Kapitel 0

Definition 0.1 (Topologie): Sei X eine Menge. Eine Familie $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt **Topologie** auf X, falls gilt:
1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,
2. $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$, d.h. $\mathcal{T}$ ist abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten
3. $A_i \in \mathcal{T} \Rightarrow \cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$, d.h. $\mathcal{T}$ ist abgeschlossen unter beliebigen Vereinigungen.

Ein Element $O \in \mathcal{T}$ heißt dann **offene Menge**.

Definition 0.2 (Punkte, Begriffe): Sei $S \subseteq X$, $p \in X$. Der Punkt p heißt
- **innerer Punkt** von S, falls gilt: $\exists O \in \mathcal{T} : p \in O$ und $O \subseteq S$,
- **äußerer Punkt** von S, falls gilt: $\exists O \in \mathcal{T} : p \in O$ und $O \subseteq X \setminus S$,
- **Randpunkt** von S, falls gilt: $\forall O \in \mathcal{T}$ mit $p \in O : O \cap S \neq \emptyset$ und $O \cap S^c \neq \emptyset$,
- **Häufungspunkt** von S, falls gilt: $\forall O \in \mathcal{T}$ mit $p \in O : O \setminus \{p\} \cap S \neq \emptyset$.

Proposition 0.1: p ist Randpunkt von S genau dann wenn p weder innerer Punkt noch äußerer Punkt von S ist.

Beweis: Siehe Notizen PDF Expert. ■

Definition 0.3 (Mengen, Begriffe): Sei $S \subseteq X$.
- $S^o := \{p \in X : p \text{ ist innerer Punkt von } S\}$ heißt **Inneres** von S,
- $\text{Ext}(S) := \{p \in X : p \text{ ist äußerer Punkt von } S\}$ heißt **Äußeres** von S,
- $\partial S := \{p \in X : p \text{ ist Randpunkt von } S\}$ heißt **Rand** von S,
- $\overline{S} := S \cup \partial S$ heißt **Abschluss** von S.

Beispiel 0.1: $X = \mathbb{R}, \mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) | a \in \mathbb{R}\}$. Betrachte $S = (0, 1)$:
- Ist keine offene Menge,
- hat keine inneren Punkte, d.h. $S^o = \emptyset$,
- $\text{Ext}(S) = (1, \infty)$
- $\partial S = (-\infty, 1]$

Definition 0.4 (Konvergenz einer Folge): Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X. Die Folge heißt **konvergent** gegen $a \in X$, falls:

$$\forall O \in \mathcal{T} \text{ mit } a \in \mathcal{T} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : \quad a_n \in O.$$

In Worten: jede offene Menge, die a enthält, enthält auch fast alle Folgenglieder a_n. Wir nennen a einen **Grenzwert** der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und schreiben $a_n \to a$.

Bemerkung 0.1: Mit dieser Definition ist der Grenzwert i.Allg. **nicht eindeutig**! Wir betrachten dazu das Beispiel von vorher: Sei $X = \mathbb{R}, \mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) | a \in \mathbb{R}\}$. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.
Wir sehen:
- $a_n \to 0$,
- $a_n \to -1$,
- $a_n \to a$ mit $a \leq 0$,

d.h. der Grenzwert ist nicht eindeutig! Um das zu berücksichtigen definieren wir folgenden Begriff:

Definition 0.5 (Hausdorffraum): Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **Hausdorffraum** falls gilt:

$$\text{Für alle } x, y \in X \text{ mit } x \neq y \text{ gibt es offene Umgebungen } U, V \text{ von } x, y \text{ mit } U \cap V = \emptyset$$

Satz 0.1 (Eindeutigkeit des Grenzwerts in Hausdorffräumen): Sei $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorffraum. Dann sind Folgengrenzwerte eindeutig.

Beweis: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $a_n \to a$. Angenommen $a_n \to b$, $a \neq b$. Da $a_n \to a$, enthält eine beliebige offene Umgebung von a fast alle Folgenglieder a_n. Da $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff ist, gibt es offene Umgebungen U, V von a, b mit $U \cap V = \emptyset$. U enthält fast alle Folgenglieder von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und wegen $U \cap V = \emptyset$ kann V nicht fast alle Folgenglieder von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ enthalten. Das ist ein Widerspruch zu $a_n \to b$. ■