

Supplementary Material

Numerical Results for

Generalized Laplace Approximation and Its Application to Credibility Theory

1. Results of numerical analysis

This supplementary file provides additional tables that summarize the results obtained from the numerical analysis in the paper entitled *Generalized Laplace Approximation and Its Application to Credibility Theory*. The tables report the computed values of the total variation (TV) distance and the relative hypothetical mean squared error (rHMSE) under various distributional and parameter settings. They are intended to complement the figures and discussions in the paper by offering detailed numerical values, thereby facilitating closer inspection, comparison across methods, and reproducibility of the reported results.

For each random-effect scenario, we approximate the target pdf using the proposed five methods: Gamma approximation (gTEA), Inverse Gaussian approximation (igTEA), log-normal approximation (lnTEA), Gamma BEA (gBEA), and Inverse Gaussian BEA (igBEA).

1.1. Distribution approximation performance

For the evaluation of distributional approximation performance, we assess not only the proposed approximation methods but also the performance of the Laplace approximation (Laplace) described in Section 3. In certain settings under Gamma and Weibull prior, however, the TV distance between the target pdf and the Laplace-approximating pdf cannot be obtained, because it is possible that the target function does not allow the mode. As a result, it is difficult to identify an appropriate mode x_0 , which in turn makes the precision parameter undefined. Cases where the computation is not feasible are denoted by “–” in the tables.

- Table 1 - Table 4: TV distance for Poisson distribution
- Table 5 - Table 8: TV distance for negative binomial distribution

1.2. Premium estimation performance

- Table 9 - Table 12: rHMSE₁ for Poisson distribution
- Table 13 - Table 16: rHMSE₂ for Poisson distribution
- Table 17 - Table 20: rHMSE₁ for negative binomial distribution
- Table 21 - Table 24: rHMSE₂ for negative binomial distribution

(a) Laplace										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
τ		1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3		0.1381	0.1335	0.1284	0.1337	0.1157	0.0996	0.1298	0.1037	0.0843
1.2		-	-	-	-	-	-	-	-	-
2.0		-	-	-	-	-	-	-	-	-

(b) gTEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
τ		1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.2		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2.0		0.0000	0.0001	0.0002	0.0000	0.0002	0.0007	0.0008	0.0003	0.0005

(c) igTEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
τ		1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3		0.1136	0.1067	0.0994	0.1069	0.0836	0.0668	0.1013	0.0710	0.0535
1.2		0.2917	0.2547	0.2286	0.2523	0.1736	0.1391	0.2267	0.1412	0.1068
2.0		0.3906	0.3417	0.3055	0.3396	0.2365	0.1965	0.3079	0.1980	0.1608

(d) lnTEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
τ		1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3		0.0766	0.0729	0.0690	0.0730	0.0602	0.0504	0.0700	0.0528	0.0421
1.2		0.1613	0.1439	0.1313	0.1428	0.1045	0.0868	0.1305	0.0879	0.0697
2.0		0.2093	0.1858	0.1683	0.1848	0.1345	0.1143	0.1697	0.1151	0.0957

(e) gBEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
τ		1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.2		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2.0		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

(f) igBEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
τ		1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3		0.1090	0.1018	0.0943	0.1021	0.0782	0.0615	0.0963	0.0657	0.0487
1.2		0.3025	0.2621	0.2338	0.2595	0.1748	0.1384	0.2317	0.1405	0.1046
2.0		0.4118	0.3581	0.3186	0.3559	0.2437	0.2005	0.3205	0.2024	0.1630

Table 1: TV distance under various approximation methods for Poisson distribution with Gamma prior

(a) Laplace

Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.2090	0.1944	0.1794	0.1945	0.1485	0.1187	0.1822	0.1238	0.0942
1.2			0.3333	0.2841	0.2440	0.2839	0.1854	0.1435	0.2506	0.1501	0.1128
2.0			0.3889	0.3240	0.2744	0.3233	0.2043	0.1568	0.2820	0.1647	0.1266

(b) gTEA

Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0699	0.0618	0.0535	0.0618	0.0375	0.0239	0.0551	0.0261	0.0146
1.2			0.1226	0.0940	0.0721	0.0939	0.0422	0.0241	0.0759	0.0265	0.0136
2.0			0.1454	0.1076	0.0814	0.1067	0.0473	0.0276	0.0851	0.0304	0.0186

(c) igTEA

Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0227	0.0238	0.0265	0.0238	0.0320	0.0340	0.0259	0.0339	0.0328
1.2			0.0675	0.0730	0.0757	0.0731	0.0727	0.0642	0.0763	0.0658	0.0542
2.0			0.0935	0.1000	0.0998	0.0993	0.0908	0.0781	0.0999	0.0804	0.0674

(d) lnTEA

Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0017	0.0075	0.0124	0.0074	0.0201	0.0244	0.0116	0.0239	0.0254
1.2			0.0078	0.0253	0.0341	0.0254	0.0413	0.0418	0.0336	0.0418	0.0388
2.0			0.0115	0.0340	0.0432	0.0333	0.0492	0.0489	0.0416	0.0489	0.0470

(e) gBEA

Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0630	0.0555	0.0496	0.0556	0.0497	0.0498	0.0507	0.0491	0.0483
1.2			0.1044	0.0825	0.0943	0.0827	0.1094	0.0984	0.0930	0.1033	0.0823
2.0			0.1197	0.1046	0.1272	0.1047	0.1433	0.1216	0.1239	0.1308	0.1013

(f) igBEA

Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0228	0.0272	0.0349	0.0269	0.0469	0.0526	0.0327	0.0521	0.0539
1.2			0.0687	0.0946	0.1170	0.0941	0.1354	0.1235	0.1121	0.1297	0.1042
2.0			0.0964	0.1371	0.1653	0.1366	0.1838	0.1589	0.1615	0.1704	0.1324

Table 2: TV distance under various approximation methods for Poisson distribution with log-normal prior

(a) Laplace											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	
0.3			0.2311	0.2119	0.1941	0.2122	0.1571	0.1250	0.1974	0.1300	0.0981
1.2			0.4210	0.3484	0.2942	0.3517	0.2129	0.1595	0.3057	0.1681	0.1233
2.0			0.4877	0.4001	0.3326	0.4063	0.2422	0.1806	0.3489	0.1923	0.1446

(b) gTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	
0.3			0.0911	0.0793	0.0685	0.0795	0.0472	0.0308	0.0706	0.0333	0.0193
1.2			0.1989	0.1473	0.1142	0.1502	0.0677	0.0404	0.1217	0.0445	0.0248
2.0			0.2442	0.1762	0.1337	0.1810	0.0824	0.0518	0.1449	0.0562	0.0357

(c) igTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	
0.3			0.0022	0.0094	0.0149	0.0092	0.0238	0.0277	0.0138	0.0272	0.0282
1.2			0.0104	0.0339	0.0416	0.0317	0.0479	0.0458	0.0399	0.0464	0.0410
2.0			0.0149	0.0419	0.0512	0.0410	0.0544	0.0518	0.0491	0.0513	0.0483

(d) lnTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	
0.3			0.0229	0.0217	0.0211	0.0216	0.0221	0.0231	0.0211	0.0230	0.0234
1.2			0.0637	0.0539	0.0479	0.0540	0.0410	0.0362	0.0492	0.0370	0.0323
2.0			0.0830	0.0675	0.0590	0.0685	0.0480	0.0420	0.0612	0.0415	0.0390

(e) gBEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	
0.3			0.0731	0.0651	0.0581	0.0654	0.0532	0.0486	0.0599	0.0527	0.0455
1.2			0.1461	0.1140	0.1037	0.1151	0.1092	0.0968	0.1039	0.1047	0.0807
2.0			0.1755	0.1326	0.1291	0.1348	0.1435	0.1286	0.1299	0.1366	0.1215

(f) igBEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	
0.3			0.0022	0.0128	0.0229	0.0124	0.0388	0.0444	0.0215	0.0470	0.0462
1.2			0.0114	0.0517	0.0805	0.0502	0.1058	0.1031	0.0763	0.1093	0.0901
2.0			0.0168	0.0721	0.1109	0.0710	0.1437	0.1393	0.1054	0.1467	0.1360

Table 3: TV distance under various approximation methods for Poisson distribution with Inverse Gaussian prior

(a) Laplace											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
	τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10	
0.3		0.0908	0.0937	0.0944	0.0935	0.0951	0.0889	0.0946	0.0920	0.0790	
1.2		-	-	-	-	-	-	-	-	-	
2.0		-	-	-	-	-	-	-	-	-	

(b) gTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
	τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10	
0.3		0.0736	0.0616	0.0494	0.0614	0.0294	0.0158	0.0517	0.0176	0.0083	
1.2		0.0140	0.0090	0.0058	0.0089	0.0028	0.0013	0.0064	0.0015	0.0006	
2.0		0.0552	0.0334	0.0214	0.0332	0.0108	0.0059	0.0234	0.0061	0.0051	

(c) igTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
	τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10	
0.3		0.1951	0.1792	0.1596	0.1786	0.1260	0.0919	0.1638	0.0989	0.0672	
1.2		0.2730	0.2441	0.2095	0.2397	0.1716	0.1292	0.2187	0.1415	0.1011	
2.0		0.3189	0.2838	0.2466	0.2820	0.2085	0.1602	0.2563	0.1744	0.1313	

(d) lnTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
	τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10	
0.3		0.1466	0.1334	0.1184	0.1330	0.0930	0.0695	0.1215	0.0740	0.0526	
1.2		0.1464	0.1349	0.1198	0.1329	0.1024	0.0814	0.1239	0.0876	0.0665	
2.0		0.1490	0.1425	0.1303	0.1418	0.1163	0.0949	0.1339	0.1013	0.0815	

(e) gBEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
	τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10	
0.3		0.0639	0.0538	0.0454	0.0537	0.0380	0.0358	0.0469	0.0366	0.0344	
1.2		0.0116	0.0079	0.0072	0.0079	0.0071	0.0066	0.0072	0.0069	0.0061	
2.0		0.0450	0.0312	0.0294	0.0312	0.0295	0.0267	0.0296	0.0280	0.0244	

(f) igBEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
	τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10	
0.3		0.1970	0.1788	0.1581	0.1783	0.1238	0.0932	0.1625	0.0993	0.0716	
1.2		0.2812	0.2505	0.2134	0.2456	0.1739	0.1293	0.2234	0.1426	0.1004	
2.0		0.3294	0.2955	0.2578	0.2935	0.2229	0.1707	0.2683	0.1881	0.1397	

Table 4: TV distance under various approximation methods for Poisson distribution with Weibull prior

(a) Laplace											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
τ		1	5	10	1	5	10	1	5	10	
0.3		0.1381	0.1335	0.1284	0.1337	0.1157	0.0996	0.1298	0.1037	0.0843	
1.2		-	-	-	-	-	-	-	-	-	
2.0		-	-	-	-	-	-	-	-	-	
(b) gTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
τ		1	5	10	1	5	10	1	5	10	
0.3		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
1.2		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
2.0		0.0000	0.0001	0.0002	0.0000	0.0002	0.0007	0.0008	0.0003	0.0005	
(c) igTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
τ		1	5	10	1	5	10	1	5	10	
0.3		0.1136	0.1067	0.0994	0.1069	0.0836	0.0668	0.1013	0.0710	0.0535	
1.2		0.2917	0.2547	0.2286	0.2523	0.1736	0.1391	0.2267	0.1412	0.1068	
2.0		0.3906	0.3417	0.3055	0.3396	0.2365	0.1965	0.3079	0.1980	0.1608	
(d) lnTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
τ		1	5	10	1	5	10	1	5	10	
0.3		0.0766	0.0729	0.0690	0.0730	0.0602	0.0504	0.0700	0.0528	0.0421	
1.2		0.1613	0.1439	0.1313	0.1428	0.1045	0.0868	0.1305	0.0879	0.0697	
2.0		0.2093	0.1858	0.1683	0.1848	0.1345	0.1143	0.1697	0.1151	0.0957	
(e) gBEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
τ		1	5	10	1	5	10	1	5	10	
0.3		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
1.2		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
2.0		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
(f) igBEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
τ		1	5	10	1	5	10	1	5	10	
0.3		0.1090	0.1018	0.0943	0.1021	0.0782	0.0615	0.0963	0.0657	0.0487	
1.2		0.3025	0.2621	0.2338	0.2595	0.1748	0.1384	0.2317	0.1405	0.1046	
2.0		0.4118	0.3581	0.3186	0.3559	0.2437	0.2005	0.3205	0.2024	0.1630	

Table 5: TV distance under various approximation methods for negative binomial distribution with Gamma prior

(a) Laplace										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
τ		1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3		0.2090	0.1944	0.1794	0.1945	0.1485	0.1187	0.1822	0.1238	0.0942
1.2		0.3333	0.2841	0.2440	0.2839	0.1854	0.1435	0.2506	0.1501	0.1128
2.0		0.3889	0.3240	0.2744	0.3233	0.2043	0.1568	0.2820	0.1647	0.1266

(b) gTEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
τ		1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3		0.0699	0.0618	0.0535	0.0618	0.0375	0.0239	0.0551	0.0261	0.0146
1.2		0.1226	0.0940	0.0721	0.0939	0.0422	0.0241	0.0759	0.0265	0.0136
2.0		0.1454	0.1076	0.0814	0.1067	0.0473	0.0276	0.0851	0.0304	0.0186

(c) igTEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
τ		1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3		0.0227	0.0238	0.0265	0.0238	0.0320	0.0340	0.0259	0.0339	0.0328
1.2		0.0675	0.0730	0.0757	0.0731	0.0727	0.0642	0.0763	0.0658	0.0542
2.0		0.0935	0.1000	0.0998	0.0993	0.0908	0.0781	0.0999	0.0804	0.0674

(d) lnTEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
τ		1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3		0.0017	0.0075	0.0124	0.0074	0.0201	0.0244	0.0116	0.0239	0.0254
1.2		0.0078	0.0253	0.0341	0.0254	0.0413	0.0418	0.0336	0.0418	0.0388
2.0		0.0115	0.0340	0.0432	0.0333	0.0492	0.0489	0.0416	0.0489	0.0470

(e) gBEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
τ		1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3		0.0630	0.0555	0.0496	0.0556	0.0497	0.0498	0.0507	0.0491	0.0483
1.2		0.1044	0.0825	0.0943	0.0827	0.1094	0.0984	0.0930	0.1033	0.0823
2.0		0.1197	0.1046	0.1272	0.1047	0.1433	0.1216	0.1239	0.1308	0.1013

(f) igBEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
τ		1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3		0.0228	0.0272	0.0349	0.0269	0.0469	0.0526	0.0327	0.0521	0.0539
1.2		0.0687	0.0946	0.1170	0.0941	0.1354	0.1235	0.1121	0.1297	0.1042
2.0		0.0964	0.1371	0.1653	0.1366	0.1838	0.1589	0.1615	0.1704	0.1324

Table 6: TV distance under various approximation methods for negative binomial distribution with log-normal prior

(a) Laplace											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	
0.3			0.2311	0.2119	0.1941	0.2122	0.1571	0.1250	0.1974	0.1300	0.0981
1.2			0.4210	0.3484	0.2942	0.3517	0.2129	0.1595	0.3057	0.1681	0.1233
2.0			0.4877	0.4001	0.3326	0.4063	0.2422	0.1806	0.3489	0.1923	0.1446

(b) gTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	
0.3			0.0911	0.0793	0.0685	0.0795	0.0472	0.0308	0.0706	0.0333	0.0193
1.2			0.1989	0.1473	0.1142	0.1502	0.0677	0.0404	0.1217	0.0445	0.0248
2.0			0.2442	0.1762	0.1337	0.1810	0.0824	0.0518	0.1449	0.0562	0.0357

(c) igTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	
0.3			0.0022	0.0094	0.0149	0.0092	0.0238	0.0277	0.0138	0.0272	0.0282
1.2			0.0104	0.0339	0.0416	0.0317	0.0479	0.0458	0.0399	0.0464	0.0410
2.0			0.0149	0.0419	0.0512	0.0410	0.0544	0.0518	0.0491	0.0513	0.0483

(d) lnTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	
0.3			0.0229	0.0217	0.0211	0.0216	0.0221	0.0231	0.0211	0.0230	0.0234
1.2			0.0637	0.0539	0.0479	0.0540	0.0410	0.0362	0.0492	0.0370	0.0323
2.0			0.0830	0.0675	0.0590	0.0685	0.0480	0.0420	0.0612	0.0415	0.0390

(e) gBEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	
0.3			0.0731	0.0651	0.0581	0.0654	0.0532	0.0486	0.0599	0.0527	0.0455
1.2			0.1461	0.1140	0.1037	0.1151	0.1092	0.0968	0.1039	0.1047	0.0807
2.0			0.1755	0.1326	0.1291	0.1348	0.1435	0.1286	0.1299	0.1366	0.1215

(f) igBEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	
0.3			0.0022	0.0128	0.0229	0.0124	0.0388	0.0444	0.0215	0.0470	0.0462
1.2			0.0114	0.0517	0.0805	0.0502	0.1058	0.1031	0.0763	0.1093	0.0901
2.0			0.0168	0.0721	0.1109	0.0710	0.1437	0.1393	0.1054	0.1467	0.1360

Table 7: TV distance under various approximation methods for negative binomial distribution with Inverse Gaussian prior

(a) Laplace											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	
0.3			0.0908	0.0937	0.0944	0.0935	0.0951	0.0889	0.0946	0.0920	0.0790
1.2		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2.0		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
(b) gTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	
0.3			0.0736	0.0616	0.0494	0.0614	0.0294	0.0158	0.0517	0.0176	0.0083
1.2			0.0140	0.0090	0.0058	0.0089	0.0028	0.0013	0.0064	0.0015	0.0006
2.0			0.0552	0.0334	0.0214	0.0332	0.0108	0.0059	0.0234	0.0061	0.0051
(c) igTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	
0.3			0.1951	0.1792	0.1596	0.1786	0.1260	0.0919	0.1638	0.0989	0.0672
1.2			0.2730	0.2441	0.2095	0.2397	0.1716	0.1292	0.2187	0.1415	0.1011
2.0			0.3189	0.2838	0.2466	0.2820	0.2085	0.1602	0.2563	0.1744	0.1313
(d) lnTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	
0.3			0.1466	0.1334	0.1184	0.1330	0.0930	0.0695	0.1215	0.0740	0.0526
1.2			0.1464	0.1349	0.1198	0.1329	0.1024	0.0814	0.1239	0.0876	0.0665
2.0			0.1490	0.1425	0.1303	0.1418	0.1163	0.0949	0.1339	0.1013	0.0815
(e) gBEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	
0.3			0.0639	0.0538	0.0454	0.0537	0.0380	0.0358	0.0469	0.0366	0.0344
1.2			0.0116	0.0079	0.0072	0.0079	0.0071	0.0066	0.0072	0.0069	0.0061
2.0			0.0450	0.0312	0.0294	0.0312	0.0295	0.0267	0.0296	0.0280	0.0244
(f) igBEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	
0.3			0.1970	0.1788	0.1581	0.1783	0.1238	0.0932	0.1625	0.0993	0.0716
1.2			0.2812	0.2505	0.2134	0.2456	0.1739	0.1293	0.2234	0.1426	0.1004
2.0			0.3294	0.2955	0.2578	0.2935	0.2229	0.1707	0.2683	0.1881	0.1397

Table 8: TV distance under various approximation methods for negative binomial distribution with Weibull prior

(a) gTEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
	τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3		0.0869	0.0781	0.0682	0.0777	0.0507	0.0359	0.0700	0.0377	0.0242
1.2		1.2800	0.8994	0.6439	0.8873	0.3707	0.2062	0.6872	0.2262	0.1244
2.0		3.3934	1.9571	1.3697	1.9070	0.6963	0.4013	1.4039	0.4352	0.2454

(b) igTEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
	τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3		0.0934	0.0832	0.0721	0.0830	0.0529	0.0370	0.0744	0.0390	0.0247
1.2		1.6287	1.0682	0.7309	1.0558	0.3980	0.2152	0.7895	0.2365	0.1271
2.0		4.7696	2.4647	1.6017	2.4211	0.7550	0.4183	1.6624	0.4581	0.2517

(c) lnTEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
	τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3		0.0944	0.0840	0.0727	0.0838	0.0532	0.0371	0.0750	0.0391	0.0247
1.2		1.9141	1.1828	0.7816	1.1712	0.4089	0.2177	0.8494	0.2396	0.1277
2.0		7.2869	3.2044	1.8801	3.1690	0.8059	0.4295	1.9973	0.4723	0.2543

(d) gBEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
	τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3		0.0869	0.0781	0.0682	0.0777	0.0507	0.0359	0.0700	0.0377	0.0242
1.2		1.2800	0.8994	0.6439	0.8873	0.3693	0.2054	0.6872	0.2250	0.1235
2.0		3.3934	1.9469	1.3687	1.8854	0.6639	0.3662	1.4121	0.3986	0.2026

(e) igBEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
	τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3		0.0869	0.0781	0.0682	0.0777	0.0507	0.0359	0.0700	0.0377	0.0242
1.2		1.2800	0.8994	0.6439	0.8873	0.3693	0.2054	0.6872	0.2250	0.1235
2.0		3.3934	1.9469	1.3687	1.8854	0.6639	0.3662	1.4121	0.3986	0.2026

Table 9: rHMSE₁ under various approximation methods for Poisson distribution with Gamma prior

(a) gTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0920	0.0804	0.0718	0.0814	0.0517	0.0357	0.0728	0.0378	0.0240
1.2			1.4049	0.9224	0.6690	0.9326	0.3836	0.2271	0.6972	0.2439	0.1510
2.0			3.5927	2.1408	1.5080	2.0860	0.9396	0.6704	1.5365	0.6949	0.5302

(b) igTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0874	0.0774	0.0696	0.0781	0.0513	0.0357	0.0704	0.0380	0.0240
1.2			1.2941	0.9030	0.6619	0.8981	0.3867	0.2303	0.6878	0.2488	0.1522
2.0			3.3363	2.1285	1.5085	2.0314	0.9530	0.6760	1.5307	0.7049	0.5327

(c) lnTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0874	0.0774	0.0696	0.0781	0.0513	0.0357	0.0704	0.0380	0.0240
1.2			1.2951	0.9045	0.6635	0.8994	0.3870	0.2303	0.6895	0.2489	0.1521
2.0			3.3132	2.1339	1.5096	2.0351	0.9513	0.6735	1.5317	0.7025	0.5312

(d) gBEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0874	0.0774	0.0697	0.0783	0.0517	0.0363	0.0708	0.0383	0.0245
1.2			1.3000	0.9062	0.6775	0.9066	0.3724	0.2043	0.6999	0.2194	0.1215
2.0			3.3898	1.9919	1.3672	1.9754	0.7026	0.3755	1.4114	0.3942	0.2131

(e) igBEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0874	0.0774	0.0697	0.0783	0.0517	0.0363	0.0708	0.0383	0.0245
1.2			1.3000	0.9062	0.6775	0.9066	0.3724	0.2043	0.6999	0.2194	0.1215
2.0			3.3898	1.9919	1.3672	1.9754	0.7026	0.3755	1.4114	0.3942	0.2131

Table 10: rHMSE₁ under various approximation methods for Poisson distribution with log-normal prior

(a) gTEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5
0.3		0.0892	0.0788	0.0680	0.0789	0.0506	0.0340	0.0703	0.0375	0.0233
1.2		1.3879	0.9309	0.6319	0.8933	0.3540	0.1955	0.6649	0.2223	0.1191
2.0		3.5763	2.0744	1.2943	1.9511	0.6946	0.3950	1.4263	0.4192	0.2489

(b) igTEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5
0.3		0.0844	0.0759	0.0664	0.0761	0.0504	0.0343	0.0686	0.0377	0.0235
1.2		1.2519	0.9071	0.6358	0.8717	0.3585	0.1986	0.6655	0.2262	0.1204
2.0		3.3162	2.0654	1.3135	1.9541	0.7076	0.4003	1.4405	0.4254	0.2518

(c) lnTEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5
0.3		0.0844	0.0759	0.0665	0.0761	0.0504	0.0343	0.0687	0.0377	0.0235
1.2		1.2672	0.9167	0.6412	0.8818	0.3597	0.1989	0.6714	0.2266	0.1205
2.0		3.4638	2.1095	1.3255	2.0039	0.7080	0.3989	1.4577	0.4241	0.2510

(d) gBEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5
0.3		0.0843	0.0755	0.0660	0.0758	0.0503	0.0343	0.0685	0.0376	0.0236
1.2		1.2305	0.8792	0.6255	0.8536	0.3602	0.1998	0.6589	0.2279	0.1211
2.0		3.1862	1.9902	1.2986	1.9176	0.6772	0.3609	1.4150	0.3832	0.2096

(e) igBEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5
0.3		0.0843	0.0755	0.0660	0.0758	0.0503	0.0343	0.0685	0.0376	0.0236
1.2		1.2305	0.8792	0.6255	0.8536	0.3602	0.1998	0.6589	0.2279	0.1211
2.0		3.1862	1.9902	1.2986	1.9176	0.6772	0.3609	1.4150	0.3832	0.2096

Table 11: rHMSE₁ under various approximation methods for Poisson distribution with Inverse Gaussian prior

(a) gTEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
	τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3		0.0907	0.0808	0.0703	0.0803	0.0510	0.0357	0.0722	0.0372	0.0242
1.2		1.2344	0.8713	0.6570	0.8833	0.3507	0.2084	0.6860	0.2233	0.1251
2.0		3.1759	1.9478	1.3500	1.9666	0.6584	0.3869	1.3549	0.4057	0.2269

(b) igTEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
	τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3		0.1079	0.0944	0.0803	0.0938	0.0559	0.0377	0.0830	0.0395	0.0249
1.2		1.5333	1.0250	0.7355	1.0311	0.3763	0.2164	0.7739	0.2335	0.1279
2.0		3.8918	2.2654	1.5002	2.2750	0.7043	0.3998	1.5242	0.4238	0.2310

(c) lnTEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
	τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3		0.1112	0.0969	0.0821	0.0964	0.0566	0.0379	0.0849	0.0398	0.0250
1.2		1.7672	1.1205	0.7773	1.1251	0.3856	0.2186	0.8220	0.2362	0.1285
2.0		4.9424	2.5892	1.6240	2.5927	0.7280	0.4049	1.6686	0.4307	0.2321

(d) gBEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
	τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3		0.0860	0.0779	0.0687	0.0773	0.0510	0.0361	0.0705	0.0376	0.0245
1.2		1.2335	0.8701	0.6559	0.8823	0.3508	0.2082	0.6851	0.2236	0.1251
2.0		3.1410	1.9348	1.3438	1.9528	0.6459	0.3738	1.3530	0.3881	0.2057

(e) igBEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
	τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3		0.0860	0.0779	0.0687	0.0773	0.0510	0.0361	0.0705	0.0376	0.0245
1.2		1.2335	0.8701	0.6559	0.8823	0.3508	0.2082	0.6851	0.2236	0.1251
2.0		3.1410	1.9348	1.3438	1.9528	0.6459	0.3738	1.3530	0.3881	0.2057

Table 12: rHMSE₁ under various approximation methods for Poisson distribution with Weibull prior

(a) gTEA

Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0014	0.0012	0.0011	0.0169	0.0112	0.0081	0.0302	0.0164	0.0107
1.2			0.0555	0.0399	0.0298	0.3260	0.1444	0.0792	0.4034	0.1338	0.0739
2.0			0.2529	0.1496	0.1211	0.8701	0.3516	0.2101	0.9248	0.3072	0.1769

(b) igTEA

Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0014	0.0013	0.0011	0.0178	0.0115	0.0083	0.0317	0.0169	0.0109
1.2			0.0640	0.0435	0.0316	0.3613	0.1491	0.0811	0.4396	0.1369	0.0746
2.0			0.2997	0.1633	0.1273	0.9863	0.3619	0.2134	1.0113	0.3149	0.1792

(c) lnTEA

Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0015	0.0013	0.0012	0.0183	0.0117	0.0084	0.0324	0.0170	0.0109
1.2			0.1151	0.0571	0.0357	0.4373	0.1531	0.0817	0.4884	0.1383	0.0748
2.0			1.0482	0.2951	0.1579	1.4843	0.3781	0.2150	1.2637	0.3197	0.1794

(d) gBEA

Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0014	0.0012	0.0011	0.0169	0.0112	0.0081	0.0302	0.0164	0.0107
1.2			0.0555	0.0399	0.0298	0.3260	0.1431	0.0784	0.4034	0.1326	0.0730
2.0			0.2529	0.1441	0.1209	0.8486	0.3193	0.1752	0.9330	0.2706	0.1340

(e) igBEA

Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0014	0.0012	0.0011	0.0169	0.0112	0.0081	0.0302	0.0164	0.0107
1.2			0.0562	0.0402	0.0299	0.3280	0.1432	0.0784	0.4046	0.1326	0.0730
2.0			0.2569	0.1447	0.1210	0.8537	0.3195	0.1752	0.9360	0.2706	0.1340

Table 13: rHMSE₂ under various approximation methods for Poisson distribution with Gamma prior

(a) gTEA

Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0019	0.0017	0.0015	0.0209	0.0130	0.0089	0.0349	0.0177	0.0110
1.2			0.1217	0.0777	0.0643	0.4266	0.1734	0.1064	0.4411	0.1555	0.0997
2.0			0.5433	0.3839	0.3327	1.1641	0.5992	0.4744	1.1057	0.5518	0.4510

(b) igTEA

Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0019	0.0017	0.0015	0.0202	0.0130	0.0089	0.0339	0.0178	0.0110
1.2			0.1174	0.0789	0.0641	0.4175	0.1740	0.1075	0.4392	0.1585	0.1003
2.0			0.5361	0.3863	0.3317	1.1447	0.6038	0.4762	1.1067	0.5577	0.4519

(c) lnTEA

Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0019	0.0017	0.0015	0.0202	0.0130	0.0089	0.0339	0.0179	0.0110
1.2			0.1180	0.0792	0.0641	0.4198	0.1742	0.1075	0.4421	0.1586	0.1001
2.0			0.5227	0.3868	0.3297	1.1518	0.6014	0.4734	1.1107	0.5552	0.4503

(d) gBEA

Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0019	0.0017	0.0015	0.0203	0.0132	0.0092	0.0342	0.0181	0.0113
1.2			0.1177	0.0775	0.0627	0.4197	0.1554	0.0792	0.4479	0.1271	0.0684
2.0			0.5539	0.2650	0.2005	1.0675	0.3428	0.1708	0.9710	0.2423	0.1304

(e) igBEA

Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0019	0.0017	0.0015	0.0203	0.0133	0.0092	0.0342	0.0181	0.0113
1.2			0.1181	0.0778	0.0630	0.4203	0.1553	0.0792	0.4474	0.1270	0.0684
2.0			0.5582	0.2643	0.2000	1.0650	0.3422	0.1707	0.9681	0.2420	0.1303

Table 14: rHMSE₂ under various approximation methods for Poisson distribution with log-normal prior

(a) gTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0016	0.0014	0.0012	0.0189	0.0120	0.0080	0.0323	0.0170	0.0104
1.2			0.0707	0.0500	0.0337	0.3581	0.1413	0.0729	0.3998	0.1326	0.0674
2.0			0.3176	0.1935	0.1199	0.9445	0.3538	0.2032	0.9554	0.2815	0.1734
(b) igTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0016	0.0014	0.0012	0.0185	0.0121	0.0081	0.0318	0.0172	0.0105
1.2			0.0699	0.0524	0.0354	0.3650	0.1441	0.0745	0.4097	0.1351	0.0684
2.0			0.3282	0.2020	0.1246	0.9818	0.3605	0.2063	0.9817	0.2852	0.1752
(c) lnTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0016	0.0014	0.0013	0.0185	0.0121	0.0081	0.0319	0.0173	0.0105
1.2			0.0766	0.0556	0.0368	0.3776	0.1453	0.0748	0.4177	0.1356	0.0685
2.0			0.4049	0.2171	0.1267	1.0370	0.3605	0.2047	1.0038	0.2841	0.1743
(d) gBEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0016	0.0014	0.0012	0.0184	0.0121	0.0081	0.0318	0.0172	0.0104
1.2			0.0679	0.0495	0.0342	0.3568	0.1437	0.0736	0.4057	0.1347	0.0676
2.0			0.3111	0.1921	0.1245	0.9762	0.3246	0.1627	0.9597	0.2380	0.1308
(e) igBEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0016	0.0014	0.0012	0.0184	0.0121	0.0081	0.0317	0.0172	0.0104
1.2			0.0677	0.0494	0.0342	0.3554	0.1435	0.0736	0.4038	0.1346	0.0675
2.0			0.3098	0.1914	0.1243	0.9661	0.3239	0.1625	0.9531	0.2376	0.1307

Table 15: rHMSE₂ under various approximation methods for Poisson distribution with Inverse Gaussian prior

(a) gTEA

Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0012	0.0011	0.0009	0.0154	0.0102	0.0074	0.0284	0.0153	0.0103
1.2			0.0499	0.0372	0.0300	0.3228	0.1320	0.0823	0.3984	0.1309	0.0755
2.0			0.2314	0.1524	0.1138	0.9238	0.3113	0.1960	0.8739	0.2708	0.1544

(b) igTEA

Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0014	0.0012	0.0011	0.0177	0.0110	0.0077	0.0322	0.0161	0.0105
1.2			0.0576	0.0411	0.0320	0.3560	0.1371	0.0837	0.4307	0.1343	0.0763
2.0			0.2597	0.1644	0.1193	1.0042	0.3211	0.1983	0.9375	0.2759	0.1553

(c) lnTEA

Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0016	0.0014	0.0011	0.0192	0.0113	0.0078	0.0339	0.0163	0.0105
1.2			0.0993	0.0523	0.0354	0.4186	0.1407	0.0843	0.4705	0.1357	0.0765
2.0			0.5479	0.2147	0.1308	1.2174	0.3284	0.1988	1.0498	0.2783	0.1553

(d) gBEA

Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0011	0.0010	0.0009	0.0149	0.0103	0.0075	0.0278	0.0156	0.0104
1.2			0.0499	0.0370	0.0298	0.3222	0.1322	0.0821	0.3976	0.1311	0.0755
2.0			0.2299	0.1490	0.1119	0.9150	0.2981	0.1828	0.8726	0.2528	0.1331

(e) igBEA

Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0011	0.0010	0.0009	0.0149	0.0103	0.0075	0.0279	0.0156	0.0104
1.2			0.0504	0.0371	0.0298	0.3239	0.1322	0.0822	0.3990	0.1311	0.0755
2.0			0.2314	0.1490	0.1119	0.9176	0.2980	0.1828	0.8742	0.2527	0.1331

Table 16: rHMSE₂ under various approximation methods for Poisson distribution with Weibull prior

(a) gTEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5
0.3		0.0867	0.0790	0.0725	0.0833	0.0675	0.0550	0.0834	0.0643	0.0492
1.2		1.3024	0.9946	0.7850	1.2073	0.7123	0.4912	1.1699	0.6601	0.4243
2.0		3.4811	2.3549	1.6827	3.0991	1.5856	1.0342	2.9239	1.4749	0.9465

(b) igTEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5
0.3		0.0932	0.0842	0.0765	0.0888	0.0697	0.0557	0.0883	0.0654	0.0491
1.2		1.6583	1.1728	0.8713	1.4304	0.7236	0.4819	1.3539	0.6441	0.4110
2.0		4.9534	2.8833	1.9098	3.9451	1.5979	1.0176	3.5647	1.4210	0.9129

(c) lnTEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5
0.3		0.0942	0.0850	0.0771	0.0896	0.0701	0.0558	0.0891	0.0656	0.0492
1.2		1.9608	1.3035	0.9284	1.6430	0.7414	0.4850	1.5519	0.6503	0.4117
2.0		7.7650	3.7776	2.2385	5.8004	1.6830	1.0312	5.3133	1.4481	0.9153

(d) gBEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5
0.3		0.0867	0.0790	0.0725	0.0833	0.0676	0.0555	0.0835	0.0647	0.0500
1.2		1.3028	0.9972	0.7905	1.2154	0.7314	0.5059	1.1848	0.6805	0.4517
2.0		3.4800	2.3830	1.6958	3.1428	1.6981	1.0906	3.0285	1.6128	1.0145

(e) igBEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5
0.3		0.0867	0.0790	0.0725	0.0833	0.0676	0.0555	0.0835	0.0647	0.0500
1.2		1.3028	0.9972	0.7905	1.2154	0.7314	0.5059	1.1848	0.6805	0.4517
2.0		3.4800	2.3830	1.6958	3.1428	1.6981	1.0906	3.0285	1.6128	1.0145

Table 17: rHMSE₁ under various approximation methods for negative binomial distribution with Gamma prior

(a) gTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0920	0.0852	0.0733	0.0882	0.0719	0.0563	0.0870	0.0691	0.0515
1.2			1.4334	1.1279	0.8117	1.3207	0.8030	0.5420	1.2785	0.7350	0.5002
2.0			3.8176	2.6976	1.9491	3.5487	2.0219	1.3834	3.5247	1.8995	1.2224

(b) igTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0873	0.0818	0.0709	0.0838	0.0691	0.0546	0.0826	0.0662	0.0498
1.2			1.3187	1.0652	0.7886	1.2196	0.7546	0.5194	1.1732	0.6890	0.4759
2.0			3.5254	2.5423	1.9058	3.2640	1.9044	1.3324	3.2481	1.7777	1.1648

(c) lnTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0873	0.0818	0.0709	0.0838	0.0691	0.0546	0.0826	0.0662	0.0498
1.2			1.3192	1.0655	0.7905	1.2197	0.7556	0.5189	1.1737	0.6882	0.4753
2.0			3.5075	2.5373	1.8981	3.2636	1.8964	1.3250	3.2519	1.7686	1.1562

(d) gBEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0874	0.0818	0.0709	0.0838	0.0692	0.0546	0.0825	0.0663	0.0498
1.2			1.3213	1.0706	0.7909	1.2236	0.7591	0.4942	1.1704	0.6901	0.4482
2.0			3.5038	2.4260	1.8396	3.2803	1.6912	1.1224	3.2660	1.6336	0.9035

(e) igBEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0874	0.0818	0.0709	0.0838	0.0692	0.0546	0.0825	0.0663	0.0498
1.2			1.3213	1.0706	0.7909	1.2236	0.7591	0.4942	1.1704	0.6901	0.4482
2.0			3.5038	2.4260	1.8396	3.2803	1.6912	1.1224	3.2660	1.6336	0.9035

Table 18: rHMSE₁ under various approximation methods for negative binomial distribution with log-normal prior

(a) gTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0888	0.0828	0.0719	0.0857	0.0686	0.0535	0.0845	0.0653	0.0495
1.2			1.4350	1.1023	0.7983	1.2946	0.7436	0.4875	1.2682	0.7015	0.4672
2.0			3.9829	2.7449	1.8549	3.4666	1.8257	1.1683	3.3465	1.6264	1.0215

(b) igTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0839	0.0793	0.0698	0.0810	0.0659	0.0520	0.0798	0.0626	0.0479
1.2			1.2709	1.0326	0.7693	1.1577	0.6971	0.4681	1.1280	0.6556	0.4453
2.0			3.5450	2.5798	1.8011	3.0961	1.7000	1.1124	2.9702	1.5001	0.9727

(c) lnTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0839	0.0794	0.0698	0.0810	0.0659	0.0520	0.0798	0.0626	0.0479
1.2			1.2795	1.0384	0.7715	1.1625	0.6978	0.4681	1.1325	0.6560	0.4453
2.0			3.6223	2.6021	1.8078	3.1232	1.7001	1.1109	2.9968	1.5018	0.9707

(d) gBEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0839	0.0790	0.0695	0.0810	0.0659	0.0520	0.0799	0.0626	0.0480
1.2			1.2602	1.0151	0.7603	1.1642	0.7152	0.4833	1.1379	0.6797	0.4611
2.0			3.4850	2.5297	1.7881	3.1035	1.7448	1.1287	2.9953	1.6044	1.0699

(e) igBEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0839	0.0790	0.0695	0.0810	0.0659	0.0520	0.0799	0.0626	0.0480
1.2			1.2602	1.0151	0.7603	1.1642	0.7152	0.4833	1.1379	0.6797	0.4611
2.0			3.4850	2.5297	1.7881	3.1035	1.7448	1.1287	2.9953	1.6044	1.0699

Table 19: rHMSE₁ under various approximation methods for negative binomial distribution with Inverse Gaussian prior

(a) gTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0911	0.0820	0.0740	0.0866	0.0665	0.0532	0.0851	0.0615	0.0469
1.2			1.2528	0.9603	0.7653	1.1353	0.6944	0.4990	1.1163	0.6124	0.4144
2.0			3.3063	2.3006	1.7137	2.9612	1.6369	1.0439	2.8558	1.4887	0.9059

(b) igTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.1086	0.0965	0.0854	0.1028	0.0752	0.0568	0.1008	0.0681	0.0486
1.2			1.5544	1.1137	0.8419	1.3254	0.7010	0.4920	1.2650	0.5993	0.4022
2.0			3.9899	2.5757	1.8336	3.2653	1.6077	1.0177	3.0418	1.4303	0.8729

(c) lnTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.1120	0.0993	0.0874	0.1059	0.0770	0.0574	0.1039	0.0695	0.0488
1.2			1.8004	1.2188	0.8881	1.4895	0.7156	0.4944	1.4119	0.6042	0.4028
2.0			5.0957	2.9249	1.9650	3.8375	1.6416	1.0242	3.4910	1.4407	0.8747

(d) gBEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0863	0.0789	0.0722	0.0829	0.0672	0.0550	0.0821	0.0634	0.0495
1.2			1.2550	0.9656	0.7740	1.1446	0.7163	0.5172	1.1174	0.6328	0.4373
2.0			3.2781	2.2965	1.7375	2.9567	1.7279	1.0959	2.8659	1.6423	0.9560

(e) igBEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0863	0.0789	0.0722	0.0829	0.0672	0.0550	0.0821	0.0634	0.0495
1.2			1.2550	0.9656	0.7740	1.1446	0.7163	0.5172	1.1174	0.6328	0.4373
2.0			3.2781	2.2965	1.7375	2.9567	1.7279	1.0959	2.8659	1.6423	0.9560

Table 20: rHMSE₁ under various approximation methods for negative binomial distribution with Weibull prior

(a) gTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0072	0.0066	0.0061	0.0385	0.0315	0.0259	0.0538	0.0417	0.0323
1.2			0.2023	0.1598	0.1310	0.6808	0.4194	0.3005	0.8358	0.4928	0.3240
2.0			0.7344	0.5241	0.3988	1.9399	1.0558	0.7151	2.2145	1.1872	0.7783

(b) igTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0076	0.0069	0.0064	0.0407	0.0323	0.0262	0.0567	0.0424	0.0322
1.2			0.2368	0.1745	0.1373	0.7695	0.4186	0.2928	0.9360	0.4780	0.3141
2.0			0.9106	0.5706	0.4148	2.2938	1.0451	0.6996	2.5610	1.1397	0.7508

(c) lnTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0079	0.0071	0.0065	0.0415	0.0326	0.0263	0.0576	0.0426	0.0322
1.2			0.3640	0.2201	0.1533	0.9541	0.4319	0.2944	1.1249	0.4833	0.3146
2.0			2.3775	0.9386	0.5164	3.9024	1.1014	0.7047	4.1978	1.1591	0.7510

(d) gBEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0072	0.0066	0.0061	0.0384	0.0315	0.0263	0.0539	0.0421	0.0329
1.2			0.2024	0.1611	0.1328	0.6870	0.4324	0.3092	0.8490	0.5051	0.3446
2.0			0.7319	0.5379	0.3996	1.9735	1.1403	0.7519	2.3082	1.2963	0.8285

(e) igBEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0072	0.0066	0.0061	0.0384	0.0315	0.0263	0.0539	0.0421	0.0329
1.2			0.2049	0.1621	0.1334	0.6894	0.4327	0.3096	0.8488	0.5050	0.3451
2.0			0.7446	0.5427	0.4014	1.9789	1.1401	0.7524	2.3012	1.2956	0.8292

Table 21: rHMSE₂ under various approximation methods for negative binomial distribution with Gamma prior

(a) gTEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5
0.3		0.0093	0.0087	0.0075	0.0442	0.0362	0.0285	0.0589	0.0472	0.0352
1.2		0.3169	0.2623	0.1926	0.8407	0.5228	0.3614	0.9816	0.5745	0.3993
2.0		1.1564	0.8815	0.6787	2.4982	1.4794	1.0582	2.8828	1.6006	1.0473
(b) igTEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5
0.3		0.0089	0.0084	0.0073	0.0422	0.0350	0.0277	0.0561	0.0454	0.0341
1.2		0.3017	0.2522	0.1897	0.7906	0.4947	0.3481	0.9121	0.5420	0.3810
2.0		1.1155	0.8470	0.6717	2.3424	1.4043	1.0238	2.6951	1.5068	1.0009
(c) lnTEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5
0.3		0.0089	0.0084	0.0073	0.0422	0.0349	0.0277	0.0561	0.0454	0.0341
1.2		0.3019	0.2525	0.1910	0.7903	0.4955	0.3475	0.9120	0.5409	0.3804
2.0		1.1011	0.8428	0.6657	2.3401	1.3962	1.0166	2.6968	1.4973	0.9923
(d) gBEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5
0.3		0.0089	0.0084	0.0073	0.0422	0.0350	0.0278	0.0561	0.0454	0.0342
1.2		0.3033	0.2546	0.1909	0.7939	0.4989	0.3234	0.9087	0.5422	0.3531
2.0		1.0983	0.7466	0.6162	2.3562	1.1953	0.8178	2.7090	1.3618	0.7406
(e) igBEA										
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9		
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5
0.3		0.0089	0.0084	0.0073	0.0422	0.0350	0.0278	0.0561	0.0454	0.0342
1.2		0.3036	0.2548	0.1908	0.7943	0.4990	0.3235	0.9089	0.5423	0.3532
2.0		1.0991	0.7464	0.6157	2.3577	1.1957	0.8179	2.7100	1.3621	0.7407

Table 22: rHMSE₂ under various approximation methods for negative binomial distribution with log-normal prior

(a) gTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0082	0.0077	0.0067	0.0415	0.0335	0.0262	0.0562	0.0436	0.0333
1.2			0.2465	0.1977	0.1501	0.7634	0.4548	0.3061	0.9349	0.5347	0.3641
2.0			0.9416	0.6899	0.4943	2.2609	1.2643	0.8254	2.5984	1.3216	0.8470

(b) igTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0079	0.0075	0.0066	0.0396	0.0325	0.0256	0.0535	0.0421	0.0323
1.2			0.2332	0.1943	0.1497	0.7071	0.4339	0.2971	0.8522	0.5054	0.3489
2.0			0.9042	0.6783	0.4923	2.0955	1.1939	0.7912	2.3673	1.2295	0.8105

(c) lnTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0079	0.0075	0.0066	0.0396	0.0325	0.0256	0.0535	0.0421	0.0323
1.2			0.2376	0.1979	0.1513	0.7094	0.4343	0.2972	0.8543	0.5054	0.3488
2.0			0.9415	0.6914	0.4967	2.1091	1.1931	0.7895	2.3823	1.2303	0.8083

(d) gBEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0079	0.0074	0.0065	0.0397	0.0325	0.0256	0.0535	0.0421	0.0325
1.2			0.2312	0.1910	0.1475	0.7146	0.4502	0.3104	0.8611	0.5267	0.3626
2.0			0.8905	0.6656	0.4935	2.1053	1.2298	0.8020	2.3910	1.3225	0.9013

(e) igBEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0079	0.0074	0.0065	0.0396	0.0325	0.0256	0.0535	0.0421	0.0325
1.2			0.2309	0.1907	0.1474	0.7151	0.4506	0.3106	0.8622	0.5273	0.3628
2.0			0.8881	0.6657	0.4935	2.1089	1.2318	0.8026	2.3957	1.3246	0.9019

Table 23: rHMSE₂ under various approximation methods for negative binomial distribution with Inverse Gaussian prior

(a) gTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0066	0.0060	0.0054	0.0374	0.0292	0.0238	0.0524	0.0384	0.0297
1.2			0.1893	0.1497	0.1222	0.6292	0.4066	0.3042	0.7907	0.4507	0.3161
2.0			0.7091	0.5168	0.3932	1.8611	1.0951	0.7199	2.1697	1.1889	0.7397

(b) igTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0078	0.0069	0.0062	0.0440	0.0326	0.0252	0.0616	0.0421	0.0307
1.2			0.2188	0.1628	0.1282	0.7051	0.4042	0.2986	0.8710	0.4393	0.3068
2.0			0.7839	0.5398	0.4003	1.9618	1.0651	0.6986	2.2464	1.1427	0.7130

(c) lnTEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0086	0.0076	0.0066	0.0466	0.0340	0.0256	0.0646	0.0435	0.0310
1.2			0.3228	0.1994	0.1410	0.8496	0.4153	0.2999	1.0130	0.4437	0.3072
2.0			1.3467	0.6749	0.4375	2.4695	1.0878	0.7014	2.6802	1.1504	0.7140

(d) gBEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0062	0.0058	0.0053	0.0358	0.0296	0.0247	0.0507	0.0397	0.0314
1.2			0.1906	0.1526	0.1274	0.6394	0.4221	0.3173	0.7929	0.4648	0.3326
2.0			0.7129	0.5234	0.4186	1.8746	1.1760	0.7624	2.1955	1.3285	0.7785

(e) igBEA											
Var(x)	λ	0.1			0.5			0.9			
		τ	1	5	10	1	5	10	1	5	10
0.3			0.0063	0.0058	0.0053	0.0359	0.0296	0.0246	0.0507	0.0396	0.0314
1.2			0.1924	0.1534	0.1279	0.6405	0.4223	0.3176	0.7922	0.4647	0.3330
2.0			0.7198	0.5259	0.4203	1.8767	1.1767	0.7630	2.1910	1.3287	0.7791

Table 24: rHMSE₂ under various approximation methods for negative binomial distribution with Weibull prior