

Задание 7:

Постройте минимальную ДНФ для функции тремя разными способами (графическим способом, картами Карно, методом Квайна):

$$f = 10111010$$

Решение:

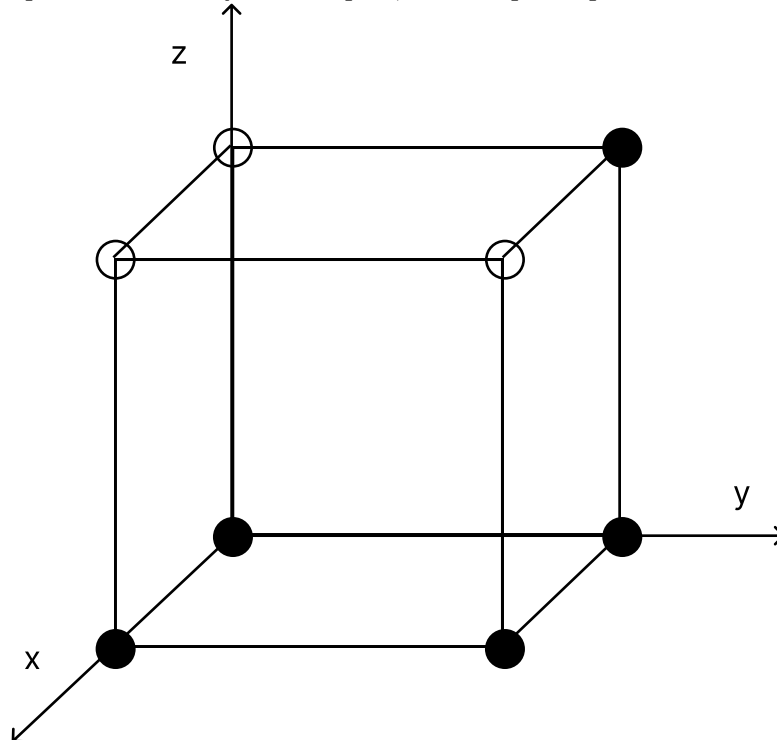
В данной функции восемь бит, т.е. это функция трех переменных. Будем считать этими переменными x , y и z . В данной функции нулей меньше, поэтому быстрее через них. Разряды:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

тогда нулям соответствуют наборы переменных 001, 101 и 111, а все остальные наборы – это единицы.

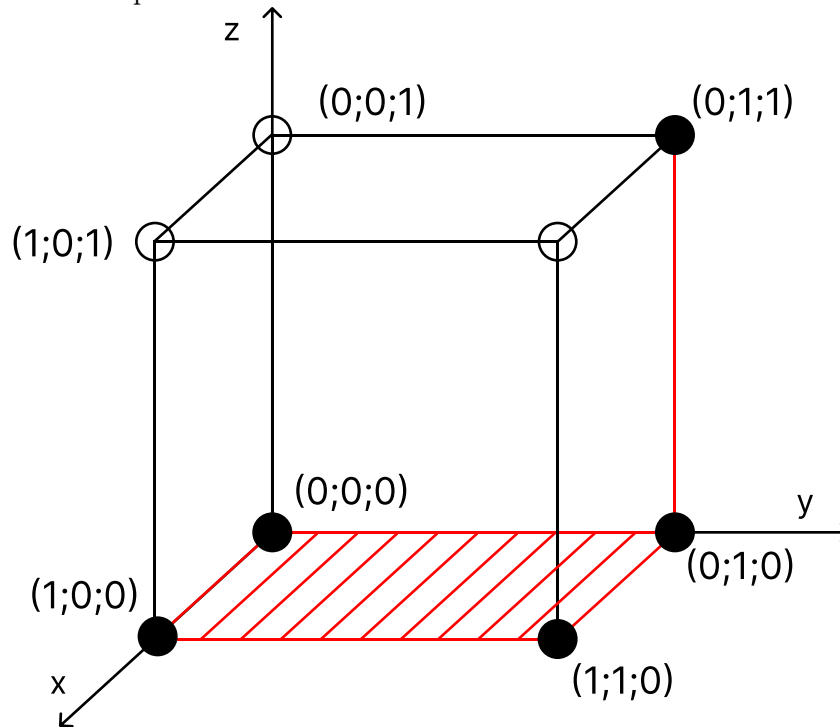
Минимизация графическим способом (метод гиперкубов)

Нарисуем единичный куб в системе координат и выделим его вершины, координаты которых соответствуют наборам переменных, на которых наша функция принимает значения 1, и выколем те вершины, которые соответствуют наборам, на которых принимается значение 0.



Теперь пробуем покрыть выделенные точки, не зацепив невыделен-

ные минимальным количеством сначала граней (у нас это не возможно), затем ребер (у нас все точки покрываются минимально тремя ребрами (выделены на рисунке ниже), затем, если не удалось ничем ранее, отдельными вершинами.



Для каждого из выделенных объектов (граней, ребер или вершин) посмотрим, какие переменные (координаты) не менялись. Для этих переменных составим конъюнктивные одночлены по правилу построения СДНФ. Например, для грани, соединяющей точки с координатами $(1; 0; 0)$, $(0; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$, $(1; 1; 0)$ не меняются третья координата (соответствует z), и она равна нулю, значит соответствующий конъюнктивный одночлен z' , а для ребра, соединяющего точки $(0; 1; 0)$ и $(0; 1; 1)$ не меняются первая и вторая координаты (x и y соответственно), причем $x=0$, а $y=1$, тогда получим одночлен $x'y$.

Ответ: $f = z' \vee x'y$

Минимизация методом карт Карно

Составим двумерную таблицу значений нашей функции разделив переменные произвольным образом на две группы (предлагаем разделить на x и yz просто из-за того, что такая запись будет более протяженной горизонтально). Сочетания переменных упорядочим по коду Грея. Ко-

дом Грея называется двоичный код, у которого два соседних значения различаются не более чем в одной позиции. Получим:

x \ yz				
	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	1	0	0	1

С помощью прямоугольников площадью кратной степени 2, покрываем все единицы, не задевая нули. При этом ячейки, которые находятся на противоположных концах (как по горизонтали, так и по вертикали, но не по диагонали) считаются смежными. Прямоугольники могут пересекаться.

У нас получится:

x \ yz				
	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	1	0	0	1

Каждый из прямоугольников описывается в виде конъюнктивного одночлена, как и для графического способа. Получим:

$$f = z' \vee x'y$$

Минимизация методом Квайна

Выписываем все совершенные одночлены, для которых $f = 1$. Во втором столбце для удобства проведем их группировку по числу нулей в их записи.

000	000
010	010
011	100
100	011
110	110

Если в одночленах получается разница ровно в одной позиции, то заменяем «-».

В этом плане группировка удобна тем, что можно проверять только одночлены из соседних групп, например, первый из первой группы и первый из второй, первый из первой группы и второй из второй и т.д.

Помечаем одночлены, которые в этом участвовали. Результаты поместим в третий столбец. Получим:

000	*000	0-0
010	*010	-00
011	*100	01-
100	*011	-10
110	*110	1-0

Для удобства сгруппируем теперь по местоположению «прочерка»:

000	*000	0-0	-00
010	*010	-00	-10
011	*100	01-	0-0
100	*011	-10	1-0
110	*110	1-0	01-

Продолжаем этот процесс (объединения) пока возможно, считая прочерк третьим символом. При этом, с учетом последнего разбиения на группы, мы можем работать только в одной группе (нельзя объединить элементы разных групп). Не забывайте ставить пометки тех элементов, которые вы объединяете. Это важно!

000	*000	0-0	*-00	-0
010	*010	-00	*-10	
011	*100	01-	*0-0	
100	*011	-10	*1-0	
110	*110	1-0	01-	

	01-	-0
000		+
010	+	+
011	+	
100		+
110		+

Отбираем минимальное число столбцов, с суммарным минимальным числом переменных так, чтобы они покрыли все строки. Для этого вначале определим те одночлены, которые войдут в ядро (в этих строках только один «+», поэтому для них альтернативы нет). У нас это первый, третий, четвертый, пятый столбцы, значит одночлены 01 - и -0 обязательно войдут в ответ. В результате получим, что «+», соответствующие выбранным одночленам у нас автоматически будут в 1, 2, 3, 4, 5 строка.

$$f = x'y \vee z'$$