Ch 20 Volatility 발표

변동성(Volatility)이란?

수학적 정의 : 1 표준편차 (%, 1-year)

금융에서 활용하는 다양한 변동성

- **Realized Volatility**
- **Implied Volatility**
- **Historical Volatility**
- **Future Volatility**
- **Long-Term Volatility**
- **Short-Term Volatility**

  위 변동성중, 어떠한 변동성을 사용하고 해석해야 하는 것일까?

Condition)

Underlying Price = 100
Time to Expiration = 8 weeks
Interest Rate = 0
Implied Volatility = 20%

Situation)

Buy 100 straddle at price 6.25 (Implied Vol 20%)
>> 델타 중립 포지션 (ATM Call, ATM Put 을 샀다)

이때 Implied Volatility가 2% 오른다면?

Case1) 한번에 Implied Volatility가 2% 오를 경우

다른 조건이 동일하고, 내재변동성만 2% 올랐으니, 100 straddle의 가격이 올라 이득

- 20% 내재변동성 스트래들의 가격 (**6.25**)

Buy / Sell	Quantity	Call / Put / Stock	Strike	Days to Expiry	Volatility, %	Premium	Debit / Credit
Buy	1	Call	100	56	**20**	3.1245	-3.1245
Buy	1	Put	100	56	**20**	3.1245	-3.1245
Total							**-6.249**

- 22% 내재변동성 스트래들의 가격 (**6.87**)

Buy / Sell	Quantity	Call / Put / Stock	Strike	Days to Expiry	Volatility, %	Premium	Debit / Credit
Buy	1	Call	100	56	**22**	3.4367	-3.4367
Buy	1	Put	100	56	**22**	3.4367	-3.4367
Total							**-6.8735**

>> 따라서 6.87 - 6.25 = **+0.62**

Case2) 천천히 3주에 걸쳐 Implied Volatility가 2% 오를 경우

""“옵션의 Time Decay 발생”""

- 3주뒤 22% 내재변동성 스트래들의 가격 (**5.43**)

Buy / Sell	Quantity	Call / Put / Stock	Strike	Days to Expiry	Volatility, %	Premium	Debit / Credit	
Buy	1	Call	100	35	**22**	2.7173	-2.7173	✖
Buy	1	Put	100	35	**22**	2.7173	-2.7173	✖
Total							**-5.4346**	

>> 따라서 5.43 - 6.25 = **-0.82**

Case3) 한번에 Implied Volatility가 2% 내릴 경우

- 18% 내재변동성 스트래들의 가격 (**5.62)**

Buy / Sell	Quantity	Call / Put / Stock	Strike	Days to Expiry	Volatility, %	Premium	Debit / Credit
Buy	1	Call	100	56	**18**	2.8122	-2.8122
Buy	1	Put	100	56	**18**	2.8122	-2.8122
Total							**-5.6243**

>> 5.62 - 6.25 = **-0.63**

Case4) 한번에 Implied Volatility가 2% 내려가며, 주가가 105 로 오를 경우

Positive Gamma 수익 발생

- 18% 내재변동성 스트래들의, 현재 주식가격이 105일때 (7.09)

Buy / Sell	Quantity	Call / Put / Stock	Strike	Days to Expiry	Volatility, %	Premium	Debit / Credit
Buy	1	Call	100	56	**18**	6.0459	-6.0459
Buy	1	Put	100	56	**18**	1.0459	-1.0459
Total							**-7.0918**

>> 7.09 - 6.25 = **+0.84**

Case5) 한번에 Implied Volatility가 2% 내려가며, 주가가 95 로 내려갈 경우

Positive Gamma 수익 발생 (확실하니?)

- 18% 내재변동성 스트래들의, 현재 주식가격이 95일때 (6.87)

Buy / Sell	Quantity	Call / Put / Stock	Strike	Days to Expiry	Volatility, %	Premium	Debit / Credit
Buy	1	Call	100	56	18	0.9366	-0.9366
Buy	1	Put	100	56	18	5.9366	-5.9366
Total							-6.8732

>> 6.87 - 6.25 = **+0.62**

옵션 포지션의 손익

Case 1 & Case 2

Implied Volatility 상승 < Time Decay

Case 3 & Case 4 & Case 5

Implied Volatility 변동 < Stock Price Movement

>>> “”“따라서 길게 옵션 포지션을 보유할 경우, Realized Volatility가 더욱 중요”””

>>> “””만기 보유시 Realized Volatility만 신경쓸 것”””

>>> 합리적인 변동성을 Theoretical Pricing에 활용하기 위해 노력해야한다.

Historical Vol

Goal : Estimating Future Realized Volatility

결국 Realized Volatility가 Implied Volatility를 Dominant 하기 때문

Common Method

모표준편차(Population Standard Deviation) & 표본표준편차(Sample Standard Deviation)

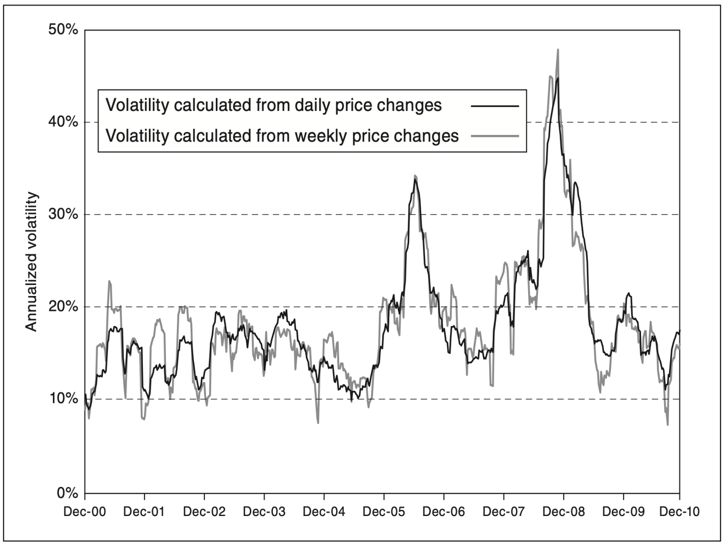
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{n}} \text{ or } \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{n-1}}$$

주요 Parameter

1. x_i : 수익률 (단순 수익률 or 로그 변환)

   보통 하루치를 사용해 90일 변동성 추정 > 일간 수익률이 보통 더 정확

Figure 20-2 Gold three-month historical volatility: 2001–2010.



2. μ : 평균 (zero-mean 가정)
3. n : 영업일 (365로 쓴다면, Calendar가 다른 경우 비교 용이)

Intraday Method

장중에 크게 움직이고, 종가는 변하지 않은 경우도 있을 것

1. **Extreme Value Method (Michael Parkinson)**

   고가와 저가를 변동성 계산에 활용

   Annualized Historical Vol Eq.

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{n\ln(2)}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\frac{h_i}{l_i}\right)^2}}{\sqrt{t}}$$

2. Expansion of Parkinson Method (Mark Garman and Michael Klass)

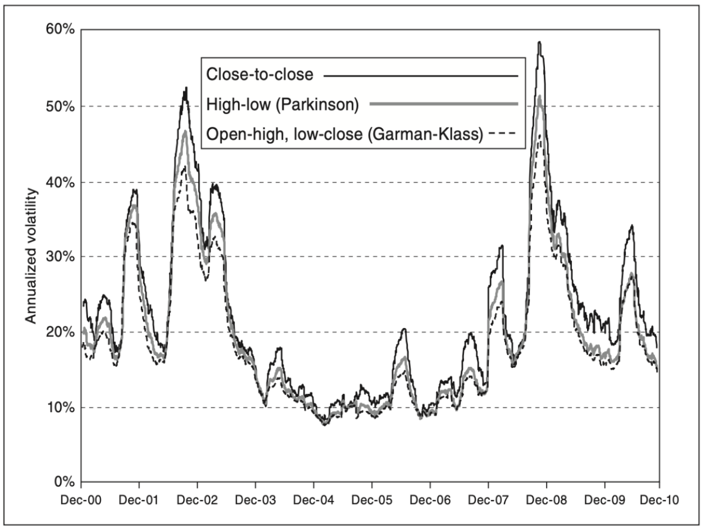
   시가와 종가를 변동성 계산에 활용

   Equation.

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\frac{h_i}{l_i}\right)^2-\frac{1}{n}[2\ln(2)-1]\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\frac{c_i}{o_i}\right)^2}}{\sqrt{t}}$$

Market이 열렸을 때 주로 사용.

Figure 20-3 EuroStoxx 50 Index three-month historical volatility: 2001–2010.



Historical Volatility의 해석

변동성의 특징으로 인해 Historical Volatility를 Future Realized Volatility의 Guideline으로 사용 가능.

변동성의 특징

1. Serial Correlation

   날씨처럼 과거의 변동성이 미래에도 발생할 수 있음

2. Mean Reverting

   변동성은 특정 Mean으로 수렴하는 경향이 있음

   - Mean Volatility

Figure 20-2 Gold three-month historical volatility: 2001–2010.

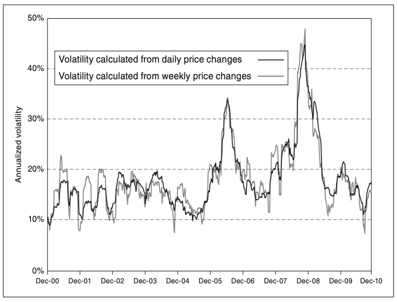
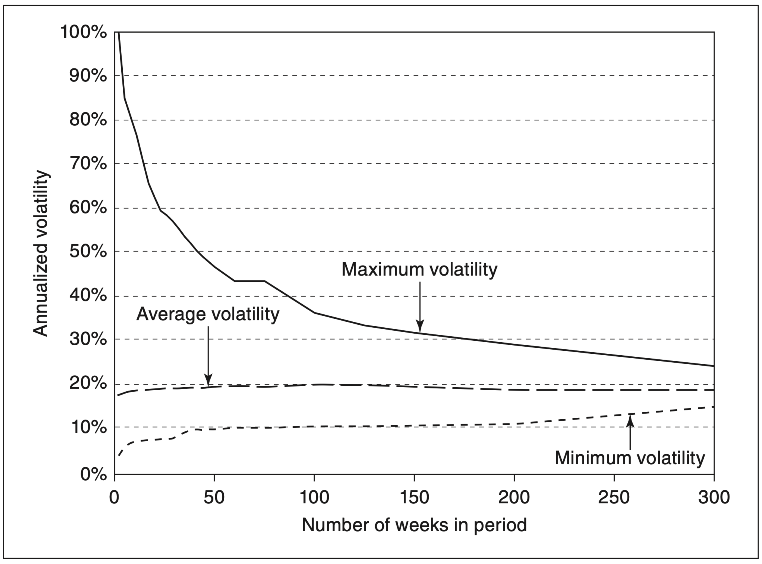


Figure 20-4 Gold futures prices: 2001–2010.

   - Long Term Average

Figure 20-6 S&P 500 Index historical realized volatility by time period: 2001–2010.



Term Structure를 확인 가능

Short-Term : Large Variation / Long-Term : Small Variation

Long Term Volatility의 추정은 가능해 보임

cf) Long Term Option Valuing

장기 변동성을 추정할 수 있다고 해도, 장기 옵션 가치 평가는 어렵다

>> 장기 옵션의 큰 베가 (v) 값으로 인해 변동성 변화에 예민하기 때문 (Error가 과하게 반응됨)

3. Trend

Major Trend, Minor Trend 의 가능성

Volatility Forecasting

Historical Volatility & Volatility Feature를 활용해 Future Realized Volaility 예측

Condition)

	6주	12주	26주	52주
역사적 변동성	28%	22%	19%	18%

1) Simple Average

$$(28\% + 22\% + 19\% + 18\%)/4 = 21.75\%$$

2) Different Weight

- **최신 값에만 가중치 부여**

$$(40\% \times 28\%) + (20\% \times 22\%) + (20\% \times 19\%) + (20\% \times 18\%) = 23.0\%$$

- **최신값부터 순차적을 가중치 부여**

$$(40\% \times 28\%) + (30\% \times 22\%) + (20\% \times 19\%) + (10\% \times 18\%) = 23.4\%$$

- **옵션의 경우**

  >> Relative Weight의 경우 Remaining Expiration of Option에 따라 다르게 부여

  >> Serial Feature을 생각해볼 때, 옵션의 만기를 가장 많이 Cover하는 Volatility에 Weight 부여

  - **5개월 만기 옵션의 경우**

$$(15\% \times 28\%) + (25\% \times 22\%) + (35\% \times 19\%) + (25\% \times 18\%) = 20.85\%$$

  - **3개월 만기 옵션의 경우**

$$(25\% \times 28\%) + (35\% \times 22\%) + (25\% \times 19\%) + (15\% \times 18\%) = 22.15\%$$

>> Time Matching을 통해, 정확한 Historical Volatility를 활용할 수 있음

3) Time Series Analysis

$i.i.d$ 가정 필요 > Stock Return으로 추정

1. EWMA model (Exponentially Weighted Moving Average)

   가까운 Return에 Greater Weight가 부여된다.

   $\sigma^2 = \alpha_1 r_1^2 + \alpha_2 r_2^2 + \cdots + \alpha_{n-1} r_{n_1}^2 + \alpha_n r_n^2$

   $s.t.\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_1 = 1.00,\ \alpha_n > \alpha_{n-1}$

   $0 < \lambda < 1,\ \alpha_i = \frac{\lambda^{i-1}(1-\lambda)}{1-\lambda^n}$

   λ값이 작아지면, 점점 더 가까운 Return에 큰 weight가 부여

   λ가 1에 가까울수록, 모든 weight가 동일하게 분배 >> Commonly 0.94

   >> Serial과 Mean Reverting 특징이 무시됨

2. ARCH model (Autoregressive Condtional Heteroskedasticity) Robert Engle

3. GARCH model (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity)

   1) Volatility Estimate (EWMA)

   2) Mean Reversion Components

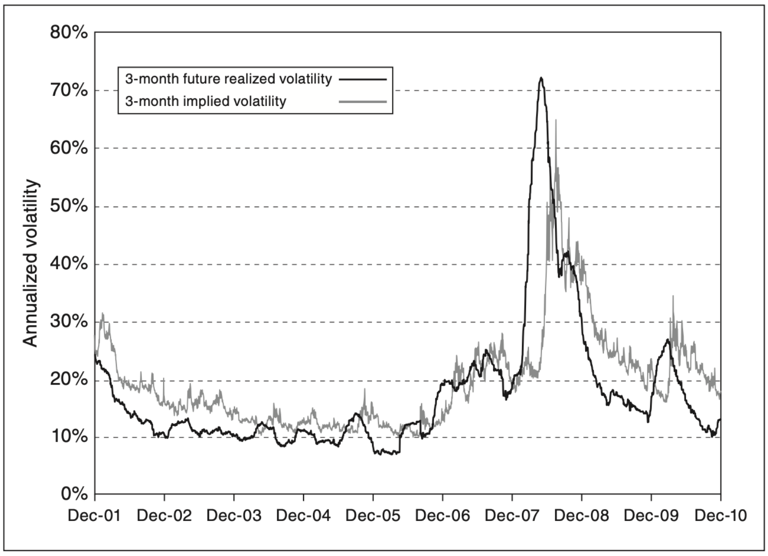
Future Volatility Forecasting with Implied Volatility

시장의 모든 정보가 가격에 반영된다면 Implied Volatility로 Future Volatility를 예측할 수 있을 것

정말 그런 것일까?

ex) 3 month Realized Volatility of S&P 500과 3개월 ATM 옵션의 Implied Volatility Rolling 비교

Figure 20-9 S&P 500 Index three-month future volatility versus the three-month implied volatility.



일반적으로, S&P500 변동성 지수는 내재 변동성보다 앞선다.

>> Index가 더 Volatile해지지면, 내재 변동성이 오르고, 반대는 내려간다.

>> 시장은 Index Vol에 따라 움직이는 것처럼 보인다. (Especially 07-08)

내재변동성과, 실현변동성의 관계

일반적으로 내재 변동성은 실현 변동성보다 높다.

>> 옵션의 보험적 성격 / 옵션 복제비용의 전가 / 모델의 불완전성 등의 이유로 옵션은 보통 Overprice 됨

그러나, 만기가 다른 옵션의 내재 변동성을 비교하면 Implication을 얻을 수 있다.

내재변동성의 기간구조 (Term Structure of Implied Volatility)

실제 옵션 거래에서 내재 변동성의 변화에 따라 포지션이 변하는 것을 확인한다.

>> 이는 보통 Vega를 통해 실행되며, 계산에 내재변동성의 기간구조 모델을 활용한다.

Position) Vega = 0

	April	June	August	October
Time to expiration	2 months	4 months	6 months	8 months
Total vega	+15.00	–36.00	–21.00	+42.00

Condition)

- 3개월 만기 옵션의 변동성 (기초자산의 변동성 25%)

	March	June	September
Implied volatility	25%	25%	25%

만기가 다르므로, 기초자산의 변동성 변화에 따른 내재변동성의 변화는 다를 것

- 기초자산의 변동성↑

	March	June	September
Implied volatility	30%	28%	26%

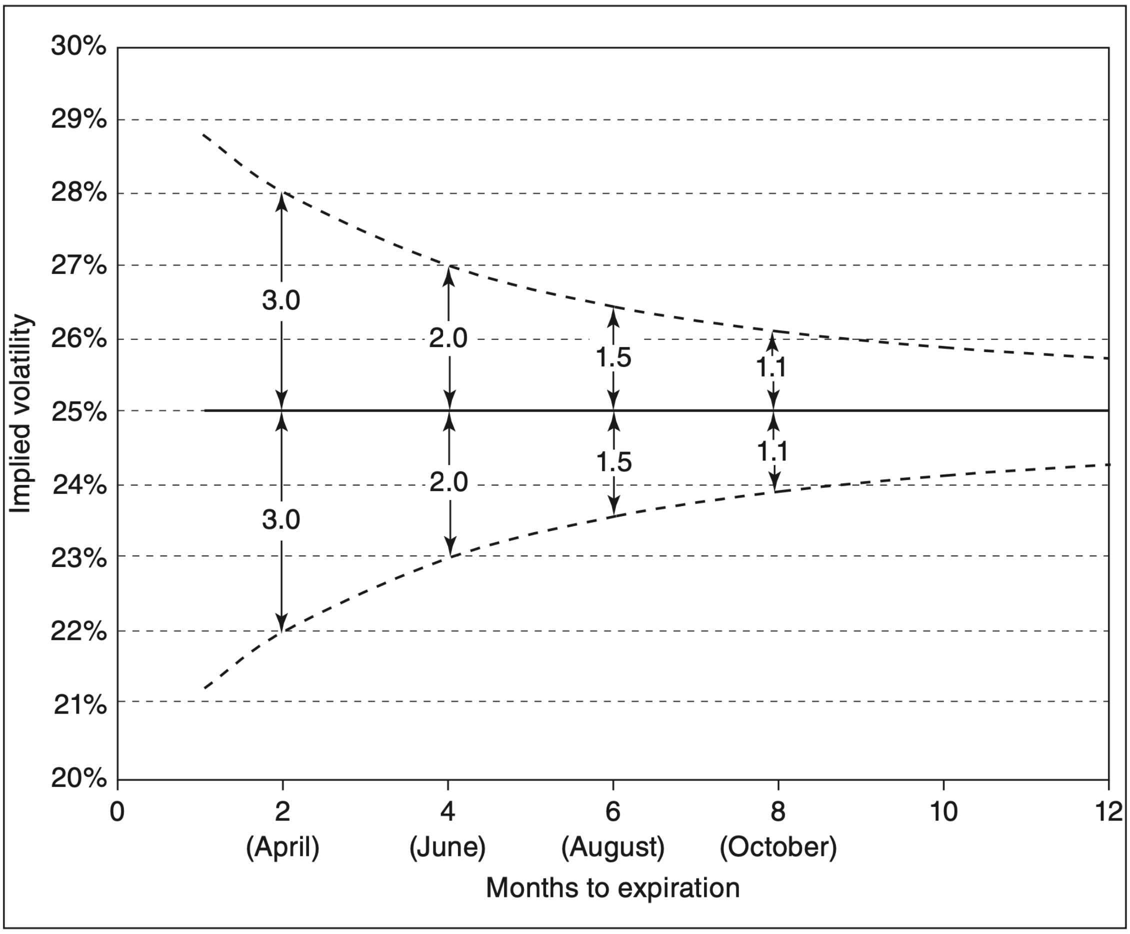
- 기초자산의 변동성↓

	March	June	September
Implied volatility	20%	22%	24%

변동성의 Mean Reverting 특성으로 인해, 만기가 길수록 움직임이 적을 것

위 두 상황에 대한 Term Structure를 그려보면 아래와 같다

Figure 20-13 Relative changes in implied volatility for April, June, August, and October options.



변동성 변화에 따른 내재변동성이 다르게 변화하므로, 각 만기의 Vega를 적절하게 조절할 필요가 있다.

Maturity	6월	8월	10월
IV Ratio	2/3	1.5/3	1.1/3

위 값을 통해 4월의 내재변동성 변화에 따른 포트폴리오의 가치 변화를 추정한다.

$$\text{June vega} = -36.00 \times 0.67 = -24.12$$
$$\text{August vega} = -21.00 \times 0.5 = -10.50$$
$$\text{October vega} = +42.00 \times 0.37 = +15.54$$

$$+15.00 - 24.12 - 10.50 + 15.54 = -4.08$$

기간구조 모델의 Inputs

- Primary Month

  기준이 되는 월

  >> 기초자산의 특성에 따라 변화 (기초자산의 특성, Seaonality를 고려해서 설정)

- Mean Volatility : Mean Reverting 정도
- Whippiness Factor : Primary를 기준으로 만기까지 변하는 것을 정도

Forward Volatility

내재 변동성의 기간구조를 활용해 투자기회를 찾을 수 있는가?

>> 내재 변동성↑(고평가) > 매도

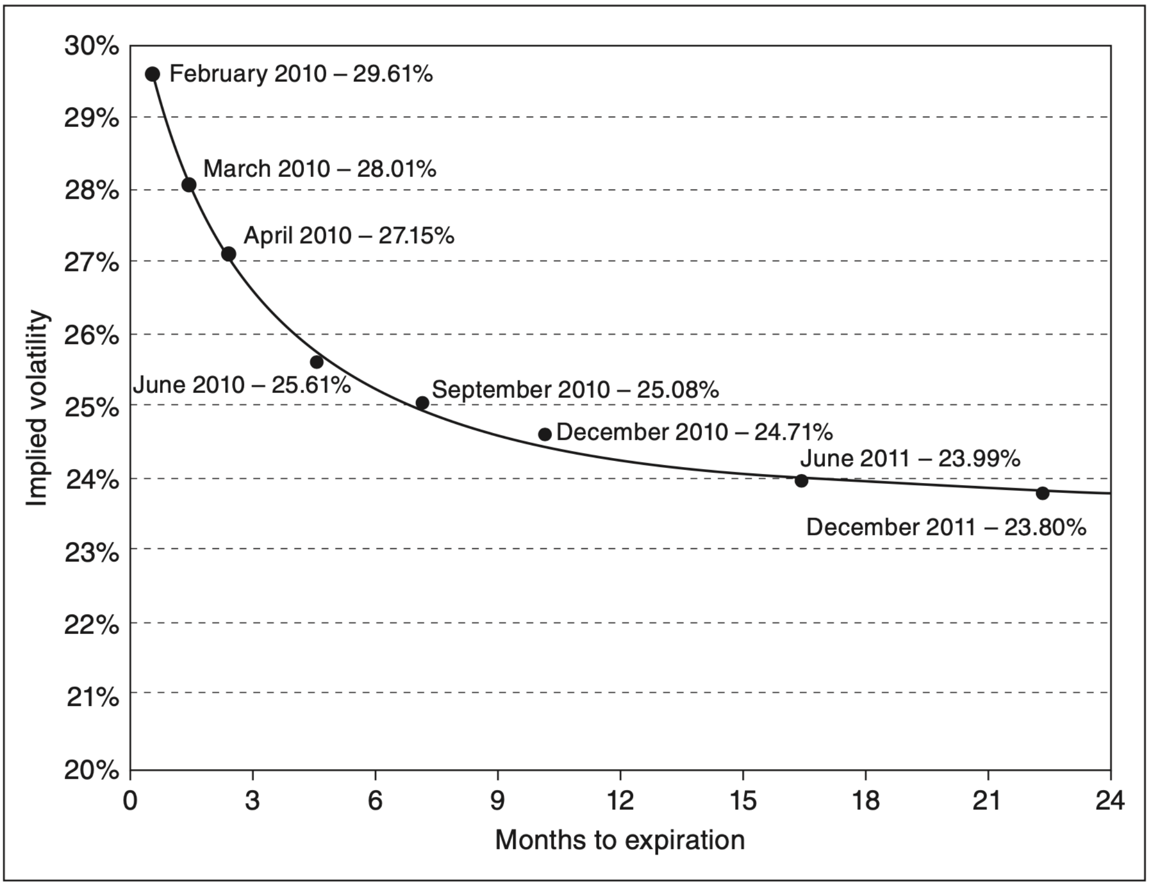
>> 내재 변동성↓(저평가) > 매수

Mispricing 기준은? (1. 캘린더 스프레드, 2. Forward Volatility)

캘린더 스프레드 활용

ex) 2월 5일의 ATM 옵션들의 내재변동성 그래프

Figure 20-18 Implied volatility for at-the-money EuroStoxx 50 Index options on February 5, 2010.



Best Linear 라인을 벗어났을 경우, 거래를 진행하는 것이 옳을까.

옵션 거래자들은 캘린더 Spread의 Misprice를 Implied Volatility Spread를 통해 결정함.

ex) 현재 기초자산의 가격이 100이고 무위험이자율은 없다고 생각해보자.

Figure 20-19 Calendar spread values using implied volatilities on February 5, 2010.

Expiration Month	Time to Expiration (days)	Implied Volatility	Price of the 100 Call	Vega of the 100 Call
February 2010	14	29.61%	2.31	0.078
March 2010	42	28.06%	3.80	0.135
April 2010	70	27.15%	4.74	0.174
June 2010	133	25.61%	6.15	0.240
September 2010	224	25.08%	7.82	0.311
December 2010	315	24.71%	9.14	0.368
June 2011	497	23.99%	11.13	0.461
December 2011	679	23.80%	12.89	0.537

Calendar Spread	Spread Price	Spread Implied Volatility	Spread Vega
February 2010 / March 2010	1.49	25.94%	0.057
March 2010 / April 2010	0.94	24.02%	0.039
April 2010 / June 2010	1.41	21.50%	0.066
June 2010 / September 2010	1.67	23.28%	0.071
September 2010 / December 2010	1.32	22.70%	0.071
December 2010 / June 2011	1.99	21.13%	0.093
June 2011 / December 2011	1.76	22.67%	0.076

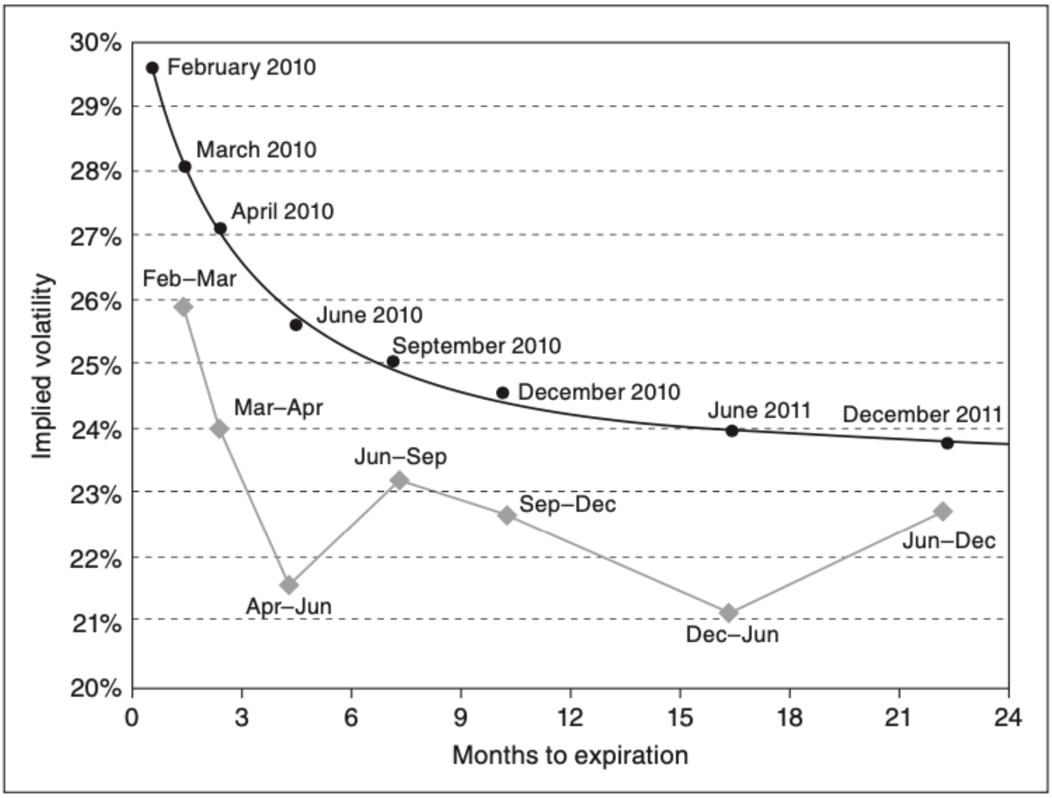
2월 / 3월 캘린더 스프레드 = 25.94%

>> 위 값은 28.06% (3월) 보다 작다. 따라서 2월물이 Overprice 되어 있는 것을 알 수 있다.

각각 적용해서, Calendar Spread의 임볼을 계산.

>> 위 변동성을 20-18에 표시 6월물이 Underprice 된 것을 볼 수 있다.

Figure 20-20 EuroStoxx 50 Index calendar spread implied volatilities on February 5, 2010.



따라서 4/6월 Spread 매수, 6월 옵션을 매도하여 Time Butterfly 포지션을 구축하게 된다.

Implied Volatility Spread의 특징

만약 Term Structure Graph가 Downward Sloping의 형태

>> 모든 임볼의 Calendar Spread는 Term Structure Graph의 아래에 위치한다. (이는 반대도 성립)

만약, 모든 임볼이 Best Fit 라인에 정확히 맞음

>> Term Structure의 구조와 상관없이, smooth하게 떨어진다. (No Misprice)

ATM 캘린더 스프레드의 임볼은 추정이 가능하다.

>> (ATM 옵션의 베가가 상대적으로 변동성의 움직임에 대해 Constant하기 때문)

캘린더 스프레드를 구성하는 두 옵션의 가격과 베가값을 아래와 같이 정의하자.

$O_1, O_2 : Prices \quad V_1, V_2 : Vega\ Values$

Then,

$\text{Price Spread} = O_2 - O_1$

$\text{Vega Spread} = V_2 - V_1$

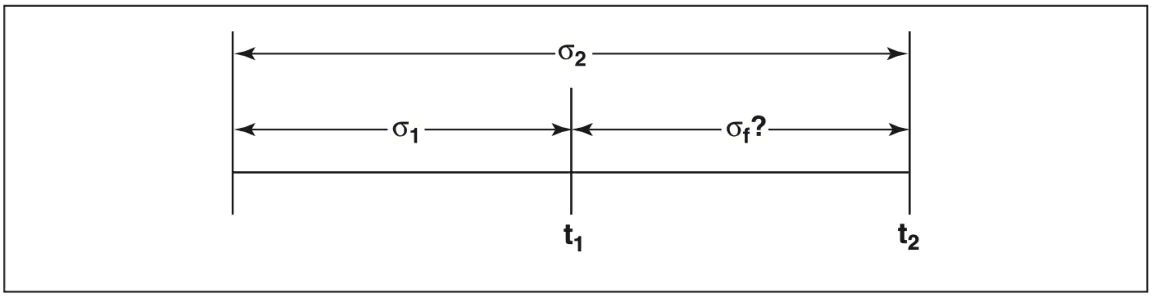
이때, 임볼 스프레드는 일반적으로 아래와 같이 추정된다.

$$\text{Implied Volatility of Spread} = (O_2 - O_1)/(V_2 - V_1)$$
$$\text{Implied Volatility of Spread} = (\text{Price Spread})/(\text{Vega spread})$$

이 값이 정확하진 않으나, 이 방법은 트레이더들이 빠르게 캘린더 스프레드의 Misprice를 추정할 때 요긴하게 사용된다. (오차는 적음)

IV Spread By Cal	오차
0.261403509	-0.0020035
0.241025641	-0.0008256
0.213636364	0.00136364
0.235211268	-0.0024113
0.231578947	-0.0045789
0.213978495	-0.0026785
0.231578947	-0.0048789

Theoretical Approach : Forward Volatility



두 개의 만기를 가지고 있다고 가정(t_1: 단기, t_2: 장기)

$\boldsymbol{\sigma_1}$: t_1 시점의 임볼

$\boldsymbol{\sigma_2}$: t_2 시점의 임볼

이때, Forward Volatility ($\sigma_{\mathbf{f}}$) 는?

Solving Equation

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{(\sigma_2^2 \times t_2) - (\sigma_1^2 \times t_1)}{t_2 - t_1}}$$

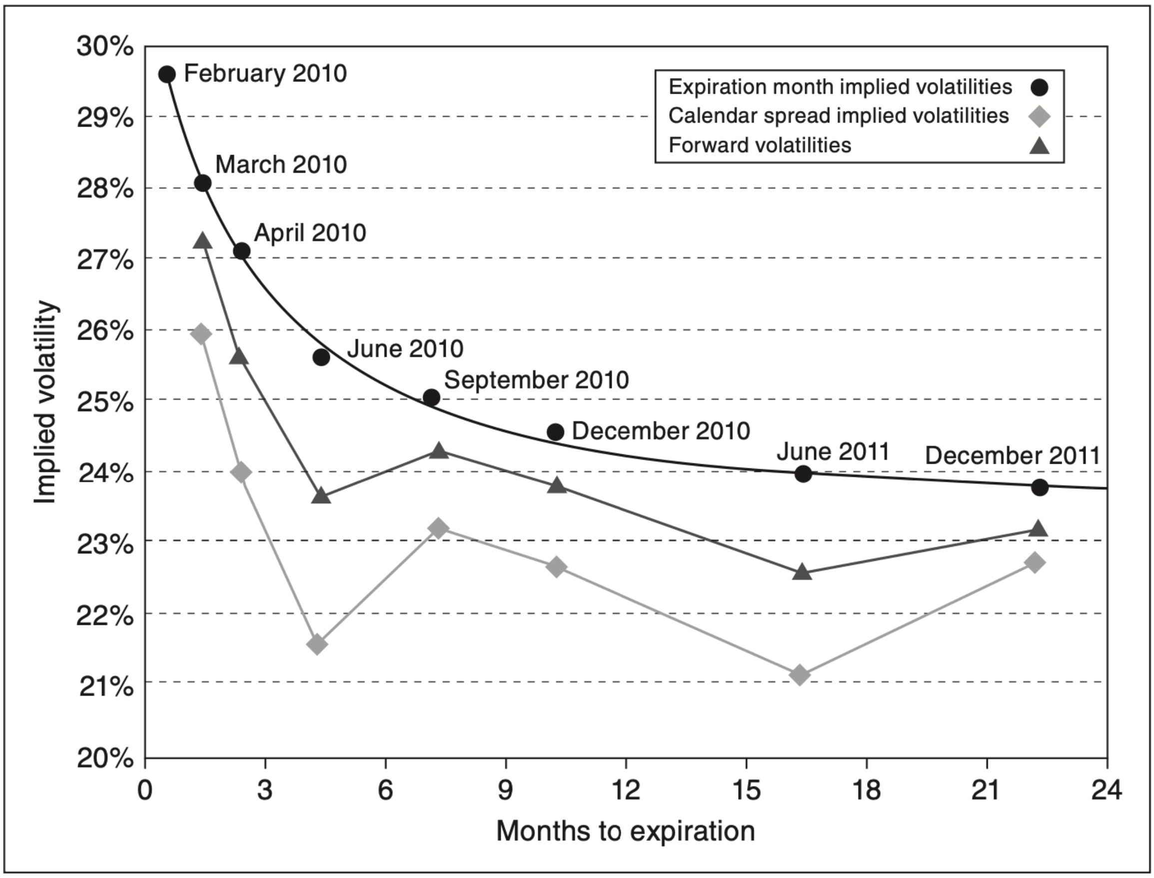
이자율과 다르게, 변동성은 시간의 제곱근에 비례한다. (Recall 분산과 시간의 비례관계)

위 식을 보다 일반화 하면, 아래와 같이 특정 기간의 변동성을 구할 수 있다.

$$\sigma_{t_n - t_0} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma^2_{t_i-(t_i-1)} \times (t_i - t_{i-1})}{t_n - t_0}}$$

위 Foward Vol 추정 공식을 가지고, 위 사례의 Term Structure에 대해 고민해보자. 우리는 이걸 어떻게 비교해야 할까?

Figure 20-21



Forward Vol의 모습은 Calender Spread Graph의 모습과 유사하다.

위 옵션들은 유사한 목적을 가지고 있다. (특정 만기월의 Mispricing 여부를 체크하려는 목적)

변동성을 다루는 것은 어려움. 이러한 변동성에 대한 의사결정을 위해 변동성의 특징을 일반화 해야함.

그렇게 하더라도, Clear한 전략을 찾는 것은 어려움.

분석용 데이터의 부족, 시장에 따른 변동성의 특징, 이자율, 환율, 주식, 상품 선물 등에 대한 이해가 필요.