Option Volatility and Pricing

CH. 24 Volatility Skews

2

전통적인 이론적 가격 결정 모델은 현실과 다르다는 문제가 있습니다. 가격은 diffusion process를 항상 따르는 것이 아니고, 변동성 또한 constant가 아닙니다. 게다가 실제 시장은 로그노말 분포처럼 보이지 않을 수 있다. 이러한 문제에도 불구하고 트레이더는 모델을 아예 사용하지 않는 것 보다 현실에 적용하기엔 결함이 존재한 모델을 사용하는 것이 더 좋다고 판단했습니다. 더 나은 이론적 가격 모델은 더 정확한 pricing을 제공하지만, 모델이 매우 복잡하고 추가적인 input이 필요로 하기 때문에 효율적인 방법은 아닙니다. 더 현실적인 해결책은 시장이 거래자와 동일한 모델을 사용하고 있다고 가정하에 덜 복잡한 모델을 사용하고 현실과의 오차를 줄이는 방법으로 미세 조정하는 것입니다.

3

그림 24-1은 2012년 3월 16일 런던 국제금융거래소에서 거래된 2012년 6월 FTSE 100 인덱스 옵션의 행사가격에 대한 임볼을 보여줍니다. 이전의 여러 수업에서도 배웠듯이, 임볼은 행사 가격에 따라 다르다는 것이 명백합니다. 행사 가격, 만기까지의 시간, 기본 가격 및 이자율이 알려져 있다고 가정하면, 블랙-숄즈 모델에서 옵션의 이론적 가치는 변동성에 전적으로 의존하게 됩니다. 물론 만기가 도래하기 전까지는 그 변동성이 무엇인지 알 수 없을 것이고, 만기 까지의 역사적 변동성을 되돌아보고 계산해야 합니다.

하지만, 기초자산은 모든 옵션에서 동일하기 때문에 모든 행사가격에 대해 서로 다른 임볼갖는 것은 완벽한 블랙-숄즈 세계에서 말이 되지 않는다. 이에 옵션은 만기까지 단 하나의 변동성만 가질 수 있습니다. 시장에서의 활동이 모두가 블랙-숄즈 모델의 효율성을 믿는 결과였다면, over-pirce된 옵션의 매도 및 under-price된 옵션의 매수는 결국 동일한 내재된 변동성을 갖게 될 것이다. 하지만, 이는 현실과 매우 다름을 바로 알 수 있습니다.

4

Volatility Skew는 행사 가격에 대한 임볼의 분포로 정의됩니다. 분포의 형태에 따라 smile 또는 smirk로 불리기도 합니다.

5

행사가격에 따른 임볼의 분포는 헤지에 사용되는 옵션으로 설명이 가능합니다. 주식 시장에서 대부분의 투자자들은 long position이므로 주가 하락을 우려합니다. 투자자는 포지션을 보호하기 위해 protection put의 매입과 covered call의 매도를 하게 됩니다.

Protection put long의 경우 OTM일수록 주가하락에 대한 헤지 효과가 줄어듭니다. 하지만 ITM보다 비용적인 면에서 효율적이기 때문에, 투자자는 OTM put을 선택하게 됩니다. 반대로 Covered call short의 경우, 높은 행사 가격으로 헤지 하게 됩니다.

6

따라서 주식 시장에서는 낮은 행사가격에 대한 매수압력과 높은 행사가격에 대한 매도압력이 존재하는 경향이 있습니다. 이로 인해 행사가격이 낮을 때 임볼이 증가하고 행사가격이 높을 때 임볼이 감소하여 investment skew또는 "downside에 대한 skew"라고도 불리는 이러한 형태를 나타냅니다.

7

이와 마찬가지로, commodity 시장에서는 가격 상승에 대한 우려가 있습니다. 이는 상품 최종 사용자가 더 높은 행사가격으로 protection call을 매수하거나 더 낮은 행사가격으로 covered put을 매도함으로써 가격상승으로부터 자신을 보호하려고 합니다.

8

그 결과, 행사 가격이 낮으면 임볼이 낮고 행사 가격이 높으면 임볼이 높은 형태를 나타냅니다. 물론 농부, 광산 회사, 석유 시추 회사와 같은 상품 생산자들은 상품 가격 하락을 걱정할 가능성이 높기 때문에 위험회피 활동이 있어야 할 것으로 보일 수 있다. 그러나 더 높은 상품 가격과 그에 따른 인플레이션 압력이 전체 경제에 부정적인 영향을 미치는 것으로 인식되기도 하고, 일부 국가에서는 정부가 농산물에 대한 가격 지원

프로그램을 가지고 있기 때문에, 생산자들은 최종 소비자만큼 가격 변동으로 인한 걱정을 할 필요가 없습니다.

9

Currency 옵션시장에서는 upside와 downside에서 동시에 skew가 발생하게 됩니다. 이 경우, 대칭적인 모양의 분포형태가 나타납니다.

10

모델에 스큐를 포함시키기 위해서는 x를 행사가격 y를 임볼로 두어 함수형태로 나타냅니다. 처음의 FTSE 그래프에서 각 point들을 연결한 결과를 다항식 함수 형태를 활용하여 표현하는 것과 같습니다.

11

만약 우리가 Skew를 모델에 대한 input값으로 생각한다면 시장상황의 변화에 따른 skew의 형태가 어떻게 변할 것인지 확인 할 수 있습니다.

12

Sticky-strike를 가정하면, 주가와 같은 시장상황이 변해도 skew의 location과 shape이 변하지 않고, 각 행사가격 별 임볼이 고정되어 있을 것입니다. 하지만, 대부분의 옵션 시장에서는 기초자산 가격 또는 임볼이 이동함에 따라 skew가 변화합니다.

13 14

따라서 floating skew를 가정하게 되면, 기본 가격이 상승 또는 하락할 때 전체 skew가 수평으로 이동하거나 암시적 변동성이 상승 또는 하락할 때 수직으로 이동하게 됩니다. 이때의 skew 변동은 가격이나 임볼의 변화량과 같습니다. 하지만, 상대적으로 10.00의 기초자산 가격 변동은 기본 가격이 낮을 때 큽니다. 마찬가지로 IV의 한 달 동안의 10% 변화보다 한 주 동안의 변화가 더 크기 때문에 모든 변화는 상대적입니다.

15

가격 변동의 상대적 크기를 조정하기 위해 각 행사 가격을 moneyness의 관점에서 표현해야 합니다. 각각의 행사 가격을 ln(X/S)로 표현함으로써 더욱 잘 나타낼 수 있습니다. 시간에 대한 skew의 변동은 행사 가격이 하락과 임볼의 변화에 따라 변동 또는 동일하게 유지합니다.

16

조정이 이루어지지 않은 경우 각 만기 별 FTSE 100에 대한 skew와 표준편차의 관점에서 재조정한 그래프의 차이입니다. 오른쪽의 그래프는

17

이를 "Sticky-delta skew"라고 합니다. 로그 스케일링한 행사가격을 시그마 곱하기 루트t로 나누어 주어 ATM를 기준으로 표준편차의 형태를 보입니다. Delta인 이유는 ATM에서 얼마나 떨어져 있는지에 대한 근사치 이기 때문입니다.

18

다음은 y축 임볼에 대한 조정입니다. 시장의 전반적인 임볼을 생각할 때, 저희는 일반적으로 ATM일 때의 임볼을 생각합니다. 각 행사가격에서 임볼이 높은지 낮은지는 ATM의 임볼과 비교하고자 합니다. 각 행사 가격의 변동성을 ATM 임볼의 백분율로 표현함으로써 y축을 보정합니다. ATM 임볼이 20%인 경우 25%의 임볼은 25/20 = 125%로 표시됩니다. 18%의 잠재적 변동성은 18/20 = 90%로 표시됩니다. 그리고 현시점에서의 잠재적 변동성과 동일한 잠재적 변동성은 20/20 = 100%로 표시됩니다.

19

skew의 모양은 시장 상황이 변화함에 따라 형태가 변화합니다. 두 가지 일반적인 변화는 skewness와 kurtosis가 있습니다. 낮은 행사가격과 높은 행사가격의 임볼이 얼마나 다른지를 정의하는 기울기를 skewness라고 합니다. Negative skewness면 큰 하향 이동 가능성이 커지므로 행사가격 인하에 대한 수요가 더 커집니다. 반대로 positive skewness면 큰 상향 이동 가능성이 더 크고, 결과적으로 더 높은 행사가격에 대한 수요가 더 커집니다. kurtosis는 skew의 곡률에 대해 정의합니다. 분포에 "fat tail"가 있는

경우 어느 방향으로든 큰 변동이 일어날 가능성이 더 큽니다. 결과적으로, positive kurtosis에서는 OTM에 대한 수요가 더 커질 것입니다.

20

행사가격과 임볼에 대한 그래프로 옮긴 모습은 다음과 같습니다.

21

skew와 관련된 민감도는 사용되는 스큐 모델에 따라 달라집니다. 예를 들어, 행사 가격 x에서의 변동성이 y = a + bx + cx^2로 주어진 2차-수평 모형을 가정해볼 수 있습니다.

이 모형에서 a의 가치는 기본 변동성이며, ATM의 임볼입니다. b와 c의 값은 각각 skew의 skewness와 kurtosis를 나타냅니다. b는 행사가격이 더 높거나 낮은지에 따라 긍정적일 수도 있고 부정적일 수 있다. 거래소 거래 시장의 경우, 시장의 확률 분포가 항상 fat tail 특성을 나타내기 때문에 c의 값은 거의 항상 양수입니다.

Skewness와 kurtosis변화에 가장 민감한 옵션은 스큐 모델에서 델타가 -25인 put과 델타가 +25인 call은 skewness 민감도가 가장 높은 경향이 있습니다. 이러한 이유로, skewness의 일반적인 척도는 -25 델타 풋의 임볼과 +25 델타 콜 임볼 사이의 차이입니다. Kurtosis에 대한 벤치마크는 없지만, 많은 모델에서 델타가 약 -5인 put과 델타가 +5인 call은 kurtosis의 변화에 가장 민감한 경향이 있습니다.

22

Skew를 모델링 하는 것은 델타, 감마, 세타, 베가 측정에도 영향을 미칩니다. Vol의 즉, 변화가 skew되어 있지 않으면, 옵션가치 및 위험 민감도가 예상보다 많거나 적을 수 있습니다. 예를 들어, -20의 델타를 가진 OTM의 PUT 경우에, 기초 기초자산 가격 1 상승하면 옵션가치 0.2 하락 옵션의 베가가 0.1 이고 skew의 변화로 인해 옵션의 IV 0.5%증가 옵션가치 0.5 * 0.1 = 0.05만큼 증가 따라서 옵션의 가치는 0.15만큼

변화합니다. 즉 옵션의 델타는 -15로 재조정됩니다.

23

델타 및 감마에 베팅하 듯이 투자자는 skew의 형태가 변화하는 것을 예측할 수 있습니다. 저번 quiz에서도 나왔지만, skew의 유형과 기울기의 변화가 어떻게 될 것인지 예상하는지에 따라, 더 낮은 행사 가격을 구매하고 더 높은 행사 가격을 판매하거나 그 반대의 포지션을 취할 수 있습니다.

이 경우 발생하는 문제는 skew 트레이드가 헤지를 하지 않는다면 포지션은 양의 델타 또는 음의 델타를 가지게 됩니다. 따라서 skew의 움직임에만 초점을 맞추고자 하는 투자자는 델타 포지션을 상쇄해야 하고, 가장 일반적으로 underlying contract에서 반대되는 델타 포지션을 사용해야 합니다. 일반적으로 이러한 전략을 risk reversal이라고 합니다.

24

교재에 나와있는 investment skew 예시로 설명을 드리자면, 왼쪽의 경우 skew가 험준해 질 것으로 예상하는 경우 입니다. 이 경우에는 OTM put을 long call을 short하게 되면 negative delta가 됩니다. 따라서 underlying long을 해줌으로써 델타 포지션을 상쇄하게 됩니다. 오른쪽은 반대의 경우인데요. Skew가 완만해 질 것으로 예상되면, OTM call을 long하고, put을 short, underlying을 short해줍니다.

추가적으로 보통 콜과 풋은 동일한 베가 값으로 선택됩니다. 이것은 위치가 초기에 베가 neutral임을 보장하며 따라서 전체적인 임볼의 변화보다는 skewness 변화에 주로 민감합니다.

25

스큐의 kurtosis 대한 trade또한 가능합니다. kurtosis가 증가할 것으로 예상되면 낮은 행사 가격과 높은 행사 가격 모두에서 옵션 가격이 증가합니다. 따라서 거래자는 OTM 콜과 풋을 모두 구매하여 strangle long position을 구성하고자 할 것입니다. 반대의 경우도 콜과 풋을 모두 매도하여 strangle short position을 구성할 것입니다. 그렇게 된다면 포지션은 각각 양, 음의 베가를 가질 것이기 때문에 볼의 전반적인 변화에 민감하게 됩니다. ATM 옵션은 kurtosis에 대해 neutral이기 때문에 ATM 스트래들에서 베가 포지션을 상쇄함으로써 vega neutral을 달성할 수 있습니다.

추가적으로 이 과정에서 만약 kurtosis가 스트래들의 베가의 정확한 절반을 갖는 스트랭글로 이루어진다면, 즉 두개의 스트랭글을 short 하고 한 개의 스트래들을 long 하면, 그 position은 dragonfly라고 불립니다.

26

그림 24-16는 동일한 underlying에 만기만 다른 두 상품에 대해서 스큐가 잘못 책정되었다고 생각하는 경우, OTM put에 대해서는 3월물을 매도 6월물을 매수 OTM call에 대해서는 3월물을 매수 6월물을 매도하는 전략을 세울 수 있습니다. 이는 put 캘린더 스프레드를 매수 call 캘린더 스프레드를 매도하는 것과 같습니다. 전의 예시와 같이 skew의 움직임에 대해서만 투자하기 위해서는 베가를 neutral 하게 만들 필요가 있습니다. 따라서 투자자는 각각 동일한 베가를 갖는 캘린더 스프레드를 선택하고, 추가적으로 underlying 포지션을 취함으로써 델타와 베가에 대해 neutral 할 수 있습니다.

27

두 개의 서로 다른 만기 월의 kurtosis가 잘못된 것처럼 보일 때 동일한 접근법을 사용할 수 있습니다. 이에 투자자는 6월 스트랭글을 매수하고 3월 스트랭글을 매도 것을 고려할 수 있습니다.

28

마지막으로 implied distribution에 대해 설명해 드리자면, 만기 시의 underlying price의 확률 분포를 시장에서 butterfly spread의 가격을 보고 추정할 수 있다고 합니다.

우선, 0에서 무한대까지 5단위 마다 행사가격을 가정하고, 최대 payoff가 5인 butterfly spread를 단위마다 매수한다면 만기 시 기초자산 가격에 관계없이 가치는 항상 5입니다. 따라서 모든 butterfly spread의 가격을 합치면 5가 되어야 합니다.

29

만기 시 기초자산가격이 5단위로 끊어진 행사 가격과 동일하다고 가정하면, 각 기초자산 가격이 발생할 확률은 spread의 가격을 5.00으로 나눈 값과 같습니다. 75/80/85 spread의 가격이 0.15인 경우 만료 시 underlying 가격이 80일 확률은 0.15/5.00 = 0.03 (3%)입니다. 마찬가지로 90/95/100 butterfly의 가격이 0.50일 경우 만기 시 기초자산 가격이 95일 확률은 0.50/5.00 = 0.10 (10%)입니다.

30

그림 24-18은 각 행사가격 별 call value와 이에 따른 spread value 그리고 가격 확률에 대해 나타내고 있습니다. 오른쪽은 underlying 가격을 확률분포로 나타낸 것입니다.

31

이를 행사가격 간의 간격을 더 쪼개서 연속적으로 나타내면 다음과 같은 분포로 나타납니다. 분포를 보시면 오른쪽으로 skew 되어있는 것을 확인할 수 있습니다. 이는 일정한 vol을 가정하는 BS 공식을 사용하여 call 가격 계산을 하였기 때문이라고 추측할 수 있습니다.

32

그러나 우리는 skew에 나타난 임볼로 구해진 spread의 가격 사용하여 분포를 도출하고 일정한 vol을 가진 BS로 구해진 가격 분포와 비교함으로써 시장이 암시하는 분포를 어느 정도 이해할 수 있다. 왼쪽에 있는 그림 24-21에서는 챕터 초반에 나온 FTSE 100 옵션에 대한 두 가지 분포입니다. 점선으로 나타난 것은 skew에서 생성된 임볼에서 나온 것이고

실선은 모든 행사 가격에서 일정한 vol로 생성된 가격에서 나온 것입니다. 두 분포에 의하면 실제 시장의 분포는 큰 하락의 가능성이 더 크고, 작은 하락과에 대해서는 가능성이 작은 것으로 보입니다. 상승에 대해서는 큰 상승에 대해서는 확률이 더욱 낮아지는 것을 확인할 수 있습니다.

그림 24-22는 옆의 그림과 마찬가지로 밀 선물 옵션에 대해 두가지 분포를 보여줍니다. 이 분포는 앞의 예제의 분포보다 로그 정규 분포에 더 가깝게 일치하는 것으로 보이지만, 시장은 여전히 실제 대수 정규 분포와 차이를 보입니다.