Relación de problemas 4

Variable Aleatoria

1. Consideremos el experimento aleatorio consistente en lanzar dos dados equilibrados y observar el número máximo de los dos números obtenidos en ellos. Si X es la variable aleatoria asociada a ese experimento, hallar:
   a) La función masa de probabilidad de la variable aleatoria X.
   b) La función de distribución de la variable aleatoria X.
   c) $F(2{,}5)$.
   d) $P[2 \leq X \leq 4]$.
   e) La esperanza y la varianza.

2. Al lanzar dos dados, consideramos la suma de sus resultados. Sea X la variable aleatoria asociada a este experimento aleatorio. Hallar:
   a) La función masa de probabilidad.
   b) La función de distribución. Representarla gráficamente.
   c) $P[3 \leq X \leq 7]$.
   d) $P[3 < X < 7]$.
   e) Esperanza de la variable aleatoria.

3. Se lanzan tres monedas al aire. Sea la variable aleatoria X=*número de caras obtenidas*. Se pide:
   a) Obtener la función masa de probabilidad de la variable X.
   b) Obtener la función de distribución de la variable X y representarla gráficamente.
   c) Calcular la esperanza matemática de la variable.
   d) Calcular la varianza de X.
   e) Calcular la probabilidad de que el número de caras observadas sea a lo sumo dos.
   f) Calcular la probabilidad de que el número de caras observadas sea al menos dos.
   g) Calcular la probabilidad de que no se observe ninguna cara.

4. Sea X una variable aleatoria discreta que tiene como función masa de probabilidad

$$P[X = x] = \frac{1}{10}, \qquad x = 2, 3, \cdots, 11$$

   Se pide:

a) Calcular la función de distribución.

b) Calcular $P[X > 7]$.

c) Calcular $P[X \leq 5]$.

d) Calcular $P[3 < X \leq 8]$.

5. Sea X una variable aleatoria con la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ k - x, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{en el resto de casos} \end{cases}$$

Calcular:

a) El valor de la constante k.

b) La función de distribución.

c) La esperanza de la distribución.

6. La variable aleatoria X representa el tiempo, en minutos, que transcurre entre dos llegadas consecutivas a una tienda y su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} k \exp(\frac{-x}{2}), & x > 0 \\ 0, & \text{en el resto de casos} \end{cases}$$

Determinar:

a) El valor de k.

b) La función de distribución.

c) La probabilidad de que el tiempo entre dos llegadas consecutivas se encuentre entre 2 y 6 minutos.

d) La probabilidad de que transcurran menos de 8 minutos entre 2 llegadas consecutivas.

e) La probabilidad de que el tiempo entre dos llegadas consecutivas exceda los 8 minutos.

7. La variable aleatoria que representa la proporción de accidentes automovilísticos fatales en Estados Unidos tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 42x(1-x)^5, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{en el resto de casos} \end{cases}$$

a) Demostrar que f es una función de densidad.

b) Calcular $f(\frac{1}{4})$.

c) Calcular la función de distribución.

d) Calcular $P[X \leq 0{,}25]$.

8. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} kx, & 0 < x \leq 2 \\ 0, & \text{en el resto de casos} \end{cases}$$

a) Calcular k.

b) Calcular la función de distribución.

c) $P[X \leq 1{,}2]$.

d) $P[0{,}8 \leq X]$.

e) $P[1 \leq X \leq 1{,}5]$.

f) Calcular la esperanza y la varianza de X.

9. Se considera la variable aleatoria X con función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ \frac{(x-2)^3}{8}, & 2 < x < 4 \\ 1, & 4 \leq x \end{cases}$$

a) Calcular la función de densidad.

b) Calcular $P[3 \leq X]$, $P[1 < X < 3]$, $P[X < 3]$ y $P[X > 4]$.

10. Sea X una variable aleatoria con función de densidad definida de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2(1-x^3), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en el resto de casos} \end{cases}$$

Calcular la función de distribución.

11. Sea X la duración en segundos de un tipo de circuitos. X puede tomar todos los valores comprendidos entre 0 y $+\infty$. Supongamos que la función de densidad de X es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^2}, & 100 < x < 1000 \\ 0, & \text{en el resto de casos} \end{cases}$$

a) Calcular el valor de a para que f sea una función de densidad.

b) Calcular la probabilidad de que un circuito dure exactamente 200 segundos.

c) Calcular la esperanza de X.

d) Calcular $P[200 < X < 300]$.

e) Calcular $P[200 \leq X \leq 300]$.

12. Sea X una variable aleatoria cuya función de distribución viene dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-x}, & 0 < x \end{cases}$$

a) Obtener la función de densidad.

b) $P[2 < X < 8]$.

c) $P[1 < X < 4]$.

d) $P[X \leq 3]$.

13. Una variable tiene como función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(7+x)}{k}, & -7 < x \leq 0 \\ \frac{(7-x)}{k}, & 0 < x \leq 7 \\ 0, & \text{en el resto de casos} \end{cases}$$

Determinar:

a) El valor de k.
b) La función de distribución.
c) $P[X > 0]$.
d) $P[X \leq 1]$.

14. Una variable tiene como función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} a \exp(-3x) & x > 0 \\ 0 & \end{cases}$$

Determinar:

a) $F(x)$.
b) $P[1 < X < 2]$.
c) $P[2 \leq X]$.
d) $P[0{,}5 \leq X \leq 1]$.
e) $P[3 > X]$.

15. Dada la función:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 - 3(x - x^2), & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \end{cases}$$

Se pide:

a) Calcular la función de densidad de la variable aleatoria asociada.
b) $P[X > 0{,}75]$.
c) $P[0{,}25 < X < 0{,}75]$.
d) Comprobar que F es una función de distribución.

16. Dada una variable aleatoria X con función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^n, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

a) Calcular la función de densidad.
b) Calcular la media y la varianza de X.

17. La variable aleatoria X tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} mx & 0 < x < 2 \\ 1 - mx & 2 \leq x < 4 \\ 0 & \end{cases}$$

Se pide:

a) Hallar m y determinar la función de distribución.
b) Hallar $E[X]$ y $Var[X]$.

18. Dada X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = k \exp(-|x|) \qquad -\infty < x < \infty$$

Determinar

a) El valor de k.

b) La función de distribución.

c) $P[-1 < X < 1]$ y $P[X \geq 2]$.