ÓPTIMO LOCAL

Una función de dos variables *f(x,y)*, tiene un máximo local en $(a,b)\in D$ si $f(x,y)\leq f(a,b)$ en todos los puntos (x,y) en algún entorno con centro (a,b).

En ese caso, a $f(a,b)$ se le llama máximo local o relativo.

Si $f(x,y)\geq f(a,b)$ para todo punto (x,y) en dicho entorno, entonces $f(a,b)$ es un mínimo local o relativo.

Si las desigualdades de la definición anterior se cumplen para todos los puntos (x,y) en el dominio de f, entonces f tiene un máximo absoluto o mínimo absoluto en (a,b).

CONDICIÓN NECESARIA

Sea $f: D\subset R^2 \to R$ una función derivable tal que en $P=(a,b)\in D$, f tiene un extremo local (máximo o mínimo), entonces

$$\frac{\partial f(P)}{\partial x}=0 \text{ y } \frac{\partial f(P)}{\partial y}=0$$

Los puntos P en donde $\nabla f(P)=0$ se conocen como puntos críticos.

Definición: Si $f: D\subset R^2 \to R$ y $P=(a,b)\in D$, entonces si $\nabla f(P)=0$ o $\nabla f(P)$ no existe, decimos que P es un punto crítico o punto estacionario.

CONDICIÓN SUFICIENTE

Cálculo práctico de los extremos relativos

Sea $f: D\subset R^2 \to R$ una función derivable tal que $P=(a,b)\in D$ es un punto crítico.

Se forma la matriz hessiana:

$$H=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \text{ (matriz simétrica)}$$

y se calcula el valor del determinante: $\det[Hf(x,y)]=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2$

el cual se evalúa en cada uno de los puntos críticos (candidatos)

a) Si $\det\left[Hf(P)\right]>0$, P es un

- máximo cuando $\dfrac{\partial^2 f(P)}{\partial x^2}<0$
- mínimo cuando $\dfrac{\partial^2 f(P)}{\partial x^2}>0$

b) Si $\det\left[Hf(P)\right]<0$, no hay extremo en P (punto de ensilladura).

c) Si $\det\left[Hf(P)\right]=0$, caso dudoso (P puede ser extremo o no).