Variance Swaps

Class	파생

The Volatility Sensitivity of an Option

- **Vega & Variance vega**

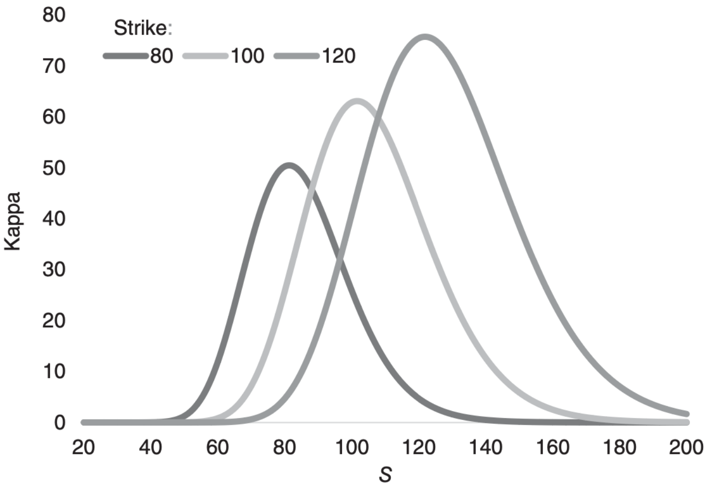
  Vega

  $$V = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \frac{S\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2}$$

  Variance vega

  $$\kappa = \frac{\partial C}{\partial \sigma^2} = \frac{S\sqrt{\tau}}{2\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2}$$

  - Vega와 Variance vega의 경우 유러피안 콜과 풋이 동일함.
  - 다른 모든 조건이 동일하다고 가정할 때, 옵션의 행사가격이 커질 수록 주가에 대한 variance vega 함수분포는 오른쪽으로 이동함과 동시에, 더 넓게 퍼지면서 peak가 더 높게 형성됨.



◦ 주가가 행사가격에 가까울 때 peak를 기록함을 알 수 있음.

> 💡 ATM일 때 variance vega가 최대일까?

미분 전개

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \kappa}{\partial S} &= \frac{\sqrt{\tau}}{2\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2} + \frac{S\sqrt{\tau}}{2\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2}\left(-d_1\right)\left(\frac{1}{v}\frac{1}{S}\right) \\
&= \frac{\sqrt{\tau}}{2\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2}\left(1 - \frac{1}{v}d_1\right) \\
&= \frac{\sqrt{\tau}}{2\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{v^2}\ln\left(\frac{S}{K}\right)\right)
\end{aligned}
$$

결론: $S^* = Ke^{\frac{1}{2}v^2} (v = \sigma\sqrt{\tau})$ 을 만족할 때 최대가 됨.

S^*는 행사가격보다 조금 큼.

해당 전개에서는 이자율이 0임을 가정하였으나 이자율이 0보다 크다면, S^* 가 $F(K)$에 가까울 때 베가가 최댓값을 가짐.

Volatility and Variance Swaps

volatility 혹은 variance에 대한 바닐라옵션의 익스포져는 주가에 따라 bell-shaped distribution을 따름. 즉, 주가에 따라 변동성에 대한 민감도가 달라짐.

옵션에 대한 롱포지션을 가정해보자. 해당 포지션의 payoff는 변동성 증가 정도 뿐만 아니라, 현재 주가가 행사가로부터 얼마나 떨어져있는지도 영향을 미침. 변동성에 투자하는 투자자는 결국, 1) 미래 변동성에 대해 정확하게 예측함과 동시에 2) 미래의 주가가 어떻게 될지도 잘 예측하여야 하는 상황에 놓임.

만약 주가에 영향을 받지 않고 온전히 volatility에 대한 익스포져만 취할 수 있다면 더 좋을 것임. 이를 가능하게 해주는 것이 바로 volatility swap임.

- volatility swap

  realized vol에 대한 선도계약. 실제 실현된 vol과 미리 약속한 vol의 차이만큼을 지불 or 받는 계약임.

$$\pi = N(\sigma_R - \sigma_K)$$

- variance swap

  마찬가지로, variance swap은 realized var에 대한 선도계약임. floating variance와 fixed variance를 교환하는 거래.

$$\pi = N(\sigma_R^2 - \sigma_K^2)$$

- volatility swap과 variance swap 간 관계

  σ_R과 σ_K 간 차이가 별로 크지 않다고 가정하면 variance swap의 payoff는 다음과 같이 근사해볼 수 있음.

$$\sigma_R^2 - \sigma_K^2 = [(\sigma_R - \sigma_K + \sigma_K) + \sigma_K][\sigma_R - \sigma_K]$$

$$\sigma_R^2 - \sigma_K^2 \approx 2\sigma_K(\sigma_R - \sigma_K)$$

  위 식에 따라 $1 명목금액의 variance swap의 payoff는 2\sigma_K$ 명목금액의 volatility swap의 payoff와 근사적으로 동일함.

- 계약사항

  세부적인 계약조건 뿐만 아니라 realized vol을 계산하는 방법에 대한 구체적인 서술 포함.

Variance Swap on S&P 500

Instrument:	Variance Swap
Variance Buyer:	EFG Fund
Variance Seller:	ABC Bank
Trade Date:	January 29, 2016
Start Date:	January 29, 2016
End Date:	June 30, 2017
Currency:	USD
Vega Amount:	1,000,000
Underlying:	S&P 500 Index
Strike Price:	16
Variance Amount:	31,250, calculated as [Vega Amount]/(2 × [Strike Price])

Equity Amount: [Equity Amount] = [Variance Amount] × {[Final Realized Volatility]^2−[Strike Price]^2}

If the Equity Amount is positive, the Variance Seller will pay the Variance Buyer the Equity Amount. If the Equity Amount is negative, the Variance Buyer will pay the Variance Seller the Equity Amount. The Final Realized Volatility will be determined according to

$$\text{Final Realized Volatilty} = 100 \times \sqrt{\frac{252 \times \sum_{t=1}^{n} \left(\ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right) \right)^2}{n}}$$

where

n = number of trading days during the observational period
P_t = the Official Closing of the Underlying on date t
P_1 = the Official Closing of the Underlying on the Start Date
P_n = the Official Closing of the Underlying on the End Date

- realized vol/var을 계산할 때 보통 수익률의 제곱의 형태로 표현. 이 때 들어간 가정은 수익률의 평균이 0이라는 가정임.
- variance swap이어도 명목금액은 처음에 notinoal vega로 명시하고 이를 기준으로 variance swap의 명목금액을 계산함. 행사가도 vol기준으로 명시. trader, 투자자들도 variance보다는 vol기준으로 가격조건을 제시하는 것에 익숙하기 때문.
- 그럼에도 불구하고 variance swap계약을 하는 이유는 direct replication이 가능하고, 헷지가 용이하기 때문.

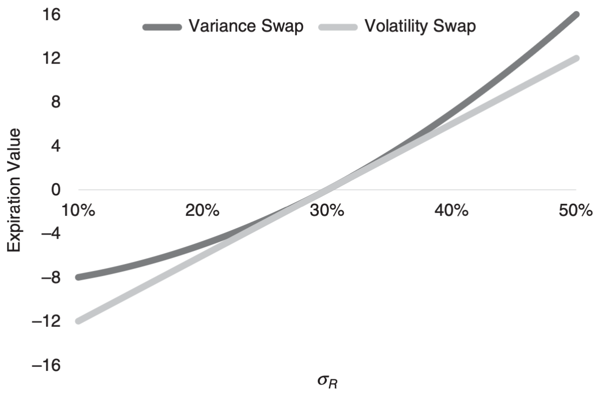
Replicating Volatility Swaps

- **Payoff**

  스왑계약의 특성상 계약 개시 시점에 스왑의 공정가치는 0임.

  [vol swap과 var swap의 payoff]

  σ_K = 0.3

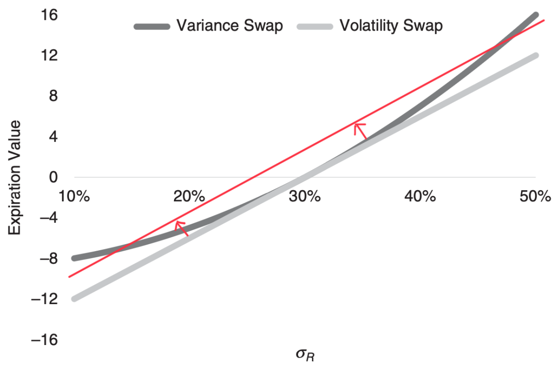


  - Payoff(var swap) $\geq$ Payoff(vol swap)
    - 미래 실현 var가 행사가격과 동일할 것으로 확실하게 예상되지 않는 이상, var swap의 페이오프가 항상 vol swap의 페이오프보다 크거나 같음.

      $$N(\sigma_R + 0.3)(\sigma_R - 0.3) \geq N(\sigma_R - 0.3)$$

    - 직관적으로 생각해보면, long position을 가정했을 때, 변동성이 증가할 때 variance swap이 vol swap보다 더 크게 증가하고, 변동성이 감소할 때는 가치가 더 작게 감소함. 이로 인해 가치가 더 높게 책정됨.

  - 결국 두 스왑의 공정가치를 갖게 하려면, vol swap의 행사가를 낮춰야 함.



- 그러면 얼마만큼 vol swap의 행사가를 낮춰야 var swap의 공정가치와 동일해질 수 있을까?

  미래의 변동성에 대한 불확실성이 어느 정도 되는지. 즉 volatility of volatility를 따져봐야 함.

Replicating Variance Swaps out of Options in a Black-Scholes-Merton World

💡 회사채에 투자하는데, 회사의 신용 스프레드에 대해서만 익스포져를 가져가고 싶다면?

- variance swap 복제는 아래의 델타 헷징 포트폴리오 수익에 대한 식에서 출발.

$$\text{Profit} = \frac{1}{2}\Gamma S^2\left(\sigma_R^2 - \Sigma^2\right) dt$$

$$\begin{aligned} d\pi &= dC - \Delta dS \\ &= \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{\partial C}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}dS^2 - \Delta dS \\ &= \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}dS^2 \\ &= \theta\Delta t + \frac{1}{2}\Gamma\sigma^2 S^2\Delta t \end{aligned}$$

$=$ the loss from time decay + the gain from curvature

  - proft을 얻기 위해서는 realized vol이 implied vol보다 커야 함. → var swap payoff
  - 문제점: ΓS^2 → 시간에 따라 혹은 주가에 따라 변함. → 델타 헷지 포트폴리오는 결국 variance에 대한 베팅인데, 변동성 그 자체에 대한 베팅이 되지 못함.
  - ΓS^2 가 시간에 지남에 따라 고정된 값이 아니라면, hedged postion의 크기를 dynamically 조정해주면서 복제해볼 수 있지 않을까? 예컨대 ΓS^2가 낮다면 call option을 더 사고 주식을 팔아서 델타 헷지 포지션의 size를 더 키우고 ΓS^2가 높다면 그 반대로 조정해주면 되지 않음?

→ 이론적으로 가능함. 그러나 실제 시장에서 옵션의 liquidity가 너무 적어서 동적 헷징은 매우 어려운 일

→ 그렇다면 static하게 헷징 가능?

- **만약 Γ가 $\frac{1}{S^2}$와 같다면?**

ΓS^2가 constant가 될 수 있고 profit 식이 S의 움직임과는 독립적으로 결정됨.

> 💡 Γ 가 $\frac{1}{S^2}$ 인 바닐라 옵션 포트폴리오를 구성해보자

위와 같은 포트폴리오를 구성하려면 위에서 다뤘던 variance vega의 개념을 활용함.

$$\kappa\left(S, K, \nu\right)=\frac{\partial C}{\partial\sigma^2}=\frac{S\sqrt{\tau}}{2\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d_1^2}$$

여러 개의 옵션을 조합해서 kappa가 constant한 포트폴리오를 만들 수 있음. 즉, 행사가의 제곱에 반비례하게 바닐라 옵션의 가중치를 조정하여 구성한 포트폴리오는 조합하는 옵션의 개수를 늘리면 늘릴 수록 kappa를 constant하게 만들 수 있음.

다양한 행사가 K의 콜옵션의 가치를 $C(S, K, v)$라고 하고 이를 $\rho(K)$의 density function으로 조합한 포트폴리오의 가치는 다음과 같이 나타낼 수 있음.

$$\pi(S)=\int_0^\infty \rho(K)C(S, K, v)\, dK$$

포트폴리오에 대한 variance vega를 구하면,

$$\begin{aligned}\kappa_\pi &= \frac{\partial\pi}{\partial\sigma^2}=\int_0^\infty \rho(K)\kappa(S, K, v)\, dK \\ &= \frac{\sqrt{\tau}}{2\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \rho(K)Se^{-\frac{1}{2}d_1^2}\, dK \\ &\equiv \int_0^\infty \rho(K)Sf\left(\frac{K}{S}, \nu, \tau\right)\, dK\end{aligned}$$

$v = \sigma\sqrt{\tau}$

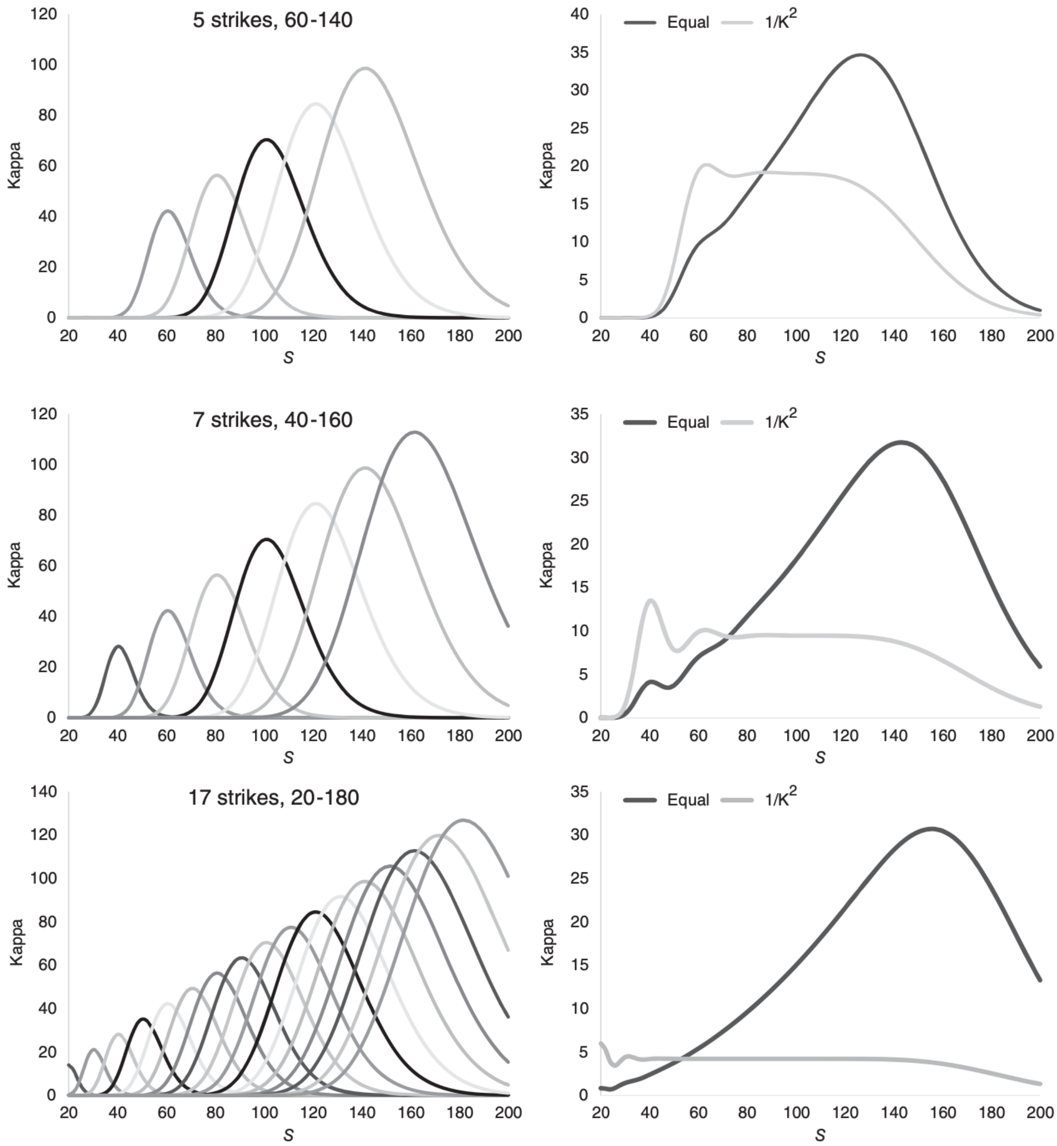
$$f\left(\frac{K}{S}, \nu, \tau\right) = \frac{\sqrt{\tau}}{2\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d_1^2}$$

$x = K/S$

$$\kappa_\pi = \int_0^\infty \rho\left(xS\right)S^2 f\left(x, \nu, \tau\right)\, dx$$

주가의 dependence를 나타내는 항은 $\rho(xS)S^2$ 이고, $\rho(xS) \propto \frac{1}{(x^2S^2)}$ 를 만족하면 즉, $\rho(K)$ = $\frac{c}{K^2}$로 설정된다면, 해당 항은 constant하게 바뀜.

아래의 그림에서 다양한 행사가의 옵션을 행사가 제곱에 반비례하게 가중평균한 포트폴리오가 kappa가 일정하게 유지되고 있음을 알 수 있음.



- 현실에서 해당 포트폴리오 구성 가능?

  어려울 것. continuous density를 만들기 위해서는 무한 개의 옵션이 필요한데, 이는 현실적으로 불가함.

  다만, 합리적으로 많은 개수의 옵션을 합성하면, variance에 대해 민감도를 꽤 일정하게 유지하는 포트폴리오를 만들 수 있을 것.

A Portfolio of Vanilla Options with $1/K^2$ Weights Produces A Log Payoff

- $\frac{1}{K^2}$의 가중치로 바닐라 옵션을 가중평균한 포트폴리오는 log payoff를 형성함.
    - 일반적으로 풋 콜 모두 ATM보다는 OTM이 더 많이 거래됨. 즉, 풋의 경우 낮은 행사가의 풋이 더 많이 거래가 되고, 콜의 경우 높은 행사가의 풋이 더 많이 거래됨. 따라서 포트폴리오를 구성할 때 break point인 S^*보다 낮은 구간에서는 풋으로, 높은 구간에서는 콜을 매입함. 이 경우 포트폴리오의 가치는 다음과 같음.

$$\pi(S, S^*, v) = \int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} P(S, K, v)\, dK + \int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} C(S, K, v)\, dK$$

    - 만기 주가가 S_T가 break point인 S^*보다 높은 경우 풋은 행사되지 않고, 콜의 경우 행사됨. 반대의 경우 콜은 행사되지 않고 풋만 행사. 각각의 경우의 포트폴리오의 가치는 다음과 같음.

$$\pi(S_T, S^*, 0) = \int_{S^*}^{S_T} \frac{1}{K^2} (S_T - K)\, dK \text{ for } S_T > S^*$$

    - $v = 0$ 즉, 만기에서 콜과 풋은 아래와 같은 동일한 가치를 가지게 됨.

$$\begin{aligned} \pi(S_T, S^*, 0) &= \int_{S_T}^{S^*} \frac{1}{K^2} \left(K - S_T\right)\, dK \text{ for } S_T < S^* \\ &= \int_{S^*}^{S_T} \frac{1}{K^2} (S_T - K)\, dK \end{aligned}$$

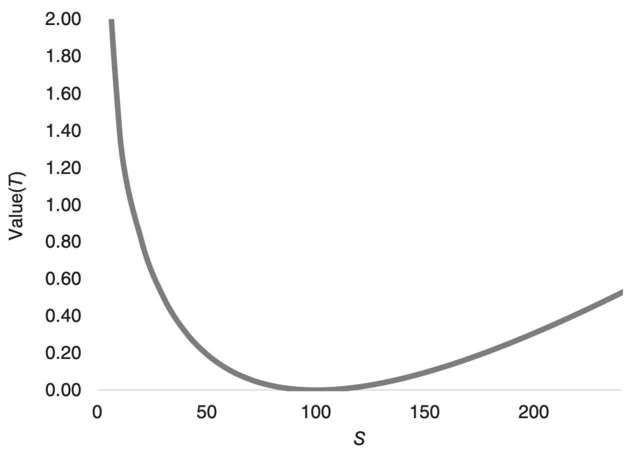
    - 결국 포트폴리오의 가치는 다음과 같음.

$$
\begin{aligned}
\pi(S_T, S^*, 0) &= \int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} P(S_T, K, 0)\, dK + \int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} C(S_T, K, 0)\, dK \\
&= \int_{S^*}^{S_T} \frac{1}{K^2}(S_T - K)\, dK \\
&= \left(\frac{S_T - S^*}{S^*}\right) - \ln\left(\frac{S_T}{S^*}\right)
\end{aligned}
$$

→ 만기에 포트폴리오의 가치는

delivery price = S^* 인 주식선도계약 $1/S^*$개 + log contract 로 복제할 수 있음.

- log contract: $L(S, S^*) = ln(\frac{S_T}{S^*})$
- 주식 선도계약의 경우 주가의 volatility에 대한 민감도에 대한 정보 없이 static arbitrage로 평가할 수 있음. 결국, 우리의 복제포트폴리오에서 volatility에 대한 민감도는 log contract에서 결정됨.
- 복제한 포트폴리오의 만기 때 가치($S^* = 100$)



- 만기 전 BSM formula를 적용하여 옵션 가치를 구하고(r=0) 해당 옵션으로 구성한 포트폴리오의 가치를 구해보면, 다음과 같음.

$$
\pi(S, S^*, v) = \left(\frac{S - S^*}{S^*}\right) - \ln\left(\frac{S}{S^*}\right) + \frac{1}{2}v^2
$$

만기 시 포트폴리오 가치와 차이가 나는 부분은 $\frac{1}{2}v^2$ 임. 이는 geometric brownian motion하에 주가가 log함수를 따르기 때문임.

Value of a Log Contract in the BSM World

- log contract - short position

  log contract L은 만기 시 다음과 같은 payoff를 따름.

$$L(S, S^*) = \ln\left(\frac{S_T}{S^*}\right)$$

  동 포트폴리오에 대한 델타 헷지 포트폴리오는 다음과 같은 BSM equation을 따름.

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 L}{\partial S^2} = 0$$

  만기 시 payoff를 위와 같이 따르면서 BSM equation을 만족하는 log contract의 payoff는 다음과 같음.

$$L(S, S^*, t, T) = \ln\left(\frac{S}{S^*}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)$$

  해당 log contract에 대해 short position을 취하면,

$$-L(S, S^*, t, T) = -\ln\left(\frac{S}{S^*}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t) = -\ln\left(\frac{S}{S^*}\right) + \frac{1}{2}v^2$$

- 기초자산의 가격에 대한 민감도 영향 부분을 없애주기 위해 델타헷지를 함. log contract short position에 대한 델타 헷지로 $1/S$ 만큼의 주식을 매입.

$$-\partial L/\partial S = -1/S.$$

- log contract에 대한 short position은 ΓS^2 항에 따른 변동성을 고려하지 않아도 됨. short position에 대한 감마 자체가 $1/S^2$이기 때문. log contracts는 결국 volatility 그 자체에 대한 베팅만 하는 것임.

- log contract short position의 kappa를 구해보면 $(T-t)/2$ 임. 즉 계약 개시 시점에 kappa는 $T/2$임.
- 복제포트폴리오를 T/2만큼 스케일링 해주면, 개시시점 kappa는 1이 될 수 있음.

$$\pi(S, S^*, v) = \left(\frac{S-S^*}{S^*}\right) - \ln\left(\frac{S}{S^*}\right) + \frac{1}{2}v^2$$

$$\pi(S, S^*, t, T) = \frac{2}{T}\left[\left(\frac{S-S^*}{S^*}\right) - \ln\left(\frac{S}{S^*}\right)\right] + \frac{T-t}{T}\sigma^2$$

- 계약 개시시점의 주가를 S_0이고, $S_0 = S^*$와 같다면, 즉, 현재 주가 기준으로 현재 주가 보다 낮은 행사가의 풋을 사고, 현재주가보다 높은 행사가의 콜을 사서 포트폴리오를 구성한다면,

  위 식에 따라 BSM 세계에서 복제포트폴리오의 공정가치는 정확하게 기초자산의 variance와 일치하게 됨.

$$\pi\left(S_0, S_0, 0, T\right) = \sigma^2$$

Proof that the Fair Value of a Log Contract with $S^* = S_0$ is the Realized Future varinace

log contract를 헷징하는 포트폴리오가 기초자산의 variance와 일치함을 이산적으로 증명해보면 다음과 같음.

- 가정: riskless rate = 0, dividend yield = 0
- $1/S_0$ 만큼 주식 사서, 보유 주식 가치를 $1로 맞추기 + short a log contract with value L_0

TABLE 4.1 Before Rebalancing, Part I

Time	Stock Price	No. of Shares of Stock	Value of Stock	Value of One Log Contract	Bank Balance	Total Value of Position
t_0	S_0	$\frac{1}{S_0}$	1	L_0	0	$1 - L_0$
$t_{1\text{ (pre)}}$	S_1	$\frac{1}{S_0}$	$\frac{S_1}{S_0}$	L_1	0	$\frac{S_1}{S_0} - L_1$

- 주식에 대한 포지션을 1로 조정하기 위해 $(1/S_1 - 1/S_0)$ 만큼 주식을 사기
  → 주식 매입금액 $(1/S_1 - 1/S_0)S_1$ 빌리기.

TABLE 4.2 Rebalancing, Part II

Time	Stock Price	No. of Shares of Stock	Value of Stock	Value of One Log Contract	Bank Balance	Total Value of Position
$t_{1\text{ (post)}}$	S_1	$\frac{1}{S_1}$	1	L_1	$-\frac{S_0 - S_1}{S_0}$	$1 - L_1 - \frac{S_0 - S_1}{S_0}$

- t2 기에도 동일한 과정 반복

TABLE 4.3 Rebalancing, Part III

Time	Stock Price	No. of Shares of Stock	Value of Stock	Value of One Log Contract	Bank Balance	Total Value of Position
$t_{2\text{ (post)}}$	S_2	$\frac{1}{S_2}$	1	L_2	$-\frac{S_0 - S_1}{S_0} - \frac{S_1 - S_2}{S_1}$	$1 - L_2 - \frac{S_0 - S_1}{S_0} - \frac{S_1 - S_2}{S_1}$

- 결국 위와 같은 과정을 반복한다고 할 때, 복제포트폴리오의 final value를 이산적으로 표현하면 다음과 같음.

$$
\begin{aligned}
V_N &= 1 - L_N - \sum_{i=0}^{N-1} \frac{S_i - S_{i+1}}{S_i} \\
&= 1 - \ln\left(\frac{S_N}{S_0}\right) + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\Delta S_i}{S_i} \\
&= 1 - \sum_{i=0}^{N-1} \ln\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}\right) + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\Delta S_i}{S_i}
\end{aligned}
$$

→ 테일러 전개 적용하면,

$$
\begin{aligned}
V_N &= 1 - \sum_{i=0}^{N-1} \left[\frac{\Delta S_i}{S_i} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta S_i}{S_i}\right)^2\right] + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\Delta S_i}{S_i} \\
&= 1 + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta S_i}{S_i}\right)^2 \\
&= 1 + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\sigma_i^2 \Delta t_i}{2}
\end{aligned}
$$

→ 이자율이 0임을 가정하였으므로,

$$
V_0 = 1 - L_0 = 1 + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\sigma_i^2 \Delta t_i}{2}
$$

$$
L_0 = -\sum_{i=0}^{N-1} \frac{\sigma_i^2 \Delta t_i}{2}
$$

결론: log contract의 현재가치는 계약기간 동안 미래의 realized variance에 비례함.

Replicating Variance When Volatility is Stochastic

💡 주가변동성이 stochastic 해도 varaince swap replicating이 가능할까?

가능함. 주가변동성이 stochastic 하거나, 수익률 분포가 skewed되거나, fat-tail인 경우 모두 상관없이 variance swap을 기초자산에 대한 포지션과 log contract에 대한 포지션으로 복제 가능함.

다만, 주가 process의 diffusion term이 연속이어야하고 점프 또는 불연속 구간이 없어야 함.

주가가 아래와 같은 프로세스를 따른다고 해보자.

$$\frac{dS}{S} = \mu_t\, dt + \sigma_t\, dZ$$

Ito's lemma에 따라, 다음과 같이 표현 가능.

$$d\ln S = \left(\mu_t - \frac{\sigma_t^2}{2}\right) dt + \sigma_t\, dZ$$

위의 식에서 아래의 식을 빼면,

$$\frac{dS}{S} - d\ln S = \frac{1}{2}\sigma_t^2\, dt$$

위의 식에서 적분과 스케일링을 적절하게 해주면, 다음과 같은 식 도출 가능.

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sigma_t^2\, dt = \frac{2}{T}\left[\int_0^T \frac{1}{S}\, dS - \ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right]$$

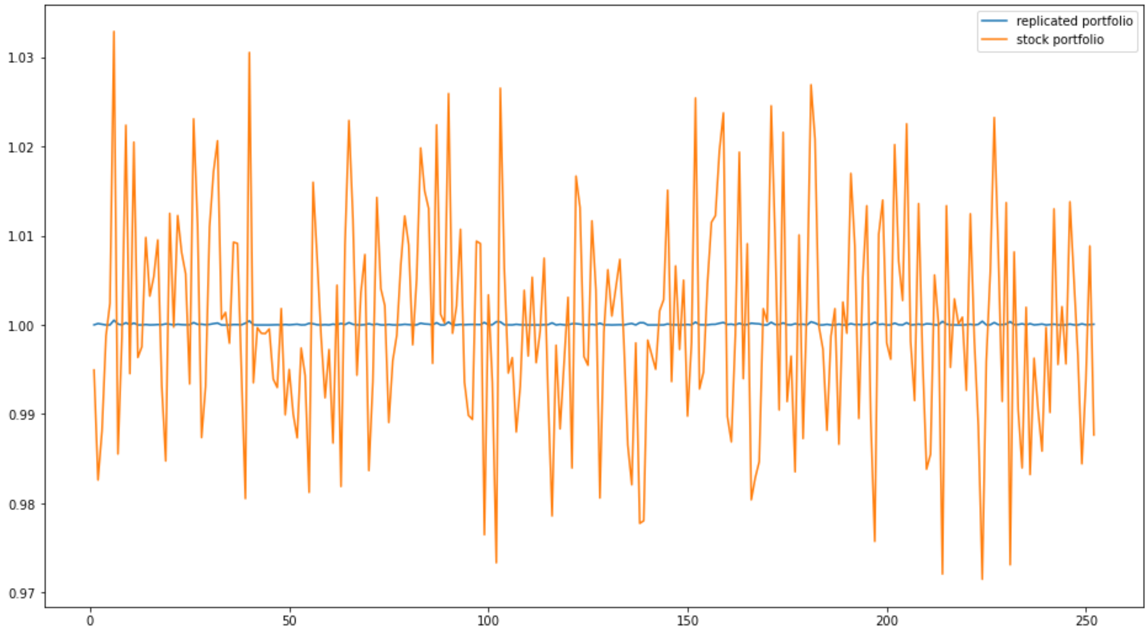
왼쪽 식은 계약기간 동안 평균적은 variance를 의미함. 이는 오른쪽 항에서 주가에 대한 포지션과 로그계약의 숏 포지션으로 복제할 수 있음. 따라서 주가가 어떤 path에 따라 흘러가든지, 연속적으로 움직이기만 한다면 미래 variance의 평균은 복제포트폴리오 가치와 동일함.

💡 정말 그럴까? 시뮬레이션 해봄.

```
def log_contract(sigma):

    # generating path
    mu = 0.13
    r = 0.05
    S0 = 2432.62
    dt = 1/252
    timeSteps = 252

    # drift term
    drift = (mu - 0.5*sigma**2)*dt

    # diffusion term
    z = np.random.standard_normal([1, timeSteps])
    diffusion = (sigma*np.sqrt(dt)*z)

    # generating St
    p = drift + diffusion
    cm = np.exp(np.cumsum(p, axis=1))

    St = S0*cm
    S0 = np.array(S0).reshape(-1,1)
    St = np.append(S0, St, axis=1)

    df = pd.DataFrame(St.T, columns=['주가'])
    df['수익률'] = df['주가'].pct_change()
    df['로그계약 수익률'] = np.log(df['주가']/df['주가'].shift(1))
    df['포트폴리오 수익률'] = df['수익률'] - df['로그계약 수익률']
    df['포트폴리오 가치'] = 1 * (1+df['포트폴리오 수익률'])
    df['주식 가치'] = 1 * (1+df['수익률'])

    return df
```

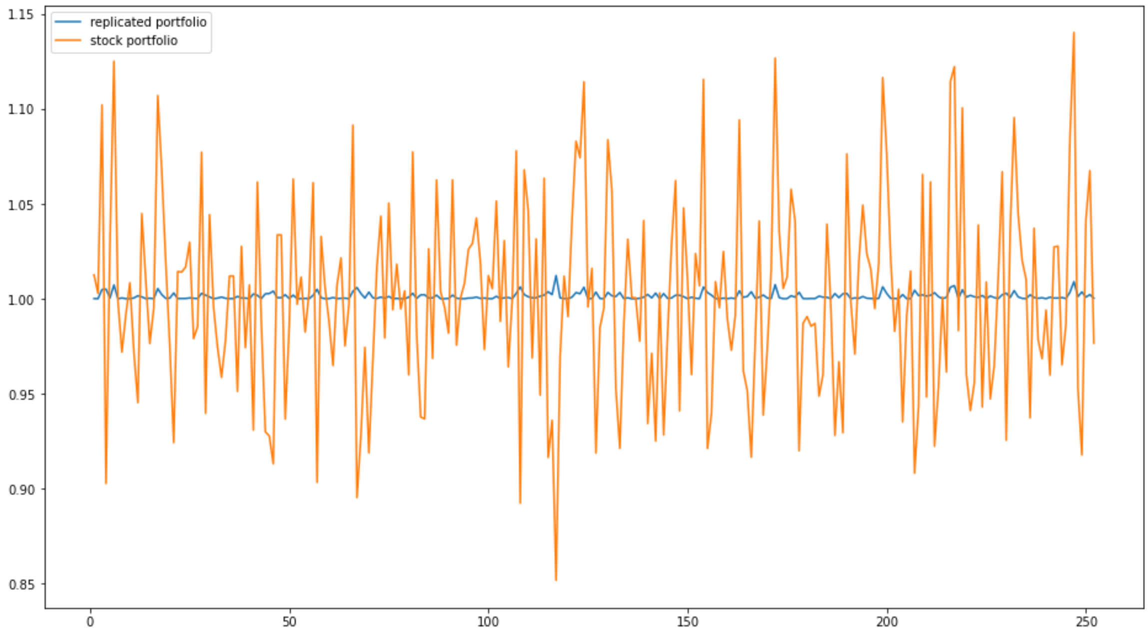
```
df = log_contract(0.2)
```

	주가	수익률	로그계약 수익률	포트폴리오 수익률	포트폴리오 가치	주식 가치
0	2432.620000	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
1	2420.336799	-0.005049	-0.005062	1.279115e-05	1.000013	0.994951
2	2378.258473	-0.017385	-0.017538	1.528994e-04	1.000153	0.982615
3	2350.012438	-0.011877	-0.011948	7.109232e-05	1.000071	0.988123
4	2347.131064	-0.001226	-0.001227	7.522876e-07	1.000001	0.998774




```
df = log_contract(0.8)
```

	주가	수익률	로그계약 수익률	포트폴리오 수익률	포트폴리오 가치	주식 가치
0	2432.620000	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
1	2463.137971	0.012545	0.012467	0.000078	1.000078	1.012545
2	2470.176990	0.002858	0.002854	0.000004	1.000004	1.002858
3	2722.351046	0.102087	0.097206	0.004881	1.004881	1.102087
4	2457.415914	-0.097319	-0.102386	0.005067	1.005067	0.902681



결론: 복제포트폴리오 가치는 변동성에 관계없이 일정함을 알 수 있음.

Valuing the Variance

💡 현실에서 log contract short position 잡을 수 있을까?

log contract는 실제 시장에서 거래되지 않는 상품임.

그러나 위험중립가정을 덧붙이면, 풋과 콜의 합성으로 복제포트폴리오를 합성해낼 수 있음.

$$\pi\left(S_0, S_0, 0, T\right) = \frac{2}{T} E\left[\int_0^T \frac{1}{S} dS - \ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right]$$

- 위험중립가정에 따라 주식 포지션에 대한 부분은 다음과 같이 표현 가능

$$E\left[\int_0^T \frac{1}{S} dS\right] = rT$$

- 위험중립가정에 따라 로그계약은 다음과 같이 주식, 풋, 콜옵션으로 복제 가능.

$$-\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) = -\ln\left(\frac{S^*}{S_0}\right) - \ln\left(\frac{S_T}{S^*}\right)$$

$$\begin{aligned}\pi(S_T, S^*, 0) &= \int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} P(S_T, K, 0)\, dK + \int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} C(S_T, K, 0)\, dK \\ &= \int_{S^*}^{S_T} \frac{1}{K^2}(S_T - K)\, dK \\ &= \left(\frac{S_T - S^*}{S^*}\right) - \ln\left(\frac{S_T}{S^*}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) = -\ln\left(\frac{S^*}{S_0}\right) - \frac{S_T - S^*}{S^*} + \int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} P\,(K, T)\ dK \\ + \int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} C(K, T)\, dK\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-E\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] = -\ln\left(\frac{S^*}{S_0}\right) - \frac{S_0 e^{rT} - S^*}{S^*} + \int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} e^{rT} P\,(K, 0)\ dK \\ + \int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} e^{rT} C(K, 0)\, dK\end{aligned} \quad (4.$$

→ 위의 식에서 $S^* = S_0$ 으로 가정하면, 더 간단하게 표현할 수 있음.

$$\begin{aligned}\pi(S_0, S_0, 0, T) = \frac{2}{T}\Bigg[rT - (e^{rT} - 1) + e^{rT} \int_0^{S_0} \frac{1}{K^2} P(K, 0)\, dK \\ + e^{rT} \int_{S_0}^{\infty} \frac{1}{K^2} C(K, 0)\, dK\Bigg]\end{aligned}$$

→ rT 와 $e^{rT} - 1$이 거의 유사하며 차이가 0에 가깝다고 가정하면,

$$\pi(S_0, S_0, 0, T) \approx \frac{2}{T}\left[e^{rT} \int_0^{S_0} \frac{1}{K^2} P(K, 0)\, dK + e^{rT} \int_{S_0}^{\infty} \frac{1}{K^2} C(K, 0)\, dK\right]$$

Replication with a Finite Number of Options

모든 행사가에 대한 옵션 마켓 프라이스가 주어진다면, 위의 식을 적용하여 variance에 대한 마켓프라이스를 구할 수 있음. 계산된 가격은 미래의 변동성과는 independent하고, 오직 개시시점의 시장가에 기초하여 구해질 것.

불행히도, 옵션 시장에서는 제한된 범위의 행사가가 관찰됨. 가능한 해결책은 부분 부분에 대해 선형으로 복제해내는 방법임.

각각의 λ는 각 라인 구간의 기울기를 나타냄. 아래 식을 통해 유한한 풋과 콜로, variance에 대한 마켓프라이스를 근사할 수 있음.

$$V(t) = \cdots + \left(\lambda_1^P - \lambda_0^P\right) P\left(K_P^1\right) + \lambda_0^P P\left(K_0\right) + \lambda_0^C C\left(K_0\right) \\ + \left(\lambda_1^C - \lambda_0^C\right) C\left(K_C^1\right) + \cdots$$

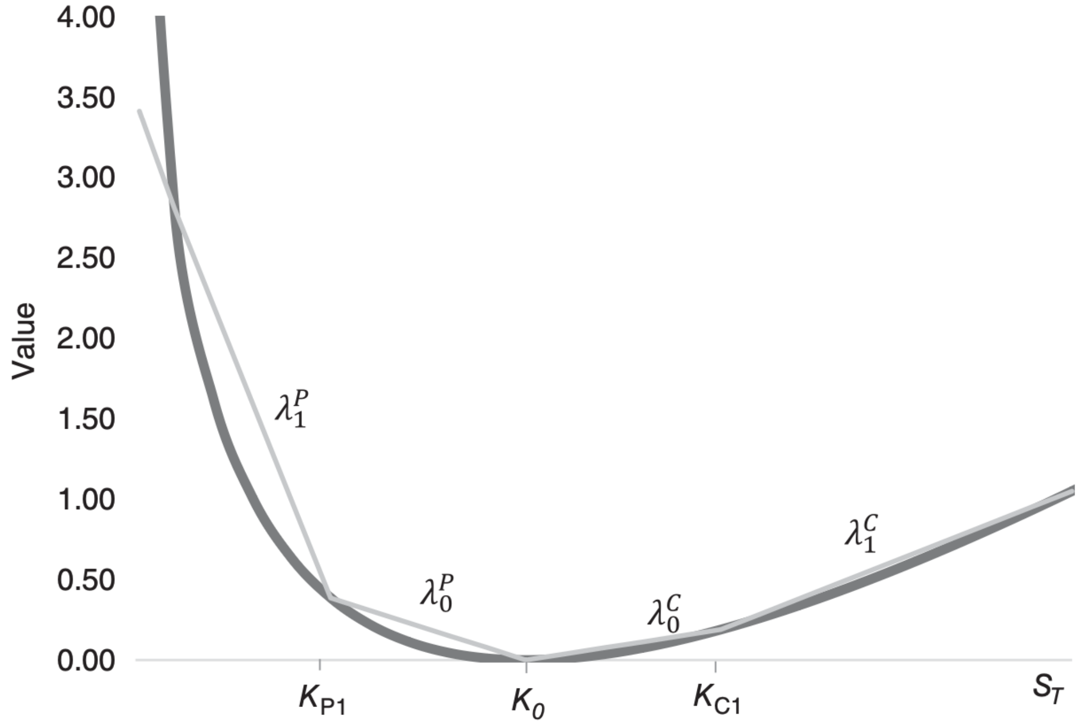


FIGURE 4.6 Piecewise-Linear Replication of a Variance Swap

Sample problem

예제를 통해 S&P 500의 1년짜리 variance에 대한 마켓프라이스를 추정해보자.

riskless rate은 0이고 현재 S&P 지수는 2,000임.

K_i	C_i	P_i
1,200	802.91	2.91
1,400	614.38	14.38
1,600	445.31	45.31
1,800	305.44	105.44
2,000	198.95	198.95
2,200	123.81	323.81
2,400	74.12	474.12
2,600	42.97	642.97
2,800	24.28	824.28

1. 아래 식을 이용하여 $\pi(K_i)$ 구하기

$$\begin{aligned}\pi(S_T, S^*, 0) &= \int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} P(S_T, K, 0)\, dK + \int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} C(S_T, K, 0)\, dK \\ &= \int_{S^*}^{S_T} \frac{1}{K^2} (S_T - K)\, dK \\ &= \left(\frac{S_T - S^*}{S^*}\right) - \ln\left(\frac{S_T}{S^*}\right)\end{aligned}$$

2. 기울기 λ 구하기 → $\frac{\pi(K_i)-\pi(K_{i-1})}{K_i-K_{i-1}}$

3. weight구하기

$$\begin{aligned}V(t) = \cdots + \left(\lambda_1^P - \lambda_0^P\right) P\left(K_P^1\right) + \lambda_0^P P\left(K_0\right) + \lambda_0^C C\left(K_0\right) \\ + \left(\lambda_1^C - \lambda_0^C\right) C\left(K_C^1\right) + \cdots\end{aligned}$$

4. 풋 콜 가격에 weight 적용해서 합산.

[계산 결과]

K_i	$\pi(K_i)$	λ_i	w_i	C_i	P_i	$w_i \times O_i$
1,000	0.386					
1,200	0.222	0.000823	0.000282		2.91	0.0008
1,400	0.113	0.000542	0.000206		14.38	0.0030
1,600	0.046	0.000335	0.000157		45.31	0.0071
1,800	0.011	0.000178	0.000124		105.44	0.0131
2,000	0.000	0.000054	0.000054		198.95	0.0107
2,000	0.000	0.000047	0.000047	198.95		0.0093
2,200	0.009	0.000130	0.000083	123.81		0.0103
2,400	0.035	0.000200	0.000070	74.12		0.0052
2,600	0.075	0.000259	0.000059	42.97		0.0026
2,800	0.127	0.000310	0.000051	24.28		0.0012
3,000	0.189					
					Variance	0.0632
					Vol	0.2515

한계)

a. 여기서는 $Se^{r\tau}$를 만족하는 행사가를 찾을 수 있었지만(riskless rate = 0) 실제 시장에서 쿼트되지 않을 수 있음.

b. 총 9개의 행사가의 옵션을 이용하였지만, 실제로 오차를 줄이기 위해 더 많은 행사가의 옵션이 필요할 수 있음.

c. 극단의 값들을 제외하고는 piecewise-linear approximation은 항상 실제 curve보다 항상 높게 추정됨. 이에 따른 편의 존재.

d. 너무 좁게 행사가들의 범위를 지정해서 선형 추정을 하게되면 오히려 OTM 쪽에서 실제 curve보다 값이 낮게 추정될 수 있음.

- 더 간단한 추정 방법
  - Demeterfi et al. (1999)

    implied vol과 delta 모두 행사가에 대해 선형의 관계를 가지고 있다고 가정하면, variance swap의 가치는 다음과 같이계산될 수 있음.

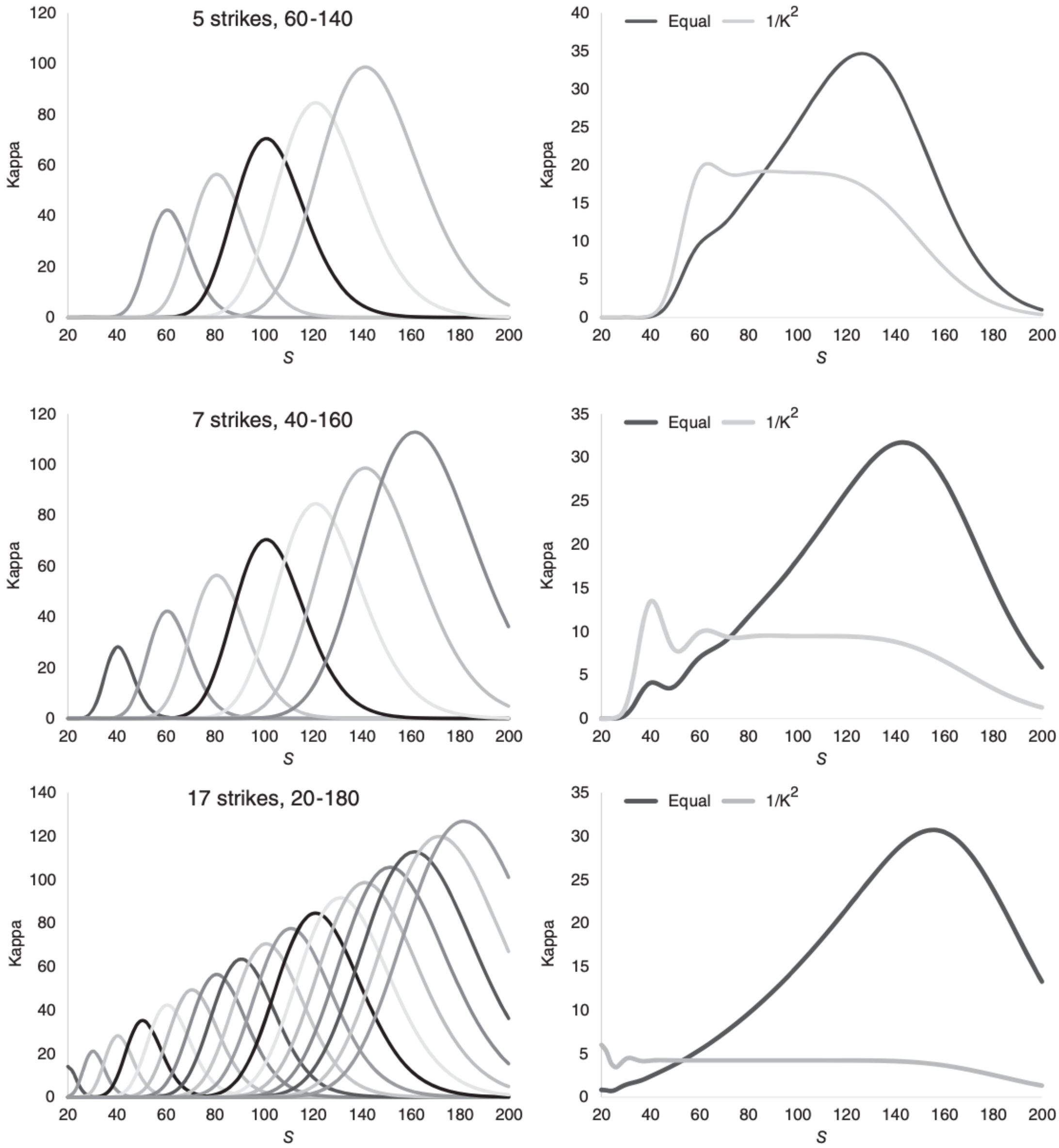
$$\sigma(K) = \sigma_F - b\frac{K - S_F}{S_F}$$

$$\sigma_K^2 = \sigma_F^2(1 + 3Tb^2)$$

- S_F 는 variance swap 만기의 주식에 대한 선도가격임.
- σ_F 는 행사가가 S_F일 때 옵션의 내재변동성임.
- b 는 상수 - skew slope를 나타내는 상수. 실무적으로 0.9 주로 씀.
- 근사는 위의 식처럼 간단하게 할 수 있음. 이러한 근사는 장기물보다는 단기물에 대해 행사가 추정할 때 사용함. 단기적으로 풋옵션의 skew는 상대적으로 linear하고, 콜의 경우 플랫한 모습을 보이기 때문. 장기물로 갈 수록 옵션의 skew convexity가 높아짐에 따라 정확도가 떨어짐. 또한 개별주식보다는 지수 변동성 스왑에 주로 사용. 왜냐하면 개별주식의 경우 convexity가 더 심해지기 때문.

Errors in Replication

1. 행사가의 제한
    a. 근접한 두 개의 행사가의 차이가 너무 커서 그 사이의 행사가의 옵션가에 대한 정보를 구할 수 없음.
    b. 시장에서 관찰되는 행사가의 범위가 제한되어 있어서 주가가 행사가 범위 그 이상으로 움직이게 되면, 포트폴리오 복제 실패할 수도 있음. 실제로 아래 그림과 같이, 시장에서 관측되는 행사가 범위 내에서는 kappa가 일정한 모습을 보이다가, 그 범위를 벗어나는 구간에서 튀는 것을 확인할 수 있음.



c. 일반적으로 swap의 만기가 길어질 수록 시장에서 가져와야하는 행사가의 범위는 더 넓어짐.

2. 연속성의 가정이 깨질 수 있음 - jump
    a. jump로 인해 관측 가능한 행사가 범위를 넘어서는 주가가 형성될 수 있음.
    b. 이산적으로 로그 계약 복제해낼 때 taylor expansion으로 2차까지 근사하였는데 주가 jump로 인해 그 이상 차원 항에서의 오류가 높아질 수 있음.

Additional Analysis

1. 옵션의 내재변동성과 variance swap rate 비교

   일반적으로 ATM 옵션의 내재변동성보다 variance swap의 strikes가 더 높음.

   - 블룸버그 데이터 조회

Bloomberg 블룸버그
산출유형 이산 연속 매수 및 매도 Mid
21) 현재시장 22) 매트릭스 표시 23) Forward 금리 24) 곡선 표시 25) 커버리지
화면 조정 일정표 화면 만기 23-Feb-2023

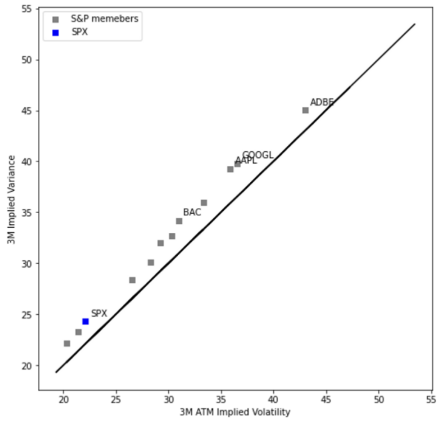
티커	시장	Nov-22	Dec-22	Jan-23	Feb-23	Mar-23	Jun-23	Sep-23	Dec-23	02/23/...
1) SX5E	Mid	16.36	19.36	20.72	21.90	22.63	24.06	24.73	25.26	22.08
2) UKX	Mid	12.61	14.69	15.46	16.43	17.22	18.54	19.42	20.17	16.62
3) CAC	Mid	16.05	19.11	19.92	21.02	21.85	23.30	23.69	24.15	21.21
4) DAX	Mid	17.29	20.64	21.60	22.66	23.69	24.52	25.30	25.90	22.85
5) SPX	Mid	17.96	21.29	22.56	23.64	24.76	26.02	26.66	26.79	23.55
6) NDX	Mid	21.81	27.31	27.90	29.35	30.43	31.00	31.65	31.98	29.48
7) NKY	Mid	13.54	15.26	18.04	19.37	19.95	21.34	21.96	22.48	19.61
8) HSI	Mid	30.36	31.25	29.83	30.17	30.61	30.51	31.26	31.13	30.12

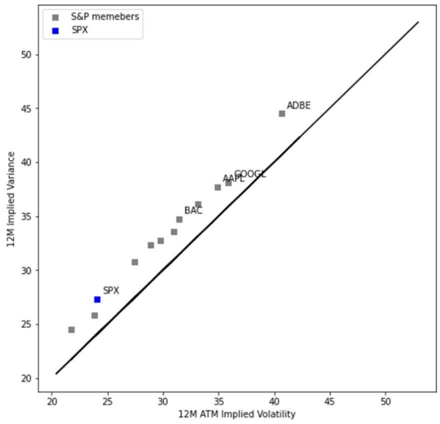
(조회 결과)

Ticker	3_mon_ATM_imvol	3_mon_variance_swap	6_mon_ATM_imvol	6_mon_variance_swap
SPX	21.54	23.64	23.02	24.06
AAPL	33.02	35.83	33.88	37.19
MSFT	31.18	33.65	31.34	33.82
AMZN	45.88	50.05	43.52	47.54
GOOGL	34.78	38.4	34.54	38.75
V	27.96	31.01	28.59	32.28
WMT	19.26	21.22	22.72	25.36
JPM	26.93	30.14	27.43	31.11
MA	30.04	32.53	30.7	33.81
PG	19.14	21.52	19.91	22.54
HD	27.46	30.09	29.04	32.35
BAC	29.48	32.55	30	33.5
T	22.28	26.81	24.16	28.13
XOM	31.39	34.86	32.51	35.86
KO	18.04	20.48	18.91	21.52
PFE	25.71	28.55	25.85	28.65
CSCO	25.55	27.94	26.57	29.13
ADBE	40.34	44.25	40.15	44
NFLX	54.3	56.78	51.67	58.3
DIS	37.59	39.77	36.57	40.24

   - 분석
     - varaince swap의 strikes와 ATM 옵션의 내재변동성은 positively correlated
     - ATM옵션의 내재변동성은 현재 지수 기준으로 미래 실현될 변동성에 대한 시장의 예측값을 제공하는 반면, variance swap은 미래 지수가 어떻게 되든 상관없이 즉, path independent 하게 varinace에 대한 시장의 예측값을 반영함.
     - 그렇다면 (variance swap 행사가 - ATM옵션 내재변동성)을 volatility of volatility에 대한 premium이라고 볼 수 있음. 스프레드가 벌어질 수록 앞으

로 실현될 수 있는 변동성의 범위가 매우 커질 것으로 시장이 보고 있음을 의미함.





- variance swap 이론가는 옵션들을 가중평균한 복제포트폴리오와 가치가 동일함. 즉, variance swap의 행사가는 복제포트폴리오를 구성하는 개별 옵션들의 변동성의 가중평균이라고 볼 수 있음. 따라서 skew가 존재하거나 skew의 convexity가 높게되면, 개별옵션 변동성의 가중평균은 ATM 변동성보다 클 수밖에 없음. 결국, variance swap을 산다는 것은 volatility의 volatility에 베팅하겠다는 의미임.

2. Variance swap 활용 방안

   a. 시장 변동성에 대한 안정적인 예측치로 활용

      델타 헷지된 옵션을 가지고도 미래 변동성에 대한 정보를 얻을 수 있지만, 1) 계속해서 델타를 헷징해주어야 하고, 2) path-dependent 함.

      variance swap을 활용하면 이러한 한계점들을 극복할 수 있음. 예를 들어, 시장에 버블이 터질 것을 예상하는 투자자는 하락장이 언제 올지 모르기 때문에 기초자산을 계속 보유하면서 variance swap을 long 포지션 취하는 것이 훨씬 유리함. 갑작스러운 하락장에 훨씬 잘 대응할 수 있음.

   b. 개별 기업에 대한 정보를 얻을 수 있는 기회

      개별 기업의 주가에 영향을 catalyst가 예정되어 있으나 해당 이벤트가 실제로 일어날지 말지에 대한 불확실성이 존재하는 상황에서 해당 기업의 variance swap 가치에서 확률에 대한 정보를 얻을 수 있음.예) 신약개발, M&A. 이러한 정보가 다른 시장참여자들에게 잘 알져지지 않은 정보라면 이를 이용하여 알파수익을 얻을 수 있을 것.

또한 주가변동성이 올라갈 것으로 예상되는 경우 확실하게 수익을 얻을 수 있는 상품임. straddle을 이용해서도 주가가 크게 변하는 것에 이득을 얻을 수 있지만, 수익 실현을 못할 가능성 존재함. 이벤트가 발생하기 전에 주가가 크게 상승하였다가 그리고 바로 행사가 부근으로 다시 빠르게 돌아간 경우가 이에 해당. 이 때 variance swap을 활용한다면 수익을 얻을 수 있음.