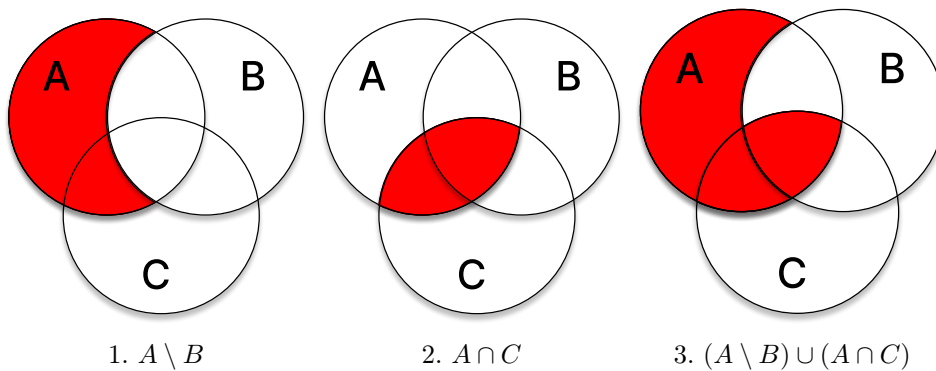
Задание 3

Проиллюстрировать равенство при помощи диаграмм Эйлера-Венна:

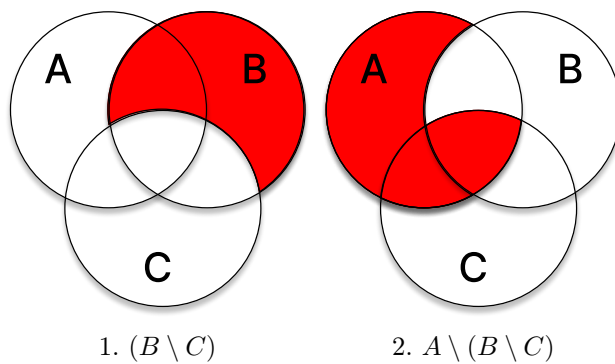
$$(A \setminus B) \cup (A \cap C) = A \setminus (B \setminus C)$$

Решение:

Построим последовательно левую часть равенства:



Теперь построим правую часть:



Диаграммы для левой и правой части оказались одинаковы!

Задание 4.

Отношение задано матрицей. Исследовать отношение на симметрию, антисимметрию, асимметрию, рефлексивность, антирефлексивность. Найти транзитивное замыкание отношения.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

1. Данное отношение не является симметричным, так как матрица несимметрична. Например, пара (2,3) принадлежит данному отношению, а пара (3,2) ему не принадлежит.

2. Отношение антисимметрично, так как нет ни одной пары $m_{ij} = m_{ji} = 1, i \neq j$.

3. Отношение антисимметрично, но не асимметрично, так как на диагонали матрицы имеются элементы равные 1.

4. Не все диагональные элементы матрицы равняются 1. Данное отношение не является рефлексивным

5. Отношение не обладает свойством антирефлексивности, так как не все диагональные элементы являются нулевыми

Найдем транзитивное замыкание данного отношения по алгоритму Уоршолла:

Рассматриваем все внедиагональные ($i \neq j$) элементы матрицы. Если $m_{ij} = 1$, то i -ю строку заменяем дизъюнкцией i -й и j -й строк.

1. Элемент $m_{14} = 1$. Первую строку заменяем поэлементной дизъюнкцией первой и четвертой строки:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Данное отношение не является транзитивным, так как, например, пары (1,2) и (2,4) не принадлежат данному отношению, а пара (1,4) ему принадлежит.

2. Элемент $m_{23} = 1$. Вторую строку заменяем поэлементной дизъюнкцией второй и третьей строки:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Элемент $m_{34} = 1$, M_2 является матрицей транзитивного замыкания нашего отношения

Задание 5.

На множестве упорядоченных пар $x_0 = (0, 0), x_1 = (1, 0), x_2 = (0, 1), x_3 = (1, 1)$ задана бинарная мультипликативная операция. Произведение задано по правилу $A * B = (a_2 b_2, a_1 b_2)$. Является ли полугруппой структура $(X, *)$, где $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$? Составить таблицу Кэли структуры.

Решение:

Проверим ассоциативность введенного произведения — необходимое свойство для того, чтобы алгебраическая структура была полугруппой. Рассмотрим произведение $A * (B * C)$ трёх произвольных пар из X :

$$A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), C = (c_1, c_2).$$

Найдём сначала произведение $B * C = (b_2 c_2, b_1 c_2)$, затем получим $A * (B * C) = (a_2 b_1 c_2, a_1 b_1 c_2)$.

Аналогично:

$$(A * B) * C = (a_2 b_2, a_1 b_2) * (c_1, c_2) = (a_1 b_2 c_2, a_2 b_2 c_2)$$

Очевидно, $A * (B * C) \neq (A * B) * C$, т.е. операция умножения не ассоциативна и алгебраическая структура $(X, *)$ не является полугруппой. Составим таблицу Кэли.

*	x_0	x_1	x_2	x_3
x_0	x_0	x_0	x_0	x_0
x_1	x_0	x_0	x_2	x_2
x_2	x_0	x_0	x_1	x_1
x_3	x_0	x_0	x_3	x_3

Задание 6:

Построив соответствующую таблицу значений, выясните, равны ли следующие булевы функции

$$f(x, y, z) = xy' \vee x'y \vee x'z', \quad g(x, y, z) = (x' \vee y')(x \vee y \vee z')$$

Решение:

Построим таблицы значений для функций f и g :

$$f(x, y, z) = xy' \vee x'y \vee x'z'$$

x	y	z	x'	y'	z'	xy'	$x'y$	$x'z'$	$f(x, y, z)$
0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

$$g(x, y, z) = (x' \vee y')(x \vee y \vee z')$$

x	y	z	x'	y'	z'	$x' \vee y'$	$x \vee y \vee z'$	$g(x, y, z)$
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0

Получили:

$$f(x, y, z) = g(x, y, z)$$

Задание 7:

Постройте минимальную ДНФ для функции тремя разными способами (графическим способом, картами Карно, методом Квайна):

$$f = 10111010$$

Решение:

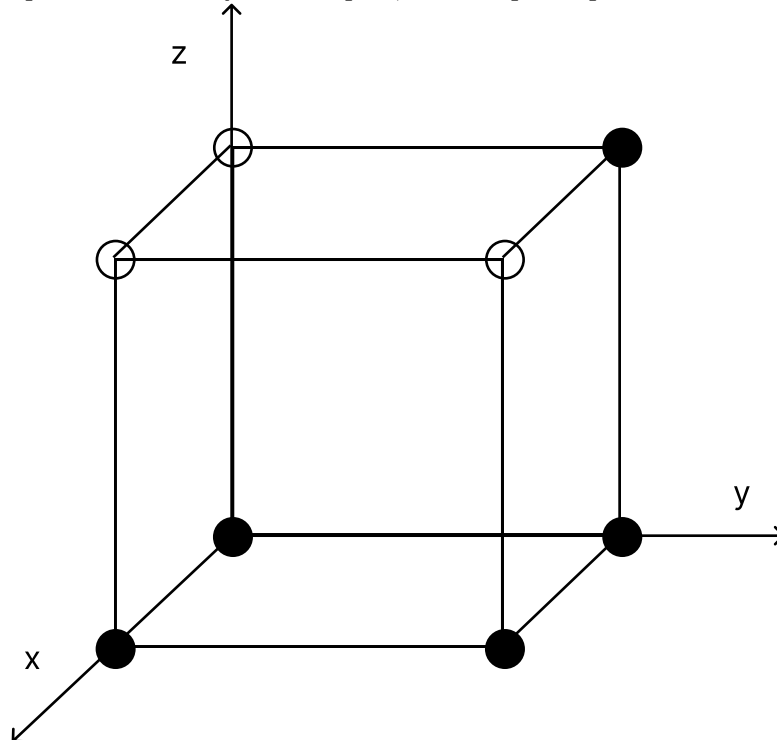
В данной функции восемь бит, т.е. это функция трех переменных. Будем считать этими переменными x , y и z . В данной функции нулей меньше, поэтому быстрее через них. Разряды:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

тогда нулям соответствуют наборы переменных 001, 101 и 111, а все остальные наборы – это единицы.

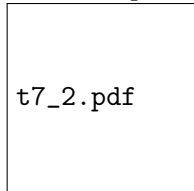
Минимизация графическим способом (метод гиперкубов)

Нарисуем единичный куб в системе координат и выделим его вершины, координаты которых соответствуют наборам переменных, на которых наша функция принимает значения 1, и выколем те вершины, которые соответствуют наборам, на которых принимается значение 0.



Теперь пробуем покрыть выделенные точки, не зацепив невыделен-

ные минимальным количеством сначала граней (у нас это не возможно), затем ребер (у нас все точки покрываются минимально тремя ребрами (выделены на рисунке ниже), затем, если не удалось ничем ранее, отдельными вершинами.



Для каждого из выделенных объектов (граней, ребер или вершин) посмотрим, какие переменные (координаты) не менялись. Для этих переменных составим конъюнктивные одночлены по правилу построения СДНФ. Например, для грани, соединяющей точки с координатами $(1; 0; 0)$, $(0; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$, $(1; 1; 0)$ не меняются третья координата (соответствует z), и она равна нулю, значит соответствующий конъюнктивный одночлен z' , а для ребра, соединяющего точки $(0; 1; 0)$ и $(0; 1; 1)$ не меняются первая и вторая координаты (x и y соответственно), причем $x=0$, а $y=1$, тогда получим одночлен $x'y$.

Ответ: $f = z' \vee x'y$

Минимизация методом карт Карно

Составим двумерную таблицу значений нашей функции разделив переменные произвольным образом на две группы (предлагаем разделить на x и yz просто из-за того, что такая запись будет более протяженной горизонтально). Сочетания переменных упорядочим по коду Грея. Кодом Грея называется двоичный код, у которого два соседних значения различаются не более чем в одной позиции. Получим:

x \ yz	yz			
	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	1	0	0	1

С помощью прямоугольников площадью кратной степени 2, покрываем все единицы, не задевая нули. При этом ячейки, которые находятся на противоположных концах (как по горизонтали, так и по вертикали, но не по диагонали) считаются смежными. Прямоугольники могут пересекаться.

У нас получится:

x \ yz	00	01	11	10
	0	1	0	1
0	1	0	1	1
1	1	0	0	1

Каждый из прямоугольников описывается в виде конъюнктивного одночлена, как и для графического способа. Получим:

$$f = z' \vee x'y$$

Минимизация методом Квайна

Выписываем все совершенные одночлены, для которых $f = 1$. Во втором столбце для удобства проведем их группировку по числу нулей в их записи.

000	000
010	010
011	100
100	011
110	110

Если в одночленах получается разница ровно в одной позиции, то заменяем «-».

В этом плане группировка удобна тем, что можно проверять только одночлены из соседних групп, например, первый из первой группы и первый из второй, первый из первой группы и второй из второй и т.д.

Помечаем одночлены, которые в этом участвовали. Результаты поместим в третий столбец. Получим:

000	*000	0-0
010	*010	-00
011	*100	01-
100	*011	-10
110	*110	1-0

Для удобства сгруппируем теперь по местоположению «прочерка»:

000	*000	0-0	-00
010	*010	-00	-10
011	*100	01-	0-0
100	*011	-10	1-0
110	*110	1-0	01-

Продолжаем этот процесс (объединения) пока возможно, считая прочерк третьим символом. При этом, с учетом последнего разбиения на группы, мы можем работать только в одной группе (нельзя объединить элементы разных групп). Не забывайте ставить пометки тех элементов, которые вы объединяете. Это важно!

000	*000	0-0	*-00	-0
010	*010	-00	*-10	
011	*100	01-	*0-0	
100	*011	-10	*1-0	
110	*110	1-0	01-	

	01-	-0
000		+
010	+	+
011	+	
100		+
110		+

Отбираем минимальное число столбцов, с суммарным минимальным числом переменных так, чтобы они покрыли все строки. Для этого вначале определим те одночлены, которые войдут в ядро (в этих строках только один «+», поэтому для них альтернативы нет). У нас это первый, третий, четвертый, пятый столбцы, значит одночлены 01- и -0 обязательно войдут в ответ. В результате получим, что «+», соответствующие выбранным одночленам у нас автоматически будут в 1, 2, 3, 4, 5 строка.

$$f = x'y \vee z'$$