Дубровских Никита 221-361

Вариант 7

Задание 22.

При помощи венгерского алгоритма решите задачу на максимум для двудольного графа, заданного матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 8 & 7 \\ 5 & 7 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

<u>Решение:</u>

Поскольку решается задача на максимум, то нам потребуется сделать один дополнительный шаг: найдем максимальный элемент – 8 и отнимем каждый элемент от него. Получим:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задача свелась к решению задачи на минимум.

Теперь проведем редукцию по строкам (найдем в каждой строке наименьший элемент и вычтем его из всех элементов данной строки):

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Теперь проведем редукцию по столбцам:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Поскольку нули выбрать не получается нам нужно вычеркнуть все нули минимальным количеством горизонтальных и/или горизонтальных линий:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Среди всех невычеркнутых элементов находим минимальный. Отнимаем его от всех невычеркнутых элементов и прибавляем в местах пересечения линий, те элементы, через которые проходит только одна линия не трогаем.

Получим:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Теперь смотрим, можно ли здесь выбрать нули (в каждой строке или каждом столбце ровно один ноль). Такое возможно:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда ответ:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 8 & 7 \\ 5 & 7 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$