Topic One

Basics

Section I

Market Prices and Rates

Discount Factors from Treasuries

coupon	price	11/30/10	5/31/11	11/30/11	5/31/12	11/30/12	5/31/13	11/30/13	5/31/14	11/30/14
1.25	100.55	100.625								
4.875	104.513	2.4375	102.4375							
4.5	105.856	2.25	2.25	102.25						
4.75	107.966	2.375	2.375	2.375	102.375					
3.375	105.869	1.6875	1.6875	1.6875	1.6875	101.6875				
3.5	106.76	1.75	1.75	1.75	1.75	1.75	101.75			
2	101.552	1	1	1	1	1	1	101		
2.25	101.936	1.125	1.125	1.125	1.125	1.125	1.125	1.125	101.125	
2.125	100.834	1.0625	1.0625	1.0625	1.0625	1.0625	1.0625	1.0625	1.0625	101.0625

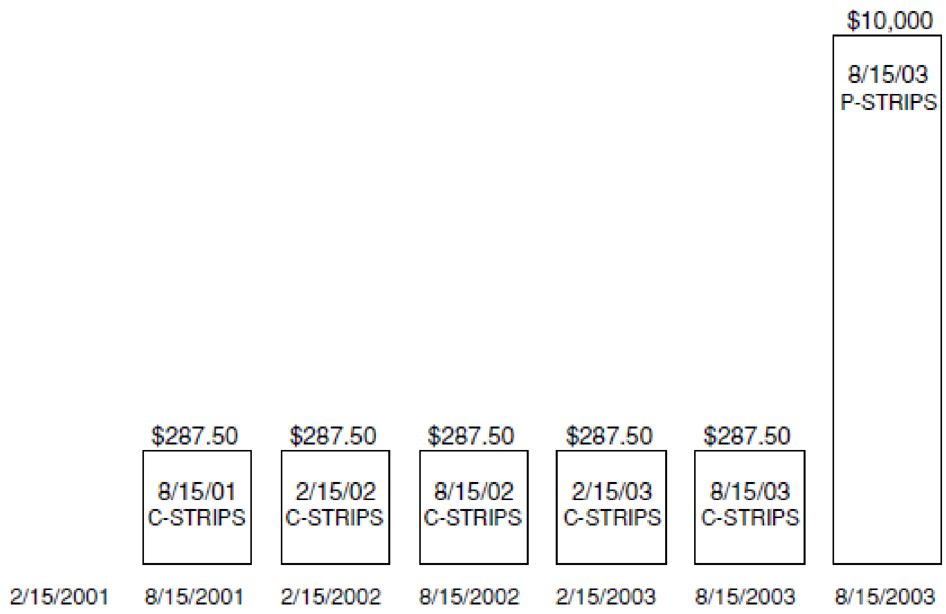
disc factor	0.999255	0.996484	0.99135	0.985315	0.975199	0.964144	0.946933	0.931718	0.915836

$$\sum_t \text{cash\_flow}(t)\mathsf{d}(t) = \mathsf{P}$$

Cash flows in further future dates are discounted more heavily

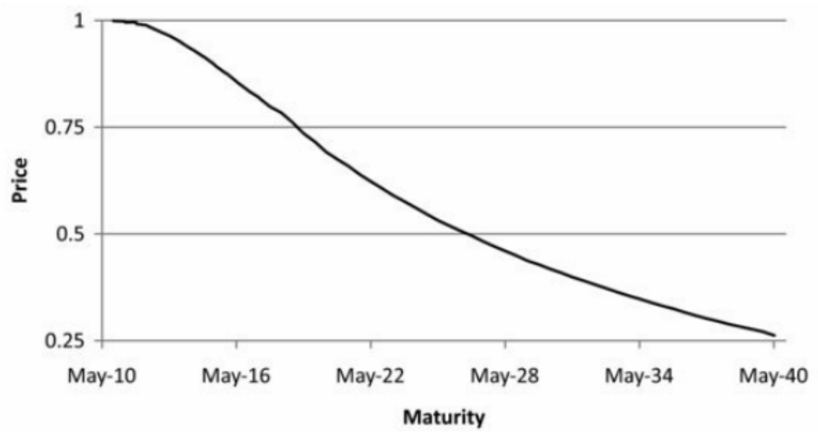
Treasury Strips

- STRIPS are created when someone delivers a particular coupon bond to the Treasury and asks for it to be stripped into its principal and coupon components

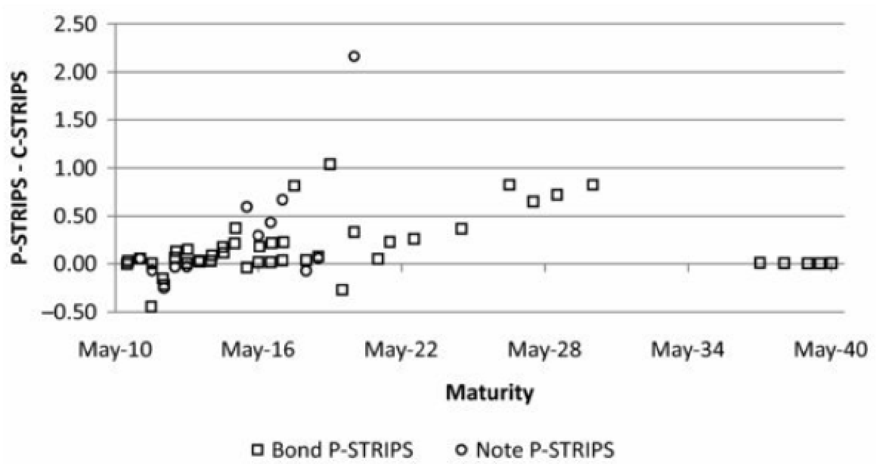


Stripping of $5^3/_4$ of Aug 15, 2003

- STRIPS prices are discount factors

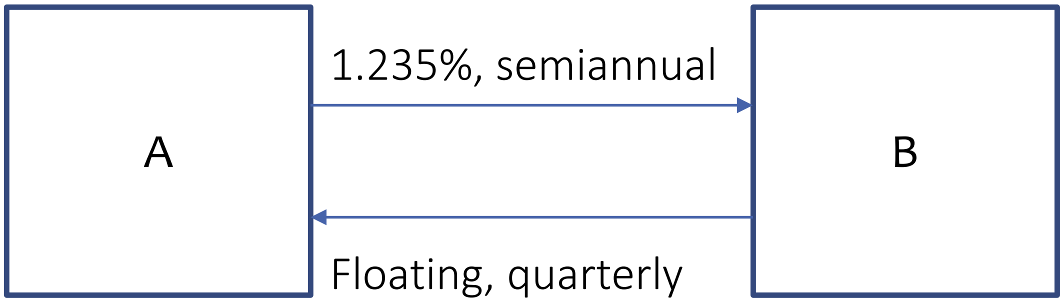


- But there are differences between the two types



Interest Rate Swap

- Parties A, B agree to exchange interest payments on 2010.05.28



- Term: 2 years
- Notional: $100 million
- Day count of fixed leg: 30/360 (if fall on non-business day, interests accrue)
- Day count of floating leg: actual/360

payment dates	day of week	nb of days	floating rate	fixed	floating
2010-06-02	Wed		0.50%		
2010-09-02	Thu	92	0.75%		127,778.00
2010-12-02	Thu	91	0.75%	617,500	189,583.00
2011-03-02	Wed	90	0.75%		187,500.00
2011-06-02	Thu	92	0.75%	617,500	191,667.00
2011-09-02	Fri	92	1%		191,667.00
2011-12-02	Fri	91	1%	617,500	252,778.00
2012-03-02	Fri	91	1%		252,778.00
2012-06-04	Mon	94		624,361.00	261,111.00
	TEXT(B14,"ddd")	B14-B13			

- Trade date: 2010-05-28 (Fri)
- Settlement: T+2 (US) → 2010-06-01 (Tue)
- Interest begins to accrue on 2010-06-02
- Floating rate fixing: 2 business days prior to the reset date

- Fixed leg payments

$$\frac{180}{360} \times 1.235\% \times \$100,000,000$$

  - On 2012-06-04, two extra days due to weekend → add

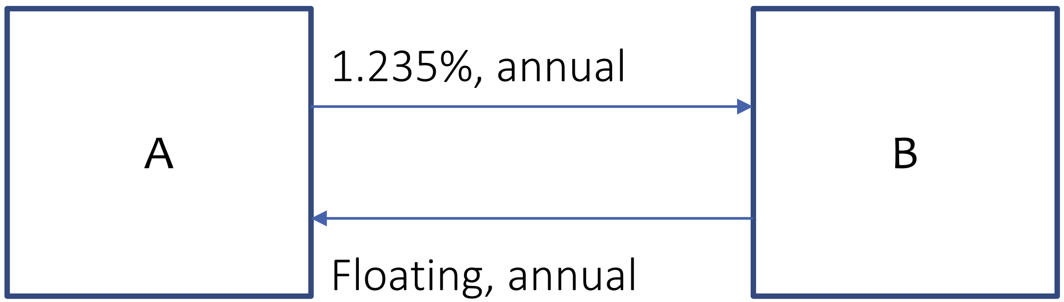
$$\frac{2}{360} \times 1.235\% \times \$100,000,000$$

- Floating leg payments
  - Observed on date x (set in advance) and paid x+3-month (paid in arrears)

$$\frac{\text{nb of days}}{360} \times \text{floating rate}\% \times \$100,000,000$$

SOFR Swap

- Parties A, B agree to exchange interest payments



- Floating rate = daily compounded SOFR, realized at the end of year
- E.g. 1% for 180, 2% for 185 days, then $\left(1+\frac{.01}{360}\right)^{180}\left(1+\frac{.02}{360}\right)^{185}$ under act/360 convention

- Fixed leg payment per year = $1.235\% \times \frac{365}{360}$
- 2-year SOFR swap makes annual payments
- SOFR swap maturing less than 1 year makes one payment at mat
- SOFR swap maturing in, say 1.5 years, makes a payment at t=.5 and another at t=1.5
- Pricing approach is the same, and the only difference is in the payment schedule

- For notional 100m usd, fixed leg pays at the end of 1st year

$$100,000,000 \times 1.235\% \times \frac{365}{360} = 1,252,153$$

- Floating leg pays

$$100,000,000 \times \left[\left(1 + \frac{.01}{360}\right)^{180} \left(1 + \frac{.02}{360}\right)^{185} - 1 \right] = 1,539,472$$

Discount Factors from IRS

- Swap rates observed on 2010-05-28

term (years)	swap rate
0.5	0.705%
1	0.875%
1.5	1.043%
2	1.235%
2.5	1.445%

- Let us ignore the details about payment date convention and simply denote discount factors by d(.5), …, d(2.5) in years

- If we add fictitiously the notional payment at maturity, the fixed leg of an IRS is just like a coupon bond at par

term (years)	swap rate	.5 year	1 year	1.5 year	2 year	2.5 year
0.5	0.705%	100.3525				
1	0.875%	0.4375	100.4375			
1.5	1.043%	0.5215	0.5215	100.5215		
2	1.235%	0.6175	0.6175	0.6175	100.6175	
2.5	1.445%	0.7225	0.7225	0.7225	0.7225	100.7225

- Same method applies

$$\sum_t \text{cash\_flow}(t)\mathsf{d}(t) = \mathsf{P} = 100$$

term	0.5	1	1.5	2	2.5
d(t)	0.99648788	0.99130341	0.9844995	0.97562164	0.96450776

Example

- SOFR swap rates on 2021.5.14 (Fri)

term	swap rate
0.5	0.034
1	0.046
1.5	0.067
2	0.112

- # of days from settlement until payments

term	11/18/2021	05/18/2022	11/18/2022	05/18/2023
0.5	184			
1		365		
1.5	184		365	
2		365		365

- First discount factor d(.5) satisfies

$$100\left(1+.034\%\frac{184}{360}\right)\mathsf{d}(.5)=100$$

- Second discount factor d(1) satisfies

$$100\left(1+.046\%\frac{365}{360}\right)\mathsf{d}(1)=100$$

- Third discount factor d(1.5) satisfies

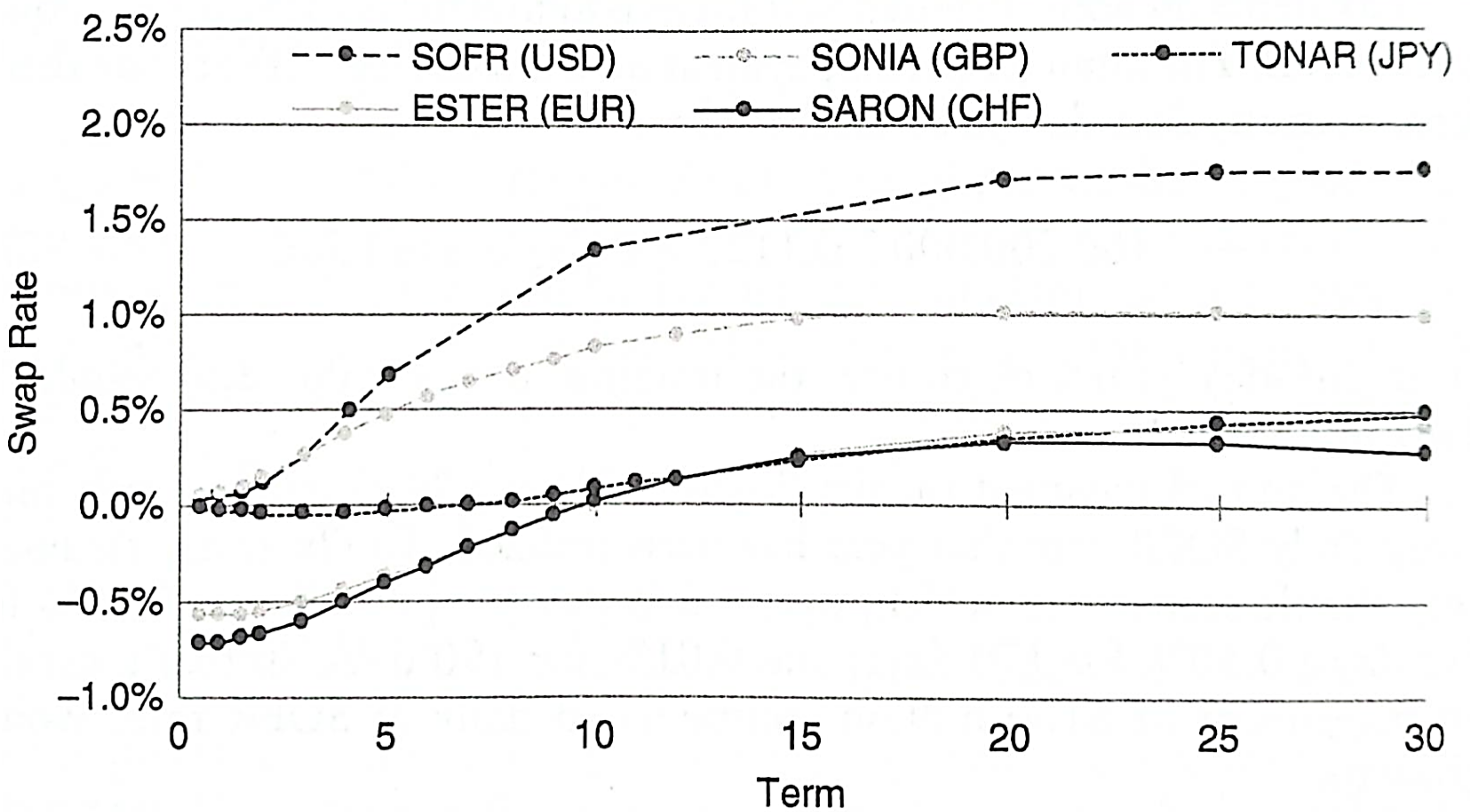
$$100\times.067\%\frac{184}{360}\mathsf{d}(.5)+100\left(1+.067\%\frac{365}{360}\right)\mathsf{d}(1.5)=100$$

- The last discount factor d(2) satisfies

$$100 \times .112\% \frac{365}{360} \mathsf{d}(1) + 100 \left(1 + .112\% \frac{365}{360}\right) \mathsf{d}(2) = 100$$

- Final results are

term	swap rate	discount factor
0.5	0.034	0.999826
1	0.046	0.999534
1.5	0.067	0.998979
2	0.112	0.997732



As of 2021.5.14

Spot Rates

- Assume semi-annual compounding
- R(t): interest rate for a spot loan in t years

$$d(t) = \frac{1}{\left(1 + \frac{R(t)}{2}\right)^{2t}}$$

term	0.5	1	1.5	2	2.5
d(t)	0.99648788	0.99130341	0.9844995	0.97562164	0.96450776
r(t)	0.705%	0.875%	1.044%	1.238%	1.451%

Forward Rates

- Assume semi-annual compounding

- F(t-0.5,t): interest rate on a forward loan from t-0.5 year to t-year
  - Forward loan: agreement to lend money at time 0 for a future period

$$\left(1+\frac{\mathsf{R}(t)}{2}\right)^{2t} = \left(1+\frac{\mathsf{R}(t-0.5)}{2}\right)^{2t-1}\left(1+\frac{\mathsf{F}(t-0.5,t)}{2}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1+\frac{\mathsf{F}(t-.5,t)}{2} = \frac{\mathsf{d}(t-0.5)}{\mathsf{d}(t)}$$

term	0.5	1	1.5	2	2.5
d(t)	0.99648788	0.99130341	0.9844995	0.97562164	0.96450776
R(t)	0.705%	0.875%	1.044%	1.238%	1.451%
F(t-.5,t)	0.705%	1.046%	1.382%	1.820%	2.305%

Compounding Conventions

- A single investment opportunity with multiple rates under different compounding conventions
  - \$1 → \$1.02 at the year end

$$\left(1 + \frac{\mathsf{R}^{\mathrm{sa}}(1)}{2}\right)^2 = 1.02$$

$$\left(1 + \frac{\mathsf{R}^{\mathrm{m}}(1)}{12}\right)^{12} = 1.02$$

$$\left(1 + \frac{\mathsf{R}^{\mathrm{d}}(1)}{365}\right)^{365} = 1.02$$

$$\exp\left(\mathsf{r}(1) \times 1\right) = 1.02$$

Spot and Forward

- Continuously compounded spot and discount factor

$$\exp\left(\mathsf{r}(t)t\right) = \frac{1}{\mathsf{d}(t)}$$

- Continuous compounding spot and forward r(t), f(u,v)

$$\exp\left(\mathsf{r}(t-\delta)(t-\delta)\right) \times \exp\left(\mathsf{f}(t-\delta,t)\delta\right) = \exp\left(\mathsf{r}(t)t\right)$$

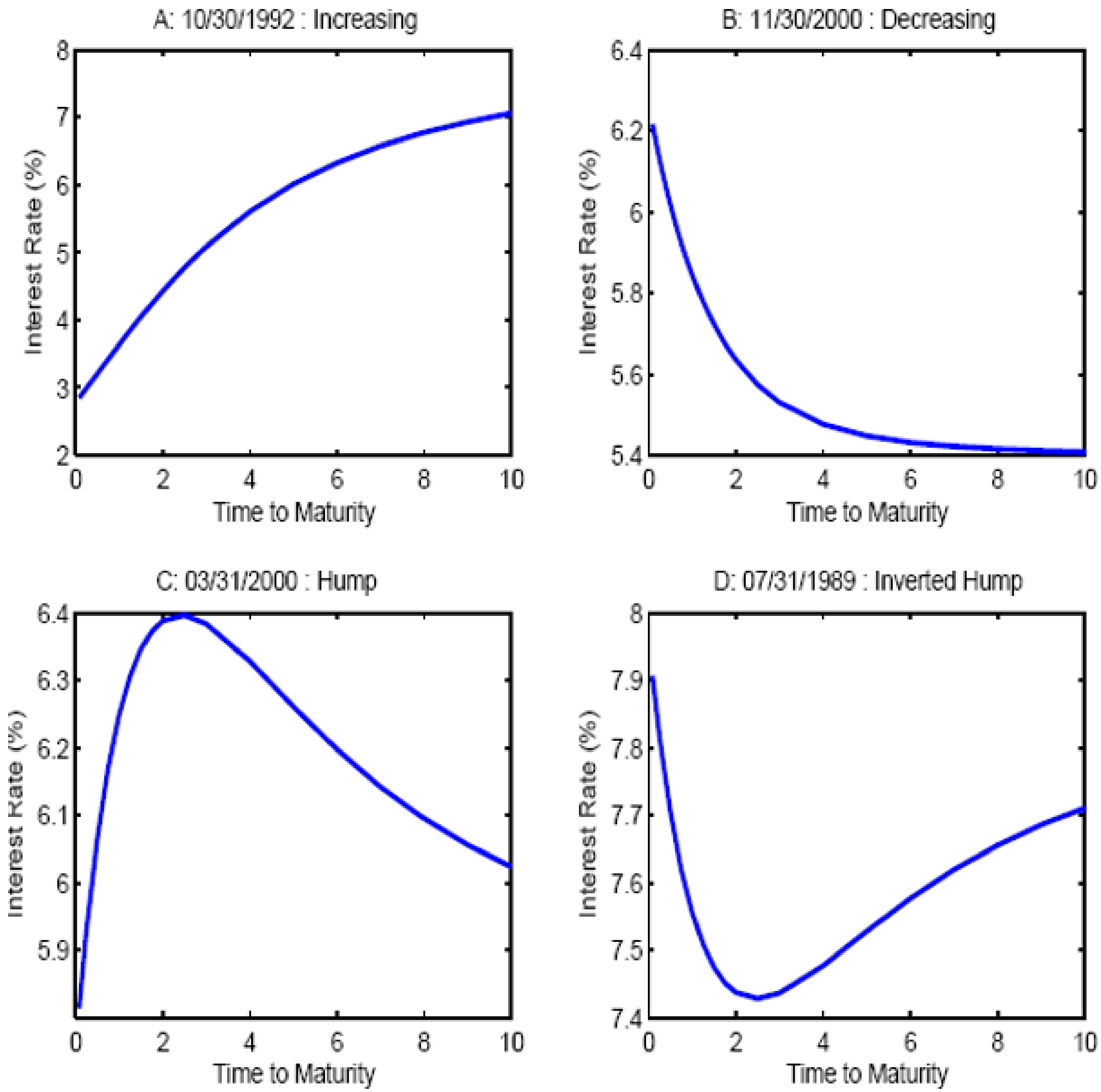
$$\mathsf{f}(t-\delta,t)\delta = \ln\mathsf{d}(t-\delta) - \ln\mathsf{d}(t)$$

- Instantaneous forward rate f(t)

$$\boxed{\mathsf{f}(t) = -\frac{\mathsf{d}'(t)}{\mathsf{d}(t)}} \Rightarrow \mathsf{d}(t) = e^{-\int_0^t \mathsf{f}(s)\mathrm{d}s}$$

Term Structure

- **Spot (rate) curve** / **yield curve** is the relation between r(t) vs. t
- **Discount curve** is the relation between d(t) vs. t
- **Forward curve** is the relation between f(t,t+Δ) vs. t for a fixed Δ



Spot curves
Source: Veronesi

- Forward curve derivation

$$\exp\left(\mathsf{r}(t-\delta)(t-\delta)\right) \times \exp\left(\mathsf{f}(t-\delta,t)\delta\right) = \exp\left(\mathsf{r}(t)t\right)$$

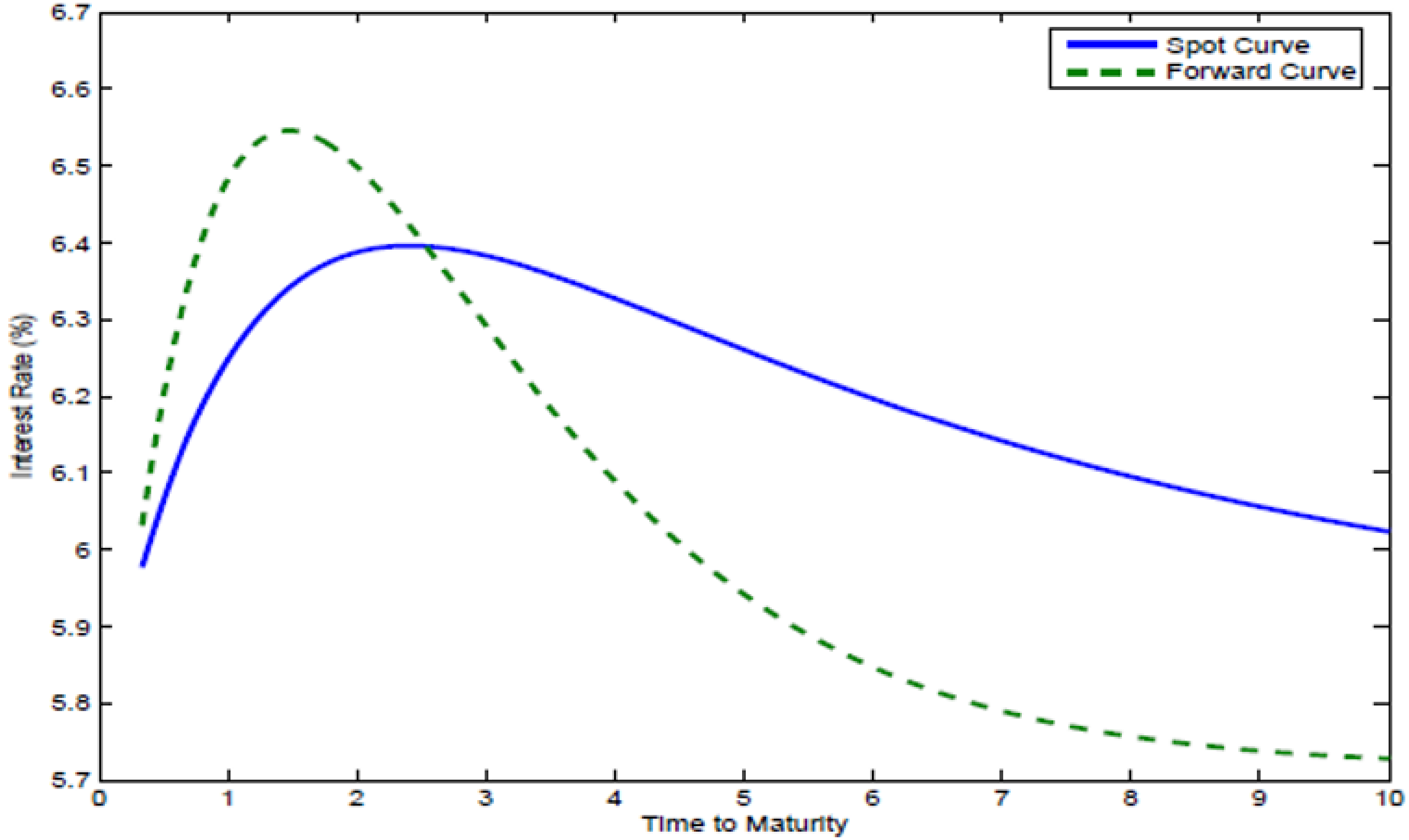
$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathsf{f}(t-\delta,t) = \mathsf{r}(t-\delta) + t\frac{\mathsf{r}(t) - \mathsf{r}(t-\delta)}{\delta}}$$

- Spot from forward for terms $\{0,t_1,\ldots,t_n\}$

$$\boxed{\mathsf{r}(t_n) = \frac{1}{t_n}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{f}(t_{i-1},t_i)(t_i - t_{i-1})} \Rightarrow \mathsf{r}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \mathsf{f}(s)\mathrm{d}s$$

  - $t_0=0$ and $r(t_1)=f(t_0,t_1)$



Forward rates f(t,t+.25) vs. t
Source: Veronesi

$$f(t) = r(t) + t\, r'(t)$$

Par Rates (Par Yield)

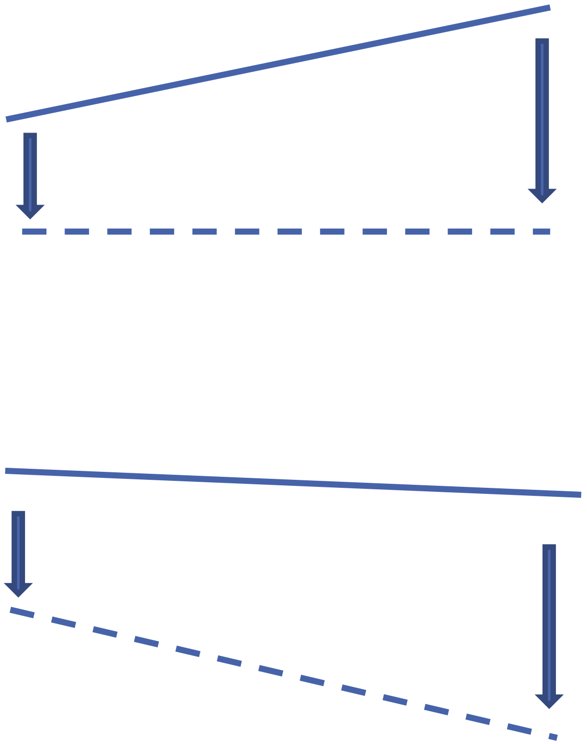
- Assume semi-annual payments
- Fixed-rate asset in T years that pays c per annum semiannualy
  - Notional 1
  - This c is par rate if this security trades at par at inception
  - Swap rates are par rates

$$\frac{c}{2}\sum_{t=1}^{2T}\mathsf{d}\left(\frac{t}{2}\right)+\mathsf{d}(T)=1$$

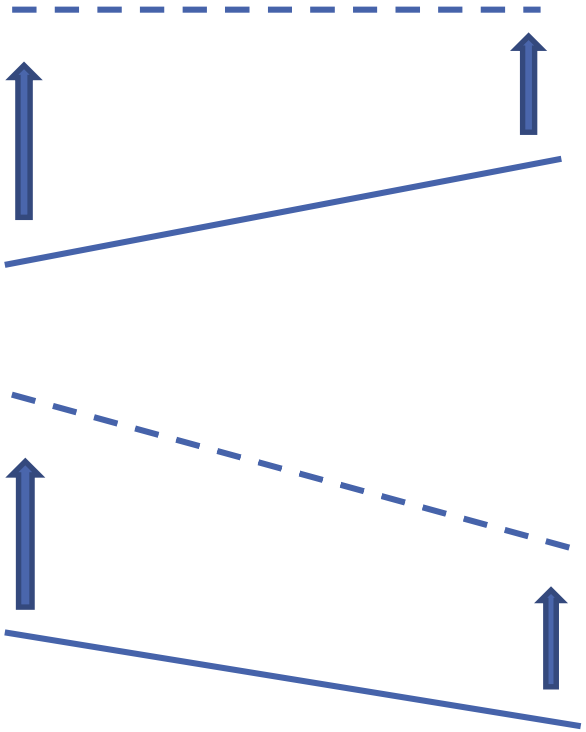
term	0.5	1	1.5	2	2.5
d(t)	0.99648788	0.99130341	0.9844995	0.97562164	0.96450776
R(t)	0.705%	0.875%	1.044%	1.238%	1.451%
F(t-.5,t)	0.705%	1.046%	1.382%	1.820%	2.305%
par rate	0.705%	0.875%	1.043%	1.235%	1.445%

Movement of Term Structure

- Flattening
  - Longer-term rates fall by more than shorter-term rates

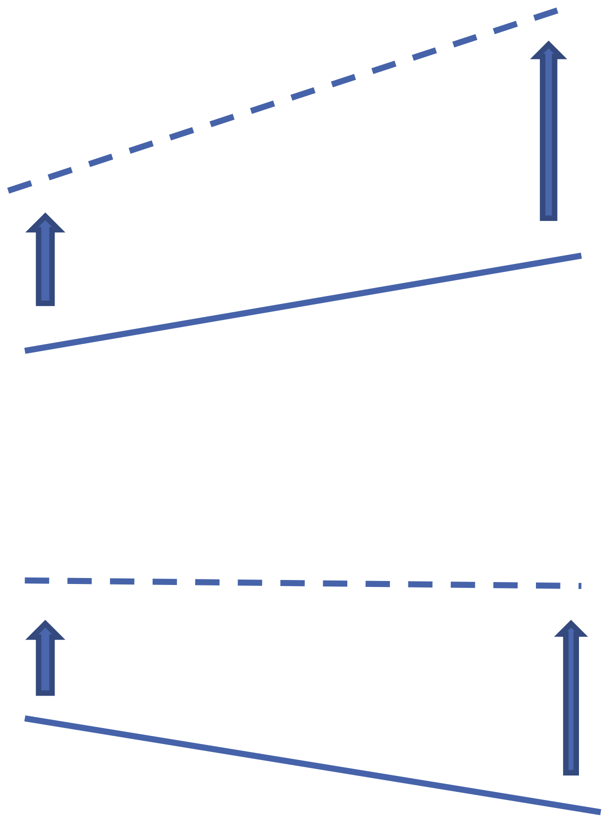


- Flattening – continued
    - Shorter-term rates rise by more than longer-term rates

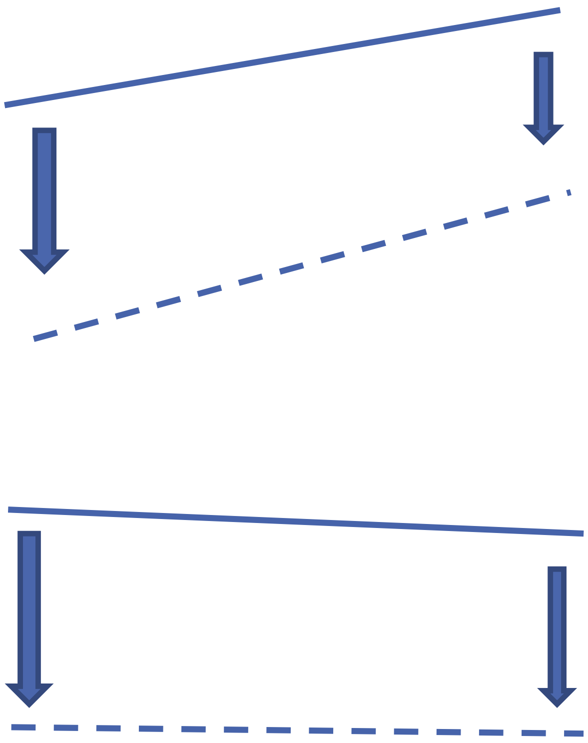


- Flattening – continued
- 경기 둔화 전망하, 장기물 강세로 장단기 금리차 작아지면서 플랫 나타날 수 있음
- 채권 장기물 수요가 높을 때, 커브 플랫 심화 가능 (불 플랫)
- 베어 플랫: 단기 금리 상승으로 인한 플랫

- Steepening
  - Longer-term rates rise by more than shorter-term rates



- Steepening – continued
  - Shorter-term rates fall by more than longer-term rates



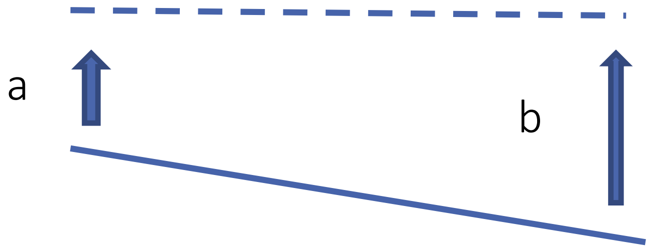
- Steepening – continued

- 경기 개선 기대하, 장기물 수요 하락하면서 장단기 금리차 커질 수 있음

- 정책금리 인하 가능성이 있을 때, 단기금리 하락으로 인한 스팁 가능성 (불 스팁)

- 물가 상승 기대하, 장기금리 상승으로 인한 스팁 (베어 스팁)

- Steepener
  - Buy short-term and sell long-term



	today		later		gain/loss
receive	short-term	x	short-term	x+a	-a
pay	long-term	y	long-term	y+b	b
total					b-a

- Flattener
  - Buy long-term and sell short-term (why?)

2022.08.16

(서울=연합인포맥스) 물가 공포의 완화는 분명하게 금융시장의 위험자산 선호 심리를 높이는 요인이다. 짧지 않은 기간 시장 심리를 가장 공포에 휩싸이게 했던 변수는 물가였다. 위험자산 선호는 기본적으로 채권금리 상승 요인이지만, 당장은 인플레 둔화에 따른 중앙은행의 긴축 강도 약화 기대가 금리 하락 압력을 높이고 있다.

채권 수익률곡선(커브) 전망은 여전히 안갯속이다. 물가 공포에 이은 경기침체 공포의 확산 가능성이 시장 참가자들의 커브 전략을 어렵게 한다. 중장기로는 스티프닝 전망에 무게가 실리지만, 경기 침체 속도가 빨라진다면 커브 플레이가 급변할 여지가 있다. 인플레 우려가 다소 완화했다고 하지만 여전히 '고물가·저성장' 국면에 있다는 점도 기존의 플래트닝 전략을 수정하기 어렵게 만든다.

미국의 7월 물가 지표가 나오면서 시장의 안도감은 커지고 있다. 미 소비자물가지수(CPI) 상승률은 7월에 전년 동기 대비 8.5%를 나타냈다. 6월 상승률 9.1%에서 큰 폭 하락하면서 물가가 정점에 도달했다는 인식이 확산했다. 미국의 생산자물가도 비슷한 양상을 보이며 물가 정점론에 힘을 보탰다. 7월 생산자물가지수(PPI)는 전월보다 0.5% 내려 2020년 4월 이후 처음으로 하락했다. 중국과 유럽 지역의 물가 지표도 7월 들어 눈에 띄게 둔화하는 흐름이다. 그동안 물가 급등의 주범인 에너지와 원자재 가격 등이 최근 들어 안정된 것이 주효했다.

국제 유가 등의 하락은 국내 물가에도 직접적인 영향을 미친다. 지난 6월과 7월 연속으로 6%대를 기록했던 우리나라의 소비자물가 상승률은 조만간 5%대로 떨어질 것으로 기대된다. 추경호 부총리 겸 기획재정부 장관은 지난 13일 기자들과 만난 자리에서 소비자물가 전망과 관련해 "아마도 (전년 동월 대비) 5자(5%대)를 볼 날도 멀지 않을 것"이라고 말했다. 그러면서 "'7%대를 넘을 수 있다'는 이야기를 하는 사람들이 있는데, 정말 천지개벽하듯 대단한 사태가 일어나지 않는 지금, 우리가 눈에 보이는 수준 내라면 물가는 그렇게 가지 않는다"고 자신했다.

국내외적으로 물가 정점론이 부각되면서 위험자산 선호 심리는 강화하는 추세다. '베어마켓 랠리'라는 평가도 만만찮지만, 뉴욕증시는 눈에 띄게 안정됐고 이는 글로벌 증시의 강세로 이어지고 있다. 채권 가격도 금리가 떨어지는 등 대체로 동반 강세 기조를 띈다. 위험자산 선호는 금리 상승 요인이지만, 중앙은행의 정책금리 인상 속도가 약해질 것이란 기대가 작용해서다.

미 연준의 9월 자이언트 스텝(75bp) 인상 가능성은 연방기금(FF) 금리 선물시장에서 40% 수준으로 크게 완화했다. 50bp 인상 가능성은 60% 수준을 나타냈다. 국내에서도 8월 금융통화위원회의 25bp 인상 가능성에 무게가 실린다. 7월에 이은 빅스텝(50bp) 인상 가능성을 거론하는 참가자들은 찾아보기 어려울 정도다.

그럼에도 커브 전망은 크게 엇갈린다. 경기 침체가 현실화할 것인지, 그리고 그 속도가 어떨지에 대해 아직은 가늠이 어려운 탓이다. 지난주 잠시 스티프닝 베팅이 우세한 분위기였지만, 인민은행의 금리 인하 등 중국 경제 우려까지 가세하면서 장기금리 하락 압력이 상대적으로 더 세질 전망이다. 플래트닝 포지션을 유지하려는 곳과 신규 스티프너 간의 논리 싸움이 가열되는 분위기다. 물가와 경기 전망, 이어진 통화정책 방향을 둘러싼 커브 전쟁의 2막이 열렸다. (취재본부 금융시장부장)

스팁vs플랫…美 중립금리 상향에 커브전략은

김정현 기자 | 승인 2024.03.25 10:23

(서울=연합인포맥스) 김정현 기자 = 미국 연방준비제도(Fed·연준)가 4년여 만에 중립금리 추정치를 높여 잡으면서 유효한 커브 전략에 관심이 쏠린다.

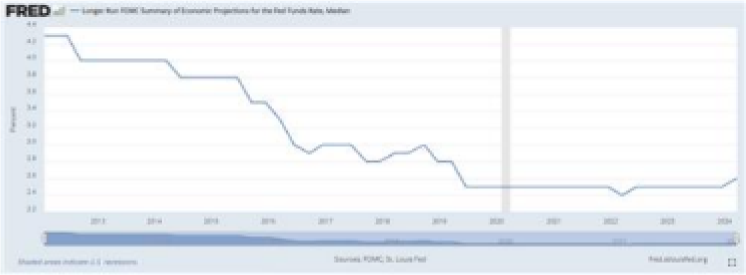
시장에서는 먼저 미국 정책금리가 더디게 하락하는 것은 물론 금리 레벨 자체가 상향될 가능성에 커브 스팁을 내다보는 시각이 많다.

특히 미 연준의 역OT(오퍼레이션 트위스트) 가능성도 커지면서 이 같은 시선이 강화되고 있다.

다만 중립금리가 상향됐다는 것은 현재 정책금리 수준이 덜 긴축적이라는 의미로 해석된다는 점에서 이론상 커브 플랫이 적절하다는 시각도 동시에 나온다.

25일 채권시장에 따르면 미 연방공개시장위원회(FOMC)는 지난 20일(현지시간) 점도표를 통해 중립금리 추정치가 기존 2.5%에서 2.6%로 소폭 상향했음을 시사했다.

다소 이례적인 것이다. 중립금리 추정치는 지난 2022년 3월 '반짝' 2.4%로 하락했다가 오른 것만 제외하면 2019년 6월 이후 처음으로 유의미한 상향을 보였다.



FOMC가 내년(2025년)과 후년(2026년) 정책금리 예상치를 높여 잡았을 뿐 아니라 장기 시계에서 적정금리 수준까지 높이면서 국내에서도 커브스팁 전략이 유리할 것이라는 시각이 나온다.

미 연준의 역OT 가능성도 비슷한 시각을 강화하는 요소다. 역OT를 통해 연준이 보유한 장기물을 매도하고 단기물을 매수하면 수익률곡선도 가팔라질 수밖에 없다는 것이다.

A 시중은행의 채권 운용역은 "연말연초 당시 올해 연준의 금리 인하 횟수가 6~7번에 이를 것이라던 시각에서 최근엔 2번에 그칠지 모른다는 시각으로 축소됐다"면서 "금리 인하 속도가 줄어들고 그에 따라 중립금리 추정치도 소폭 상승한 것으로 보인다"고 평가했다.

그는 "최근 역OT 가능성도 제기되고 있어 커브 스팁 경계가 있지만 그 속도는 그렇게 빠르지 않을 것"이라며 "다만 빠르지 않다고 해도 기본적으로는 스팁이 안전해 보인다"고 덧붙였다.

B 은행의 채권 운용역은 "FOMC가 내년 및 후년 금리와 중립금리 추정치를 모두 올려 잡은 만큼 연준도 커브스팁을 더 선호하는 것으로 보인다"면서 "커브가 가팔라지는 과정에서 플랫(수익률곡선 완만화)이 어느 정도 나타나는지는 다른 문제이긴 하지만 국내장도 미국과 비슷하게 갈 것"이라고 내다봤다.

그는 "국고 수익률곡선의 경우 실제로 한국은행이 인하에 나서야 본격적인 스팁으로 갈 것으로 본다"면서 "본격적인 강세장에 진입하면 완연한 스팁이 나타날 것"이라고 했다.

미국 중립금리 상향과 국내 채권시장의 커브 움직임은 큰 관계는 없지만 수급 흐름상 스팁이 유리하다는 지적도 나왔다.

C 증권사의 채권 운용역은 "최근 모집과 옵션 등을 포함한 국고 발행 상황을 보면 장기물 가격이 불리한 상황"이라며 "미국 커브에 의한 움직임보다는 국내 수급에 따라 커브가 가팔라질 것"이라고 했다.

동시에 테일러준칙 등 이론상 커브플랫으로 해석할 논거도 있다는 시각도 제기된다. 중립금리가 상향되면 이론상의 적정 기준금리도 높아지는 것이어서다.

이는 현재 수준의 기준금리가 생각보다 덜 긴축적이라는 뜻이 되고 기준금리 수준을 반영하는 중단기 금리가 덜 하락할 것이라는 논지로 이어진다.

윤여삼 메리츠증권 연구원은 "중립금리 추정치가 0.1%포인트라도 올랐다는 게 의미가 있긴 하지만 기조를 바꿀 정도인지는 좀 더 생각해볼 문제"라면서도 "현재 연준의 기준금리 5.5% 대비 중립금리 추정치 격차가 소폭 줄었다는 점에서는 다소 커브플랫 쪽으로 해석할 수 있는 여지가 있다"고 말했다.

"6월 지나면 올해 스팁 없다"…시간에 쫓기는 대세 커브 전략

노현우 기자 | 승인 2025.03.04 11:31

(서울=연합인포맥스) 노현우 기자 = 연초 채권시장에 대세로 자리 잡았던 커브 스티프닝(수익률곡선 가팔라짐) 전략이 흔들리는 모양새다.

트럼프 2기 정부의 거침없는 관세 부과에 불확실성이 확대되고 장기 국채 금리가 내리고 있어서다.

4일 채권시장에 따르면 외국인은 지난달 21일부터 28일까지 6거래일간 10년 국채선물을 약 3만8천여계약 순매수했다.

미국 10년 국채 금리가 내림세로 돌아서는 등 글로벌 채권시장이 변곡점을 맞은 상황에서 외국인이 연결고리로 작용했다.

한국은행 금통위가 신중한 기조를 보인 점도 커브 플랫 재료로 지목된다.

경기가 빠르게 얼어붙는 상황에서 한은이 신중한 기조를 보이자 장기 금리가 중단기 금리보다 더 하락한 셈이다.

국고 10년과 3년 스프레드는 지난 24일 21.2bp에서 전 거래일 14bp로 축소됐다. 지난 1월 24일 정점(30.1bp)을 찍고 하락하는 추세다.

자산운용사의 한 채권 운용역은 "경기에 따라 중앙은행이 통화정책 대응 의지를 밝히고 이에 따라 중단기 금리가 하락해 경기에 상방 압력을 가해야 한다"며 "인하 속도 조절을 시사함에 따라 이 메커니즘이 작동하지 않는 것 같다"고 말했다.

국내 경기지표도 플랫 논거를 더했다.

통계청이 이날 발표한 산업활동동향에 따르면 지난 1월 광공업 생산은 전월 대비 2.3% 줄었다. 이중 설비투자는 14.2% 급감했다. 2020년 10월(-16.7%) 이후 4년 3개월 만에 최대 감소 폭이다.

수출도 부진한 상황이다. 지난 1일 산업통상자원부가 발표한 '2월 수출입 동향'에 따르면 2월 일평균 수출은 23억9천만달러로, 작년 같은 달보다 5.9% 감소했다.

김진욱 씨티 이코노미스트는 "HBM을 포함해 MCP(여러 종류의 칩을 묶어 단일 제품으로 만든 반도체) 수출이 회복 조짐을 보이지 않고 있다"고 평가했다.

국내 수출 비중이 큰 반도체 수출이 살아나지 않으면서 성장률에 하방 압력을 가할 수 있는 것이다. 새로 입수된 지표를 고려하면 올해 국내 성장률 눈높이를 1.2%까지 낮춰야 한다는 의견도 채권시장에서 제기된다.

이처럼 커브 플랫 전망이 강해지는 상황에서 커브 스티프닝 전략의 소멸 기한이 다가오고 있다는 평가도 나왔다.

고든 고 등 씨티 애널리스트는 지난달 28일 보고서에서 "추경과 보험사의 매수세 감소 등 수급 관련 스티프닝 모멘텀을 6월까지 얻지 못한다면 올해 남은 기간 어떠한 스티프닝도 없을 것이다"고 전망했다.

올해 하반기부턴 세계국채지수(WGBI) 실편입과 관련한 수요가 선제적으로 유입되면서 장기 금리에 하방 압력을 가할 것으로 판단했다.

Section 2

Returns, Spreads, and Yields

Returns

- For simplicity, unit holding period 1 (e.g. 6-month)
  - P_t = present value of all future cash flows at time t
  - Assume a coupon c during a single holding period
  - Full or dirty price

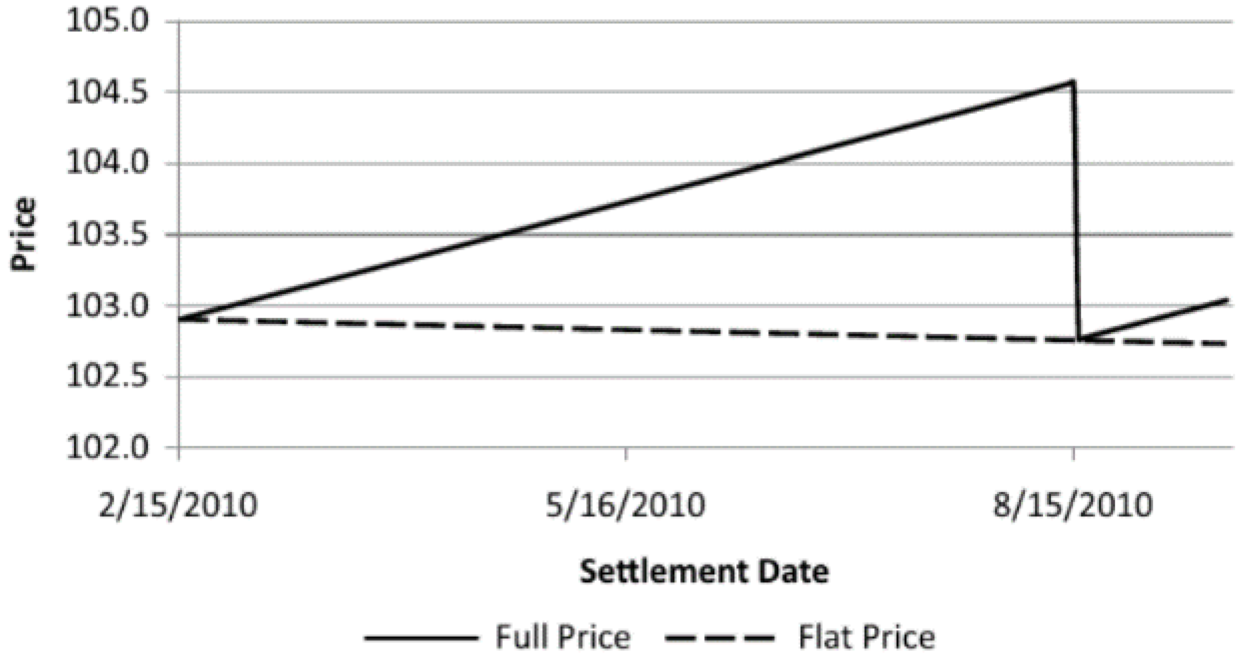
- Holding period return **H**

$$H_{t,t+1} = \frac{P_{t+1} + c - P_t}{P_t}$$

Spot rate prevailing at t+1

- If holding period is longer (e.g. 1-year)
  - Require the re-investment rate R_* per annum (under semi-annual compounding)

$$H_{t,t+2} = \frac{P_{t+2} + c + c(1 + R_{t+1}/2) - P_t}{P_t}$$



$p = P - \text{accrued interest}$ Used for quote and negotiation

$P = PV(\text{future cash flows})$ Actual payment, used for computing returns

- If the investment is financed at $R_{.5}$ per annum,
  - Semi-annual compounding assumed

$$\mathsf{H}_{t,t+1} = \frac{\mathsf{P}_{t+1} + c - \mathsf{P}_t(1 + \mathsf{R}^{\mathrm{sa}}/2)}{\mathsf{P}_t}$$

$$= \frac{\mathsf{P}_{t+1} + c - \mathsf{P}_t}{\mathsf{P}_t} - \frac{\mathsf{R}^{\mathrm{sa}}}{2}$$

Spreads

- Market price of a security
  - Based on a term structure of rates plus a premium or discount
  - Generic expression for term structure $\mathbb{R}$
  - Generic expression for price

$$\mathsf{P} = \mathsf{P}(\mathbb{R}) + \varepsilon$$

  - Instead, it can also be expressed in terms of spread

$$\mathsf{P} = \mathsf{P}(\widetilde{\mathbb{R}})$$

    - If unit notional and same spread for all periods

$$\mathsf{P} = \frac{c}{2}\sum_{i=1}^{2T}\prod_{j=1}^{i}\left(1+\frac{\mathsf{F}(\frac{j-1}{2},\frac{j}{2})+s}{2}\right)^{-1} + \prod_{j=1}^{2T}\left(1+\frac{\mathsf{F}\left(\frac{j-1}{2},\frac{j}{2}\right)+s}{2}\right)^{-1}$$

Yields

- Market price of a bond P
  - Full price
  - Semi-annual compounding and coupons
  - Time to next coupon date τ (as a fraction of 6-month)
  - N number of remaining coupons
  - Notional 1

$$\mathsf{P} = \frac{c}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{1}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^{\tau+i}} + \frac{1}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^{\tau+N-1}}$$

- Yield is related to a particular security, not others

- Caution: term ‘yield curve’ is used loosely, but a yield curve can be defined only after particular cash flows are defined

- For a fixed discounting factors from C-STRIPS as of 2010.05.28, we can compute hypothetical bond prices with various maturities and
  - Zero coupon yield curve
  - Par yield curve (from par bonds)
  - 9% coupon yield curve

  - Also compare with actual Treasury yield curve

  - Step 1: compute corresponding bond prices
  - Step 2: compute yield of each bond

- **Zero coupon yield curve** = spot rates in time

- For a given set of discount factors, we can compute the yields of each zeros (in semi-annual basis)

$$\mathsf{d}(t_i) = \frac{1}{\left(1 + \frac{\mathsf{R}(t_i)}{2}\right)^i}$$

- Yield-to-maturity of these zeros are spot rates

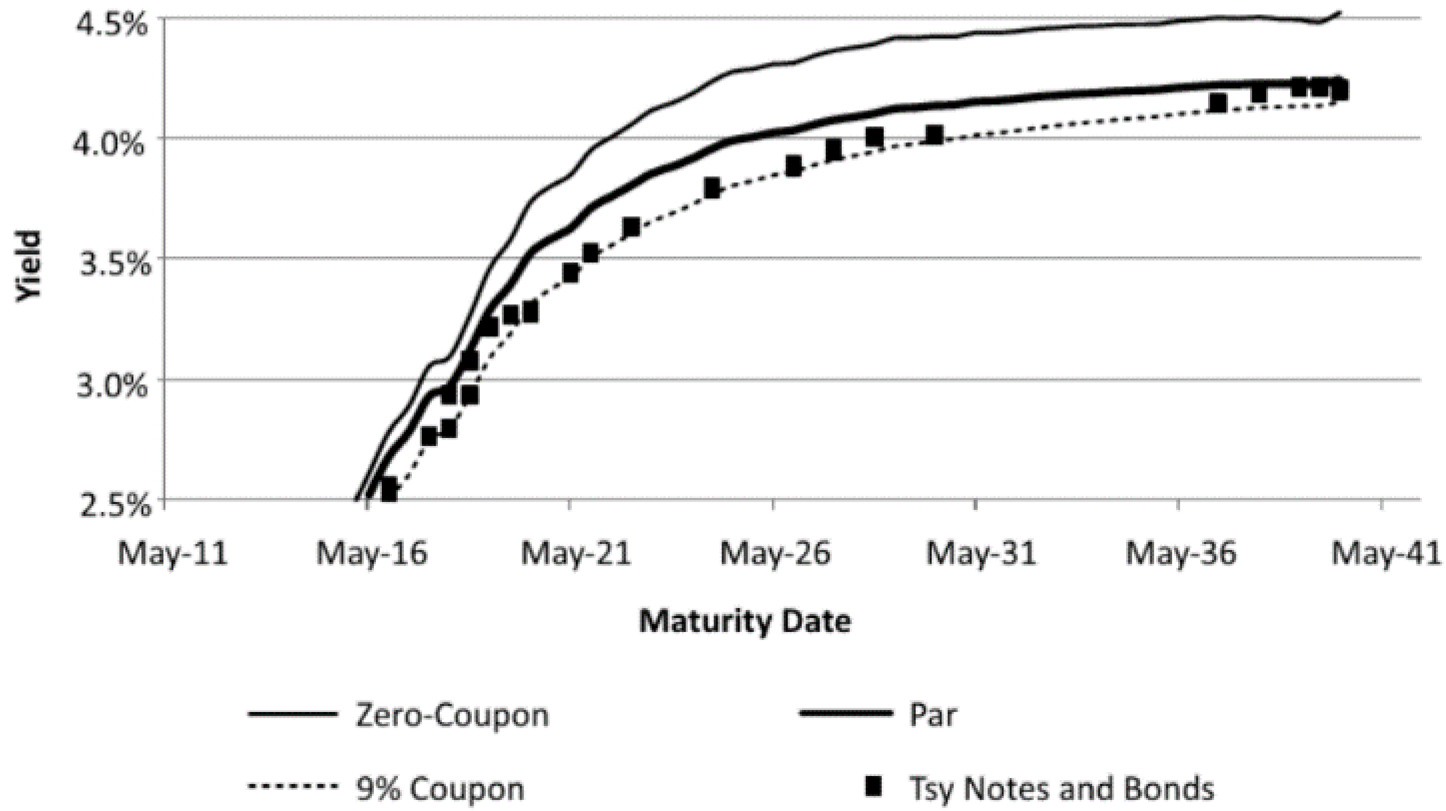
- **Par yield curve =** curve of par rates in time

- For given a set of discount factors, we can compute the par rate for a given set of payment dates (in semi-annual basis)

$$1 = \frac{c}{2}\sum_i \mathsf{d}(t_i) + \mathsf{d}(t_n) \qquad \Delta_i = t_i - t_{i-1} = .5$$

- Yield-to-maturity of this par bond is given by c (per annum)

$$\frac{c}{2}\sum_i \frac{1}{\left(1+\frac{c}{2}\right)^i} + \frac{1}{\left(1+\frac{c}{2}\right)^n} = \frac{c}{2}\frac{\frac{1}{1+\frac{c}{2}}\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{c}{2}\right)^n}\right)}{1-\frac{1}{1+\frac{c}{2}}} + \frac{1}{\left(1+\frac{c}{2}\right)^n} = 1$$


4.5%
4.0%
3.5%
3.0%
2.5%
Yield
May-11
May-16
May-21
May-26
May-31
May-36
May-41
Maturity Date
Zero-Coupon
Par
9% Coupon
Tsy Notes and Bonds

P&L Decomposition

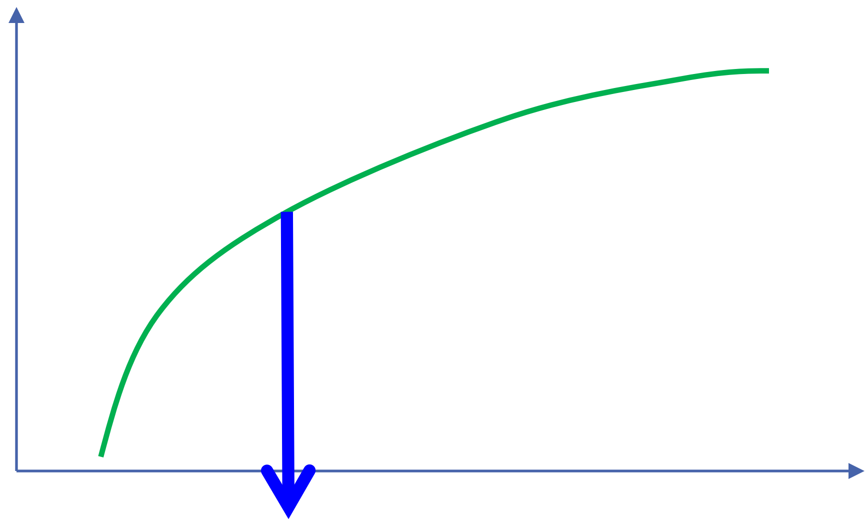
- Term structure at t $\mathbb{R}_t$
- Term structure at t+1 $\mathbb{R}_{t+1}$
- 'expected' term structure at t+1 $\mathbb{R}^e_{t+1}$
- Price P_t, P_{t+1}
- Spread s_t, s_{t+1}

$$\mathsf{P}_{t+1}(\mathbb{R}_{t+1}, s_{t+1}) - \mathsf{P}_t(\mathbb{R}_t, s_t)$$ Total price appreciation

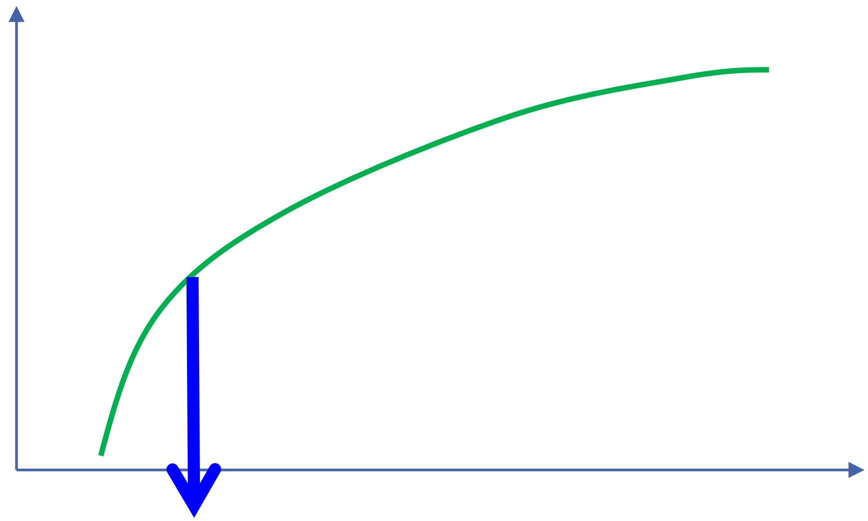
$$\begin{aligned} = \quad & \mathsf{P}_{t+1}(\mathbb{R}_{t+1}, s_{t+1}) - \mathsf{P}_{t+1}(\mathbb{R}_{t+1}, s_t) && \text{Spread change} \\ & + \mathsf{P}_{t+1}(\mathbb{R}_{t+1}, s_t) - \mathsf{P}_{t+1}(\mathbb{R}^e_{t+1}, s_t) && \text{Rate change} \\ & + \mathsf{P}_{t+1}(\mathbb{R}^e_{t+1}, s_t) - \mathsf{P}_t(\mathbb{R}_t, s_t) && \text{Carry-roll-down} \end{aligned}$$

*This doesn't include cash carry (coupon income minus financing costs)

- Roll-down



c^* priced with $d(t)$



c^* priced with $d(t-\Delta)$

If term structure remains the same

- **Carry** is how much the owner earns due to the passage of time, excluding cash carry component and freezing all other components

- Carry-roll-down scenarios
  - Realized forwards

$$\mathsf{f}_\delta(t) = \mathsf{f}(t) \text{ or } \mathsf{f}^{\text{new}}(t) = \mathsf{f}^{\text{old}}(t+\delta)$$

  - Unchanged term structure

$$\mathsf{f}_\delta(t) = \mathsf{f}(t-\delta) \text{ or } \mathsf{f}^{\text{new}}(t) = \mathsf{f}^{\text{old}}(t)$$

  - Unchanged yields
  - Expectations of short-term rates are realized

Example

- Treasury 7.625s of 11/15/2022 만기
  - Buy 11/15/2020
  - Sell on 5/15/2021

- High coupon treasuries may have negative spreads with respect to benchmark treasuries

- Term structure (forward rates) and spread

term	#1 (%)	#2 (%)
0.5	0.1013	0.0154
1	0.1746	0.1008
1.5	0.2429	0.1833
2	0.2185	
spread (bp)	-1.16	-7.27

- Pricing using assumed term structures and spreads

pricing date	term structure	spred	price
11/15/2020	#1	-1.16	114.8764352
5/15/2021	realized forwards	-1.16	111.1154573
5/15/2021	#2	-1.16	111.2983991
5/15/2021	#2	-7.27	111.3969275

Carry roll down

Rates change

Spread change

- Return attribution

chg	pct chg	
-3.760977919	-3.2739%	carry-roll-down
0.182941838	0.1646%	rates
0.098528417	0.0885%	spread
3.8125	3.3188%	cash carry (coupon)
0.33299	0.2980%	total

Section 3

Risk Measurement

DV01

- Price change per unit rate change (1bp)

- Example: a call option on a Treasury note futures contract
  - P(.95%) = \$13.55
  - P(1.05%) = \$12.755

  - Price sensitivity = - \$.795 / .1% = - 79.5 cents / 10 bps = - 7.95 cents / bp

$$\text{DV01} = -\frac{\Delta \text{P}}{10,000 \times \Delta x} \rightarrow \boxed{-\frac{1}{10,000}\frac{d\text{P}}{dx}}$$

  - Rate x in real numbers
  - Price in \$
  - DV01 = dollar value of 01 (=.01%)

Duration

- Per dollar value change when the rate changes by 1

7-Year Par Rate	TYU0	Duration	TYU0C 120	Duration
2.72%	120.0780		1.9194	
2.77%	119.7061	6.217	1.7383	201.6
2.82%	119.3338		1.5689	

$$\mathsf{D} = -\frac{1}{\mathsf{P}}\frac{\Delta \mathsf{P}}{\Delta x} \rightarrow \boxed{-\frac{1}{\mathsf{P}}\frac{d\mathsf{P}}{dx}}$$

$$201.6 = -\frac{1}{1.7383}\frac{1.5689 - 1.9194}{.0282 - .0272}$$

Underlying: 10-yr treasury 4.5% of 2017-05-15

Pricing date: 2010-05-28

TYU0 : futures contract maturing in 2010-09-30

TYU0C 120 : call option on TYU0 with strike 120, maturing on 2010-08-27

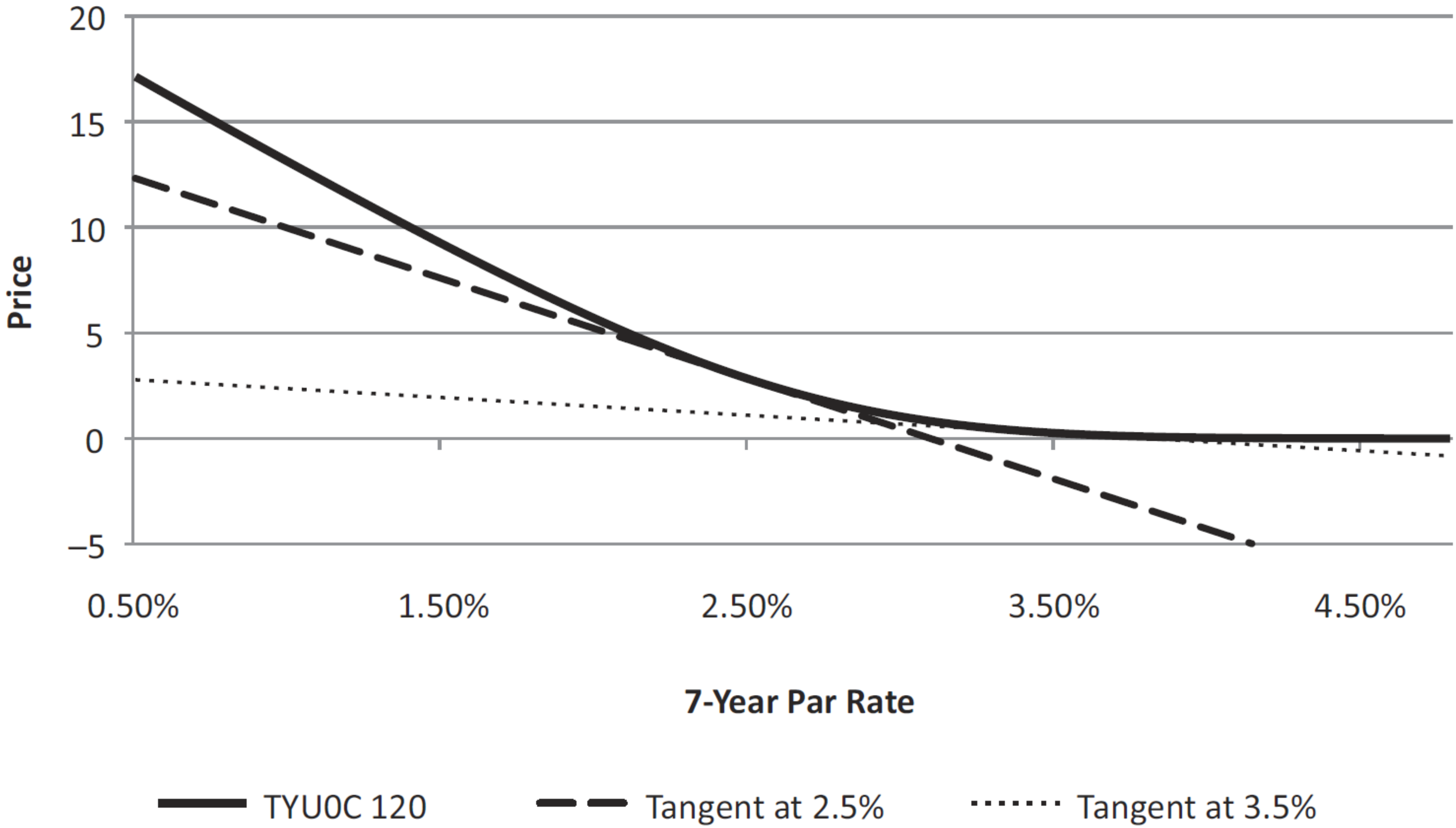
Pricing needs a model

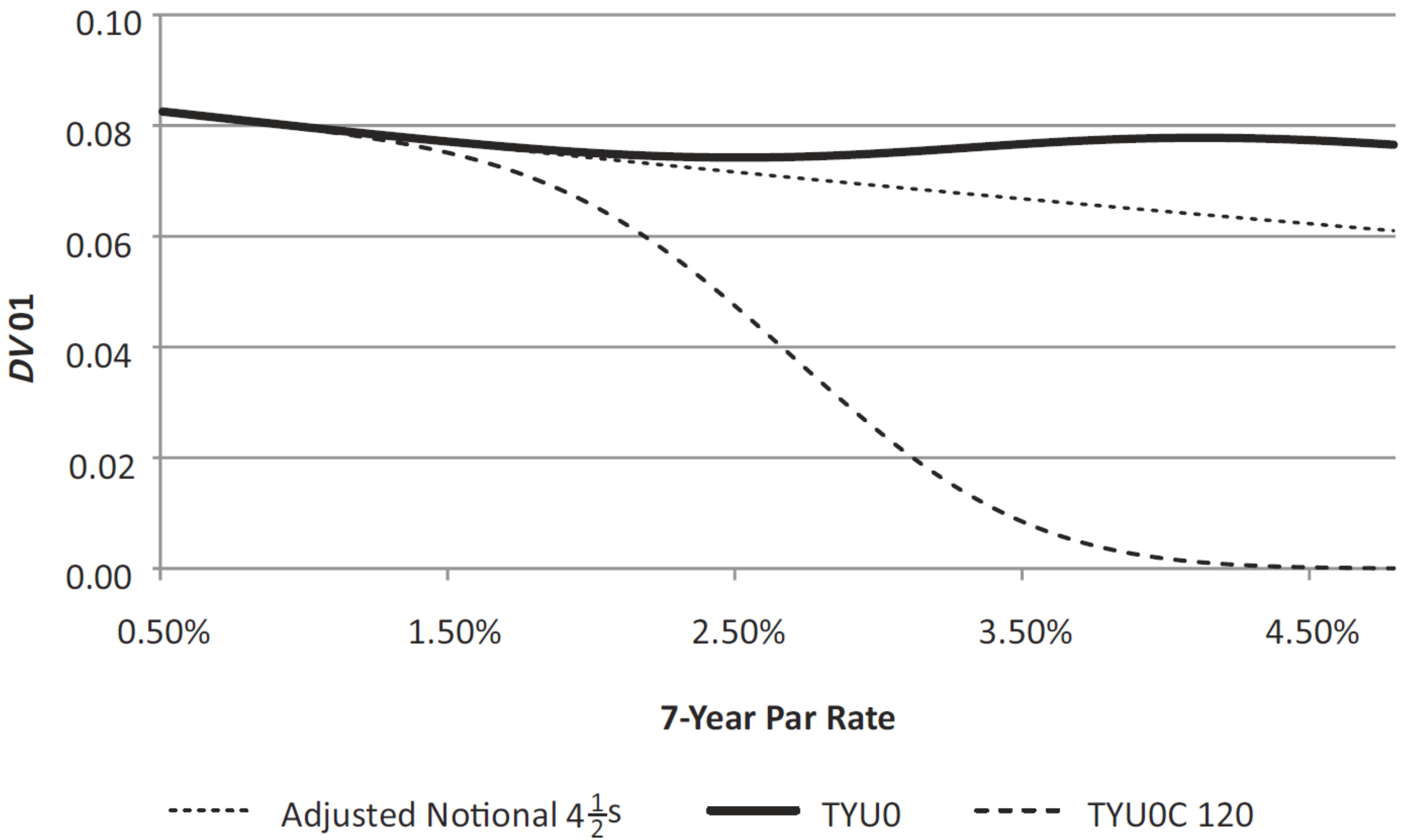
- Equivalently, it is also % per dollar value change when the rate changes by 100 bps

$$\mathsf{D} = -100 \times \frac{\Delta \mathsf{P}}{\mathsf{P}} \div (100\Delta x) \to -\frac{1}{\mathsf{P}}\frac{d\mathsf{P}}{dx}$$

- In words, 201.6% change in value per 1% par rate change for TYU0C

- Equivalently, 20.16% change in value per 10 bps change


20
15
10
5
0
–5
Price
0.50%
1.50%
2.50%
3.50%
4.50%
7-Year Par Rate
TYU0C 120
Tangent at 2.5%
Tangent at 3.5%


0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
DV01
0.50%
1.50%
2.50%
3.50%
4.50%
7-Year Par Rate
Adjusted Notional 4½s
TYU0
TYU0C 120

Convexity

- Interest rate sensitivity considering the level of the rate

$$\boxed{\mathsf{C} = \frac{1}{\mathsf{P}} \frac{d^2 \mathsf{P}}{dx^2}}$$

- For given uniform grid $\{x_1, x_2, x_3\}$ with step size δ

$$\mathsf{C}(x_2) \approx \frac{1}{\mathsf{P}(x_2)} \frac{\mathsf{P}(x_3) - 2\mathsf{P}(x_2) + \mathsf{P}(x_1)}{\delta^2}$$

TYU0				
rate	price	1st	2nd	convexity
1.72%	127.553			
1.745%		-760.000		
1.770%	127.173		4000	31.45322
1.795%		-758.000		
1.820%	126.794			
2.720%	120.078			
2.745%		-744.000		
2.770%	119.706		0	0
2.795%		-744.000		
2.820%	119.334			
3.720%	112.505			
3.745%		-772.000		
3.770%	112.119		-8000	-71.3528
3.795%		-776.000		
3.820%	111.731			

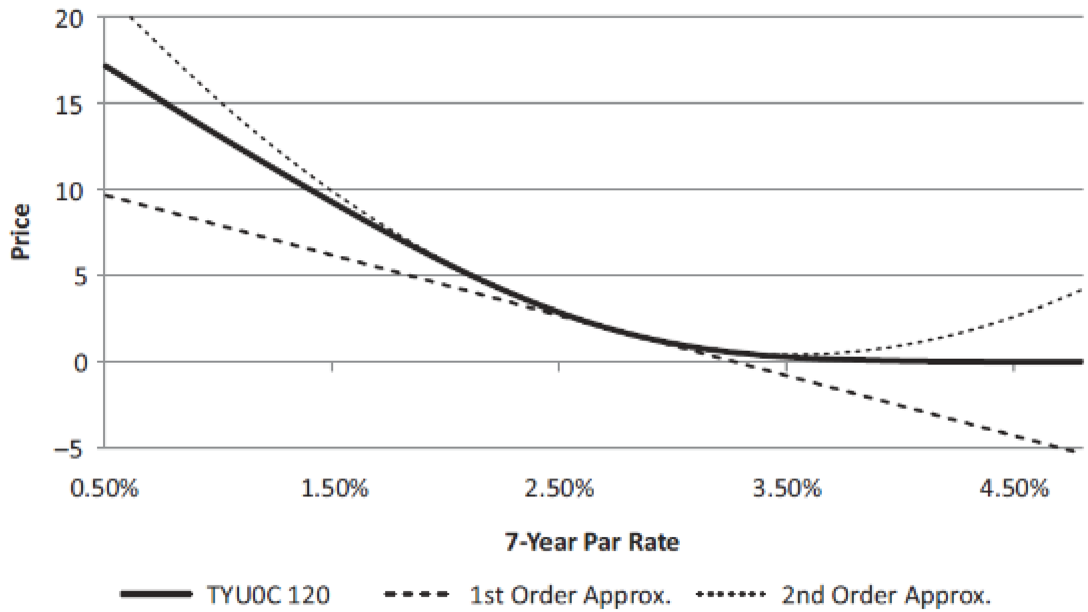
Approximation

- Price

$$\mathsf{P}(x+\delta) \approx \mathsf{P}(x) + \frac{d\mathsf{P}}{dx}(x)\delta + \frac{1}{2}\frac{d^2\mathsf{P}}{dx^2}(x)\delta^2$$

- Return

$$\frac{\mathsf{P}(x+\delta) - \mathsf{P}(x)}{\mathsf{P}(x)} \approx -\mathsf{D}(x)\delta + \frac{1}{2}\mathsf{C}(x)\delta^2$$



Yield-based Metrics

- Set x = y (yield) of a bond
- Defined only for securities with fixed cash flows
- Focus on parallel shifts of rates across time
- Widely used in industry and intuitive

- Coupon bond with notional 1 and semi-annual coupon rate c

$$\mathsf{P}(y) = \frac{c}{2}\sum_{i=1}^{2T}\frac{1}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^{i}} + \frac{1}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^{2T}} = \frac{c}{y}\left[1-\frac{1}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^{2T}}\right] + \frac{1}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^{2T}}$$

$$\mathsf{DV01}(y) = -\frac{1}{10,000}\mathsf{P}'(y) = \frac{1}{10,000}\left[\frac{c}{y^2}\left[1-\frac{1}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^{2T}}\right] + T\left(1-\frac{c}{y}\right)\frac{1}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^{2T+1}}\right]$$

$$\mathsf{D}(y) = -\frac{1}{\mathsf{P}(y)}\mathsf{P}'(y) = \frac{1}{\mathsf{P}(y)}\left[\frac{c}{y^2}\left[1-\frac{1}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^{2T}}\right] + T\left(1-\frac{c}{y}\right)\frac{1}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^{2T+1}}\right]$$

$$\mathsf{C}(y) = \frac{1}{\mathsf{P}(y)\left(1+\frac{y}{2}\right)^{2}}\left[\frac{c}{2}\sum_{i=1}^{2T}\frac{i(i+1)}{4}\frac{1}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^{i}} + T(T+.5)\frac{1}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^{2T}}\right]$$

- Maturity T zero

$$\mathsf{P}(y) = \frac{1}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^{2T}}$$

$$\mathsf{DV01}(y) = \frac{1}{10,000}\frac{T\mathsf{P}(y)}{1+\frac{y}{2}}$$

$$\mathsf{D}(y) = \frac{T}{1+\frac{y}{2}}$$

$$\mathsf{C}(y) = \frac{T(T+.5)}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^{2}}$$

- Par bond with notional 1 and semi-annual coupon rate c

$$\mathsf{P}(y) = 1$$

$$\mathsf{DV01}(y) = \frac{1}{10,000y}\left[1 - \frac{1}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^{2T}}\right]$$

$$\mathsf{D}(y) = \frac{1}{y}\left[1 - \frac{1}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^{2T}}\right]$$

$$\mathsf{C}(y) = \frac{2}{y^2}\left[1 - \frac{1}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^{2T}}\right] - \frac{2T}{y\left(1+\frac{y}{2}\right)^{2T+1}}$$

- Bond portfolio

$$\mathsf{P} = \sum_i \mathsf{P}^{\mathrm{ith}}$$

$$\mathsf{DV01} = -\frac{1}{10,000}\mathsf{P}' = \sum_i \mathsf{DV01}^{\mathrm{ith}}$$

$$\mathsf{D} = -\frac{1}{\mathsf{P}}\mathsf{P}' = \sum_i \frac{\mathsf{P}^{\mathrm{ith}}}{\mathsf{P}}\mathsf{D}^{\mathrm{ith}}$$

$$\mathsf{C} = \frac{1}{\mathsf{P}}\mathsf{P}'' = \sum_i \frac{\mathsf{P}^{\mathrm{ith}}}{\mathsf{P}}\mathsf{C}^{\mathrm{ith}}$$

Multi-factor Risk Metrics

- Key-rate 01
  - E.g. 2, 5, 7, 10-year par yield of treasuries
  - Sensitivity with respect to the shift of each par yield
- Partial 01 and PV01
  - Sensitivity with respect to the rate shift in securities used for calibration
- Forward-bucket 01
  - Sensitivity with respect to the forward rate in each bucket of the forward curve
- Make a portfolio immune to shifts of rates

Section 4

Secure Overnight Financing Rate

LIBOR

- London interbank offered rate used to be the market choice for reference rate in tremendously many financial contracts

- It compiled answers from 18 global banks about lending rates to other large financial institutions over specific terms

- Since it was not based on actual trade data, there was the risk of manipulation and it turned out to be true in 2012

- Now the world is in the transition to trade based risk-free rates

Reference Rates

		Post-Transition		
			Interbank (Unsecured)	
Currency	Pre-Transition	Repo	Overnight	Term
CHF	LIBOR	SARON (2009)		
EUR	EONIA, Euribor		€STR (2019)	Euribor
GBP	LIBOR, SONIA		SONIA	
JPY	LIBOR, TIBOR, Euroyen TIBOR		TONAR (2016)	TIBOR
USD	fed funds, LIBOR	SOFR (2017)	fed funds	Ameribor BSBY

CHF: Swiss franc; EUR: euro; GBP: British pound; JPY: Japanese yen; USD: US dollar.

SARON: swiss average rate overnight
ESTR: euro short term rate
Euribor: euro interbank offered rate
SONIA: sterling overnight index average
TONAR: Tokyo overnight average rate
TIBOR: Tokyo interbank offered rate
SOFR: secured overnight financing rate
Ameribor: American interbank offered rate
BSBY: Bloomberg short term bank yield index
KOFR: korea overnight financing repo rate

SOFR

- Published daily by Federal Reserve Bank of New York $_{\text{FRBNY}}$

- Cost of overnight borrowing and lending in US Treasury repo market

- Best measure of private sector risk-free rate as collaterals are US Treasuries and the market is extraordinarily deep

- Fully transaction based rate, incorporating widest coverage of repo data available

- Transaction volume usd 1 trillion as of 2020

Difference

- LIBOR was forward looking rates; i.e. reflects market expectations about future rates

- E.g. swap contract based on 3m LIBOR
  - Today is the first day for the new interest payment period
  - On the floating side to pay interest at the end of this period (3m later)
  - You know how much to pay after 3m

- In contrast, SOFR is not term rate and published daily

- Typically, you pay the daily compounded SOFR rate after 3m ; hence, cannot be known in advance

SOFR Averages

- In using overnight rates, it’s standard to take average values over a certain period
- To accurately reflect rate movements and to smooth out idiosyncratic, day-to-day fluctuations
- Simple SOFR is simple average of past rates ; easier to implement
- Compound SOFR is geometric average of past rates ; economically sound, more accurate in reflecting time value of money
- Choice is the decision between counterparties

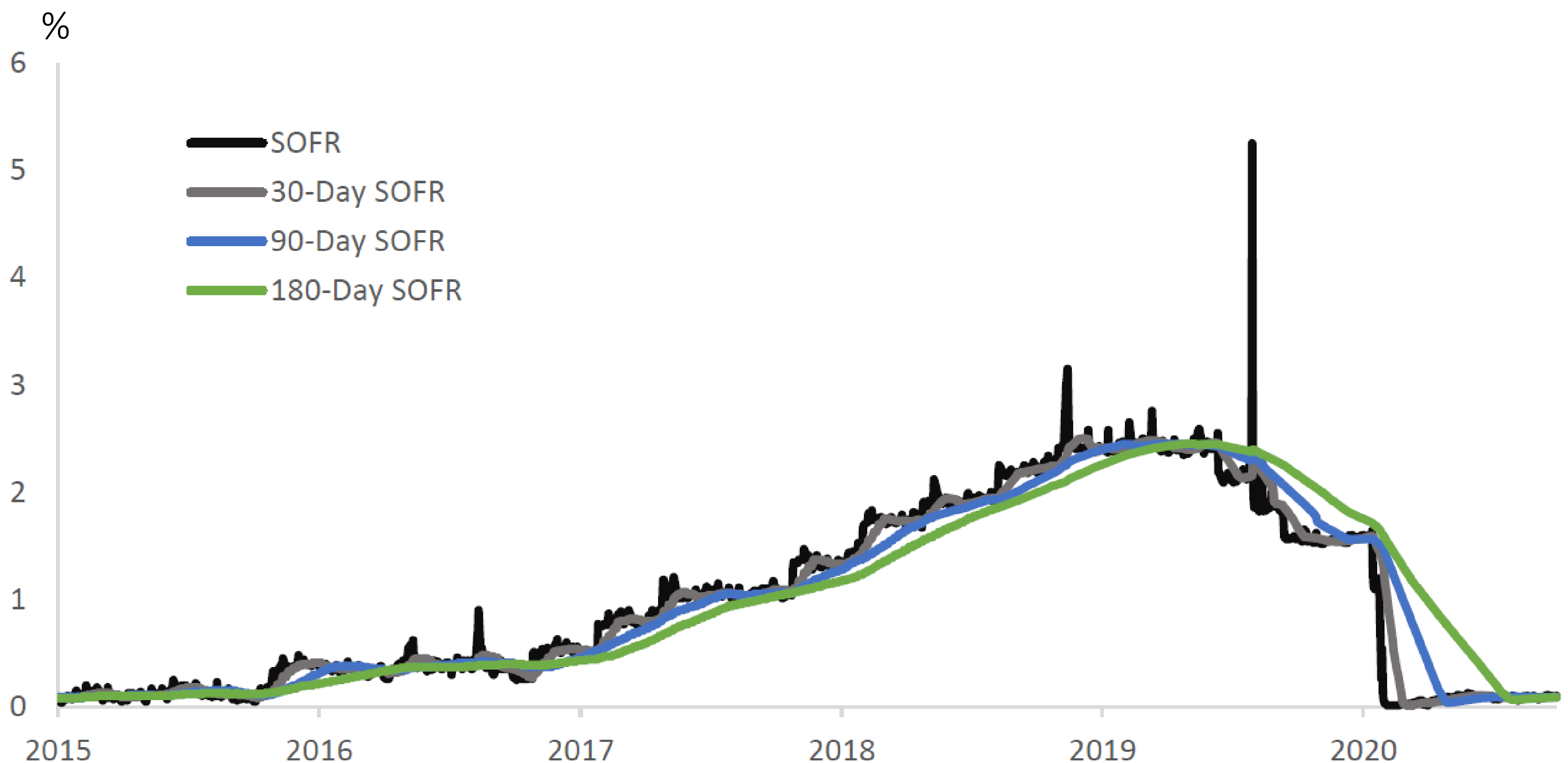
- Simple SOFR formula

$$\text{simple sofr} = \sum_{i=1}^{d_b} \frac{r_i n_i}{N} \times \frac{N}{d_c} \Rightarrow \boxed{\frac{\bar{r} d_c}{N} = \sum_i \frac{r_i n_i}{N}}$$

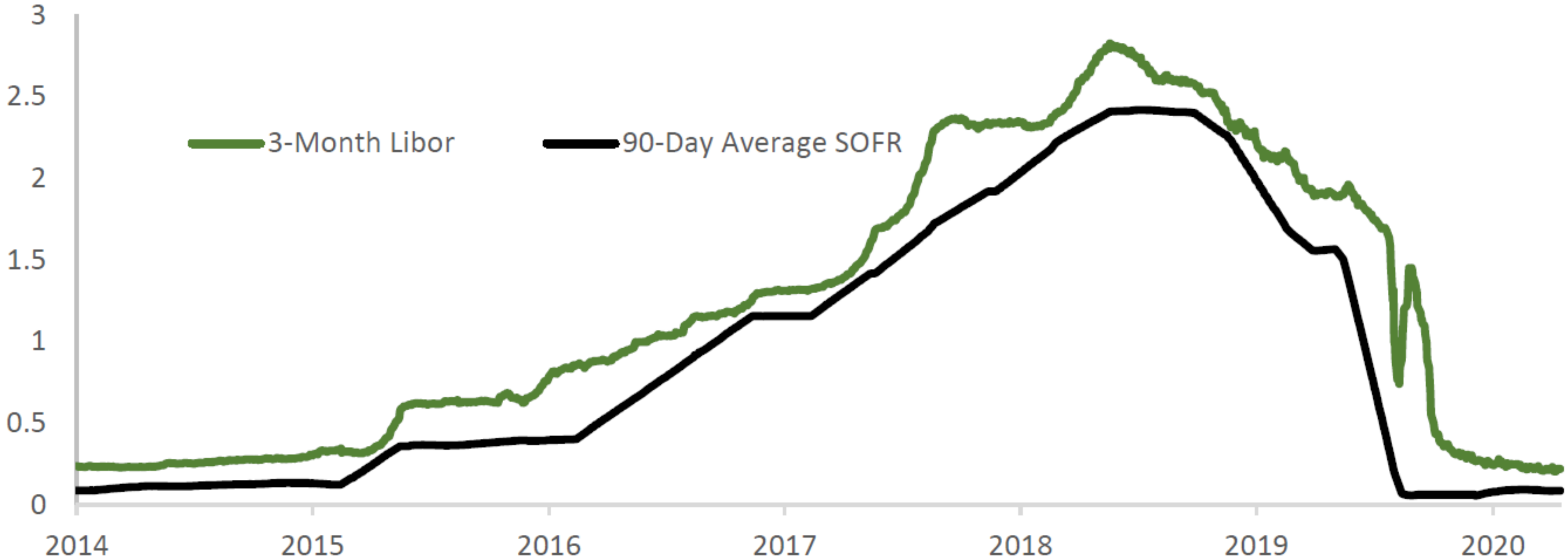
- Compound SOFR per annum

$$\text{compound sofr} = \left[\prod_{i=1}^{d_b}\left(1 + \frac{r_i n_i}{N}\right) - 1\right] \times \frac{N}{d_c}$$

- d_b = no. of business days in the interest period
- d_c = no. of calendar days in the interest period
- r_i = the rate applicable on business day i
- n_i = no. of calendar days for which r_i applies ; most days, it's 1 but on Friday it is 3, and greater than 1 before a holiday
- N = market convention for quoting no. of days in the year ; in US, money market convention is N=360 ; in UK, it's 365



Source: Federal Reserve Bank of New York; Federal Reserve Board staff calculations. Data from August 2014 to March 2018 represent modeled, pre-production estimates of SOFR.



Source: Federal Reserve Bank of New York, ICE Benchmarks Administration; Federal Reserve Board staff calculations.
Data from August 2014 to March 2018 represent modeled, pre-production estimates of SOFR.

Payments

- Most contracts using LIBOR as floating benchmark use LIBOR determined before the beginning of the interest period in advance
- Some LIBOR swaps reference a value of LIBOR determined at the end of interest period in arrears
- Many borrowers prefer to know their payments ahead of time so prefer in advance
- Investors prefer returns based on rates over the interest period and tend to view in-advance-rate as out of date

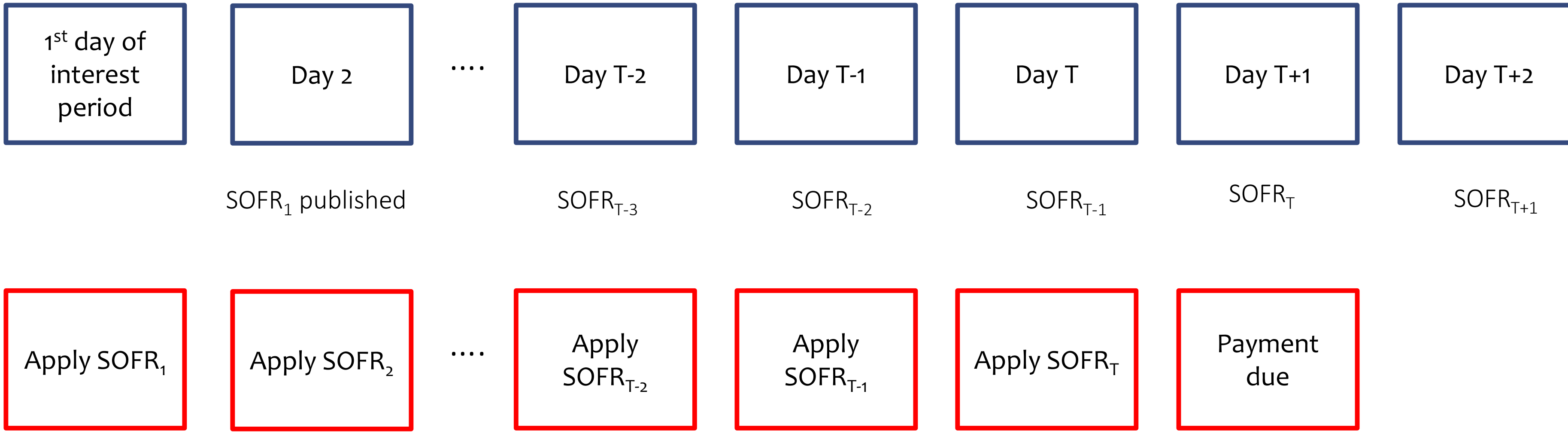
In Arrears

- E.g. day 1 to day 90 period of interest accumulation and payment on day 91

- Has to observe SOFR on day 90 but that's published in the morning of day 91 ; only a few hours before payment

- Hence existing conventions to give borrowers more time to make payments

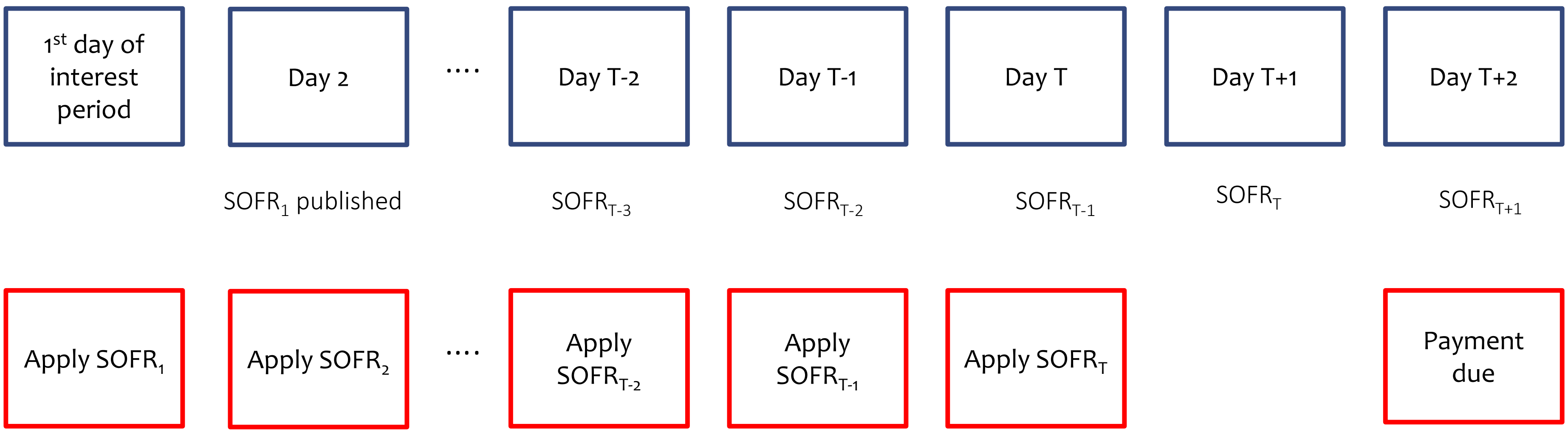
- Plain arrears



- Require payment on the same day that the final payment is known

- Often operationally impractical

- Payment delay



- This delay feature is same as in OIS contracts

- Also has been used in SOFR cross currency (usd/krw) swaps in South Korea

- Arrears with 1-day lockout

1st day of interest period	Day 2	....	Day T-2	Day T-1	Day T	Day T+1	Day T+2
	$SOFR_1$ published		$SOFR_{T-3}$	$SOFR_{T-2}$	$SOFR_{T-1}$	$SOFR_T$	$SOFR_{T+1}$
Apply $SOFR_1$	Apply $SOFR_2$	....	Apply $SOFR_{T-2}$	Apply $SOFR_{T-1}$	Apply $SOFR_{T-1}$	Payment due	

- Some 2-5 day lockout has been used in some SOFR floaters

- Arrears with 1-day lookback

1st day of interest period	Day 2	....	Day T-2	Day T-1	Day T	Day T+1	Day T+2
	$SOFR_1$ published		$SOFR_{T-3}$	$SOFR_{T-2}$	$SOFR_{T-1}$	$SOFR_T$	$SOFR_{T+1}$
Apply $SOFR_0$	Apply $SOFR_1$	....	Apply $SOFR_{T-3}$	Apply $SOFR_{T-2}$	Apply $SOFR_{T-1}$	Payment due	

- For each day in the interest period, apply SOFR from k days earlier

- 3-5 day lookback has been used in SONIA and SOFR floaters

In Advance

- **Last reset** : use the averaged SOFR for the equivalent time period as the upcoming interest period

- E.g. average of last 90 days for a 90-day SOFR contract

- **Last recent** : use the averaged SOFR for a shorter time period than the upcoming interest period

- E.g. average of last 30 days for a 90-day SOFR contract

Term SOFR

- Market needs for forward looking term rates just like LIBOR

- Term rate reflects **market expectations** whereas compound SOFR in arrears reflects what actually happened

- Term SOFR would likely be based on SOFR Futures on Chicago Mercantile Exchange $_{\text{CME}}$ and SOFR overnight index swap $_{\text{OIS}}$ contracts

- Overnight Treasury repo market underlying SOFR is very deep; term repo markets are much thinner, hence no reliable spot curve directly from them