Chapter 1 矩陣與聯立方程組

1-1 矩陣的基本定義與分類

- 聯立方程組

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & & & & \vdots & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

聯立方程式用 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 來表示

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},
$$

通常我們會稱矩陣 A 為此聯立方程式的係數矩陣

1-1 矩陣的基本定義與分類

觀念

$$(m \times n)\text{ Matrix: }A=[a_{mn}]$$

$$\begin{array}{c|c}
\text{Row 1} \rightarrow & \\
\text{Row 2} \rightarrow & \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 5 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\
\text{Row 3} \rightarrow & \\
 & \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \text{Column 1} & \text{Column 2} \end{matrix}
\end{array}$$

An element of the matrix

Dimension of this matrix is 3 x 2

- ***Index of component***: the scalar in the i-th row and j-th column is called (i,j)-entry of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

先 Row 再 Column

(1,2)-entry

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

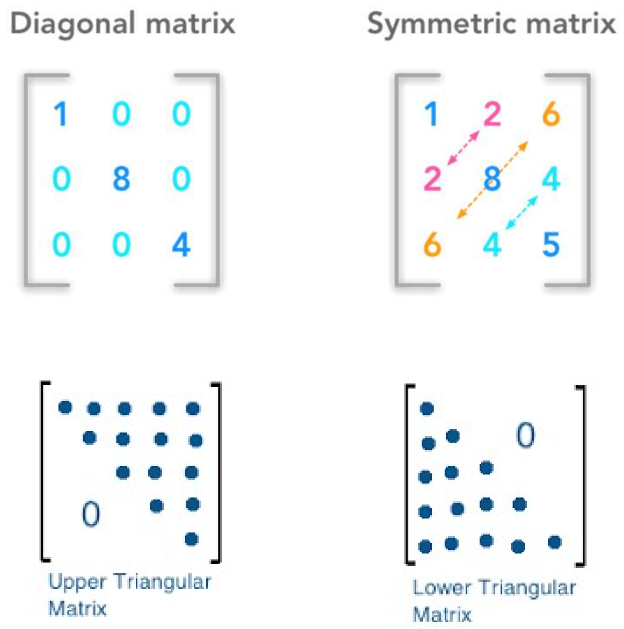
(3,1)-entry

(3,3)-entry

1-1 矩陣的基本定義與分類

分類

1) 列矩陣 (row matrix)
2) 行矩陣 (column matrix)
3) 方陣 (square matrix)
4) 單位矩陣 (unit matrix)
5) 對角線矩陣 (diagonal matrix)
6) 上三角矩陣 (upper triangular matrix)
7) 下三角矩陣 (lower triangular matrix)



1-1 矩陣的基本定義與分類

定義

- 定義一：矩陣相等
- 定義二：矩陣相加
- 定義三：常數與矩陣相乘

設 A、B 都是二階方陣

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

若 $A=B$ 則 $a=p$、$b=q$、$c=r$、$d=s$。

兩個矩陣相等不僅是行數列數要相等，
而且所有互相對應的元素都要相等。

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 3+0 \\ 1+7 & 0+5 \\ 1+2 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2 \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$

1-1 矩陣的基本定義與分類

矩陣的變換 **(transform of a matrix)**

- 1) 轉置 (transpose): A^T
- 2) 共軛 (conjugate): $\bar{A}$
- 3) 共軛轉置: $(\bar{A})^T$ (=A^H)

■ Matrix transpose

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(ABC)^T = C^T B^T A^T$$

$$\mathbf{a}^T\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\mathbf{a}$$

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T\mathbf{x}$$

A

2	4	-1
-10	5	11
18	-7	6

⇨

A^T

2	-10	-18
4	5	-7
-1	11	6

Complex Conjugate

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3+i \\ 3-i & 2 \end{bmatrix} \qquad \bar{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3-i \\ 3+i & 2 \end{bmatrix}$$

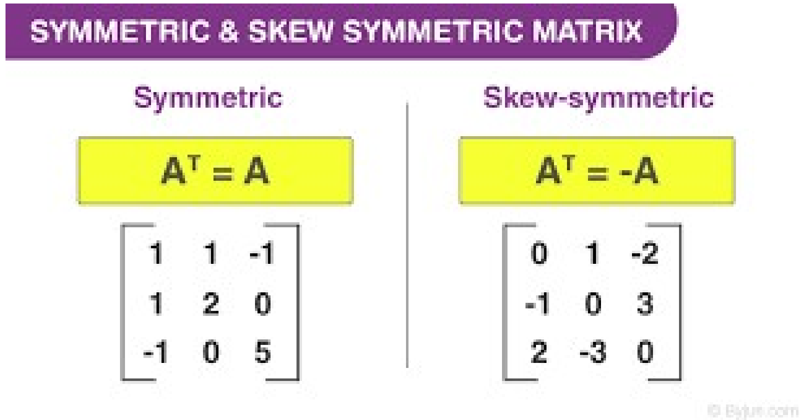
$$\begin{pmatrix} 3+i & 2 & 1-2j \\ 6-i & 4-i & 3-2i \\ 7+i & 4 & 1+2i \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \text{转置} \rightarrow \begin{pmatrix} 3+i & 6-i & 7+i \\ 2 & 6-1 & 4 \\ 1-2i & 3-2i & 1+2i \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \text{共轭} \rightarrow \begin{pmatrix} 3-i & 6+i & 7-i \\ 2 & 4+i & 4 \\ 1+2i & 3+2i & 1-2i \end{pmatrix}$$

1-1 矩陣的基本定義與分類

矩陣型式



1) 對稱矩陣 (symmetric matrix)
2) 斜對稱矩陣 (Skew-symmetric matrix)

3) 赫米頓矩陣 (Hermitian matrix) $A^H = A$
4) 斜赫米頓矩陣 (Skew- Hermitian matrix) $A^H = -A$

1-1 矩陣的基本定義與分類

H.W.

17. The matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1+i & 3 \\ 1-i & 6 & i \\ 3 & -i & 4 \end{pmatrix}$ is

(A) symmetric.
(B) skew-symmetric.
(C) Hermitian matrix
(D) Skew-Hermitian matrix