Capítulo 1

Álgebras de Boole.

1.1. Álgebras de Boole

Comenzamos este curso estudiando una estructura algebraica conocida como *Álgebra de Boole*. El nombre de la estructura se debe al matemático británico George Boole que vivió en el siglo XIX y que en su trabajo *The Laws of Thought* (Las leyes del pensamiento), publicado en 1854, presentó esta estructura. En este trabajo pone de manifiesto la analogía existente entre los símbolos algebraicos y las maneras de representar formas lógicas. Sin embargo, la primera persona que intentó combinar las matemáticas y la lógica fue Leibniz (el que desarrolló las base del cálculo diferencial e integral a la par que Newton). Él esperaba obtener la verdad o falsedad de cualquier afirmación, en cualquier disciplina científica, mediante operaciones algebraicas. Sin embargo, no obtuvo resultados relevantes. Posteriormente, y antes que Boole, Augustus de Morgan también buscó una fusión entre el álgebra y la lógica.

En el trabajo que hemos mencionado (y cuyo título completo es *Una investigación de las leyes del pensamiento en las que se basan las teorías matemáticas de la lógica y las probabilidades*), Boole transformó la lógica en un tipo de álgebra (álgebra de Boole). Según el propio autor:

> El propósito de este tratado es investigar las leyes fundamentales de la mente mediante las que se lleva a cabo el razonamiento, expresarlas en el lenguaje simbólico del Cálculo y, sobre estos cimientos, establecer la ciencia de la lógica y construir su método...

Vamos pues a estudiar brevemente esta estructura.

1.1.1. Generalidades sobre álgebras de Boole

Definición 1. *Sea B un conjunto. Decimos que B tiene estructura de álgebra de Boole si en B tenemos definidas dos operaciones, $\vee$ y $\wedge$ tales que:*

- *Para cualesquiera $x, y, z \in B$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$; $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ (Asociatividad).*
- *Para cualesquiera $x, y \in B$, $x \vee y = y \vee x$; $x \wedge y = y \wedge x$ (Conmutatividad).*
- *Para cualesquiera $x, y, z \in B$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$; $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ (Distributividad).*
- *Existen $0, 1 \in B$ tales que para cualquier $x \in B$, $x \vee 0 = x$ y $x \wedge 1 = x$ (Elementos neutros).*
- *Para cada $x \in B$ existe $\overline{x} \in B$ tal que $x \vee \overline{x} = 1$ y $x \wedge \overline{x} = 0$ (Complementario).*

Veamos algunos ejemplos de álgebras de Boole.

Ejemplo 1.1.1.

1. *Sea X un conjunto. Entonces el conjunto $\mathcal{P}(X)$ tiene estructura de álgebra de Boole. Las operaciones $\vee$ y $\wedge$ son en este caso la unión y la intersección respectivamente. Los elementos 0 y 1 son $\emptyset$ y X.*

2. *Sea $\mathbb{B} = \{0, 1\}$. Este conjunto tiene estructura de álgebra de Boole. Las operaciones $\vee$ y $\wedge$ vienen descritas en las siguientes tablas:*

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

mientras que $\overline{0} = 1$ y $\overline{1} = 0$.

Si $X = \{a\}$, compara las álgebras de Boole $\mathcal{P}(X)$ y $\mathbb{B}$.

3. *Consideramos ahora el conjunto $\mathbb{B}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_i \in \mathbb{B}\}$. Este conjunto tiene también estructura de álgebra de Boole. Las operaciones $\vee$ y $\wedge$ vienen dadas por:*

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \vee (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, \cdots, x_n \vee y_n)$$
$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \wedge (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, \cdots, x_n \wedge y_n)$$

Los elementos cero y uno vienen dados por $\mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0)$ y $\mathbf{1} = (1, 1, \cdots, 1)$, mientras que el complementario por $\overline{(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_n})$.

Por ejemplo, en $\mathbb{B}^3$ se tiene que $(0,1,0) \vee (1,1,0) = (1,1,0)$, $(1,1,0) \wedge (1,0,1) = (1,0,0)$, $\overline{(0,1,1)} = (1,0,0)$.

4. *El conjunto de los divisores de 30, es decir, el conjunto $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ con las operaciones $x \vee y = mcm(x, y)$ y $x \wedge y = mcd(x, y)$ es un álgebra de Boole. Los elementos cero y uno son, en este caso, 1 y 30, y el complementario de un elemento x, el número $\frac{30}{x}$.*

El conjunto $D(20) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$, con las operaciones anteriores, no es un álgebra de Boole. Un motivo podría ser que no existe $x \in D(20)$ tal que $mcd(2,x) = 1$ y $mcm(2, x) = 20$.

5. *Consideramos en el conjunto $D = \{0, a, b, c, 1\}$ las siguientes operaciones:*

$\vee$	0	a	b	c	1
0	0	a	b	c	1
a	a	a	1	1	1
b	b	1	b	1	1
c	c	1	1	c	1
1	1	1	1	1	1

$\wedge$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	0	a
b	0	0	b	0	b
c	0	0	0	c	c
1	0	a	b	c	1

El conjunto D, con estas operaciones, no es un álgebra de Boole. Podemos verlo, por ejemplo, comprobando que:

$$a \vee (b \wedge c) = a \vee 0 = a; \qquad (a \vee b) \wedge (a \vee c) = 1 \wedge 1 = 1$$

El resto de axiomas que definen un álgebra de Boole si se satisfacen en este conjunto D.

Observaciones:

Los símbolos que hemos utilizado para las operaciones de un álgebra de Boole, aunque están bastante extendidos no son los únicos que se emplean. Veamos algunas notaciones diferentes.

1. Para los símbolos $\vee$ y $\wedge$, es bastante usual emplear los símbolos $+$ y $\cdot$. En tal caso, las dos propiedades distributivas quedarían $x\cdot(y+z) = (x\cdot y)+(x\cdot z)$ y $x+(y\cdot z) = (x+y)\cdot(x+z)$.

2. Para representar el complementario de un elemento x, en lugar de $\overline{x}$ también es frecuente utilizar la notación x' o $\neg x$.
3. Otra notación para las operaciones $x \vee y$, $x \wedge y$, $\overline{x}$ bastante extendida es x OR y, x AND y y NOT x. En tal caso, los elementos distinguidos 0 y 1 pueden ser denotados como F y V (o F y T, si se trata de un texto inglés).

Propiedades:
Supongamos que B es un álgebra de Boole, y x, y, z elementos de B. Entonces:

1. $x \vee x = x$; $x \wedge x = x$ (Idempotencia).
2. $x \vee 1 = 1$; $x \wedge 0 = 0$ (Dominación).
3. $x \vee (x \wedge y) = x$; $x \wedge (x \vee y) = x$ (Absorción).
4. $\left.\begin{array}{c} x \vee y = x \vee z \\ x \wedge y = x \wedge z \end{array}\right\} \Longrightarrow y = z$ (Propiedad cancelativa).
5. $\overline{\overline{x}} = x$ (Doble complementario).
6. $x \vee (\overline{x} \wedge y) = x \vee y$; $x \wedge (\overline{x} \vee y) = x \wedge y$.
7. $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$; $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$ (Leyes de De Morgan).
8. Son equivalentes:
   a) $x \vee y = y$.
   b) $x \wedge y = x$.
   c) $\overline{x} \vee y = 1$.
   d) $x \wedge \overline{y} = 0$.

Vamos a hacer una demostración de estas propiedades. Para ello, usaremos, bien igualdades que tenemos en la definición de álgebra de Boole, bien propiedades que ya hemos demostrado.

1. $x = x \vee 0 = x \vee (x \wedge \overline{x}) = (x \vee x) \wedge (x \vee \overline{x}) = (x \vee x) \wedge 1 = x \vee x$.
   $x = x \wedge 1 = x \wedge (x \vee \overline{x}) = (x \wedge x) \vee (x \wedge \overline{x}) = (x \wedge x) \vee 0 = x \wedge x$.
2. $x \vee 1 = x \vee (x \vee \overline{x}) = (x \vee x) \vee \overline{x} = x \vee \overline{x} = 1$.
   $x \wedge 0 = x \wedge (x \wedge \overline{x}) = (x \wedge x) \wedge \overline{x} = x \wedge \overline{x} = 0$.
3. $x = x \wedge 1 = x \wedge (\overline{y} \vee y) = (x \wedge \overline{y}) \vee (x \wedge y) = (x \wedge \overline{y}) \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge y) = [x \wedge (\overline{y} \vee y)] \vee (x \wedge y) = (x \wedge 1) \vee (x \wedge y) = x \vee (x \wedge y)$
   $x = x \vee 0 = x \vee (\overline{y} \wedge y) = (x \vee \overline{y}) \wedge (x \vee y) = (x \vee \overline{y}) \wedge (x \vee y) \wedge (x \vee y) = [x \vee (\overline{y} \wedge y)] \wedge (x \vee y) = (x \vee 0) \wedge (x \vee y) = x \wedge (x \vee y)$
4. $y = y \vee (x \wedge y) = y \vee (x \wedge z) = (y \vee x) \wedge (y \vee z) = (z \vee x) \wedge (z \vee y) = z \vee (x \wedge y) = z \vee (x \wedge z) = z$.
5. $\left.\begin{array}{c} 1 = \overline{x} \vee x = \overline{x} \vee \overline{\overline{x}} \\ 0 = \overline{x} \wedge x = \overline{x} \wedge \overline{\overline{x}} \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \overline{\overline{x}}$.
6. $x \vee (\overline{x} \wedge y) = (x \vee \overline{x}) \wedge (x \vee y) = 1 \wedge (x \vee y) = x \vee y$.
   $x \wedge (\overline{x} \vee y) = (x \wedge \overline{x}) \vee (x \wedge y) = 0 \vee (x \wedge y) = x \wedge y$.
7. $\left.\begin{array}{l} (x \vee y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y}) = (x \vee y \vee \overline{x}) \wedge (x \vee y \vee \overline{y}) = (1 \vee y) \wedge (x \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1 = (x \vee y) \vee (\overline{x \vee y}) \\ (x \vee y) \wedge (\overline{x} \wedge \overline{y}) = (x \wedge \overline{x} \wedge \overline{y}) \vee (y \wedge \overline{x} \wedge \overline{y}) = (0 \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0 = (x \vee y) \wedge (\overline{x \vee y}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$.
   $\left.\begin{array}{l} (x \wedge y) \vee (\overline{x} \vee \overline{y}) = (x \vee \overline{x} \vee \overline{y}) \wedge (y \vee \overline{x} \vee \overline{y}) = (1 \vee \overline{y}) \wedge (\overline{x} \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1 = (x \wedge y) \vee (\overline{x \wedge y}) \\ (x \wedge y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y}) = (x \wedge y \wedge \overline{x}) \vee (x \wedge y \wedge \overline{y}) = (0 \wedge y) \vee (x \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0 = (x \wedge y) \wedge (\overline{x \wedge y}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$.
8. $a) \Longrightarrow b)$ $x = x \vee 0 = x \vee (y \wedge \overline{y}) = (x \vee y) \wedge (x \vee \overline{y}) = y \wedge (x \vee \overline{y}) = y \wedge x = x \wedge y$.
   $b) \Longrightarrow c)$ $1 = \overline{x} \vee x = \overline{x} \vee (x \wedge y) = \overline{x} \vee (\overline{\overline{x}} \wedge y) = \overline{x} \vee y$.
   $c) \Longrightarrow d)$ $0 = \overline{1} = \overline{\overline{x} \vee y} = x \wedge \overline{y}$.
   $d) \Longrightarrow a)$ $y = y \vee 0 = y \vee (\overline{y} \wedge x) = y \vee x = x \vee y$.

Observación:

En la definición de álgebra de Boole, el axioma quinto nos dice que para cada elemento x existe otro elemento $\overline{x}$ que satisface dos propiedades: $x \vee \overline{x} = 1$ y $x \wedge \overline{x} = 0$. El axioma no nos dice que no pueda haber más elementos que cumplan esa propiedad. Ahora, con la propiedad cancelativa (que acabamos de demostrar) podemos ver que sólo puede haber un elemento satisfaciendo estas dos propiedades. Esto permite *ponerle nombre* a este elemento, y el nombre que elegimos es el de *el complemento* de x (si pudiera haber más de un elemento con esta propiedad, en lugar de hablar del el complemento de x habría que decir "un complemento de x").

En el ejemplo 1.1.1 definimos dos operaciones en el conjunto $D = \{0, a, b, c, 1\}$ y vimos como este conjunto no es un álgebra de Boole. Podemos ver como el elemento a tiene dos complementos, ya que b es un complemento de a ($a \vee b = 1$; $a \wedge b = 0$) y c también ($a \vee c = 1$; $a \wedge c = 0$). Es claro entonces que en este conjunto, no es cierta la propiedad cancelativa tal y como la hemos visto aquí.

Si nos fijamos en los axiomas que definen a un álgebra de Boole, así como en estas propiedades que hemos deducido de los axiomas, podemos apreciar que normalmente van por parejas. Esto se conoce como *principio de dualidad.*

Principio de dualidad.

Dado un enunciado en un álgebra de Boole, el enunciado que resulta de intercambiar los símbolos $\vee$ y $\wedge$, así como 0 y 1 se conoce como enunciado dual.

Si un teorema es cierto para álgebras de Boole, entonces su teorema dual también lo es.

Por ejemplo, el enunciado dual de $x \vee 1 = 1$ es $x \wedge 0 = 0$. Puesto que $x \vee 1 = 1$ es cierto en cualquier álgebra de Boole, su dual también lo es.

El enunciado dual de la ley $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$ es $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$. Al ser cierto uno de ellos, lo es automáticamente el otro.

A partir de dos (o más) álgebras de Boole, podemos obtener una nueva álgebra de Boole sin más que realizar el producto cartesiano.

Proposición 1.1.1. *Sean $(B_1, \vee_1, \wedge_1)$ y $(B_2, \vee_2, \wedge_2)$ dos álgebras de Boole. Entonces el conjunto $B_1 \times B_2$ con las operaciones*

$$(x, y) \vee (x', y') = (x \vee_1 x', y \vee_2 y'); \qquad (x, y) \wedge (x', y') = (x \wedge_1 x', y \wedge_2 y')$$

tiene estructura de álgebra de Boole.

Este álgebra de Boole se conoce como *álgebra de Boole producto* de las álgebras B_1 y B_2. Fácilmente puedes ser generalizado a un producto de tres o más álgebras de Boole.

La demostración de esta proposición es totalmente rutinaria.

Ejemplo 1.1.2.

En el ejemplo 1.1.1 vimos que $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ es un álgebra de Boole. Si hacemos el álgebra producto de el álgebra $\mathbb{B}$ consigo misma, obtenemos el álgebra de Boole $\mathbb{B}^2$, que también estudiamos en el mismo ejemplo. De hecho, vimos que el conjunto $\mathbb{B}^n$ tiene estructura de álgebra de Boole.

Una estructura de álgebra de Boole en un conjunto B determina un orden en este conjunto.

Teorema 1.1.1. *Sea $(B, \vee, \wedge)$ un álgebra de Boole. Definimos en B la siguiente relación:*

$$x \leq y \text{ si, y sólo si, } x \vee y = y$$

Esta relación es una relación de orden en B.

Además, dados dos elementos $x, y \in B$ se tiene que $sup\{x, y\} = x \vee y$ e $inf\{x, y\} = x \wedge y$.

Y este conjunto ordenado tiene máximo y mínimo, que son 1 y 0 respectivamente.

Nota:

La propiedad número 8 que hemos visto nos dice que cualquiera de las siguientes tres definiciones habrían valido para definir el orden en B.

$x \leq y$ si, y sólo si, $x \wedge y = x$.

$x \leq y$ si, y sólo si, $\overline{x} \vee y = 1$.

$x \leq y$ si, y sólo si, $x \wedge \overline{y} = 0$.

Y en cualquiera de los casos habríamos definido la misma relación que hemos dado en el teorema.

Ejemplo 1.1.3.

Vamos a ver cuál es el orden que se induce en las álgebras de Boole estudiadas en el ejemplo 1.1.1.

1. *El primer ejemplo que tenemos es el álgebra de Boole $\mathcal{P}(X)$, donde X es un conjunto cualquiera. El orden viene dado por:*

$$A \leq B \text{ si, y sólo si, } A \cup B = B$$

y esto significa que $A \subseteq B$. Es decir, el orden inducido por la estructura de álgebra de Boole es el orden dado por la inclusión.

2. *El segundo ejemplo es el álgebra de Boole $\mathbb{B}$. Puesto que $0 \vee 1 = 1$, el orden es $0 \leq 1$.*

3. *El tercer ejemplo es $\mathbb{B}^n$. Aquí podemos ver que el orden viene dado por:*

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq (y_1, y_2, \cdots, y_n) \text{ si, y sólo si, } x_1 \leq y_1,\ x_2 \leq y_2, \cdots, x_n \leq y_n$$

es decir, el orden producto.

4. *En el ejemplo de los divisores de 30 el orden sería $x \leq y$ si, y sólo si, $mcm(x, y) = y$, lo cual ocurre cuando y es múltiplo de x. Es decir, el orden es el dado por la divisibilidad.*

Demostración: Vamos a dar una demostración del teorema 1.1.1. Para esto, hemos de demostrar varias cosas:

- La relación definida es una relación de orden.
  Esto a su vez requiere demostrar tres pequeños apartados:
  - La relación es reflexiva (para todo $x \in B$ se tiene que $x \leq x$).
    Dado $x \in B$ se tiene que $x \vee x = x$, luego $x \leq x$.
  - La relación es antisimétrica (si $x \leq y$ e $y \leq x$ entonces $x = y$).
    Si $x \leq y$ e $y \leq x$ se tiene que $x \vee y = y$ y que $y \vee x = x$. Por tanto, $x = y$.
  - La relación es transitiva (si $x \leq y$ e $y \leq z$ entonces $x \leq z$).
    Si $x \leq y$ entonces $x \vee y = y$, y si $y \leq z$ entonces $y \vee z = z$. En tal caso, $x \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = y \vee z = z$, luego $x \leq z$.
- El supremo del conjunto $\{x, y\}$ es $x \vee y$.
  Esto, a su vez, lo dividimos en varias etapas.
  - $x \vee y$ es cota superior de x e y. Dicho de otra forma, $x \leq x \vee y$ e $y \leq x \vee y$.
    - $x \vee (x \vee y) = (x \vee x) \vee y = x \vee y$, es decir, $x \leq x \vee y$.
    - $y \vee (x \vee y) = (y \vee y) \vee x = y \vee x = x \vee y$, es decir, $y \leq x \vee y$.
  - $x \vee y$ es la menor de las cotas superiores. Es decir, si z fuera una cota superior de x e y entonces $x \vee y \leq z$.
    Dicho de otra forma, hemos de ver que si $x \leq z$ e $y \leq z$, entonces $(x \vee y) \vee z = z$.
    Pero si $x \vee z = z$ e $y \vee z = z$ se tiene que $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee z = z$.
- El ínfimo del conjunto $\{x, y\}$ es $x \wedge y$.
  Esto se demuestra de forma análoga al apartado precedente, pero usando una definición equivalente de orden ($x \leq y$ si, y sólo si, $x \wedge y = x$).

- El máximo del conjunto B es 1, y el mínimo del conjunto B es 0.

  Esto es lo mismo que demostrar que para cualquier $x \in B$ se tiene que $x \leq 1$ y que $0 \leq x$, es decir, $x \vee 1 = 1$ y $0 \vee x = x$, lo cual sabemos que es cierto.

■

Observaciones:

Este último teorema nos dice que todo álgebra de Boole es un conjunto ordenado. Por tanto, todo lo que tenemos para conjuntos ordenados lo podemos trasladar ahora a este contexto de álgebras de Boole.

Es más, el orden determina completamente la estructura del álgebra de Boole, pues a partir de la relación de orden podemos obtener las operaciones $\vee$ y $\wedge$ (tenemos que $x \vee y = \sup\{x, y\}$ y $x \wedge y = \inf\{x, y\}$, como hemos visto).

Esto no significa que todo conjunto ordenado $(X, \leq)$ sea un álgebra de Boole. Por ejemplo, hemos visto que el conjunto de los divisores de 20, con el orden dado por la divisibilidad no es un álgebra de Boole. Para que un conjunto ordenado sea álgebra de Boole, deben satisfacerse algunas condiciones adicionales. Estas condiciones serían las siguientes:

- El conjunto X tiene máximo (que llamaremos 1) y mínimo (que llamaremos 0).

- Dados $x, y \in X$, el conjunto $\{x, y\}$ tiene supremo (denotado como $x \vee y$) e ínfimo (denotado como $x \wedge y$).

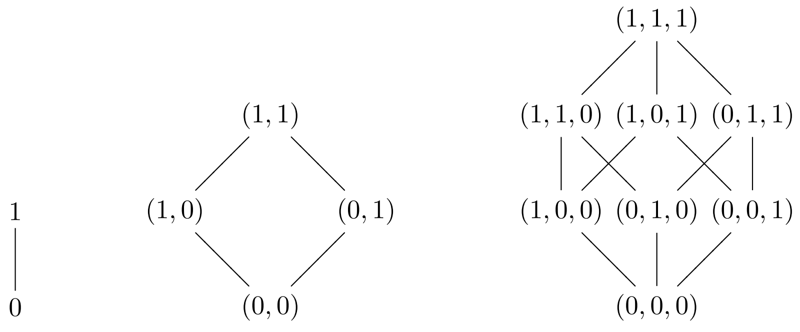
- Las operaciones supremo e ínfimo son distributivas una con respecto a la otra.

- Cualquier elemento $x \in X$ tiene un complemento (es decir, un elemento $y \in X$ tal que $x \vee y = 1$ y $x \wedge y = 0$).

Una forma de representar un conjunto ordenado finito es a través de su diagrama de Hasse. Vamos a dar a continuación el diagrama de Hasse de algunas álgebras de Boole.

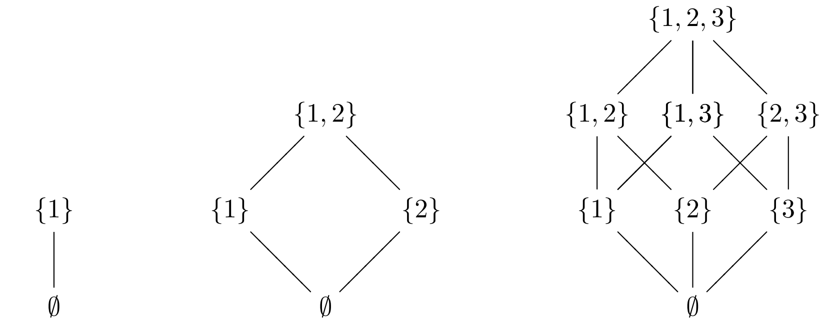
Ejemplo 1.1.4.

1. *Vamos a dibujar el diagrama de Hasse de las álgebras* $\mathbb{B}$, $\mathbb{B}^2$ *y* $\mathbb{B}^3$.



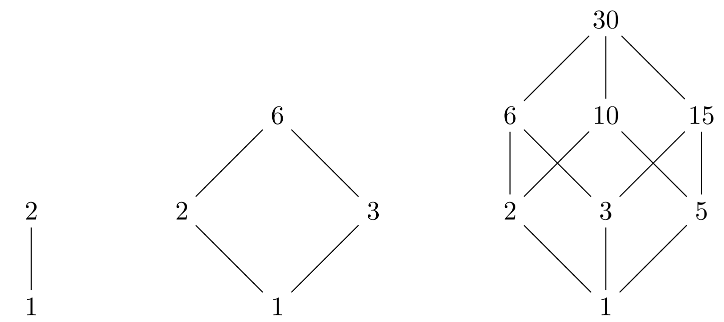
$\mathbb{B}$ $\qquad$ $\mathbb{B}^2$ $\qquad$ $\mathbb{B}^3$

2. *A continuación, dibujamos los diagramas de Hasse de las álgebras de Boole* $\mathcal{P}(X)$ *para* $X = \{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$.



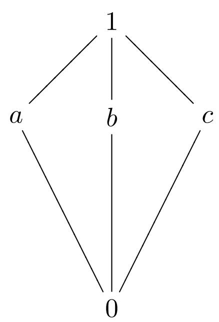
$\mathcal{P}(\{1\})$ $\mathcal{P}(\{1,2\})$ $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$

3. *Tomamos ahora los números* $n = 2, 6, 30$ *y hacemos el diagrama de Hasse del conjunto de los divisores de* n.



$D(2)$ $D(6)$ $D(30)$

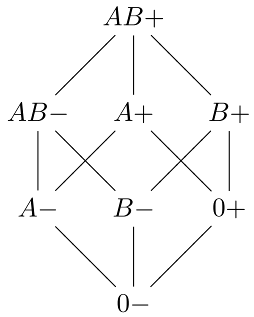
4. *Las operaciones* $\vee$ *y* $\wedge$ *definidas en el conjunto* $D = \{0, a, b, c, 1\}$, *aunque no dan estructura de álgebra de Boole al conjunto* D *sí dan un orden en este conjunto. El diagrama de Hasse de este conjunto ordenado sería:*



Este conjunto ordenado se conoce como el diamante. *Es otro ejemplo de un conjunto ordenado que no determina un álgebra de Boole.*

5. *Vamos a tomar dos álgebras de Boole, con 2 y 4 elementos. Estas son* $B_1 = \{-, +\}$ *y* $B_2 = \{0, A, B, AB\}$. *Los diagramas de Hasse de estas dos álgebras de Boole son semejantes a los de* $\mathbb{B}$ *y*

$\mathbb{B}^2$. Hacemos el producto cartesiano de ambas álgebras de Boole, y dibujamos su diagrama de Hasse.



Lo que nos resulta son los 8 grupos sanguíneos que tenemos las personas. El orden, en este caso, significa "poder donar" Así, por ejemplo, el grupo $0-$ es el donante universal, pues puede dar a cualquier persona, mientras que el grupo $AB+$ es el receptor universal, pues puede recibir sangre de cualquier donante sano.

Proponemos aquí un sencillo ejercicio.

Ejercicio 1.1.1. *Sea B un álgebra de Boole, y sean $x, y, z \in B$ tales que $x \leq y$. Demuestra que $x \vee z \leq y \vee z$ y que $x \wedge z \leq y \wedge z$.*

En los ejemplos que acabamos de ver, podemos apreciar el "parecido" entre las álgebras de Boole $\mathbb{B}$, $\mathcal{P}(\{1\})$ y $D(2)$, así como entre $\mathbb{B}^2$, $\mathcal{P}(\{1,2\})$ y $D(6)$ o entre $\mathbb{B}^3$, $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ y $D(30)$. De hecho, podemos ver que son iguales excepto en el nombre de los elementos. Todo lo que digamos para el álgebra $\mathbb{B}^3$ vale tanto para $\mathcal{P}(\{1,2,3\}$ como para $D(30)$. Estas álgebras de Boole se dice que son *isomorfas*

Si B y B' son dos álgebras de Boole, un isomorfismo entre ambas es una aplicación biyectiva $f : B_1 \to B_2$ tal que $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ y $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

Dos álgebras de Boole se dicen isomorfas si hay un isomorfismo entre ellas.

En el ejemplo anterior hemos visto que las álgebras de Boole $\mathbb{B}$, $\mathcal{P}(\{1\})$ y $D(2)$ son isomorfas. También son isomorfas $\mathbb{B}^2$, $\mathcal{P}(\{1,2\})$ y $D(6)$, o las álgebras $\mathbb{B}^3$, $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ y $D(30)$.

Por ejemplo, un isomorfismo entre las álgebras $\mathbb{B}^3$ y $D(30)$ podría ser la aplicación $f : \mathbb{B}^3 \to D(30)$ dada por $f(x, y, z) = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$.

Esto que ocurre en estos ejemplos, es general. Si B es un álgebra de Boole finita (con un número finito de elementos), entonces el número de elementos de B es una potencia de 2. Por tanto, $|B| = 2^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. En tal caso, B es isomorfa al álgebra de Boole $\mathbb{B}^n$, o al álgebra $\mathcal{P}(\{1, 2, \cdots, n\})$ (o $\mathcal{P}(X)$ con X un conjunto cualquiera con n elementos), o $D(m)$, donde m es un número que es producto de n primos distintos.

Esto último vamos a darlo con más precisión. Para eso, vamos a introducir algunos conceptos elementales. En lo que sigue, cuando hablemos de un álgebra de Boole, daremos por sobreentendida la relación de orden que definimos en el enunciado del teorema 1.1.1.

Definición 2. *Sea B un álgebra de Boole y $x \in B$. Se dice que x es un átomo si x es un elemento minimal de $B \setminus \{0\}$.*

Nota: Si $(X, \leq)$ es un conjunto ordenado que tiene mínimo (que llamaremos 0), podemos también definir los átomos de X como los elementos minimales del conjunto $X \setminus \{0\}$.

Ejemplo 1.1.5.

Si X es un conjunto, los átomos del álgebra de Boole $\mathcal{P}(X)$ son los subconjuntos unitarios.
Los átomos del álgebra de Boole $\mathbb{B}^n$ son aquellos que tienen todas las coordenadas nulas salvo una.
En el álgebra de Boole $D(30)$ los átomos son los divisores primos de 30.

El concepto dual de átomo es el de *coátomo*. Define dicho concepto, y calcula los coátomos de las álgebras de Boole que hemos visto hasta el momento.

Teorema 1.1.2. *Sea B un álgebra de Boole finita, y $x \in B \setminus \{0\}$. Entonces, x se expresa de forma única como supremo de átomos.*

Antes de demostrar el teorema, veamos el siguiente lema:

Lema 1.1.1. *Sea B un álgebra de Boole finita y $x \in B \setminus \{0\}$. Entonces existe $a \in B$, átomo, y tal que $a \leq x$.*

Demostración: Basta tomar el conjunto $A_x = \{y \in B : 0 < y \leq x\}$, que es distinto del vacío (pues x es un elemento suyo). Se tiene que un elemento minimal de A_x (que existe por ser A_x finito) es un átomo de B. ■

Dado cualquier elemento $x \in B \setminus \{0\}$, denotaremos por $\mathcal{A}_x$ al conjunto de todos los átomos de B que son menores o iguales que x.

Ejemplo 1.1.6.

1. *Dada el álgebra de Boole $\mathbb{B}^5$, y el elemento $x = (0,1,1,0,1) \in \mathbb{B}^5$, el conjunto $\mathcal{A}_x$ es igual a $\{(0,1,0,0,0);\ (0,0,1,0,0);\ (0,0,0,0,1)\}$. Es decir, todos los átomos que son menores o iguales que x.*
2. *En el álgebra de Boole $D(2310)$, tomamos $x = 110$. Entonces $\mathcal{A}_x = \{2,5,11\}$, es decir, los divisores primos de x.*

Demostración:(teorema 1.1.2)
Supongamos que $\mathcal{A}_x = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Sea entonces $z = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_m$. Comprobemos que $z = x$.
Puesto que $a_i \leq x$ se tiene que $z \leq x$ (pues $z = \sup\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$). Supongamos que $z \neq x$.
Por ser $z \leq x$ se tiene que $\overline{z} \vee x = 1$. Si $\overline{z} \wedge x = 0$, tendríamos que $x = \overline{\overline{z}} = z$, lo cual estamos suponiendo que no es cierto. Por tanto, $\overline{z} \wedge x \neq 0$.
Sea a un átomo menor o igual que $\overline{z} \wedge x$. Entonces, $a \leq x$, luego $a = a_i$ para algún i. Supongamos que $a = a_1$. En ese caso, se tiene que:

$$0 = \overline{z} \wedge z = \overline{z} \wedge (a_1 \vee \cdots \vee a_m) \geq a \wedge (a_1 \vee \cdots \vee a_m) = (a \wedge a_1) \vee (a \wedge a_2) \vee \cdots \vee (a \wedge a_m) = a_1,$$

lo cual no es posible.
Deducimos por tanto que $z = x$, es decir, x se expresa como supremo de átomos.

Supongamos ahora que podemos expresar x como supremo de átomos de la forma $x = b_1 \vee \cdots \vee b_k$. Entonces $b_i \leq x$, luego $b_i \in \mathcal{A}_x$. Por tanto, $\{b_1, \cdots, b_k\} \subseteq \mathcal{A}_x$. Si la inclusión fuera estricta, debería haber un elemento en $\mathcal{A}_x$ que no perteneciera a $\{b_1, \cdots, b_k\}$. Supongamos que este elemento es a_m. Entonces:

$$a_m = x \wedge a_m = (b_1 \vee b_2 \vee \cdots b_k) \wedge a_m = (b_1 \wedge a_m) \vee (b_2 \wedge a_m) \vee \cdots \vee (b_k \wedge a_m) = 0 \vee 0 \vee \cdots \vee 0 = 0.$$

■

Este teorema nos dice que si B es un álgebra de Boole finita, y $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ son sus átomos (es decir, $X = \mathcal{A}_1$) entonces los elementos de B son:

$$B = \left\{ \bigvee_{x \in A} x :\ A \in \mathcal{P}(X) \right\},$$

donde se ha empleado la notación $0 = \bigvee_{x \in \emptyset} x$.

Vemos entonces que B tiene tantos elementos como $\mathcal{P}(X)$. Por tanto, el número de elementos de B es 2^n, donde n es el número de átomos. Es más, tenemos que las álgebras de Boole B, $\mathbb{B}^n$ y $\mathcal{P}(X)$ son isomorfas. A continuación damos explícitamente cuál sería el isomorfismo $f : \mathcal{P}(X) \to B$ y su inverso $f^{-1} : B \to \mathcal{P}(X)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \xrightarrow{f} & B \\ A & \mapsto & \bigvee\limits_{x\in A} x \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f^{-1}} & \mathcal{P}(X) \\ x & \mapsto & \mathcal{A}_x \end{array}$$

Nota:

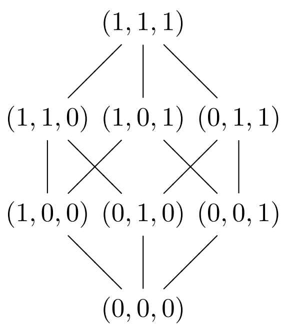
Para álgebras de Boole no finitas, el resultado no es cierto. Como ejemplo, tomamos la siguiente álgebra de Boole.

Sea $\mathcal{I}$ el conjunto de todos los intervalos reales de la forma $[a, b)$, de la forma $(-\infty, b)$ o $[a, +\infty)$. Sea B el conjunto de todas las uniones finitas de elementos de $\mathcal{I}$. Entonces B es un álgebra de Boole (con las operaciones unión e intersección). Este álgebra de Boole, por ejemplo, no tiene átomos.

Veamos a continuación que nos dice el teorema anterior en algunos de los ejemplos de álgebras de Boole que hemos ido estudiando.

Ejemplo 1.1.7.

1. *Consideramos el álgebra de Boole* $\mathbb{B}^3$.

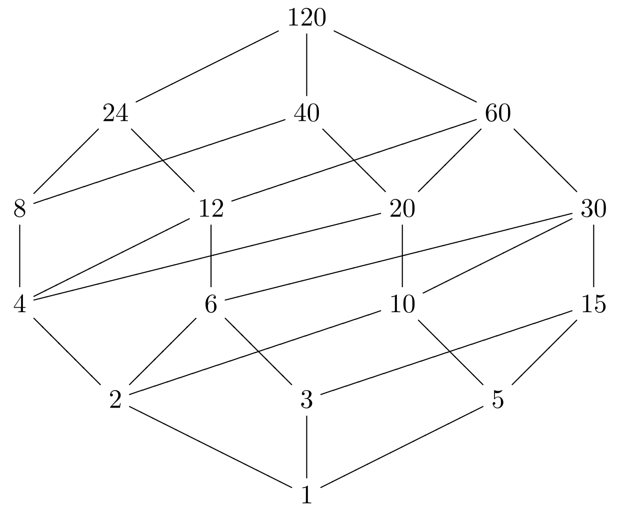


Vemos que los átomos son $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ *y* $(0, 0, 1)$. *Si tomamos cualquier elemento distinto de* $(0, 0, 0)$, *por ejemplo,* $(1, 0, 1)$ *podemos comprobar fácilmente que se puede expresar como supremo de átomos. En este caso,* $(1, 0, 1) = (1, 0, 0) \vee (0, 0, 1)$.

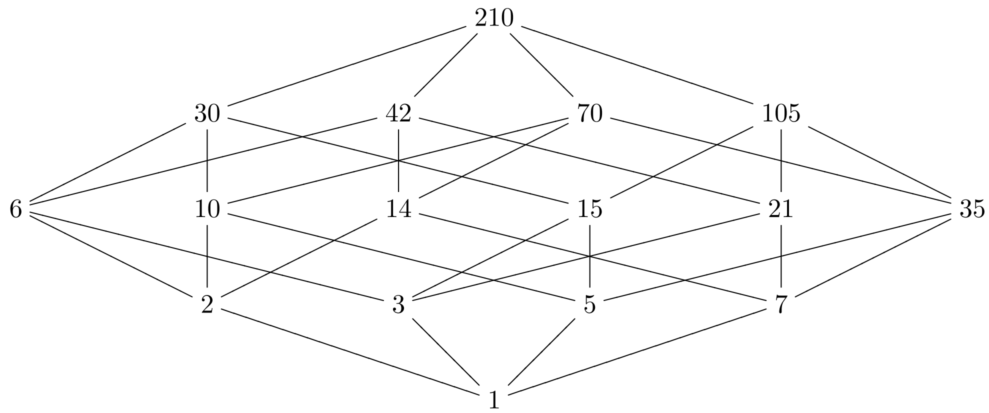
Con cualquier otro elemento podríamos hacer lo mismo.

2. *Sean ahora los conjuntos ordenados $D(120)$ y $D(210)$, cuyos diagramas de Hasse son:*

$D(120)$



$D(210)$



Los átomos del primer conjunto ordenado serían los elementos $2, 3, 5$. Si tomamos por ejemplo el elemento 30 vemos que podemos ponerlo como supremo de átomos, pues $30 = 2 \vee 3 \vee 5$. Pero, por ejemplo, si tomamos $x = 20$ vemos que no podemos ponerlo como supremo de átomos. Los átomos que son menores que 20 son 2 y 5, y como podemos comprobar, $2 \vee 5 = 10 \neq 20$.

Por tanto, aquí hay elementos que no se pueden poner como supremo de átomos. Esto nos dice que $D(120)$ no es un álgebra de Boole.

Los átomos del segundo conjunto son $2, 3, 5, 7$. Podemos tomar cualquier elemento distinto de 1, y comprobar que puede expresarse como supremo de átomos. Por ejemplo: $42 = 2 \vee 3 \vee 7$, $35 = 5 \vee 7$, $105 = 3 \vee 5 \vee 7$.

El conjunto de los divisores de 210 es un álgebra de Boole.

3. *En el conjunto $D = \{0, a, b, c, 1\}$ los átomos son a, b y c. Aquí todo elemento salvo el cero se puede escribir como supremo de átomos. Sin embargo, la forma de escribirlo no es única. Por ejemplo, se tiene que $1 = a \vee b = a \vee c = b \vee c = a \vee b \vee c$. Es decir, hemos encontrado cuatro formas distintas de escribir 1 como supremo de átomos.*

El teorema 1.1.2 tiene su enunciado dual, que dice que si B es un álgebra de Boole finita, y $x \in B$ es un elemento distinto de 1, entonces x se expresa de forma única como ínfimo de coátomos.

Toma algunos ejemplos de álgebras de Boole (por ejemplo, $\mathbb{B}^4$, $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\})$ o $D(2310)$. Calcula sus coátomos. Elige algunos elementos de estas álgebras de Boole y trata de expresarlos como ínfimo de coátomos.

1.1.2. Funciones y expresiones booleanas

En esta sección vamos a estudiar las funciones booleanas en n variables. Veremos que el conjunto de estas funciones tiene estructura de álgebra de Boole.

Identificaremos los átomos de este álgebra de Boole, a los que llamaremos minterm (o minitérminos). El teorema 1.1.2, aplicado a este álgebra de Boole nos dará la denominada forma normal canónica disyuntiva de una función booleana, y tendremos una expresión para cada función booleana. Posteriormente estudiaremos como simplificar esta expresión.

Nota importante:

En lo que sigue, vamos a cambiar la notación que hemos empleado para álgebras de Boole. En lugar de denotar a las operaciones booleanas como $\vee$ y $\wedge$, las denotaremos como $+$ y $\cdot$ (mantenemos la misma notación para el complementario). Si escribimos las tablas de estas operaciones para el álgebra de Boole $\mathbb{B}$, tenemos (ver ejemplo 1.1.1):

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Y hemos de tener cuidado en no confundirlas con las operaciones suma y producto en $\mathbb{Z}_2$. Para el producto no hay problema, pues el producto en el anillo $\mathbb{Z}_2$ coincide con el producto booleano en $\mathbb{B}$, pero para la suma ambas operaciones difieren. En $\mathbb{Z}_2$, el resultado de $1+1$ es 0, mientras que en el álgebra de Boole $\mathbb{B}$, tenemos que $1+1=1$. Por tanto, cuando estemos hablando de la operación $+$, debe quedar claro si nos referimos a la suma booleana o a la suma algebraica.

Para referirnos al producto booleano también emplearemos la yuxtaposición.

Comenzamos definiendo las funciones booleanas.

Definición 3. *Una función booleana con n variables es una aplicación $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$.*
Denotaremos por $\mathcal{F}_n$ al conjunto de las funciones booleanas con n variables. Es decir:

$$\mathcal{F}_n = \{f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B} \quad f \text{ es aplicación}\}.$$

Ejemplo 1.1.8.

1. *La aplicación $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ dada por $f(0) = 1$; $f(1) = 0$ es una función booleana en 1 variable (es decir, un elemento de $\mathcal{F}_1$. Esta aplicación responde a la expresión $f(x) = \overline{x}$.*

2. *Sea $f : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ la aplicación $f(x, y) = x + y$. Entonces f es una aplicación booleana en 2 variables ($f \in \mathcal{F}_2$). Esta aplicación, elemento a elemento es:*

$$(0,0) \mapsto 0, \qquad (1,0) \mapsto 1, \qquad (0,1) \mapsto 1, \qquad (1,1) \mapsto 1.$$

Definición 4. *Dadas $f, g : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ (es decir, $f, g \in \mathcal{F}_n$), definimos las funciones $f + g : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ y $f \cdot g : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ como sigue:*

$$f + g(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + g(x_1, \ldots x_n),$$

$$f \cdot g(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) \cdot g(x_1, \ldots x_n).$$

Es fácil comprobar que estas operaciones convierten a $\mathcal{F}_n$ en un álgebra de Boole.

Las funciones constantes *cero* y *uno* son los dos elementos neutros, mientras que el complementario de una función $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ viene dado por la función $\overline{f} : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$

$$\overline{f}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \overline{f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}.$$

El orden que se deduce de esta estructura de álgebra de Boole viene dado por $f \leq g$ (para $f, g \in \mathcal{F}_n$) si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq g(x_1, x_2, \ldots x_n)$ para todo $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}^n$.

Los átomos de este álgebra de Boole son las aplicaciones que valen 1 en un elemento de $\mathbb{B}^n$, y 0 en el resto. Puesto que en $\mathbb{B}^n$ hay 2^n elementos, tenemos que $\mathcal{F}_n$ tiene 2^n átomos, lo que nos dice que $\mathcal{F}_n$ tiene 2^{2^n} elementos.

Ejemplo 1.1.9.

1. *El álgebra $\mathcal{F}_1$ tiene $2^2 = 4$ elementos. Éstos son:*

$$\begin{array}{cccc} 0 \mapsto 0 & 0 \mapsto 0 & 0 \mapsto 1 & 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 0 & 1 \mapsto 1 & 1 \mapsto 0 & 1 \mapsto 1. \end{array}$$

Los átomos son las aplicaciones segunda y tercera.

2. *El álgebra $\mathcal{F}_2$ tiene 4 átomos, y por tanto 16 elementos. Los átomos son:*

$$\begin{array}{cccc} (0,0) \mapsto 1 & (0,0) \mapsto 0 & (0,0) \mapsto 0 & (0,0) \mapsto 0 \\ (1,0) \mapsto 0 & (1,0) \mapsto 1 & (1,0) \mapsto 0 & (1,0) \mapsto 0 \\ (0,1) \mapsto 0 & (0,1) \mapsto 0 & (0,1) \mapsto 1 & (0,1) \mapsto 0 \\ (1,1) \mapsto 0 & (1,1) \mapsto 0 & (1,1) \mapsto 0 & (1,1) \mapsto 1. \end{array}$$

1.1.3. Expresiones booleanas

Definición 5. *Sea S un conjunto. Se definen las expresiones booleanas sobre el conjunto S de forma recursiva como sigue:*

1. *Si $x \in S \cup \{0, 1\}$ entonces x es una expresión booleana.*

2. *Si e_1, e_2 son expresiones booleanas, entonces también lo son $e_1 + e_2$, $e_1 \cdot e_2$ y $\overline{e_1}$.*

A las expresiones booleanas que sean elementos de S, o complementos suyos, los denominaremos literales.

Ejemplo 1.1.10.
Si $S = \{x, y, z\}$ son expresiones booleanas x, $x + z$, $\overline{x \cdot \overline{y}}$, 1.
Son literales, x, $\overline{z}$, z.

Supongamos que tenemos un conjunto S con n elementos, es decir, $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. A cada elemento de S le vamos a asignar un elemento de $\mathcal{F}_n$. Concretamente, al elemento x_i le asignamos la función $x_i : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ dada por $x_i(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n) = a_i$. De esta forma, a cada expresión booleana sobre el conjunto S le podemos hacer corresponder una función $\mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$.

Por ejemplo, si $S = \{x, y, z\}$ y consideramos la expresión booleana $x + (\overline{y} \cdot z)$, le corresponde la función booleana

$$\begin{array}{ll} (0,0,0) \mapsto 0 + (1 \cdot 0) = 0, & (0,0,1) \mapsto 0 + (1 \cdot 1) = 1, \\ (0,1,0) \mapsto 0 + (0 \cdot 0) = 0, & (0,1,1) \mapsto 0 + (0 \cdot 1) = 0, \\ (1,0,0) \mapsto 1 + (1 \cdot 0) = 1, & (1,0,1) \mapsto 1 + (1 \cdot 1) = 1, \\ (1,1,0) \mapsto 1 + (0 \cdot 0) = 1, & (1,1,1) \mapsto 1 + (0 \cdot 1) = 1. \end{array}$$

Puesto que cada expresión booleana determina una función booleana, podremos referirnos a las funciones mencionando las expresiones que las representan. Así, la función que acabamos de ver podría definirse como $f(x, y, z) = x + (\overline{y} \cdot z)$. Ahora, para calcular la imagen de un elemento de $\mathbb{B}^3$ basta sustituir en la expresión booleana x, y y z por los valores en los que queremos evaluar, y efectuar las operaciones en el álgebra de Boole $\mathbb{B}$. Por ejemplo

$$f(0,0,1) = 0 + (\overline{0} \cdot 1) = 0 + (1 \cdot 1) = 0 + 1 = 1.$$

Nótese que en el Ejemplo 1.1.8 ya se ha empleado esta forma de definir una función booleana.

Definición 6. *Dos expresiones booleanas son equivalentes si las correspondientes funciones booleanas son iguales. Si e_1 e e_2 son expresiones booleanas equivalentes emplearemos el símbolo $e_1 = e_2$.*

Ejemplo 1.1.11. *Las expresiones booleanas $\overline{x} \cdot \overline{y}$ y $\overline{x + y}$ son equivalentes. También lo son las expresiones $x + y + \overline{x}\,\overline{y}$ y 1.*

A continuación vamos a dar una tabla de expresiones equivalentes.

Proposición 1.1.2. *Sean e_1, e_2 y e_3 tres expresiones booleanas en n variables. Entonces:*

1.	$e_1 + (e_2 + e_3) = (e_1 + e_2) + e_3$	$e_1 \cdot (e_2 \cdot e_3) = (e_1 \cdot e_2) \cdot e_3$
2.	$e_1 + e_2 = e_2 + e_1$	$e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1$
3.	$e_1 + e_1 = e_1$	$e_1 \cdot e_1 = e_1$
4.	$e_1 \cdot (e_2 + e_3) = e_1 \cdot e_2 + e_1 \cdot e_3$	$e_1 + (e_2 \cdot e_3) = (e_1 + e_2) \cdot (e_1 + e_3)$
5.	$\overline{e_1 + e_2} = \overline{e_1} \cdot \overline{e_2}$	$\overline{e_1 \cdot e_2} = \overline{e_1} + \overline{e_2}$
6.	$e_1 + \overline{e_1} = 1$	$e_1 \cdot \overline{e_1} = 0$
7.	$e_1 + 1 = 1$	$e_1 \cdot 0 = 0$
8.	$e_1 + 0 = e_1$	$e_1 \cdot 1 = e_1$
9.	$\overline{1} = 0$	$\overline{0} = 1$

Definición 7. *Un* minterm *o* minitérmino *en n variables es el producto de n literales, cada uno con una variable diferente.*

Ejemplo 1.1.12. *Si $S = \{x, y, z\}$, entonces son minterm $x\,y\,z$, $x\,\overline{y}\,\overline{z}$, $\overline{x}\,y\,z$. No son minterm $x\,y$, $x\,y\,\overline{y}$ ni $x\,z\,x$.*

Lema 1.1.2. *Sea m un minterm en n variables. Entonces m determina una función booleana $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ que vale 1 en un elemento de $\mathbb{B}^n$ y 0 en el resto.*

A esta función booleana la llamaremos también minterm.

Ejemplo 1.1.13. *Sea $f : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ la función booleana dada por $f(x, y) = x\,\overline{y}$. Claramente $x\,\overline{y}$ es un minterm. Se tiene que $f(1, 0) = 1$, mientras que $f(0, 0) = f(0, 1) = f(1, 1) = 0$.*

Corolario 1.1.1. *Los minterm son los átomos del álgebra $\mathcal{F}_n$.*

Corolario 1.1.2. *Toda función booleana se expresa de forma única (salvo el orden) como suma (supremo) de minterm.*

La expresión de una función booleana como suma de minterm recibe el nombre de *forma normal disyuntiva*. Para hallar la forma normal disyuntiva de una función booleana podemos emplear dos métodos.

El primero consiste en evaluar la función en todos los elementos de $\mathbb{B}^n$, y observar en cuales de ellos toma el valor 1. Cada uno de esos elementos se corresponde con un minterm.

El segundo consiste en, a partir de una expresión booleana que nos defina a f, utilizar las equivalencias dadas en la proposición 1.1.2 para transformar la expresión en una suma de minterm.

Ejemplo 1.1.14. *Dada la función booleana $f : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ dada por $f(x, y) = x + y$, vamos a expresarla como suma de minterm.*

1. *Si queremos emplear el primer método, evaluamos la función en los cuatro elementos de* $\mathbb{B}^2$*. Nos queda:*

$$f(0,0) = 0+0 = 0 \qquad f(0,1) = 0+1 = 1 \qquad f(1,0) = 1+0 = 1 \qquad f(1,1) = 1+1 = 1$$

   El elemento $(0,1)$ *se corresponde con el minterm* $\overline{x}\,y$*, el* $(1,0)$ *con* $x\,\overline{y}$ *mientras que* $(1,1)$ *se corresponde con* $x\,y$*. Por tanto tenemos que* $f(x,y) = \overline{x}\,y + x\,\overline{y} + x\,y$*.*

2. *Empleamos ahora el segundo método. En este caso*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x+y \\ &= x\cdot 1 + 1\cdot y && \textit{(equivalencias 8 y 2)} \\ &= x(y+\overline{y}) + (x+\overline{x})y && \textit{(equivalencia 6)} \\ &= x\,y + x\,\overline{y} + x\,y + \overline{x}\,y && \textit{(equivalencias 4 y 2)} \\ &= x\,y + x\,y + x\,\overline{y} + \overline{x}\,y && \textit{(equivalencia 2)} \\ &= x\,y + x\,\overline{y} + \overline{x}\,y && \textit{(equivalencia 3).} \end{aligned}$$

Cada elemento de $\mathbb{B}^n$ es una secuencia de n dígitos *ceros* o *unos*. Es por tanto, la expresión en binario de un número entre 0 y $2^n - 1$. Por otra parte, a cada elemento de $\mathbb{B}^n$ le corresponde un minterm (aquél para el que toma el valor 1). Vemos entonces que cada minterm está determinado por un número comprendido entre 0 y $2^n - 1$. Denotaremos por *el minterm a*, donde $0 \leq a \leq 2^{n-1}$, y lo representaremos como $m(a)$ o m_a, al minterm determinado por el número a siguiendo el criterio anterior.

Por ejemplo, el minterm $x\,y\,\overline{z}\,\overline{t}$ toma el valor 1 en $(1,1,0,0)$. Puesto que $12 = (1100)_2$ tenemos que $x\,y\,\overline{z}\,\overline{t}$ es el minterm 12, o dicho de otra forma, $x\,y\,\overline{z}\,\overline{t} = m_{12} = m(12)$.

Ejemplo 1.1.15.

1. *En un ejemplo anterior hemos expresado la función booleana* $f : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ *dada por* $f(x,y) = x+y$ *como suma de minterms, obteniéndose que* $f(x,y) = x\,y + x\,\overline{y} + \overline{x}\,y$*. Empleando la notación recién introducida nos quedaría* $f(x,y) = m_3 + m_2 + m_1$*, o si preferimos* $f(x,y) = m_1 + m_2 + m_3$*.*

   También se suele emplear la notación $f(x,y) = \sum m(1,2,3)$*.*

2. *Vamos a escribir los 16 elementos del álgebra de Boole* $\mathcal{F}_2$*:*

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

   Y vemos como:

   - $f_0 = \mathbf{0}$.
   - $f_1 = m_3$*, es decir,* $f_1(x,y) = x\,y$*.*
   - $f_2 = m_2$*, es decir,* $f_2(x,y) = x\,\overline{y}$*.*
   - $f_3 = m_2 + m_3$*, es decir,* $f_3(x,y) = x\,y + x\,\overline{y} = x$*.*
   - $f_4 = m_1$*, es decir,* $f_4(x,y) = \overline{x}\,y$*.*
   - $f_5 = m_1 + m_3$*, es decir,* $f_5(x,y) = \overline{x}\,y + x\,y = y$*.*
   - $f_6 = m_1 + m_2$*, es decir,* $f_6(x,y) = \overline{x}\,y + x\,\overline{y}$*.*
   - $f_7 = m_1 + m_2 + m_3$*, es decir,* $f_7(x,y) = \overline{x}\,y + x\,\overline{y} + x\,y = x+y$*.*
   - $f_8 = m_0$*, es decir,* $f_8(x,y) = \overline{x}\,\overline{y}$*.*
   - $f_9 = m_0 + m_3$*, es decir,* $f_9(x,y) = \overline{x}\,\overline{y} + x\,y$*.*
   - $f_{10} = m_0 + m_2$*, es decir,* $f_{10}(x,y) = \overline{x}\,\overline{y} + x\,\overline{y} = \overline{y}$*.*

- $f_{11} = m_0 + m_2 + m_3$, *es decir,* $f_{11}(x,y) = \overline{x}\,\overline{y} + x\,\overline{y} + x\,y = x + \overline{y}$.
- $f_{12} = m_0 + m_1$, *es decir,* $f_{12}(x,y) = \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}\,y = \overline{x}$.
- $f_{13} = m_0 + m_1 + m_3$, *es decir,* $f_{13}(x,y) = \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}\,y + x\,y = \overline{x} + y$.
- $f_{14} = m_0 + m_1 + m_2$, *es decir,* $f_{13}(x,y) = \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}\,y + x\,\overline{y} = \overline{x} + \overline{y}$.
- $f_{15} = \mathbf{1} = m_0 + m_1 + m_2 + m_3$.

El resultado dual de que toda función booleana se expresa de forma única como suma de minterm, es que toda función booleana se expresa de forma única como producto de maxterm. Un maxtern en n variables es una suma de n literales en los que no aparece ninguna variable repetida. Se corresponde con una función booleana que toma el valor 1 en todos los elementos de $\mathbb{B}^n$ salvo en uno. De forma análoga a como hemos hecho con los minterm, identificaremos un maxterm con el único elemento de $\mathbb{B}^n$ que se aplica en el cero. Si este elemento es la expresión binaria del número a, el maxterm será denotado como M_a.

De los 16 elementos de $\mathcal{F}_2$, son maxterm las funciones f_7, f_{11}, f_{13} y f_{14}. Con la notación que acabamos de introducir tenemos que $f_7 = M_0$, $f_{11} = M_1$, $f_{13} = M_2$ y $f_{14} = M_3$.

Se denomina *forma canónica conjuntiva* de una función booleana a la expresión de esta como producto de Maxterm. Por ejemplo, la forma canónica conjuntiva de la función f_5 es $f_5 = M_0 \cdot M_2 = (x+y)\cdot(\overline{x}+y)$.

Ejemplo 1.1.16.

Sea $f : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ *la función definida como* $f(x,y,z,t) = x\,\overline{y}\,\overline{(\overline{z}\,t)} + \overline{(z+\overline{t})(\overline{x}+y)}$. *Vamos a calcular su forma canónica conjuntiva y disyuntiva. Podemos hacerlo de varias formas.*

1. *Transformando la expresión que define a* f.

$$\begin{aligned}
f(x,y,z,t) &= x\,\overline{y}\,\overline{(\overline{z}\,t)} + \overline{(z+\overline{t})(\overline{x}+y)} \\
&= x\,\overline{y}(z+\overline{t}) + \overline{z+\overline{t}} + \overline{\overline{x}+y} \\
&= x\,\overline{y}\,z + x\,\overline{y}\,\overline{t} + \overline{z}\,t + x\,\overline{y} \\
&= x\,\overline{y}\,z(t+\overline{t}) + x\,\overline{y}(z+\overline{z})\overline{t} + (x+\overline{x})(y+\overline{y})\overline{z}\,t + x\,\overline{y}(z+\overline{z})(t+\overline{t}) \\
&= x\,\overline{y}\,z\,t + x\,\overline{y}\,z\,\overline{t} + x\,\overline{y}\,z\,\overline{t} + x\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} + x\,y\,\overline{z}\,t + x\,\overline{y}\,\overline{z}\,t + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,t + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,t + \\
&\quad + x\,\overline{y}\,z\,t + x\,\overline{y}\,\overline{z}\,t + x\,\overline{y}\,z\,\overline{t} + x\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t}
\end{aligned}$$

Y por tanto, $f = m_{11} + m_{10} + m_{10} + m_8 + m_{13} + m_9 + m_5 + m_1 + m_{11} + m_9 + m_{10} + m_8 = m_1 + m_5 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{13}$.

Una vez calculada la expresión de f *como suma de minterm, es fácil calcular su expresión como producto de maxterm, y tendríamos que*

$f = M_0 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_4 \cdot M_6 \cdot M_7 \cdot M_{12} \cdot M_{14} \cdot M_{15}$.

2. *Obteniendo la tabla de la función* f.

x	y	z	t	$\overline{z}\,t$	$\overline{\overline{z}\,t}$	$x\,\overline{y}$	$x\,\overline{y}(\overline{\overline{z}\,t})$	$z+\overline{t}$	$\overline{x}+y$	$(z+\overline{t})(\overline{x}+y)$	$\overline{(z+\overline{t})(\overline{x}+y)}$	f
0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0

Y a partir de la tabla, fijándonos en los unos *de la última columna tenemos los minterm que aparecen en la expresión de f (y que coinciden con los obtenidos anteriormente), y fijándonos en los* ceros *de esa columna obtenemos los maxterm.*

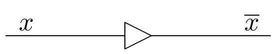
1.1.4. Puertas lógicas

Las funciones booleanas nos proporcionan un modelo matemático para el diseño de circuitos de dispositivos electrónicos. Fue Claude Shannon (el padre de la teoría de la información) quien en 1938, en su tesis doctoral, demostró como el álgebra de Boole podía ser empleada en el análisis de los circuitos digitales. Las entradas y/o salidas de estos circuitos podemos verlas como elementos del conjunto $\mathbb{B} = \{0, 1\}$.

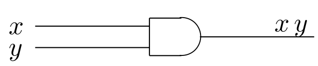
Los elementos básicos de estos circuitos se llaman *puertas lógicas*. Cada puerta implementa una operación booleana. Aquí emplearemos tres tipos de puertas lógicas, cada una correspondiente a cada una de las siguientes operaciones booleanas: suma, producto y complementario. Estas puertas las combinaremos para diseñar circuitos que realicen una serie de tareas. La salida de los circuitos que estudiemos no dependerá del estado del circuito, sino únicamente de los datos de entrada. Dicho de otra forma, nuestros circuitos no tienen memoria. Los circuitos así construidos se denominan *circuitos combinacionales.*

Como hemos dicho, vamos a emplear tres puertas lógicas. Éstas son:

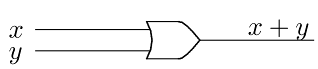
La puerta **NOT** (también llamada inversor) que tiene como entrada el valor de una variable booleana y produce como salida el complementario de dicho valor. Para una puerta NOT emplearemos el siguiente símbolo.



La puerta **AND** que tiene como entrada el valor de dos o más variables booleanas, y como salida el producto de éstas. Las entradas se muestran a la izquierda y la salida a la derecha. Emplearemos el siguiente símbolo para esta puerta.

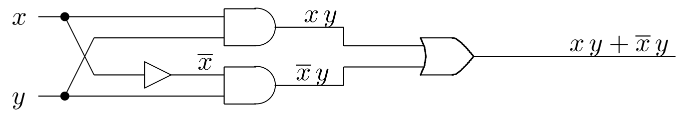


La puerta **OR** tiene como entrada el valor de dos o más variables booleanas, y como salida la suma de éstas. La representaremos mediante el siguiente símbolo.



Vamos a ver cómo combinar estas puertas para desarrollar diferentes circuitos.

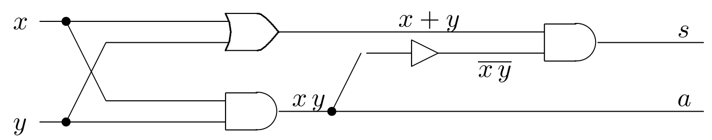
Ejemplo 1.1.17. *Comenzamos diseñando un circuito con dos entradas y que produzca la salida* $x\,y+\overline{x}\,y$.



Nótese que puesto que $x\,y+\overline{x}\,y=(x+\overline{x})y=1\cdot y=y$ *podría haberse diseñado un circuito mucho más simple que tuviera el mismo efecto.*

A continuación vamos a diseñar un circuito que, introducidos dos números en binario nos devuelve su suma.

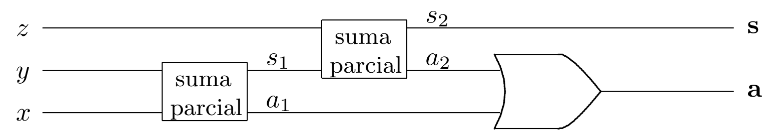
Para esto, comenzamos en primer lugar diseñando un circuito que, dados dos dígitos binarios nos devuelva la suma. Puesto que los posibles resultados de la suma son 0, 1 y 10 necesitamos un circuito que tenga dos salidas. Denotaremos el bit de la derecha como s (suma) y el de la izquierda como a (acarreo). Se tiene entonces que $s=\overline{x}\,y+x\,\overline{y}=(x+y)\overline{x\,y}$ mientras que $a=x\,y$. Un circuito podría ser entonces:



Denominaremos a este circuito como *suma parcial.*

Construyamos ahora un circuito que nos sume dos dígitos binarios más el posible acarreo de una suma anterior. Podemos ver fácilmente que esto es equivalente a sumar tres dígitos binarios x, y y z. El resultado será, como antes una salida doble. A las dos salidas las denotaremos de la misma forma que en el caso anterior: s y a.

Para obtener la salida s, obtenemos la suma de x e y, y al resultado le sumamos z. Puede verse entonces que un circuito que nos da la suma de tres dígitos sería:

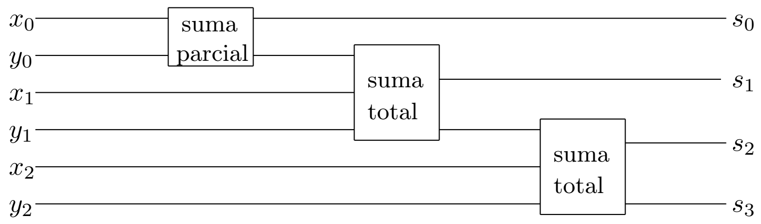


x	y	z	s_1	a_1	s_2	a_2	$\mathbf{s}$	$\mathbf{a}$	a_1+a_2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1	0	1	1	1

pues como podemos apreciar, $\mathbf{s}=s_2$ y $\mathbf{a}=a_1+a_2$.

Denotaremos a este circuito como *suma total.*

Veamos ahora como calcular la suma de dos números entre 0 y 7. Supongamos que estos números se escriben en binario como $x_2x_1x_0$ e $y_2y_1y_0$. Su suma, escrita en binario es $s_3s_2s_1s_0$.

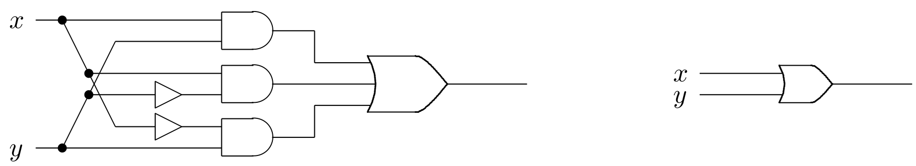


1.1.5. Optimización de funciones booleanas

Hemos visto en la subsección anterior como a partir de la representación de una función booleana en n variables haciendo uso de una expresión booleana podemos diseñar un circuito que nos devuelva el resultado de aplicar la función a las n variables.

Puesto que cualquier función booleana puede expresarse como suma de minterm, podemos diseñar cualquier circuito empleando las tres puertas NOT, OR y AND. Sin embargo, la expresión de una función como suma de minterm no es en general la más apropiada pues requiere de muchas operaciones, lo que se traduce en la necesidad de emplear gran cantidad de puertas.

Así, por ejemplo, los siguientes circuitos producen el mismo efecto sobre las entrada x, y.



pues el primer circuito responde a la función $x\,y + x\,\overline{y} + \overline{x}\,y$, mientras que el segundo a $x + y$, que vimos anteriormente que son iguales.

Lo que pretendemos es, a partir de una expresión de suma de minterm, transformarla en otra expresión equivalente con menos sumandos y menor productos en los sumandos. Vamos a estudiar dos métodos para este propósito. Por una parte, los mapas de Karnaugh, y por otra parte el método de Quine-McCluskey.

Referente al primero, decir que es un método eficiente para funciones de no más de cuatro variables, mientras que puede utilizarse hasta funciones de seis variables.

En cuanto al segundo, aunque realiza la optimización de forma automática, y podría implementarse como un programa informático, el algoritmo, para un número grande de variables booleanas, es computacionalmente muy costoso.

Mapas de Karnaugh

Vamos a comenzar con un ejemplo. Supongamos que tenemos la función booleana $f : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ siguiente:

$$f(x, y, z, t) = x\,y\,z\,t + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,t + x\,\overline{y}\,z\,t + x\,y\,\overline{z}\,t + \overline{x}\,\overline{y}\,z\,t + \overline{x}\,y\,z\,t$$

que podemos apreciar que está en forma normal disyuntiva. Sin embargo, vemos que tiene una expresión muy larga, lo que requiere muchos cálculos para evaluar la función.

Nuestro propósito es simplificar la expresión con la que calcular f.

Nos fijamos en los sumandos primero y último, es decir, $x\,y\,z\,t$ y $\overline{x}\,y\,z\,t$, y nos damos cuenta que la única diferencia estriba en que el primer sumando tiene al literal x, mientras que el segundo tiene al literal $\overline{x}$. Con esto, podemos agrupar estos dos sumandos:

$$x\,y\,z\,t + \overline{x}\,y\,z\,t = (x + \overline{x}) \cdot y\,z\,t = 1\,y\,z\,t = y\,z\,t$$

Por lo que la expresión de f se ve reducida, al sustituir el primer y último sumandos por $y\,z\,t$. Es decir, tenemos

$$f(x,y,z,t) = y\,z\,t + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,t + x\,\overline{y}\,z\,t + x\,y\,\overline{z}\,t + \overline{x}\,\overline{y}\,z\,t$$

Hacemos ahora lo mismo con el tercero y el último: $x\,\overline{y}\,z\,t + \overline{x}\,\overline{y}\,z\,t = (x+\overline{x}) \cdot \overline{y}\,z\,t = \overline{y}\,z\,t$, luego nos queda:

$$f(x,y,z,t) = y\,z\,t + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,t + \overline{y}\,z\,t + x\,y\,\overline{z}\,t$$

Y repetimos con el segundo y el último: $\overline{x}\,y\,\overline{z}\,t + x\,y\,\overline{z}\,t = (\overline{x}+x) \cdot y\,\overline{z}\,t = 1 \cdot y\,\overline{z}\,t = y\,\overline{z}\,t$, con lo que tenemos:

$$f(x,y,z,t) = y\,z\,t + y\,\overline{z}\,t + \overline{y}\,z\,t$$

Y ahora, dado que el primer y segundo sumando se diferencian únicamente en un literal podemos repetir el proceso: $y\,z\,t + y\,\overline{z}\,t = y \cdot (z+\overline{z}) \cdot t = y\,t$. De esta forma, la expresión de f nos queda:

$$f(x,y,z,t) = y\,t + \overline{y}\,z\,t$$

Notemos que si en la expresión $f(x,y,z,t) = y\,z\,t + y\,\overline{z}\,t + \overline{y}\,z\,t$ duplicamos el primer sumando, es decir, la escribimos como $f(x,y,z,t) = y\,z\,t + y\,z\,t + y\,\overline{z}\,t + \overline{y}\,z\,t$ podemos agrupar el primer sumando con el tercero y el segundo con el cuarto, con lo que nos quedaría

$$f(x,y,z,t) = y\,t + z\,t$$

que es una expresión mucho más reducida que la que teníamos al principio.

Sin embargo, dejarlo todo a nuestra habilidad para encontrar que términos agrupar, y que términos duplicar para simplificar la expresión no es práctico, y puede resultar engorroso. Vamos a buscar un método que nos resuelva este problema de forma más sencilla.

Una primera forma es mediante los diagramas o mapas de Karnaugh.

Si analizamos con más detalle el ejemplo que acabamos de resolver, vemos que lo que hay que hacer es encontrar minitérminos que se diferencien únicamente en un literal. En tal caso, los dos minterm quedan reducidos a un único término (que no es un minterm pues falta alguna variable). Para esto, vamos a dibujar los minterm de forma que dos minterm que se diferencien en un literal sean adyacentes.

Un mapa de Karnaugh para una función booleana de dos, tres o cuatro variables es precisamente eso: una tabla con tantas celdas como posibles minterm (4 para dos variables, 8 para tres variables y 16 para cuatro variables) de forma que cada celda va asociada a un minterm, y dos celdas adyacentes se diferencian únicamente en un literal, así como dos celdas opuestas en una fila o una columna.

	$\overline{x}$	x
$\overline{y}$		
y		

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{z}$				
z				

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{z}\,\overline{t}$				
$\overline{z}\,t$				
$z\,t$				
$z\,\overline{t}$				

Por ejemplo, en el mapa correspondiente a 4 variables, las cuatro celdas adyacentes a $\overline{x}\,y\,\overline{z}\,t$ son: por la derecha, $x\,y\,\overline{z}\,t$, por arriba, $\overline{x}\,y\,\overline{z}\,\overline{t}$, por la izquierda, $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,t$ y por abajo, $\overline{x}\,y\,z\,t$. Vemos como cada una de estas celdas se diferencia de $\overline{x}\,y\,\overline{z}\,t$ en sólo un literal ($\overline{x}-x$ en la primera, $t-\overline{t}$ en la segunda, $y-\overline{y}$ en la tercera y $\overline{z}-z$ en la cuarta).

Vemos también como las celdas opuestas de la misma fila se diferencian también en sólo un literal (en la segunda fila, estas celdas opuestas son $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,t$ y $x\,\overline{y}\,\overline{z}\,t$), así como las celdas opuestas de una columna.

Si ahora tenemos una función booleana en dos, tres o cuatro variables, su mapa de Karnaugh consiste en la tabla antes descrita, en la que se han destacado aquellas celdas correspondientes a los minterm que aparecen en la forma normal disyuntiva de la función. Nosotros aquí las marcaremos con un 1.

Ejemplo 1.1.18.

Vamos a dibujar los mapas de Karnaugh de las funciones booleanas: $f(x,y) = x\,\overline{y} + \overline{x}\,\overline{y}$; $f(x,y,z) = (x\,y + \overline{y})\overline{z} + \overline{\overline{z}(z+\overline{x})}$; $f(x,y,z,t) = x\,y\,\overline{z}\,\overline{t} + x\,\overline{y}\,z\,t + x\,y\,z\,\overline{t} + x\,y\,z\,t + \overline{x}\,\overline{y}\,z\,\overline{t} + x\,\overline{y}\,z\,\overline{t} + x\,y\,\overline{z}\,t$.

	$\overline{x}$	x
$\overline{y}$	*1*	*1*
y		

$$x\,\overline{y} + \overline{x}\,\overline{y}$$

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{z}$	1		1	1
z	1	1	1	1

$$(x\,y + \overline{y})\overline{z} + \overline{\overline{z}(z+\overline{x})}$$

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{z}\,\overline{t}$			1	
$\overline{z}\,t$			1	
$z\,t$			1	1
$z\,\overline{t}$	1		1	1

$$x\,y\,\overline{z}\,\overline{t} + x\,\overline{y}\,z\,t + x\,y\,z\,\overline{t} + x\,y\,z\,t + \overline{x}\,\overline{y}\,z\,\overline{t} + x\,\overline{y}\,z\,\overline{t} + x\,y\,\overline{z}\,t$$

Ahora, vamos a dibujar el mapa de Karnaugh de la función que ha iniciado esta sección, es decir,

$$f(x,y,z,t) = x\,y\,z\,t + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,t + x\,\overline{y}\,z\,t + x\,y\,\overline{z}\,t + \overline{x}\,\overline{y}\,z\,t + \overline{x}\,y\,z\,t$$

y vamos a ver cómo podemos aprovechar el mapa para simplificar la función, basándonos en lo que hemos hecho previamente.

El mapa de Karnaugh correspondiente a la función f *es:*

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{z}\,\overline{t}$				
$\overline{z}\,t$		1	1	
$z\,t$	1	1	1	1
$z\,\overline{t}$				

Las casillas correspondientes a los minterm $x\,y\,z\,t$ *y* $\overline{x}\,y\,z\,t$ *son adyacentes. Las agrupamos, con lo que tendríamos*

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{z}\,\overline{t}$				
$\overline{z}\,t$		1	1	
$z\,t$	1	1	1	1
$z\,\overline{t}$				

Y esas dos casillas nos dan lugar al término $y\,z\,t$*, que son los literales comunes a ambas.*

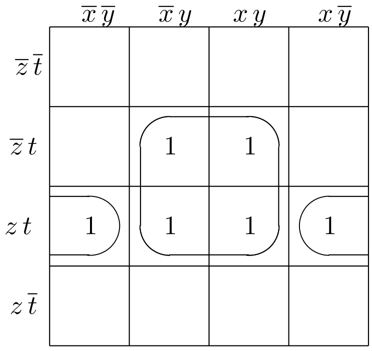
Las casillas correspondientes a los términos $x\,\overline{y}\,z\,t$ *y* $\overline{x}\,\overline{y}\,z\,t$ *no son adyacentes, pero se encuentran el lugares opuestos de la misma fila. Nos podemos imaginar que el diagrama está unido por los extremos, en cuyo caso sí serían adyacentes. Por tanto, las agrupamos también.*

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{z}\,\overline{t}$				
$\overline{z}\,t$		1	1	
$z\,t$	1	1	1	1
$z\,\overline{t}$				

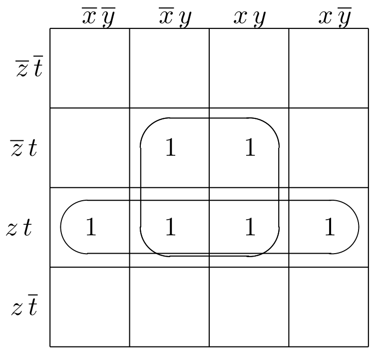
Y el término que nos queda es $\overline{y}\,z\,t$*. Repetimos lo mismo con los minterm* $\overline{x}\,y\,\overline{z}\,t$ *y* $x\,y\,\overline{z}\,t$*.*

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{z}\,\overline{t}$				
$\overline{z}\,t$		1	1	
$z\,t$	1	1	1	1
$z\,\overline{t}$				

Observamos ahora que los dos grupos centrales también son adyacentes, luego los agrupamos en uno solo



Y ahora podemos volver a utilizar el grupo $y\,z\,t$ para agruparlo con $\overline{y}\,z\,t$, que son también adyacentes:



Y nos quedan únicamente dos grupos, que se corresponden con los términos $y\,t$ (el cuadrado central) y $z\,t$ (la tercera fila). Por tanto, tenemos que $f(x, y, z, t) = y\,t + z\,t$.

En definitiva, todo este proceso trata de formar grupos lo más grandes posible y cuyo tamaño sea una potencia de 2. Estos grupos podrían ser un rectángulo 2×1 (o 1×2), un cuadrado 2×2, una fila, una columna o un rectángulo 2×4 (o 4×2).

Cada grupo se corresponde con un término en el que sólo intervienen los literales comunes a todos los minitérminos que forman el grupo. A la hora de formar grupos hay que tener en cuenta que el extremo derecho está unido con el izquierdo, y que el extremo superior está unido al inferior.

Este ejemplo nos dice cómo hemos de proceder. Una vez dibujado el mapa de Karnaugh de una función booleana, se buscan los 1 que aparezcan en celdas adyacentes (u opuestas en una misma fila o columna). Dos de estas celdas se transforman en un único producto en el que ha desaparecido el literal en que difieren. Así, en el ejemplo del mapa de Karnaugh para la función de dos variables, tenemos dos "unos" adyacentes, situados en las celdas $x\,\overline{y}$ y $\overline{x}\,\overline{y}$. Estas dos celdas dan lugar a un producto en el que desaparece el literal diferente (x, $\overline{x}$), quedando entonces la expresión booleana $\overline{y}$. Lo único que estamos haciendo, como ya hemos visto, es la transformación $x\,\overline{y} + \overline{x}\,\overline{y} = (x + \overline{x})\overline{y} = 1 \cdot \overline{y} = \overline{y}$, donde se ha empleado la propiedad distributiva, la definición de complementario y de 1.

De la misma forma, si encontramos cuatro "unos" adyacentes, formando, bien un cuadrado, bien una línea (fila o columna), podemos sustituirlos por un solo producto en el que se eliminan los dos litereles que difieren en esas cuatro celdas.

El objetivo es, como acabamos de decir, tratar de agrupar los "unos" en el menor número posible de bloques, y de mayor tamaño (que tiene que ser una potencia de 2). Las celdas opuestas en una fila o en una columna se consideran adyacentes.

Vamos a optimizar las dos funciones que hemos representado mediante mapas de Karnaugh en el ejemplo anterior. En primer lugar consideramos la función $f : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ dada por $f(x, y, z) = (\overline{\overline{x} + \overline{y}})(y\,\overline{z}) + \overline{y}\,\overline{z}$.

Su mapa de Karnaugh es:

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{z}$	1		1	1
z	1	1	1	1

y vemos que podemos agrupar en 3 bloques, lo que da lugar a tres sumandos, que son $\overline{x}\,\overline{y}$, $\overline{x}\,y\,z$ y x. Es decir, $f(x,y,z) = \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}\,y\,z + x$.

Vemos también que podemos hacer otras agrupaciones en 3 bloques. Por ejemplo,

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{z}$	1		1	1
z	1	1	1	1

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{z}$	1		1	1
z	1	1	1	1

que dan lugar a las expresiones $f(x,y,z) = \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}\,z + x$ o a $f(x,y,z) = \overline{x}\,\overline{y} + z + x$.

Sin embargo, no olvidemos que también se consideran adyacentes las celdas opuestas de una misma fila. Podemos entonces agrupar en los siguientes bloques:

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{z}$	1		1	1
z	1	1	1	1

lo que da lugar a la expresión $f(x,y,z) = x + \overline{y} + z$.

Podemos apreciar como en todas las optimizaciones obtenidas hemos obtenido tres sumandos. Sin embargo, esta última parece mejor, pues es la que tiene menos productos en cada sumando. Esto viene de haber obtenido los bloques más grandes.

Por último, vamos a optimizar las funciones booleanas $f, g : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ dadas por

$$f(x,y,z,t) = x\,y\,\overline{z}\,\overline{t} + x\,\overline{y}\,z\,t + x\,y\,z\,\overline{t} + x\,y\,z\,t + \overline{x}\,\overline{y}\,z\,\overline{t} + x\,\overline{y}\,z\,\overline{t} + x\,y\,\overline{z}\,t$$
$$g(x,y,z,t) = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} + x\,\overline{y}\,z\,\overline{t} + x\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} + \overline{x}\,\overline{y}\,z\,\overline{t}$$

Para esto, agrupamos los "unos" de sus mapas de Karnaugh por bloques:

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{z}\,\overline{t}$			1	
$\overline{z}\,t$			1	
$z\,t$			1	1
$z\,\overline{t}$	1		1	1

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{z}\,\overline{t}$	1			1
$\overline{z}\,t$				
$z\,t$				
$z\,\overline{t}$	1			1

lo que da lugar a las expresiones $f(x, y, z, t) = x\,y + x\,z + \overline{y}\,z\,\overline{t}$ y $g(x, y, z, t) = \overline{y}\,\overline{t}$.

Método de Quine - McCluskey

Acabamos de ver cómo los mapas de Karnaugh nos ayudan a minimizar el desarrollo de una función booleana como suma de productos. Sin embargo, este método se basa en la visualización de la función en un diagrama, y es poco eficiente para funciones de más de cuatro variables. Sería conveniente tener un proceso que pudiera automatizarse. El método de Quine-McCluskey se ajusta a esta condición. El método consta de dos partes. En una primera, se determinan que términos son candidatos a que aparezcan en un desarrollo minimal. En la segunda se seleccionan de estos candidatos los que intervienen en dicho desarrollo.

Describamos a continuación el método.

Sabemos que cada minterm en n variables va unido a una secuencia de n bits. Lo primero que vamos a hacer es, dada una función booleana como suma de minterm, ordenar las cadenas de bits en una columna, agrupando aquellas en los que aparecen igual cantidad de "unos".

Comparamos las cadenas de un grupo con las del grupo inmediatamente inferior. Si encontramos dos cadenas que difieren únicamente en un bit, las marcamos y, en una columna situada a la derecha, representamos estas dos cadenas por una nueva en la que sustituimos el bit diferente por $-$. Si aparecieran dos cadenas iguales, se deja únicamente una.

Una vez realizadas todas las comparaciones posibles, nos vamos a la nueva columna que hemos obtenido y repetimos el proceso.

Se continúa así hasta que no podamos obtener una nueva columna.

Se seleccionan aquellas cadenas que no hayan sido marcadas.

Veamos esto con dos ejemplos:

Ejemplo 1.1.19.

1. *Comenzamos con la función booleana con la que iniciamos el apartado de los mapas de Karnaugh, es decir:*

$$f(x, y, z, t) = x\,y\,z\,t + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,t + x\,\overline{y}\,z\,t + x\,y\,\overline{z}\,t + \overline{x}\,\overline{y}\,z\,t + \overline{x}\,y\,z\,t$$

Las seis cadenas de bits son 1111, 0101, 1011, 1101, 0011 *y* 0111. *Formamos la tabla, y vamos comparando:*

1111
1011
1101
0111
0101
0011

→

∼ **1111**	1−11
∼ **1011**	
1101	
0111	
0101	
0011	

→

∼ **1111**	1−11
∼ 1011	11−1
∼ **1101**	
0111	
0101	
0011	

→

∼ **1111**	1−11
∼ 1011	11−1
∼ 1101	−111
∼ **0111**	
0101	
0011	

→

∼ 1111	1−11
∼ **1011**	11−1
∼ 1101	−111
∼ 0111	−011
0101	
∼ **0011**	

→

∼ 1111	1−11
∼ 1011	11−1
∼ **1101**	−111
∼ 0111	−011
∼ **0101**	−101
∼ 0011	

→

∼ 1111	1−11
∼ 1011	11−1
∼ 1101	−111
∼ **0111**	−011
∼ **0101**	−101
∼ 0011	01−1

→

∼ 1111	1−11
∼ 1011	11−1
∼ 1101	−111
∼ **0111**	−011
∼ 0101	−101
∼ **0011**	01−1
	0−11

Y con esto terminamos todas las comparaciones de la primera columna. Vamos a la segunda.

~ 1111	$1{-}11$
~ 1011	$11{-}1$
~ 1101	-111
~ 0111	-011
~ 0101	-101
~ 0011	$01{-}1$
	$0{-}11$

$\rightarrow$

~ 1111	$\sim \mathbf{1{-}11}$	$--11$
~ 1011	$11{-}1$	
~ 1101	-111	
~ 0111	-011	
~ 0101	-101	
~ 0011	$01{-}1$	
	$\sim \mathbf{0{-}11}$	

$\rightarrow$

~ 1111	$\sim 1{-}11$	$--11$
~ 1011	$\sim \mathbf{11{-}1}$	$-1{-}1$
~ 1101	-111	
~ 0111	-011	
~ 0101	-101	
~ 0011	$\sim \mathbf{01{-}1}$	
	$\sim 0{-}11$	

$\rightarrow$

~ 1111	$\sim 1{-}11$	$--11$
~ 1011	$\sim 11{-}1$	$-1{-}1$
~ 1101	$\sim \mathbf{-111}$	
~ 0111	$\sim \mathbf{-011}$	
~ 0101	-101	
~ 0011	$\sim 01{-}1$	
	$\sim 0{-}11$	

$\rightarrow$

~ 1111	$\sim 1{-}11$	$--11$
~ 1011	$\sim 11{-}1$	$-1{-}1$
~ 1101	$\sim \mathbf{-111}$	
~ 0111	~ -011	
~ 0101	$\sim \mathbf{-101}$	
~ 0011	$\sim 01{-}1$	
	$\sim 0{-}11$	

Notemos como en las dos últimas comparaciones no se ha añadido ningún elemento a la tercera columna, pues los que resultaban ya estaban allí.

Y con esto se termina esta primera etapa. Ahora, nos fijamos en las cadenas que no están marcadas, que en este caso son las dos de la última columna. La cadena $--11$ *se corresponde con el término* $z\,t$*, mientras que la cadena* $-1-1$ *se corresponde con el término* $y\,t$*. Por tanto, tenemos que* $f(x,y,z,t) = z\,t + y\,t$*.*

2. *Tomamos ahora la función booleana dada por la expresión* $x\,y\,z + \overline{x}\,y\,z + \overline{x}\,\overline{y}\,z + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,z$

   Cada minterm lo representamos ahora mediante una cadena de tres dígitos binarios. Estos son 111, 011, 001, 000 *y* 101. *Ordenamos las cadenas en una columna, situando en primer lugar la que tiene* 3 *"unos", a continuación las que tienen* 2 *"unos" y así sucesivamente.*

111
011
101
001
000

Comparamos la cadena del primer nivel con las de segundo. Resulta que hay 2 *de las que se diferencia en un único dígito. Sustituimos este dígito por* $-$*, luego nos queda* -11 *y* $1-1$*.*

Comparamos las cadenas del segundo y tercer nivel, y vemos que 101 *y* 001 *se diferencian en un único dígito. Esto da lugar a la cadena* -01*. Por último, comparamos la del tercer nivel con el cuarto, lo que nos da* $00-$*.*

Ordenamos todos estos datos en una nueva columna y todas las cadenas de esta columna que han intervenido en alguna de la segunda las marcamos.

~ 111	-11
~ 011	$1{-}1$
~ 101	$0{-}1$
~ 001	-01
~ 000	$00-$

Repetimos aquí el proceso con la segunda columna

~ 111	~ -11	$--1$
~ 011	$\sim 1-1$	
~ 101	$\sim 0-1$	
~ 001	~ -01	
~ 000	$00-$	

Las cadenas a seleccionar son entonces las no marcadas, es decir, $--1$ *y* $00-$*, que se corresponden con los términos* z *y* $\overline{x}\,\overline{y}$*.*

La segunda parte de este método consiste en encontrar, de todos los productos booleanos, el menor conjunto de ellos que represente a la expresión booleana dada. Para ello, hacemos una tabla en la que, en el eje horizontal situamos los minterm que nos definían la expresión booleana, mientras que en el eje vertical situamos los productos booleanos que hemos seleccionado en la primera parte. A continuación señalamos las celdas que se correspondan con un producto booleano y un minterm con la condición de que todos los literales que intervienen en el producto booleano también se encuentren en el minterm.

Una vez hecho esto, elegimos la menor cantidad de productos booleanos de forma que uniendo las celdas que están señaladas en sus filas podamos completar una fila completa de la tabla. De haber varias posibles elecciones, nos quedamos con aquellas en que los productos booleanos tengan la menor cantidad posible de literales.

Ejemplo 1.1.20.

1. *En el primer caso que hemos analizado en el ejemplo anterior, nos quedaría la siguiente tabla:*

	$x\,y\,z\,t$	$\overline{x}\,y\,\overline{z}\,t$	$x\,\overline{y}\,z\,t$	$x\,y\,\overline{z}\,t$	$\overline{x}\,\overline{y}\,z\,t$	$\overline{x}\,y\,z\,t$
$z\,t$	X		X		X	X
$y\,t$	X	X		X		X

Nos fijamos en la columna del minterm $x\,\overline{y}\,z\,t$*, y vemos que sólo una casilla, la correspondiente al término* $z\,t$*, está marcada. Esto significa que este término es necesario para la expresión de la función. Cuando esto ocurra, diremos que el término* $z\,t$ *es un* implicante primo esencial.

De la misma forma, nos fijamos en la columna del minterm $\overline{x}\,y\,\overline{z}\,t$ *y vemos que el término* $y\,t$ *también nos hace falta (es decir, es un implicante primo esencial). Por tanto, no podemos simplificar más la expresión booleana.*

2. *En el otro caso que analizamos en el ejemplo anterior, la tabla nos quedaría como sigue:*

	$x\,y\,z$	$x\,\overline{y}\,z$	$\overline{x}\,y\,z$	$\overline{x}\,\overline{y}\,z$	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$
z	X	X	X	X	
$\overline{x}\,\overline{y}$				X	X

Al ver esta tabla, vemos que los dos términos z *y* $\overline{x}\,\overline{y}$ *son implicantes primos esenciales.*

Después de todo esto deducimos que:

$$x\,y\,z+\overline{x}\,y\,z+\overline{x}\,\overline{y}\,z+\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}+x\,\overline{y}\,z=\overline{x}\,\overline{y}+z$$

3. *Veamos a continuación un ejemplo completo.*

Dada la expresión booleana $x\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t}+\overline{x}\,y\,\overline{z}\,t+x\,\overline{y}\,z\,\overline{t}+\overline{x}\,\overline{y}\;z\,t+\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,t+\overline{x}\,y\,z\,t+\overline{x}\,\overline{y}\,z\,\overline{t}$ *vamos a tratar de encontrar una expresión óptima mediante el método de Quine-McCluskey.*

Las cadenas de bits correspondientes a cada uno de los minterm son 0111, 0101, 1010, 0011, 0001, 1000 *y* 0010*. A partir de ellas construimos la tabla:*

a b	~ *0111*	*1*	~ *01-1*	*0- -1*
a c	~ *0101*	*2*	~ *0-11*	
d e	~ *1010*	*2*	~ *0-01*	
b f g	~ *0011*		*10-0*	
d	~ *1000*		*-010*	
c f	~ *0001*	*1*	~ *00-1*	
e g	~ *0010*		*001-*	

A la izquierda de cada una de las cadenas marcadas hemos colocado unas letras (columna de la izquierda) o números (columna central) que nos indican cada cadena con cual se empareja para formar una cadena en la columna que tiene más a la derecha.

A partir de aquí seleccionamos las cadenas que no están marcadas, que se corresponden con los productos $x\,\overline{y}\,\overline{t}$; $\overline{y}\,z\,\overline{t}$; $\overline{x}\,\overline{y}\,z$; $\overline{x}\,t$. *Esto nos da la siguiente tabla:*

	$x\overline{y}\overline{z}\overline{t}$	$\overline{x}\,y\,\overline{z}\,t$	$x\,\overline{y}\,z\,\overline{t}$	$\overline{x}\,\overline{y}\;z\,t$	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,t$	$\overline{x}\,y\,z\,t$	$\overline{x}\,\overline{y}\,z\,\overline{t}$
$x\,\overline{y}\,\overline{t}$	X		X				
$\overline{y}\,z\,\overline{t}$			X				X
$\overline{x}\,\overline{y}\,z$				X			X
$\overline{x}\,t$		X		X	X	X	

A partir de la tabla, encontramos dos implicantes primos esenciales, que son $x\,\overline{y}\,\overline{t}$ *(basta fijarnos en la primera columna) y* $\overline{x}\,t$ *(basta fijarnos en la segunda columna). Por tanto, en la expresión simplificada de* f *estos dos términos tienen que estar.*

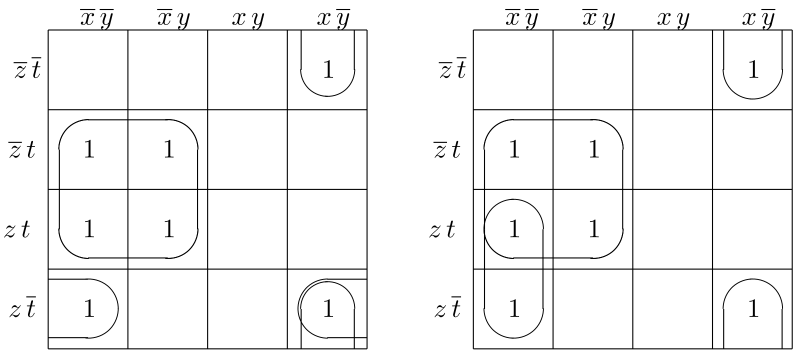
Estos dos términos cubren 6 de los 7 minterm de la función f. *El único que queda sin cubrir es* $\overline{x}\,\overline{y}\,z\,\overline{t}$. *Puesto que este puede ser cubierto con cualquiera de los otros dos términos, y ambos tienen el mismo número de literales, podemos elegir cualquiera de los dos. En este caso se ve muy claro, pero si no lo que habría que hacer es eliminar de la tabla las filas correspondientes a estos dos términos, y las columnas de los minterm que cubren.*

	$\overline{x}\,\overline{y}\,z\,\overline{t}$
$\overline{y}\,z\,\overline{t}$	X
$\overline{x}\,\overline{y}\,z$	X

y vemos que eligiendo cualquiera de los dos, podemos tener cubiertos todos los minterms. Por tanto,

$$f(x,y,z,t) = x\,\overline{y}\,\overline{t} + \overline{x}\,t + \overline{y}\,z\,\overline{t} = x\,\overline{y}\,\overline{t} + \overline{x}\,t + \overline{x}\,\overline{y}\,z$$

Si para optimizar esta expresión booleana empleáramos los mapas de Karnaugh tendríamos dos formas diferentes de agrupar las celdas con "unos":



lo que nos da las dos expresiones que acabamos de ver.

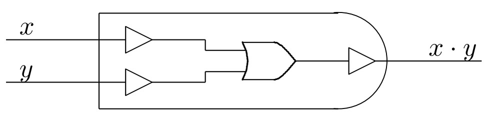
1.1.6. Conjuntos funcionalmente completos

En secciones precedentes hemos visto cómo a partir de tres puertas lógicas, las puertas AND, OR y NOT, podemos diseñar circuitos lógicos correspondientes a cualquier función booleana, y en la sección anterior hemos estudiado cómo minimizar el número de puertas necesarias para diseñar tales circuitos. Sin embargo, para construir tales circuitos es necesario emplear tres tipos de puertas lógicas diferentes. En esta sección vamos a intentar construir cualquier circuito lógico empleando menos puertas diferentes, aunque sea a costa de aumentar el número de éstas.

Comenzamos reduciendo el número de puertas distintas necesarias a 2.

Proposición 1.1.3. *Las puertas lógicas OR y NOT, o las puertas lógicas AND y NOT son suficientes para la construcción de cualquier circuito lógico.*

Demostración: Para ver que las puertas OR y NOT son suficientes, basta comprobar que $xy = \overline{\overline{x} + \overline{y}}$, lo que nos dice que podemos construir una puerta AND usando las puertas OR y NOT. Esta puerta podría quedar como sigue:



Y por tanto, usando únicamente puertas OR y NOT podemos construir cualquier circuito.

De la misma forma, y puesto que $x + y = \overline{\overline{x}\,\overline{y}}$ se puede ver que usando únicamente las puetas AND y NOT se puede diseñar cualquier circuito.

■

Definición 8. *Sean x, y variables booleanas. Se definen las funciones booleanas $-\uparrow-$ y $-\downarrow-$ como sigue:*

$$x \uparrow y = \overline{x \cdot y}, \qquad x \downarrow y = \overline{x + y}.$$

Es decir:

$$0 \uparrow 0 = 1, \quad 0 \uparrow 1 = 1, \quad 1 \uparrow 0 = 1, \quad 1 \uparrow 1 = 0.$$

$$0 \downarrow 0 = 1, \quad 0 \downarrow 1 = 0, \quad 1 \downarrow 0 = 0, \quad 1 \downarrow 1 = 0.$$

Estos operadores se denotan como NAND (NOT AND) y NOR (NOT OR) respectivamente. Podemos ver que se corresponden con las funciones f_{14} y f_8 tal y como las vimos en el ejemplo 1.1.15.

Proposición 1.1.4. *Cualquier función booleana se puede expresar usando únicamente el operador NAND (resp. NOR).*

Demostración:

Para comprobar esto, escribimos en primer lugar:

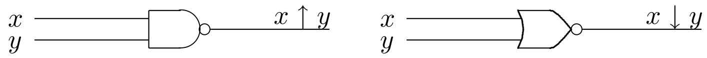
$\overline{x} = \overline{x \cdot x} = x \uparrow x$,

$x + y = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}} = \overline{x} \uparrow \overline{y} = (x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y)$,

es decir, los operadores NOT y OR pueden expresarse utilizando únicamente NAND. La Proposición 1.1.3 nos dice que cualquier funcíon booleana la podemos expresar únicamente con el operador NAND.

De la misma forma, puesto que $\overline{x} = x \downarrow x$ y $x \cdot y = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$ deducimos que el operador NOR es suficiente para expresar cualquier función booleana. ■.

Las puertas correspondientes NAND y NOR se suelen representar como sigue:



Cualquiera de los circuitos que vimos en las secciones precedentes, o cualquier otro que se nos ocurra podemos ahora diseñarlo usando únicamente la puerta NAND (o la puerta NOR). Esta puerta se construye de forma sencilla con transistores, tanto con la tecnología de semiconductores como con las técnicas más recientes de fabricación de microcircuitos.