(C)

i) $H(t,S,Q) = Q\cdot S + h(t,Q)$ 에서 $h(t,Q) = h_0(t) + h_1(t)Q + h_2(t)Q^2$ 라고 가정하면

(단 $h_0(t), h_1(t), h_2(t)$ 는 시간 t에만 의존하는 함수이다)

$\partial_t H = \partial_t h_0 + \partial_t h_1 Q + \partial_t h_2 Q^2$, $\partial_S H = Q$, $\partial_{SS} H = 0$

$\partial_Q H = S + h_1(t) + 2\cdot h_2(t) Q$ 이고 이를 PDE에 대입하여 정리하면,

$0 = \partial_t H + \mu\cdot\partial_S H + \frac{1}{2}\sigma^2\cdot\partial_{SS}H + \frac{1}{4k}(S - \partial_Q H)^2$

$0 = \partial_t H + \mu Q + \frac{1}{4k}\left[(h_1(t))^2 + 4h_1(t)\cdot h_2(t)\cdot Q + 4h_2(t)^2 Q^2\right]$

이 식이 모든 Q에 대해 성립하려면 각항의 계수가 0이다. (Q에 대한 항등식)

$\partial_t h_0 = -\frac{1}{4k}(h_1(t))^2$, $\partial_t h_1 = -\mu - \frac{1}{k} h_1(t)\cdot h_2(t)$, $\partial_t h_2 = -\frac{1}{k} h_2(t)^2$

ii) $h_0(T) = h_1(T) = 0$, $h_2(T) = -\alpha$ boundary condition을 이용하여 각 미분 방정식들을 풀면,

① $\partial_t h_2 = -\frac{1}{k} h_2(t)^2$ 풀기

: $\frac{dh_2}{dt} = -\frac{1}{k}h_2^2$ 이고 즉 $\frac{dh_2}{h_2^2} = -\frac{1}{k}dt$ 이다.

양변을 적분하면 $-\frac{1}{h_2} = -\frac{t}{k} + C$ $\therefore h_2(t) = \dfrac{1}{\frac{t}{k} - C}$ 이고

$h_2(T) = -\alpha$ 대입하면, $-\alpha = \dfrac{1}{\frac{T}{k} - C}$ $\therefore C = \frac{T}{k} + \frac{1}{\alpha}$ $\therefore h_2(t) = \dfrac{-k}{(T-t) + \frac{k}{\alpha}}$

② $\partial_t h_1 = -\mu - \frac{1}{k} h_1(t)\cdot h_2(t)$ 풀기

: $\frac{dh_1}{dt} = -\mu - \frac{1}{k}h_1(t)\cdot\dfrac{-k}{(T-t)+\frac{k}{\alpha}}$ 이고

$h_1(t) = A(T-t)\cdot\dfrac{(T-t)+B}{(T-t)+\frac{k}{\alpha}}$ 를 trial solution 이라 하면,

$-A\cdot\dfrac{(T-t)+B}{(T-t)+\frac{k}{\alpha}} - \dfrac{A(T-t)}{(T-t)+\frac{k}{\alpha}} + \dfrac{A(T-t)(T-t+B)}{(T-t+\frac{k}{\alpha})^2} - \dfrac{A(T-t)(T-t+B)}{(T-t+\frac{k}{\alpha})^2} + \mu = 0$

$\Rightarrow -A(T-t+B) - A(T-t) + \mu(T-t+\frac{k}{\alpha}) = 0$

$\Rightarrow \underbrace{t(A+A-\mu)}_{=0} - \underbrace{AT - AB - AT + \mu T + \frac{\mu k}{\alpha}}_{=0} = 0$ (t에 대해 정리)

$\therefore \mu = \frac{1}{2}A$ $\quad -2AT - AB + \mu T + \frac{\mu k}{\alpha} = -\mu T - \frac{1}{2}\mu B + \mu T + \frac{\mu k}{\alpha} = 0$

$\therefore B = \frac{2k}{\alpha}$

$\therefore h_1(t) = \frac{1}{2}\mu(T-t)\cdot\dfrac{T-t+\frac{2k}{\alpha}}{T-t+\frac{k}{\alpha}}$

iii) 위에서 구한 $\partial_Q H$를 $v^* = \dfrac{S - \partial_Q H}{2k}$ 에 대입하면, $v^* = \dfrac{-h_1(t) - 2h_2(t)Q}{2k}$ 이고

위에서 구한 $h_1(t)$, $h_2(t)$를 대입하고 정리하면

$$v^* = \frac{-\frac{1}{2}\mu(T-t)\dfrac{(T-t)+\frac{2k}{\alpha}}{(T-t)+\frac{k}{\alpha}} + 2Q\cdot\dfrac{k}{(T-t)+\frac{k}{\alpha}}}{2k}$$

$$= \frac{Q_t^v}{(T-t)+\frac{k}{\alpha}} - \frac{1}{4k}\mu(T-t)\frac{(T-t)+\frac{2k}{\alpha}}{(T-t)+\frac{k}{\alpha}}$$

$\therefore$ 기대수익률(μ)가 크면 liquidation rate (v_t^*)가 줄어든다.

즉 트레이더는 주가가 시간이 지나면 올라갈 것으로 기대하고 있기에

초반에 매도 수량을 줄이고 후반에 매도 수량을 늘린다.

(d)

i) $d \to \infty$ 일때 $v_t^* = \frac{Q_t^{v*}}{T-t} - \frac{1}{4k}\mu(T-t)$ 이고 $Q_t^{v*} = \left(v_t^* + \frac{\mu(T-t)}{4k}\right)(T-t)$ 이다.

ii) $dQ_t^v = -v_t \, dt$ 에 대입하고 정리하면, $\frac{dQ_t}{dt} = -v_t$ 이고

$$\left(\frac{dv_t}{dt} + \frac{-\mu}{4k}\right)(T-t) + \left(v_t + \frac{\mu(T-t)}{4k}\right)(-1) = -v_t$$

$\therefore (T-t)\left(\frac{dv_t}{dt} - \frac{\mu}{4k} - \frac{\mu}{4k}\right) - v_t = -v_t$ $\quad \therefore \frac{dv_t}{dt} = \frac{\mu}{2k}$ $\quad \therefore v_t = \frac{\mu}{2k} + C$

$\therefore Q_t^{v*} = \left(C + \frac{\mu}{2k}t + \frac{\mu(T-t)}{4k}\right)(T-t)$

iii) $Q_0 = N$ 이므로

$Q_0^{v*} = \left(C + \frac{\mu T}{4k}\right)T = N$ $\quad \therefore C = \frac{N}{T} - \frac{\mu T}{4k}$

$\therefore Q_t^{v*} = \left(\frac{N}{T} - \frac{\mu T}{4k} + \frac{\mu t}{2k} + \frac{\mu(T-t)}{4k}\right)(T-t)$

$\therefore Q_t^{v} = (T-t)\left(\frac{N}{T} + \frac{\mu}{4k}t\right)$