



# Volatility contract

---



# Volatility contract가 나오게 된 이유

---

- Imvol이 싸거나 비싸다 생각해서 Imvol만 사고 팔고 싶다.

→이론적으로 구성가능

- 비싼 옵션을 매수하고 Dynamic hedging으로 옵션을 복제해 매도
- 싼 옵션을 매도하고 Dynamic hedging으로 옵션을 복제해 매수

# Volatility contract가 나오게 된 이유

---

- Dynamic hedging의 한계 존재
  - 내 order의 price impact + transaction cost
  - bid- ask gap
  - underlying asset의 분포가 normal이 아님.

→ 증권사 : 귀찮은건 내가 해줄게

# Realized volatility contracts

- Realized volatility contracts의 만기가치  
= 계약기간 동안의 로그리턴의 연율화 표준편차

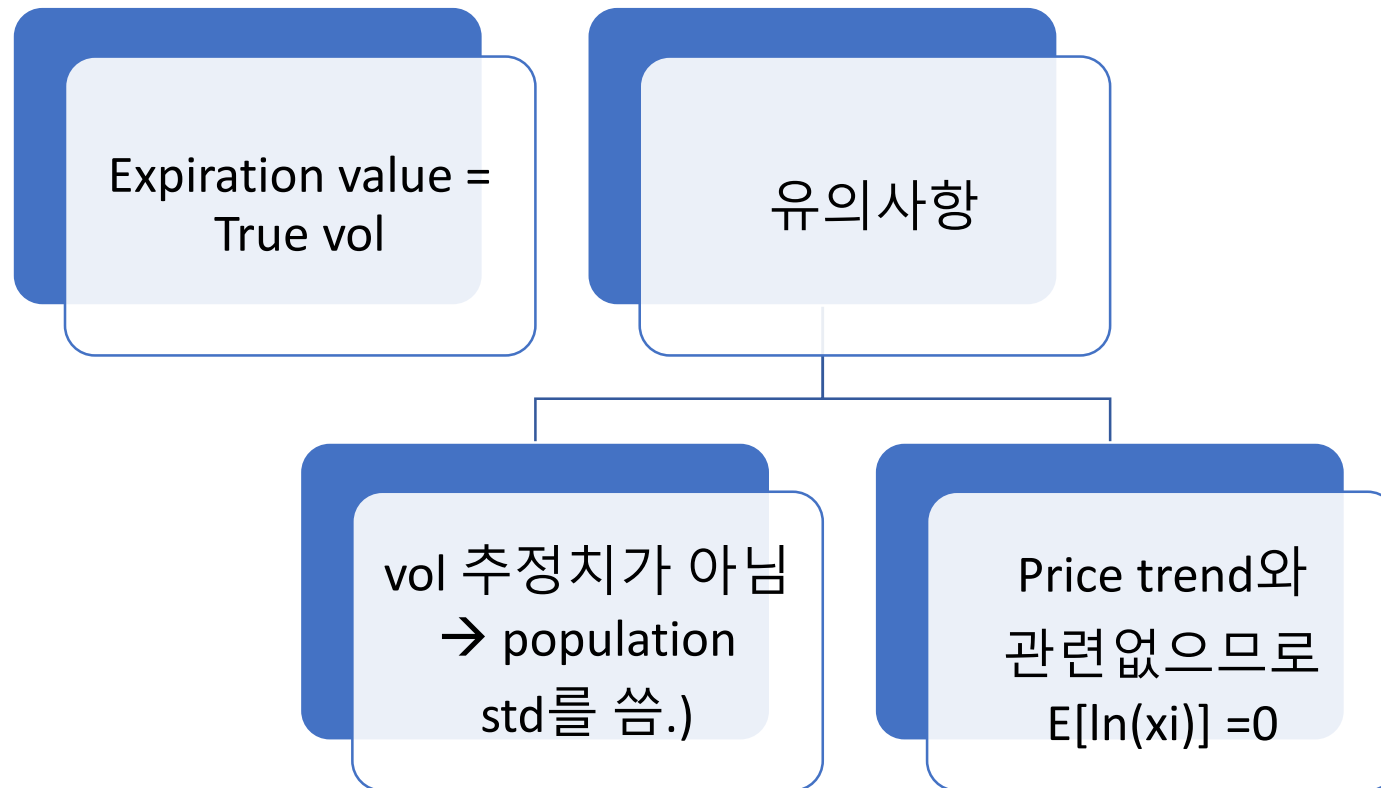
\* $x_i$ =오늘가격/어제가격

\* $n$ = 계산기간의 거래일

\*252거래일로 연율화

$$\sqrt{252 \sum_{i=1}^n \frac{\ln(x_i)^2}{n}}$$

# Realized volatility contracts



# Realized volatility contracts 예시

---

- 호가는 notional vega로 불리는 volatility 로 한다.
- $P\&L = (\text{Realized vol} - \text{계약한 vol}) * \text{계약금}$ 
  - ex)  $(23.75 - 20) * 1000\$ = +3750\$$
  - $(18.6 - 20) * 1000\$ = -1400\%$

## Realized volatility contracts **as a variance swap**

- 실제 settlement 는 volatility가 아니라 variance를 거래한다.

이유 i) variance를 복제하기가 더 쉽기 때문.

ii) 분산은 시간에 1대1로 비례

→ 2개의 다른 시간대의 계약을 합치기가 쉬움

예시) 2개월 25% + 1 개월 22%

$$\frac{(2 / 12 \times 25^2) + (1 / 12 \times 22^2)}{3 / 12} = 578$$

## Realized volatility contracts **as a variance swap**

- 호가와 settlement가 다르기 때문에
- Value per variance point

$$= \frac{\text{vega notational}}{2 \times \text{volatility price}}$$



## Realized volatility contracts as a variance swap 예시

- If the buyer of a volatility contract pays 20 for \$10,000 vega notional,
- Variance point value =  $\$10,000/2 \times 20 = \$250$
- When Real vol = 19%
  - $\$250 \times (19^2 - 20^2) = \$250 \times (361 - 400) = \$9,750$
- When Real vol = 23%
  - $\$250 \times (23^2 - 20^2) = \$250 \times (529 - 400) = \$32,250$

## Realized volatility contracts as a variance swap 예시

- When Real vol = 50%

- $\$250 \times (50^2 - 20^2) = \$250 \times (2,500 - 400) = \$525,000$

→ 손익이 너무 커서 cap을 둠

\* 특히 개별주식에 적용 index는 없는 경우도 있음.

- When Real vol = 50 % & cap= 40%

- $\$250 \times (40^2 - 20^2) = \$250 \times (1,600 - 400) = \$300,000$

# Implied Volatility Contracts

---

## VIX 등장의 배경

- Option Exchange index( OEX )
  - 과거 전체시장을 대표할 수 있는 옵션지수
    - OEX의 30일 이론적 im-vol을 뽑아낸 것이 과거VIX
    - VIX자체를 거래할 수 있게 발전되며
      - 2003년부터 S&P500의 Im-vol을 사용

# Implied Volatility Contracts VIX(과거버전)

---

## VIX 계산하기 (과거버전)

---

Step1) ATM put call invol average

---

Step2) interpolate with 2 closest strike price

---

Step3) interpolate with 2 closest maturity

# Implied Volatility Contracts VIX 계산 예시

S&P500 spot = 863.4

가까운 행사가격 = [ 860, 870 ]

가까운 만기 =[14 일, 42일 ]

옵션Imvol

	Month 1 [ $\tau=14$ ]		Month 2 [ $\tau=42$ ]	
	860	870	860	870
Call	22.16	21.48	20.13	19.93
Put	22.21	21.44	20.17	19.94

step 1)  $\downarrow$  평균  $\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$

22.185    21.46    20.15    19.94

# Implied Volatility Contracts VIX 계산 예시

	Month 1 [ $\tau=14$ ]		Month 2 [ $\tau=42$ ]	
	860	870	860	870
Call	22.16	21.48	20.13	19.93
Put	22.21	21.44	20.17	19.94

spot  $\approx 863.4$

Step 1) -ATM put call Avg

Step 2)  $\underbrace{860 \quad 863.4 \quad 870}_{10}$

-strike price interpolate

Month 1

$\Rightarrow 22.185 \cdot 3.4 + 21.46 \cdot 6.6$

$\Rightarrow 21.9835$

Month 2

$\Rightarrow 20.15 \cdot 3.4 + 19.94 \cdot 6.6$

$\Rightarrow 20.0769$

# Implied Volatility Contracts VIX 계산 예시

strike price interpolate

step2)

	spot	
860	863.4	870
$\underbrace{\quad \quad \quad}_{3.4} \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{6.6}$		
$\underbrace{\quad \quad \quad}_{10}$		

Month 1

$$\Rightarrow \frac{22.185 \cdot 3.4 + 21.46 \cdot 6.6}{10}$$

Month 2

$$\frac{20.15 \cdot 3.4 + 19.94 \cdot 6.6}{10}$$

$\Rightarrow 21.9835$

$\Rightarrow 20.0769$

time  
step4) interpolate

∴ VIX

21.9835   21.0204   20.0769

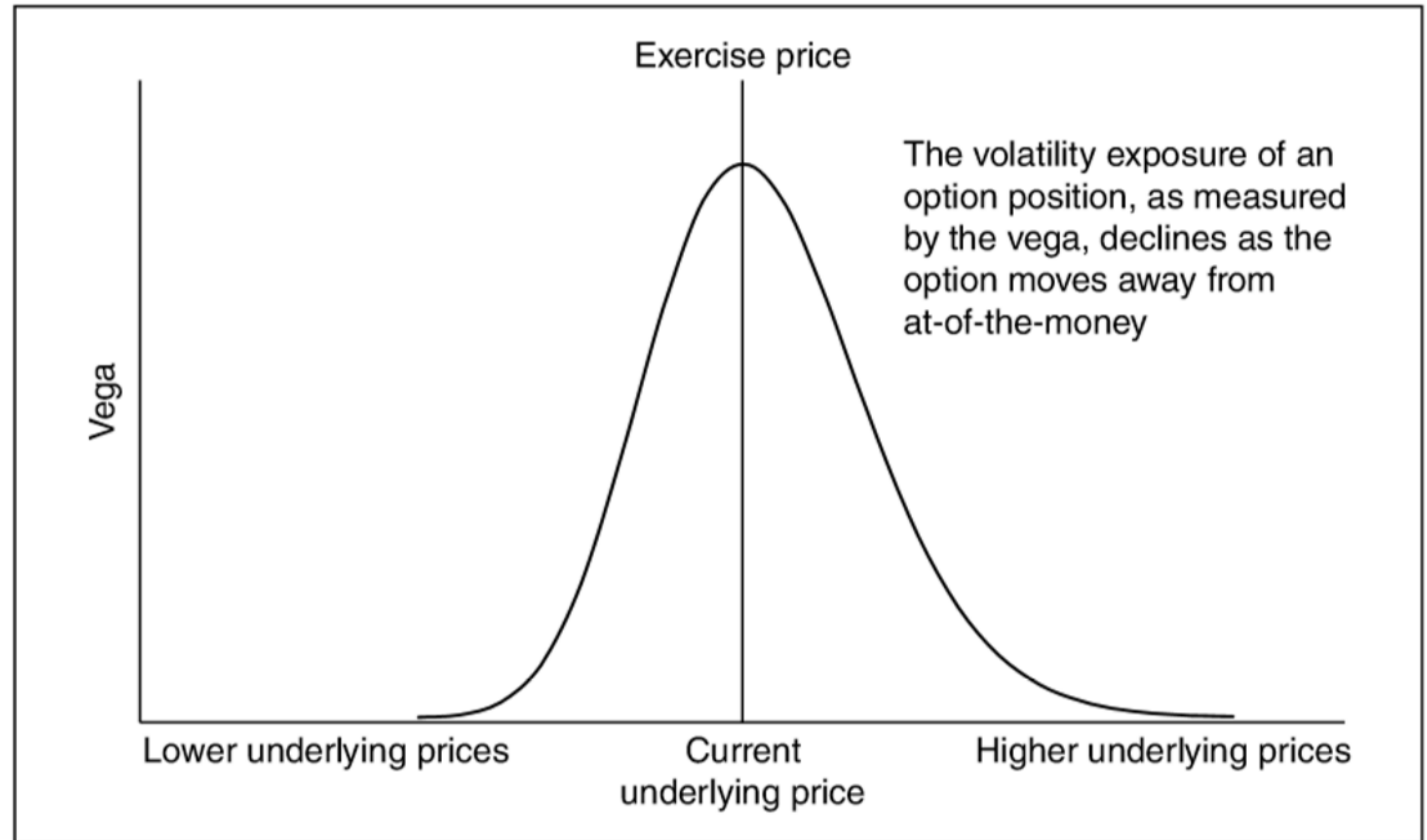
$$21.9835 \cdot \frac{16}{28} + 20.0769 \cdot \frac{12}{28}$$

$\cdot \quad \underbrace{\quad 16 \quad}_1 \quad \underbrace{\quad 12 \quad}_2 \quad \cdot$   
 $T_1 = 14 \quad T = 30 \text{일} \quad T_2 = 42$   
 $\underbrace{\quad \quad \quad}_{28}$

# Implied Volatility Contracts 구버전VIX한계

- Imvol를 사는것은 vega에만 노출되고 싶은것.
    - 단점 1.
- ATM에서 벗어나면 vega는 변한다.

Figure 25-1 The vega (volatility sensitivity) of an option.





# Implied Volatility Contracts

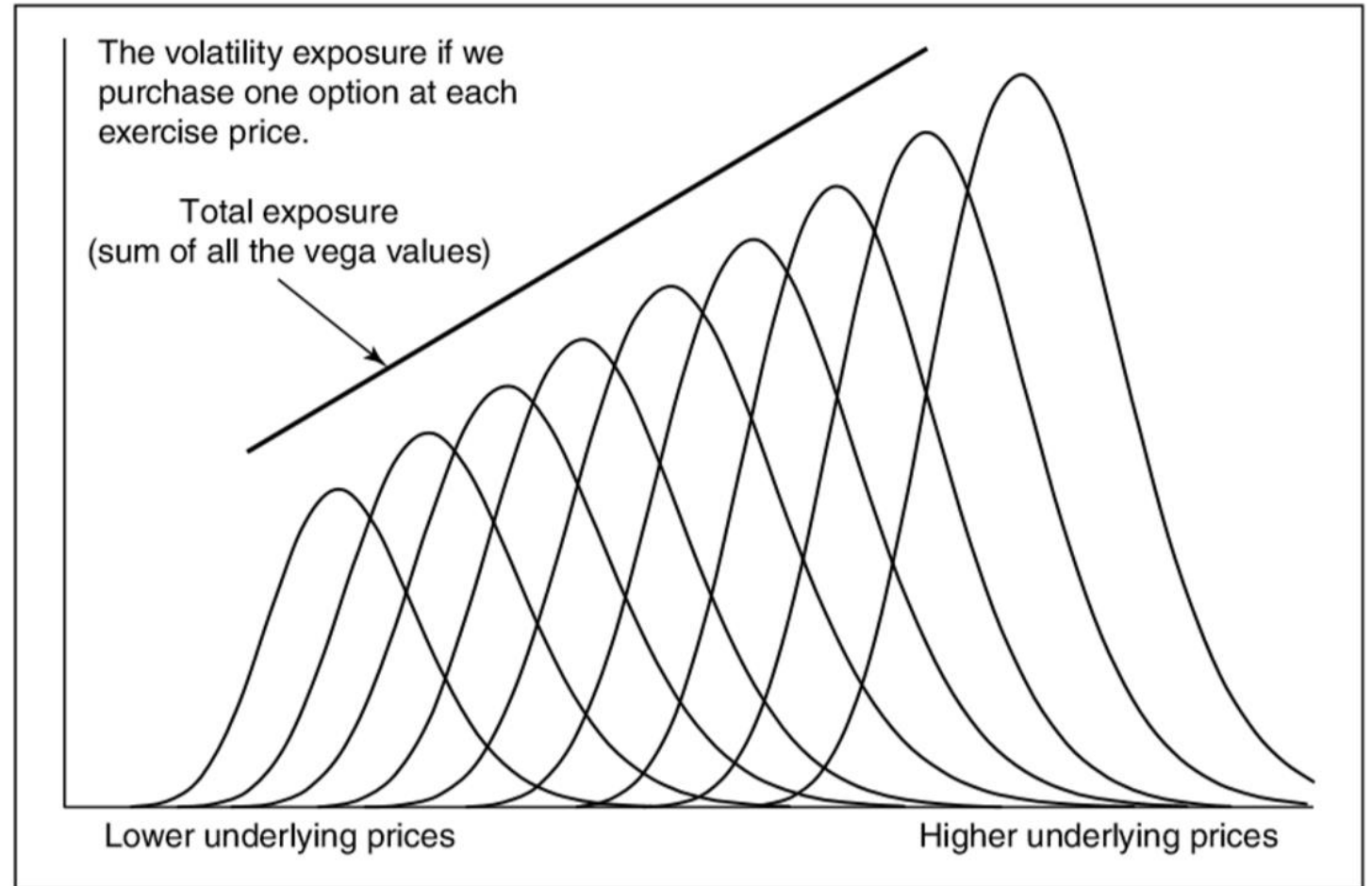
## 구버전 VIX 한계

- Imvol를 사는것은 vega에만 노출되고 싶은것.

- 단점 1. ATM에서 벗어나면 vega는 변한다.

→ 그렇담 모든 k에 대해 분산투자를 한다면? 그래도 안된다.

Figure 25-2 Volatility exposure if we purchase one option at each exercise price.

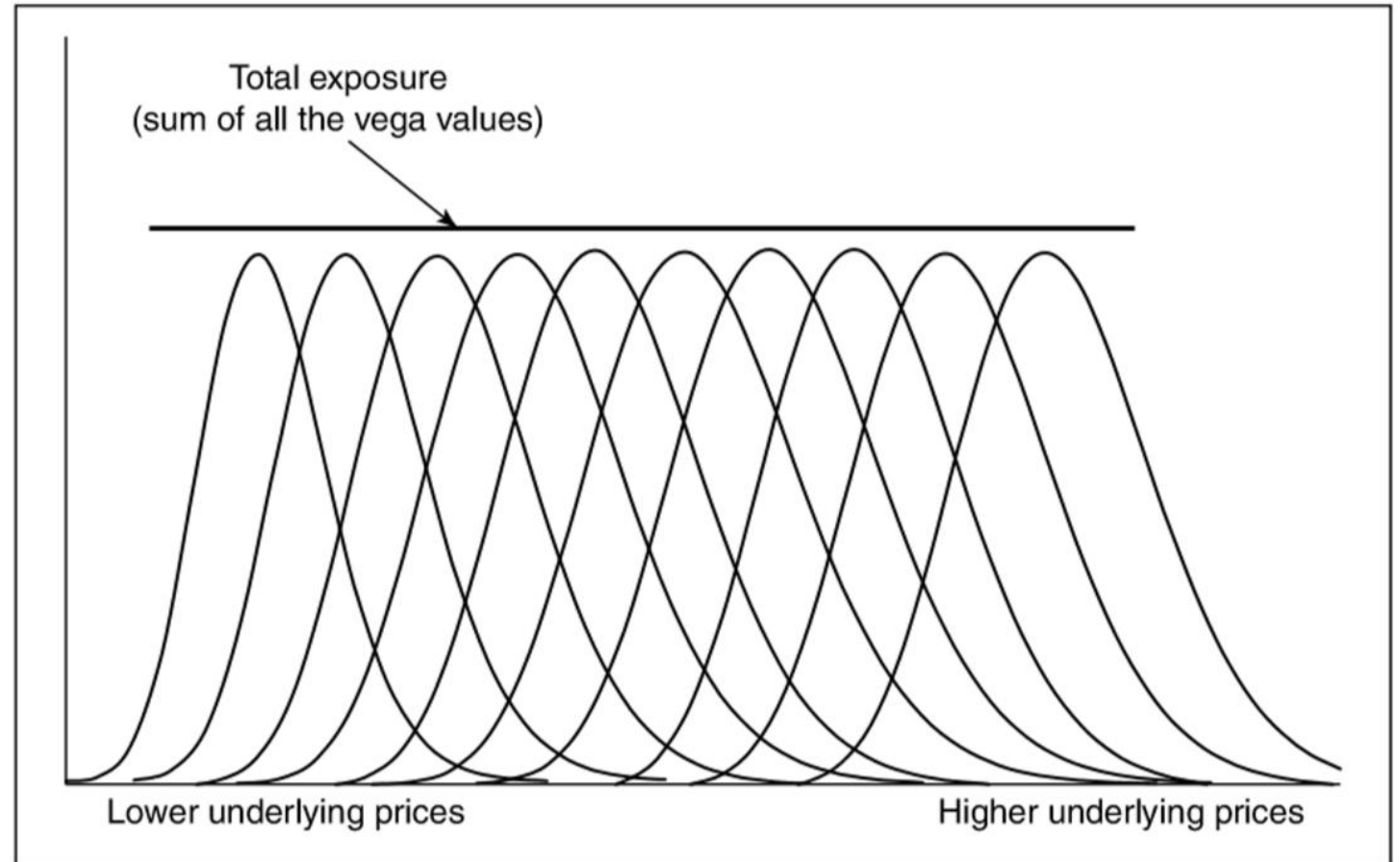


# Implied Volatility Contracts

## 구버전 VIX 한계

→  $1/(\text{행사가})^2$  만큼의  
수량을 사줘야 기초자산의  
변화와 상관없이 vega 생성.

Figure 25-3 Purchasing  $1/X^2$  options at each exercise price.



# Implied Volatility Contracts VIX 신버전

- Timevalue를 capture하기 위해 forward price기준 OTM 옵션을 쓴다.
- Put Call Parity를 사용해 forward price를 산출하고, 그에 가까운 행사가를 정한다.(closest-to-the-money )
- Price는 bid-ask mid point를 사용한다.
- 근처의 2개의 행사가격에서 계산을 진행한다. 단 낮은 행사가의 put과 높은 행사가의 call은 계산에 넣지 않는다.
- 존재하는 모든 행사가격의 거리를 감안하여 계산한다.

# Implied Volatility Contracts VIX 신버전

$$\sigma^2 = \frac{2}{T} \sum_i \frac{\Delta K}{K_i^2} e^{RT} Q(K) - \frac{1}{T} \left[ \frac{F}{K_0} - 1 \right]^2$$

$\sigma^2$ : 잔존기간  
 $\Delta K$ : 행사가격 차이 (우리나라~2.5)  
 $K_i$ : 행사가격  
 $e^{RT}$ : 무위험 이자율  
 $Q(K)$ : 콜/풋 가격  
 $F$ : 콜/풋으로 계산한 합성선물 가격  
 $K_0$ : F 보다 낮은 첫번째 행사가격

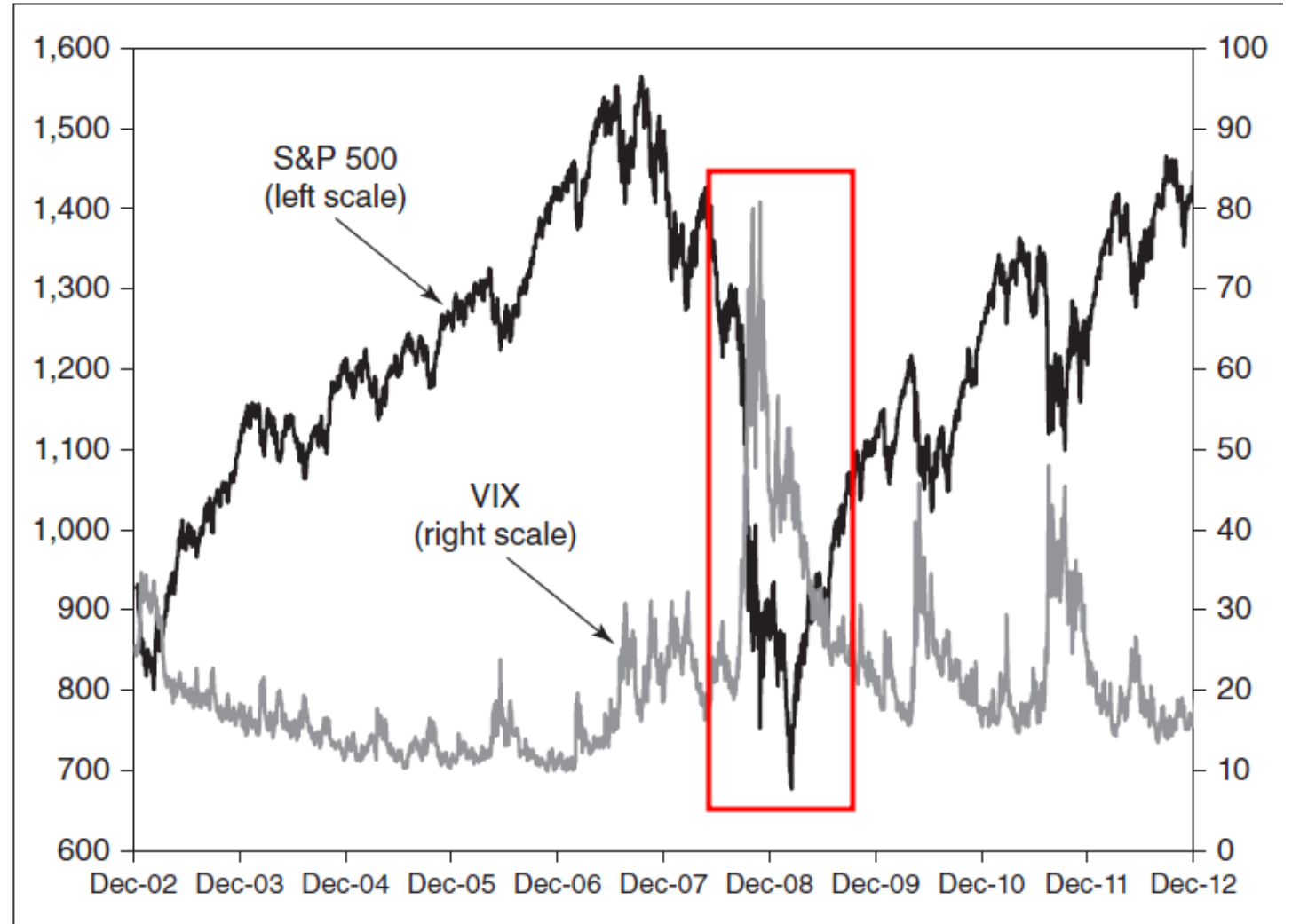
$$VIX = 100 \times \sqrt{\left\{ T_1 \sigma_1^2 \left[ \frac{N_{T_2} - N_{30}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right] + T_2 \sigma_2^2 \left[ \frac{N_{30} - N_{T_1}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right] \right\} \times \frac{N_{365}}{N_{30}}}$$

$T_1$ : 근원물 만기까지의 분 / 연간 총분  
 $T_2$ : 차월물 만기까지의 분 / 연간 총분  
 $N_{T_2}$ : 근원물 만기까지의 분  
 $N_{30}$ : 30일을 분으로 환산  
 $N_{T_1}$ : 원원물 만기까지의 분  
 $N_{365}$ : 365일을 분으로 환산

# VIX의 특성1

주식의 imvol은  
주식과 negatively  
correlated 되어있다.

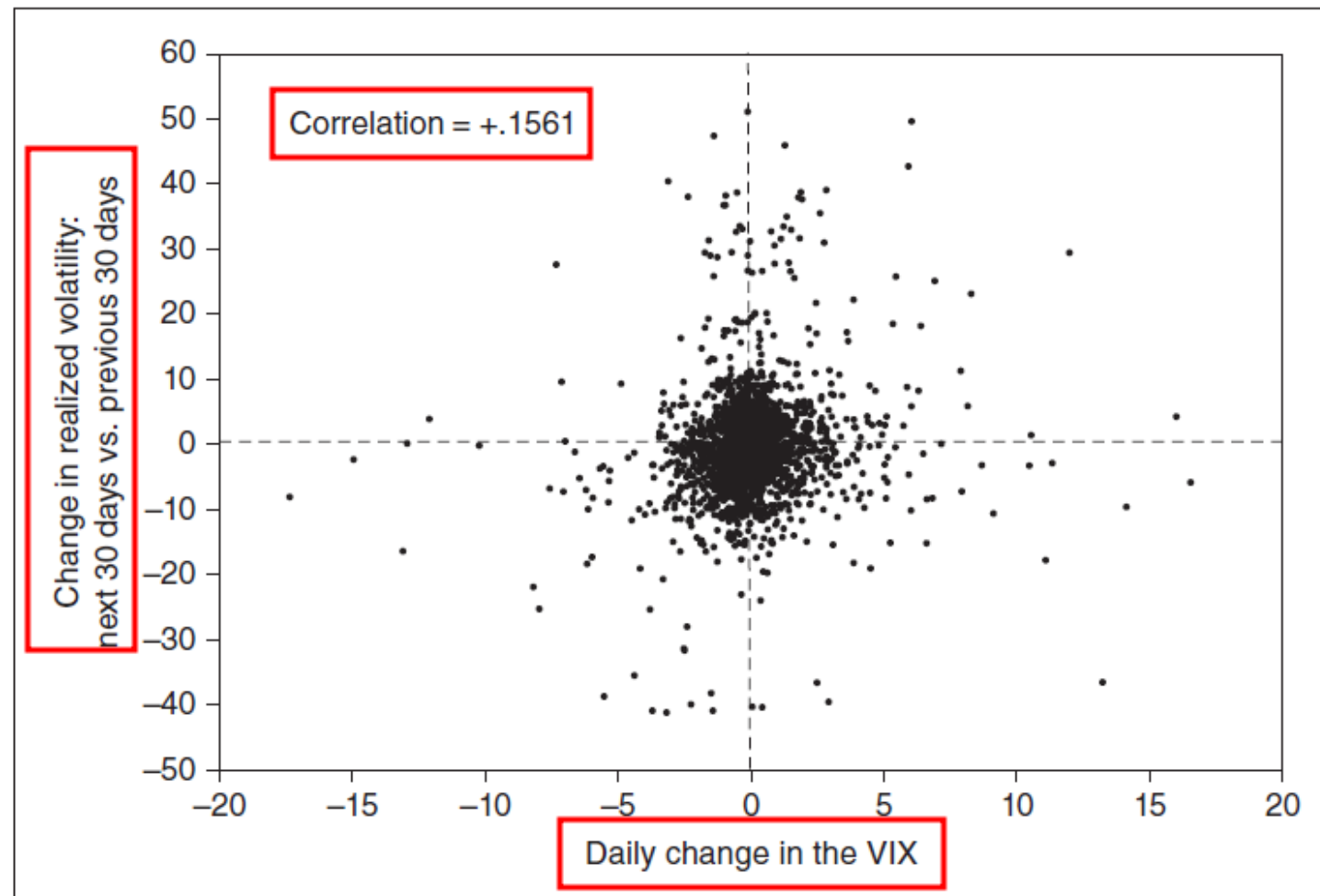
Figure 25-4 S&P 500 and VIX prices: 2003–2012.



## VIX의 특성2

주식의 imvol이 올라간다고  
미래 realized vol이 올라가는건  
아니다.  
조금 따라간다.

Figure 25-6 Does a change in the VIX predict a change in realized volatility?



# VIX Futures

- 1pts 가 1000\$를 가지게 만기에 VIX지수로 settle을 해주는 선물.
- 특징 :
  - Imvol에 대한 term structure를 보여줌.
  - ( \*잔존만기에 따라 imvol 변화가 달라서 발생 )
  - 대부분의 경우 contango (upward sloping)
  - VIX의 spot을 복제하기 어려움

Figure 20-12 The term structure of implied volatility.

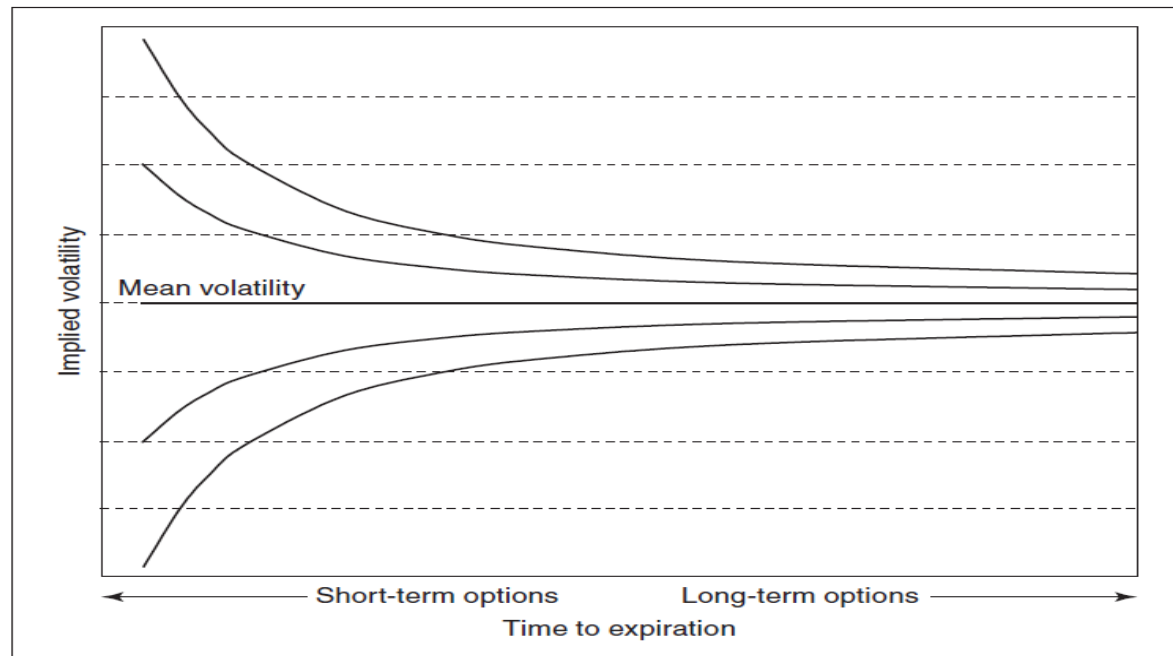
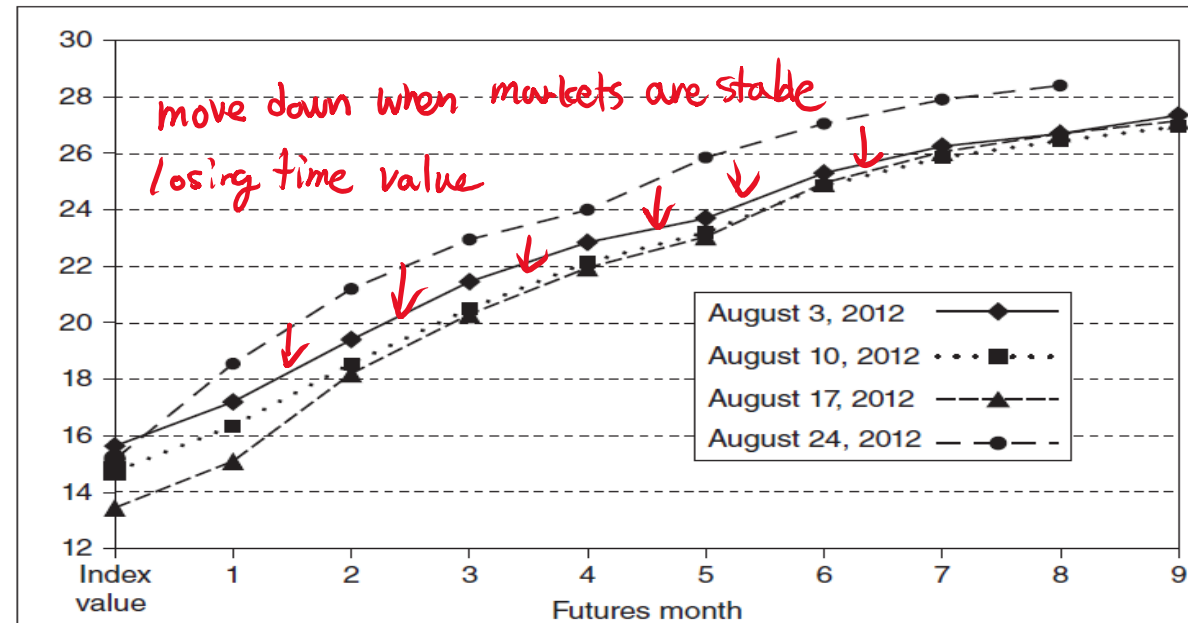


Figure 25-8 VIX futures in contango (upward sloping).



# VIX Futures

위기 시 VIX Futures term structure는 backwardation의 모습을 보임

Figure 25-10 VIX futures moved dramatically from contango to backward during the financial crisis in late 2008.

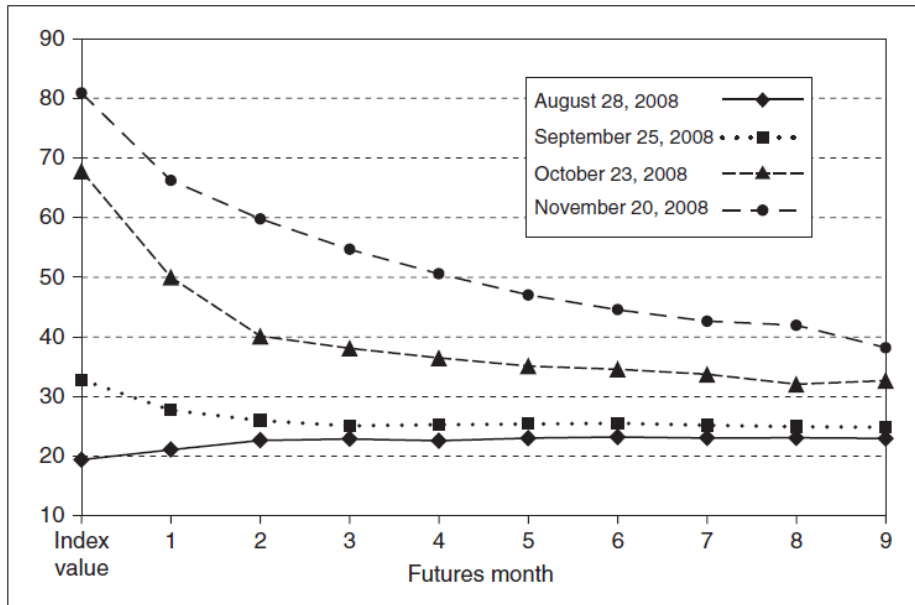
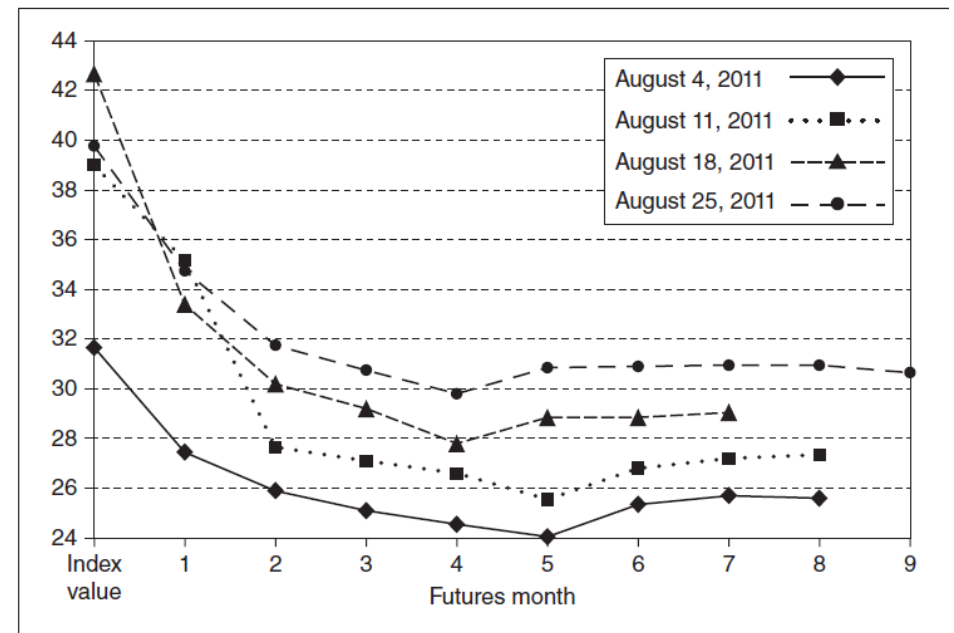


Figure 25-9 VIX futures in backwardation (downward sloping).

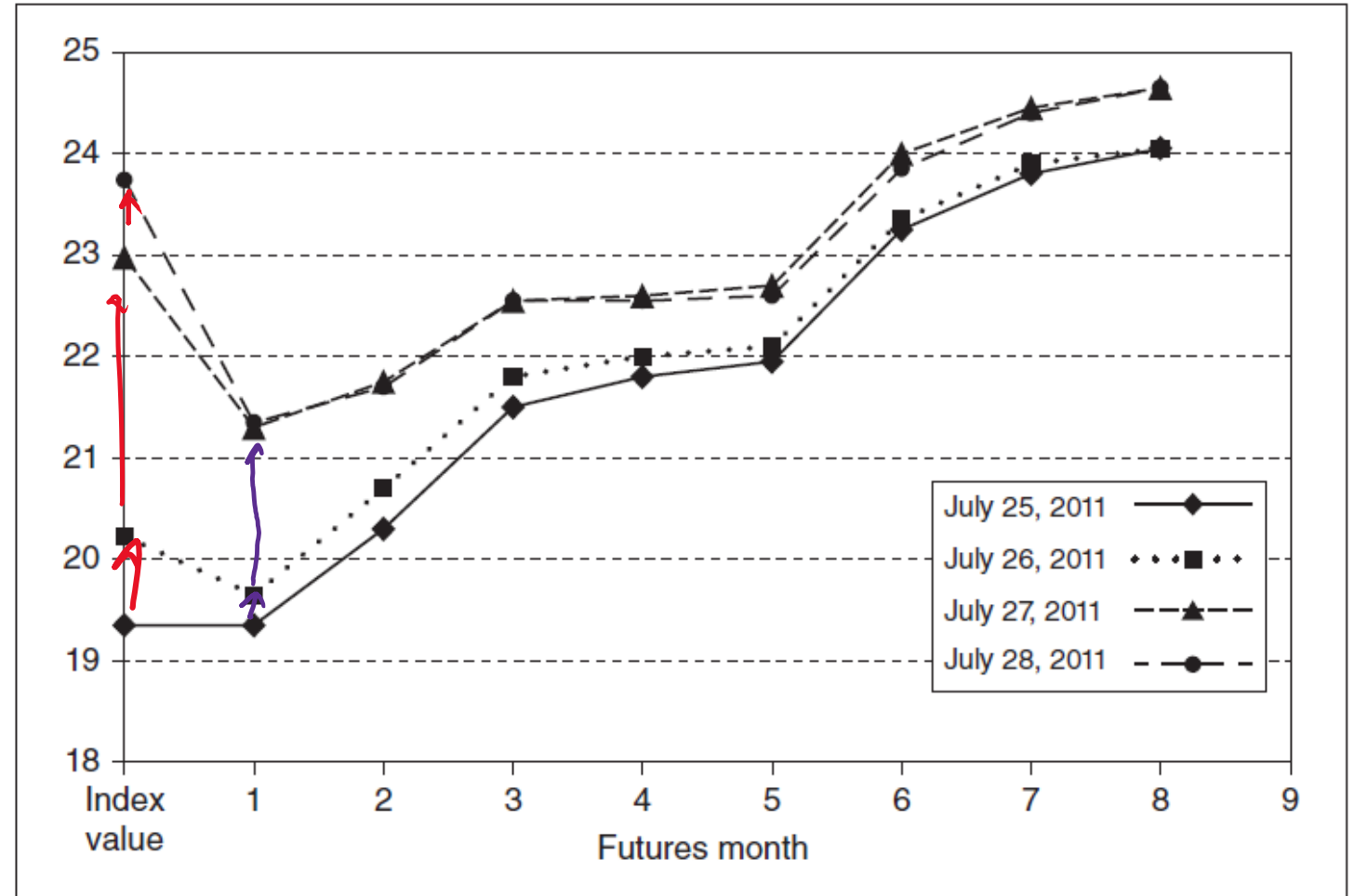




## VIX Futures prices do not change as quickly as the index.

- 만기보다 먼 VIX futures의 가격 상승은 기초자산의 가격상승을 따라가지 않는다.
- 4일간 19.4 → 23.7 로 기초자산이 올랐을때의 VIX termstructure

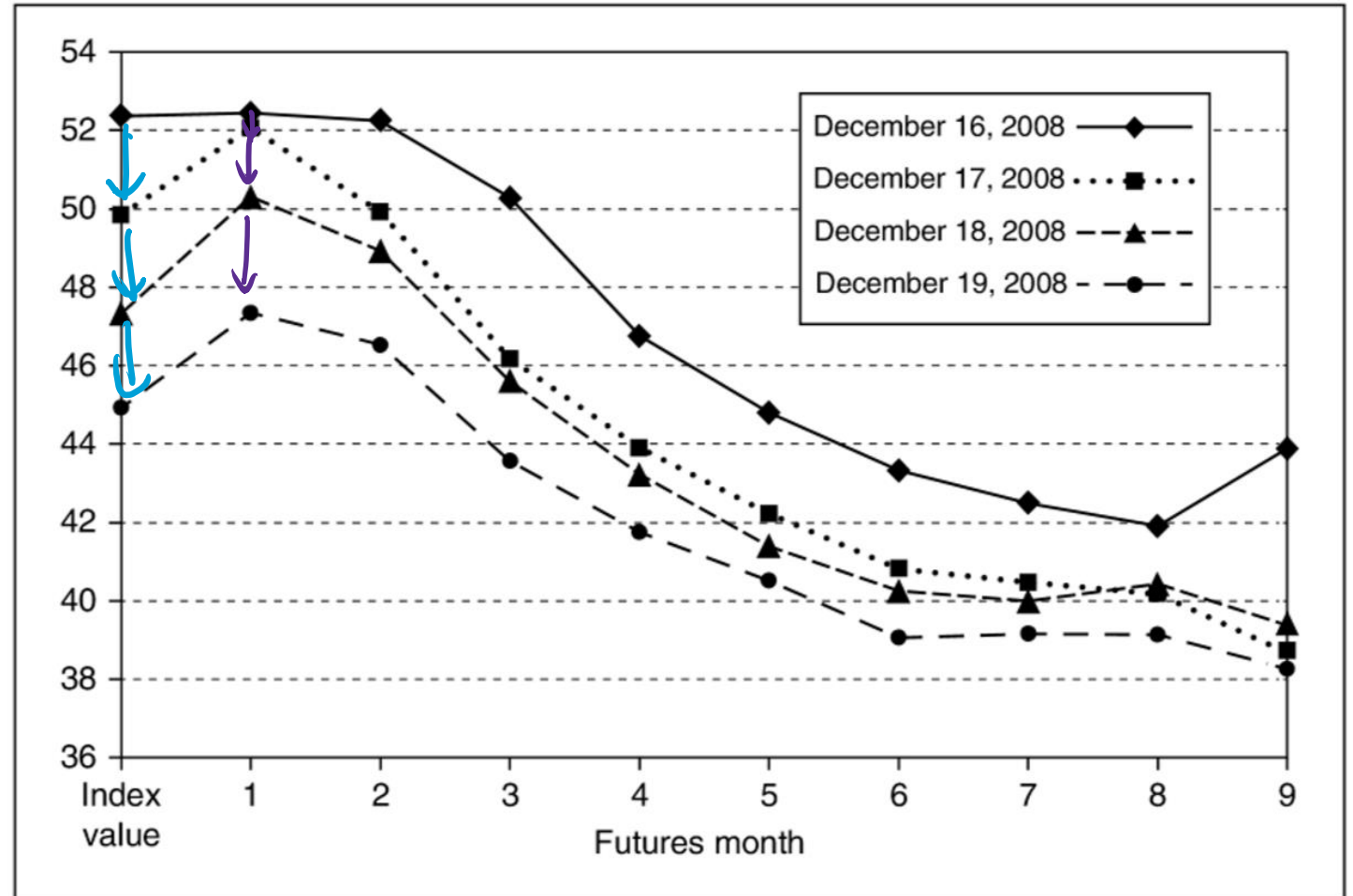
Figure 25-11 VIX futures prices do not change as quickly as the index.



## VIX Futures prices do not change as quickly as the index.

- 만기보다 먼 VIX futures의 가격 하락은 기초자산의 가격하락을 따라가지 않는다.
- 4일간 52.4 → 44.9 로 기초자산이 하락했을때의 VIX termstructure

Figure 25-12 VIX futures prices do not change as quickly as the index.



# VIX Futures prices do not change as quickly as the index.

VIX 현물을 복제하기 어렵기 때문에 선현물 차익거래가 안되고  
term structure의 y축 평행이동이 어렵다.

\*만기에 가면 어차피 불긴함...

# VIX Futures 유의사항

---

Contango일때 VIX futures prices는 time decay가 있다.

---

VIX future의 가격움직임은 spot보다 훨씬 작고 만기가 길면 더작다.

---

근데 만기에 가면 어차피 붙는다.

---

---

현물복제는 불가능하기 때문에 현물과 떨어트려 평가해야한다.

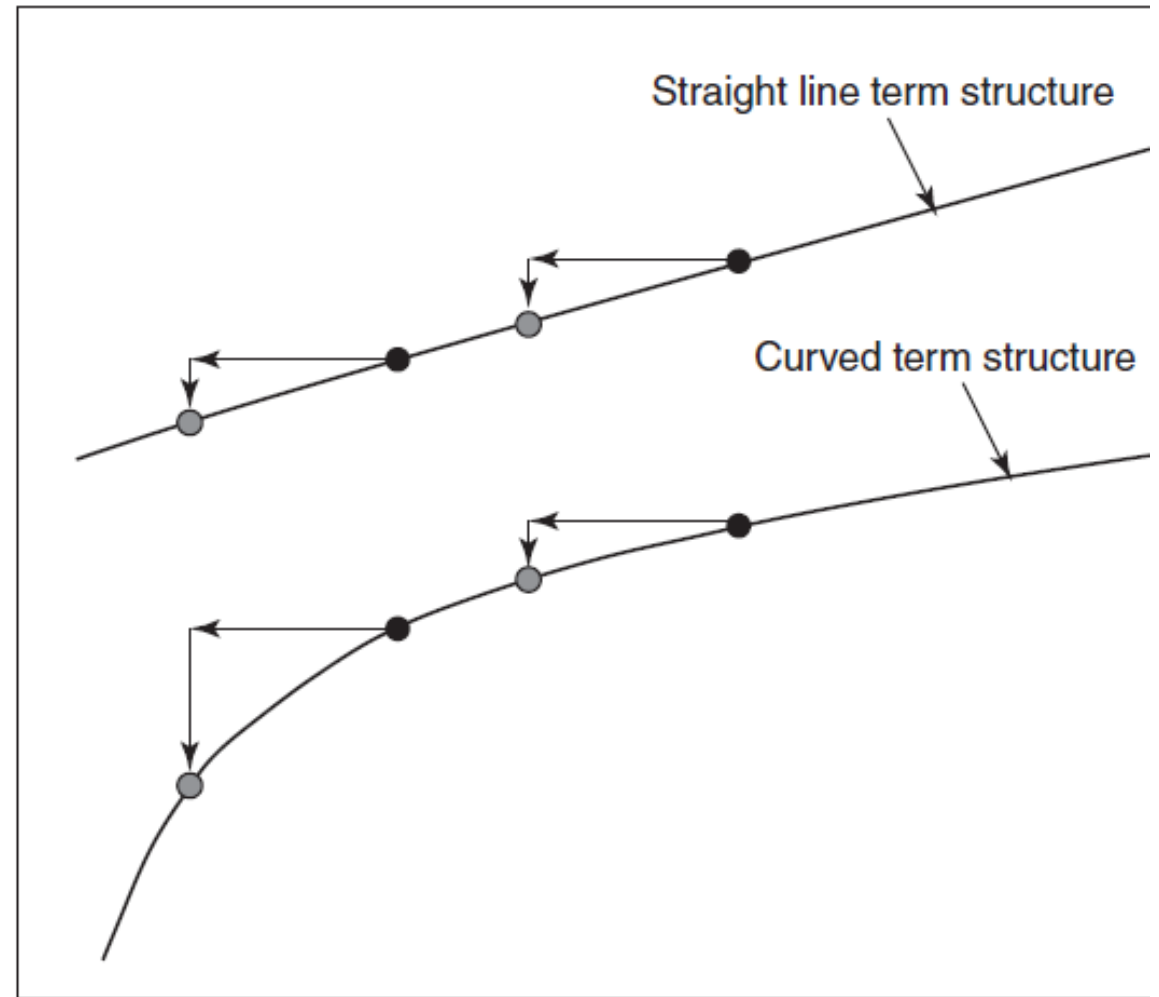
# VIX futures calendar spread

- Curved term structure & contango 하에 short-term 이 long-term보다 time decay가 크다

단기물 short & 장기물 long 포지션 구축

backwardation 상황에는 반대로 구축한다.

Figure 25-13 A futures spread in a contango market.



# VIX futures calendar spread

## Contango → backwardation

- 단기물 long 장기물 short
- 반대의 경우  
(backwardation → contango)  
단기물 short 장기물 long

Figure 25-15 A futures spread when the term structure moves from backward toward contango.

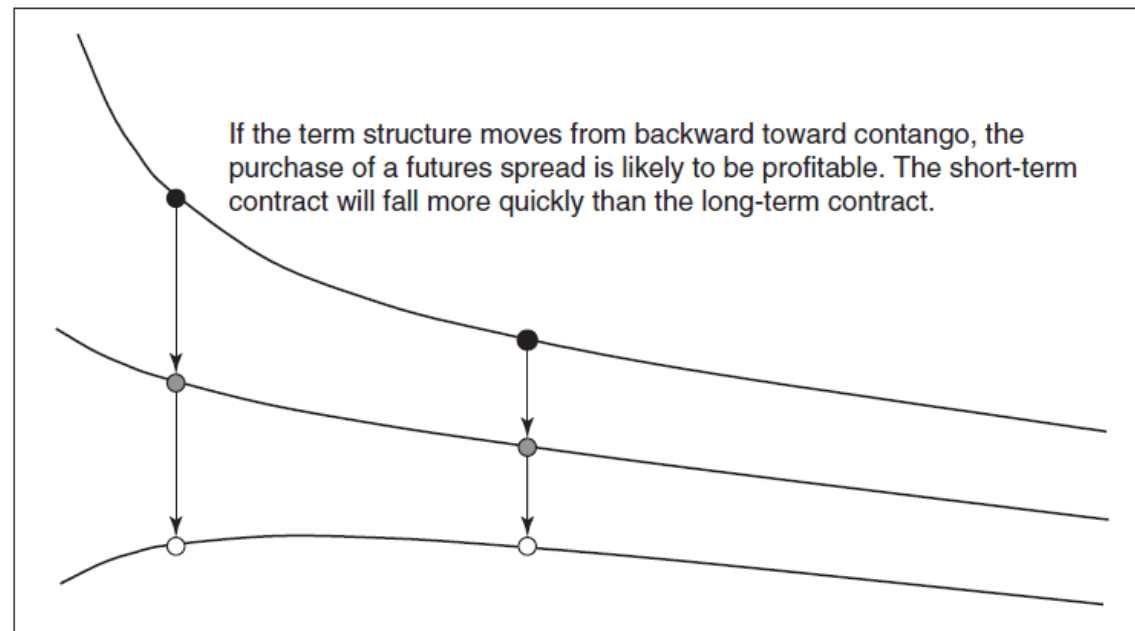
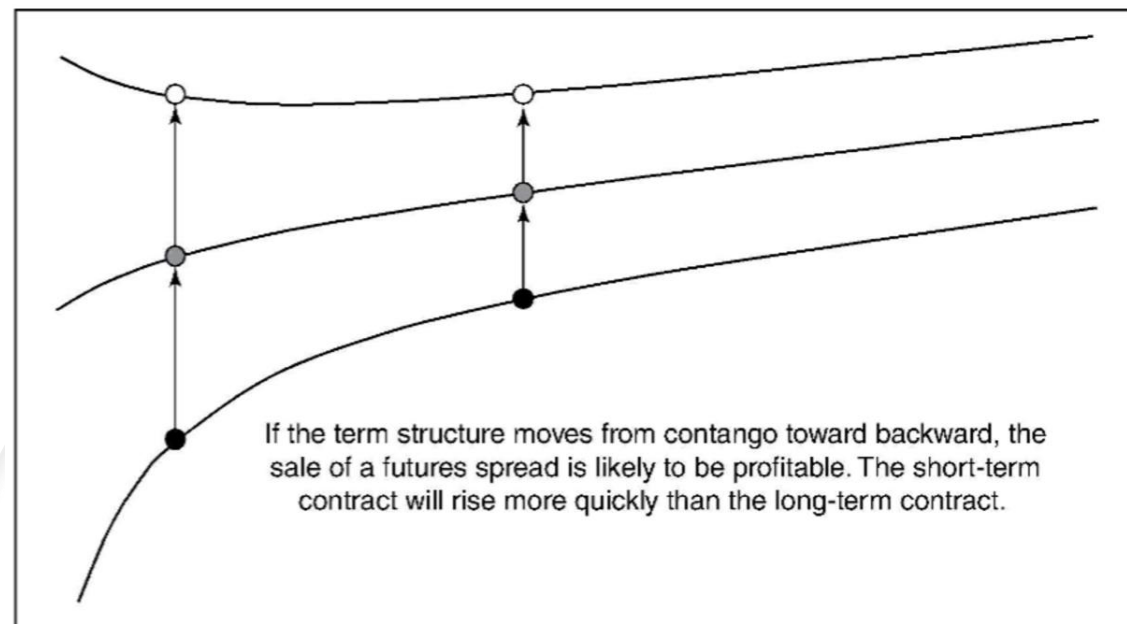


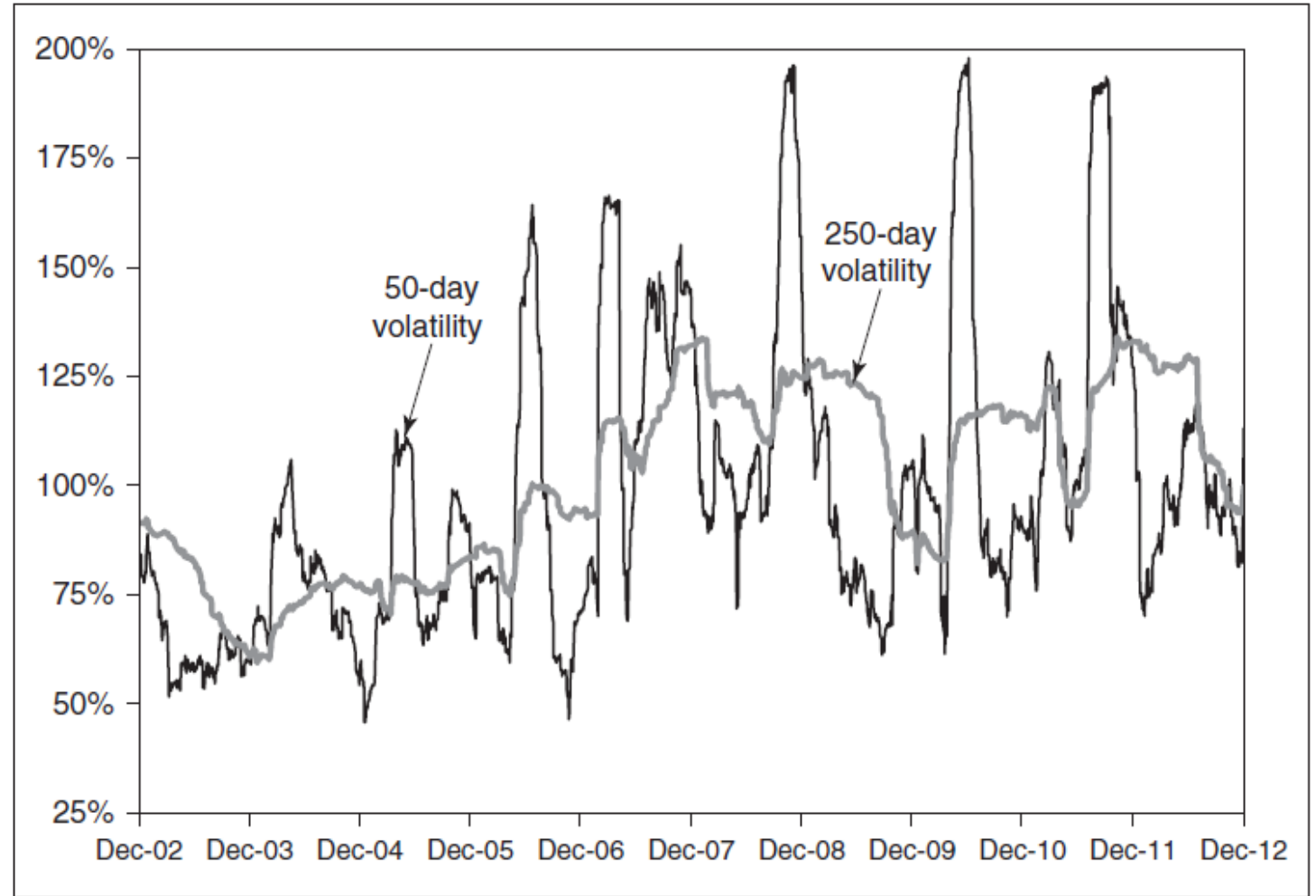
Figure 25-14 A futures spread when the term structure moves from contango toward backward.



# VIX options

- VIX현물을 복제하기 어렵기 때문에 VIX-futures로 option을 hedge하게 되고
- 따라서 invol이 현물의 변동성이 아니라 덜 변동하는 선물 변동성을 따라감.

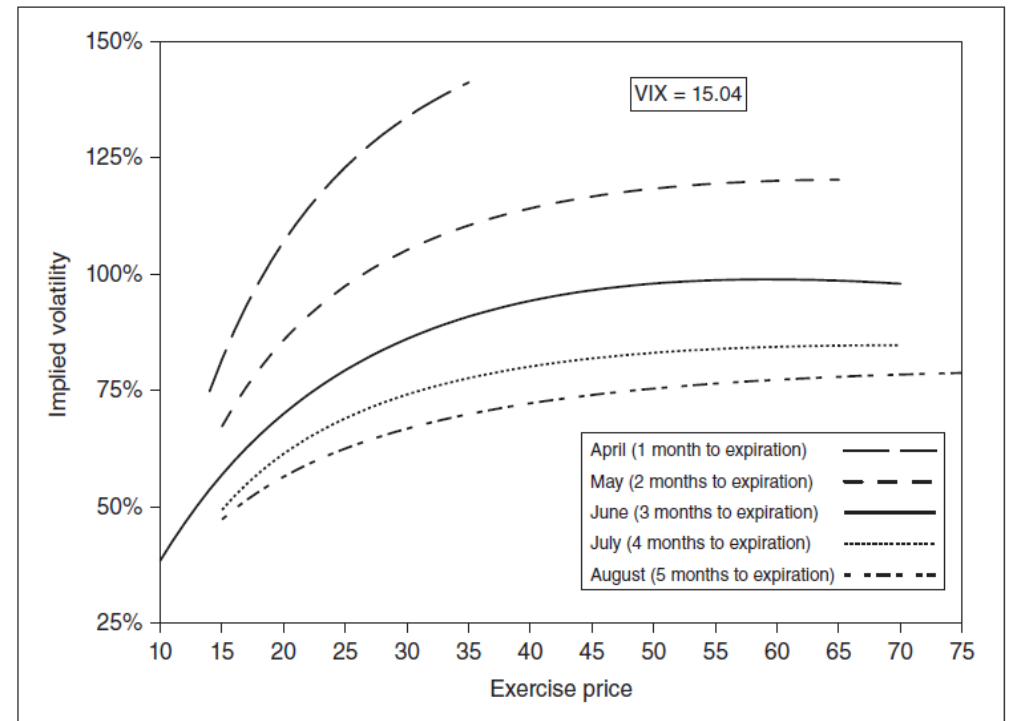
Figure 25-16 VIX 50- and 250-day historical volatility: 2003–2012.



# VIX options

- Imvol은 상한과 하한에 제한이 있고 mean reverting함.
- vix option의 imvol은 underling asset의 급격한 변동 때문에 오히려 strike price가 높아지면 높아질 수록 imvol이 상승하는 모습을 보이다가
- 상한 때문에 특정시점을 넘어가면 더 이상 상승하지 않음.
- 때문에 VIX option은 행사가 imvol평면에서 smile이나 smirk가 나타나지 않고 half frown이 나타남.

Figure 25-18 VIX option implied volatility skews, March 19, 2012.

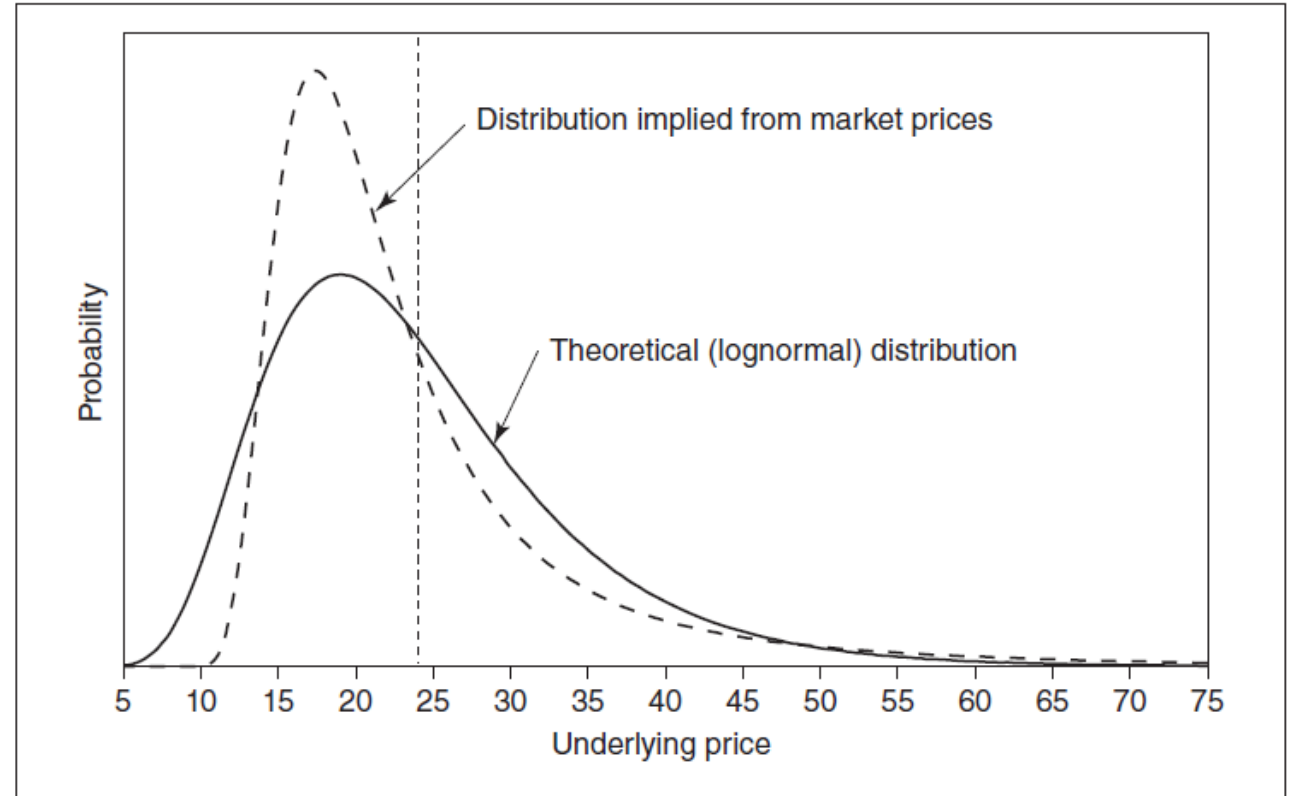




# VIX options

- Option price & Butterfly approach로 뽑아낸 implied price distribution for VIX
- Left tail이 막혀있고, right tail이 열려있다.

Figure 25-19 Three-month price distribution implied from VIX option prices, March 19, 2012 [with the three-month (June) future at 23.95].



# Replicating Volatility Contract

vega exposure 10,000 at price 20

- **Variance position 복제하기**

Step1) 만기가 같은 모든 행사가의  
옵션을  $1/(\text{행사가})^2$  만큼 산다.

Step2) 전체 포지션을 delta hedging 한다.

- **Volatility position 복제하기** 아주어려움

Sqrt(variance)가 vol이므로  
variance 변화에 선형의 포지션은  
vol 변화에 비선형의 포지션이 됨.

Realized Variance	Variance P&L	Realized Volatility	Volatility P&L
250	-\$37,500	15.81	-\$41,900
300	-\$25,000	17.32	-\$26,800
350	-\$12,500	18.71	-\$12,900
400	0	20	0
450	+\$12,500	21.21	+\$12,100
500	+\$25,000	22.36	+\$23,600
550	+\$37,500	23.45	+\$34,500

1pt 움직일때  $\frac{\text{notional vega}}{2 \times \text{price}} = \frac{10000}{2 \times 20} = 250 \text{ 움직일}$

1pt 움직일때 10,000 움직일.



# Replicating Volatility Contract VIX 복제하기

- Step1) 30일 전후 만기의, 동일 만기 모든 옵션(strip)을  $1/(\text{행사가}^2)$  만큼 각각의 long-term과 short-term에 대해 long , short 한다.
- Long-term strip can be closed out at option market price(수요일)
- But Short- term position close가 long-term strip close보다 먼저 발생하는 경우가 있고(전주 금요일),
- 늦게 발생하더라도(다음주 금요일), 모두 청산하는데는 price impact가 크다.
- 결국은 short-term strip과 long-term strip의 만기가 달라 생기는문제가 있다.

# Replicating Volatility Contract VIX 복제하기

- VIX가 OTM으로 계산된다는것도 문제이다.
- 내가 복제를 하려고 strip을 사면 어떤 OTM 옵션은 ITM옵션이 될 것이다.
- 때문에 ITM옵션은 OTM 옵션으로 변환되어야한다.
- 이를 위해 기초자산을 hedging해 ITM을 OTM으로 변환해야하는데
- 그러려면 S&P500 기초자산 basket을 사야한다. 선물로 헷지하려면 만기를 맞춰야하는 문제가 있다.
- 혹은 put-call parity로 현물을 복제해야한다.
- 전문 파생상품 trading firm이 할 수 있는 process 이다.
- **하여튼 이론적으로 가능한데 복잡하다.**

# Volatility contract applications

VIX 와 variance contract  
는 imvol에 대한  
speculation 으로  
사용된다.

Hedging으로도  
사용되는데, gamma나  
vega 포지션의 hedging에  
사용된다.

주식과의 음의  
corrleation을 활용해  
자산배분에  
사용하기도한다.

# Volatility contract applications **with indirect position**

- Market maker는 vol이 낮을때 bussiness에서 돈을 잘 못 버니, 헷지를 위해 VIX를 short한다.
- 주기적 리밸런싱을 해야하는 포트폴리오 매니저는 vol이 높을 때 bid-ask가 벌어지므로 vix를 short해 hedge한다.
- 커버드 콜 포지션을 구축한 포트폴리오 매니저는 실질적 short vol상태이니 vix long을 통해 포지션 헷지를 한다.