PROBLEMA

Un problema de **programación lineal** se expresa: Encontrar $(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ que optimice (max. o min.) la función $f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ sujeta a las restricciones:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq (\geq) b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{212}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq (\geq) b_2 \\
&\vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m12}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq (\geq) b_m \\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0
\end{aligned}$$

donde $c_i, a_{ij}, b_j \in R$ para $i = 1,...,n$ y $j = 1,...,m$

Definiciones

- Una **desigualdad lineal** con dos variables es una desigualdad que se puede escribir de una de las cuatro formas:

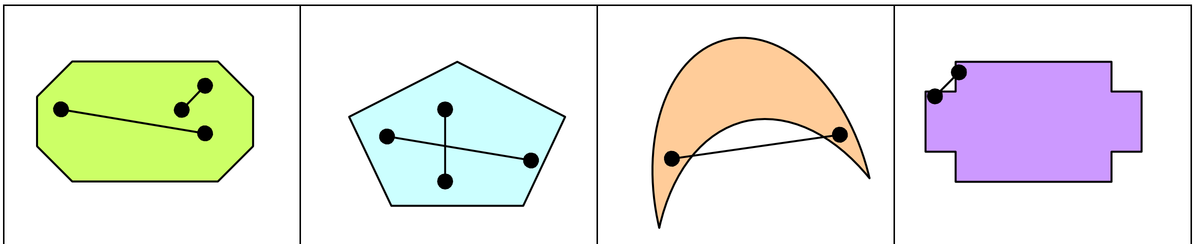
$$ax - by > c\ ,\ \ ax - by \geq c\ ,\ \ ax - by < c \ \text{ y } \ ax - by \leq c$$

donde a, b, c son números reales y a, b no son ambos iguales a 0.

- Sean $\mathbf{a} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ y $\mathbf{b} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ dos elementos de R^n El **segmento de recta** que une $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es el conjunto de puntos:

$$L = \{\mathrm{x} \in R^n : \mathrm{x} = (1-t)\mathrm{a} + t\mathrm{b}, 0 \leq t \leq 1\}$$

- Un subconjunto S de R^n se denomina **convexo** si todo punto del segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de S es un punto de S.



Convexo | Convexo | No convexo | No convexo

- La intersección de dos conjuntos convexos cualesquiera de R^n es un conjunto convexo.

- Dados los números reales $a_1, a_2, ..., a_n$ el conjunto

$$H = \{(x_1 x_2, ..., x_n) \in R^n : a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b\}$$

se denomina hiperplano de R^n

- Los conjuntos

$$\{(x_1 x_2, ..., x_n) \in R^n : a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n < b\}$$
$$\{(x_1 x_2, ..., x_n) \in R^n : a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n > b\}$$

se denominan **semiespacios abiertos**. Si la desigualdad es ≤ o ≥ se denominan **semiespacios cerrados**. El hiperplano H en los semiespacios anteriores se denomina **hiperplano frontera**.

- Los semiespacios en R^n son conjuntos convexos.

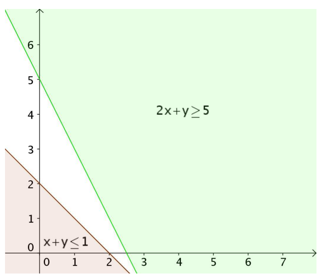
- La intersección *C* de un número finito de subespacios cerrados recibe el nombre de **conjunto convexo poliédrico**.

- Un punto de R^n se llama **punto extremo** o **vértice** de un conjunto convexo poliédrico si es un punto intersección de n de los hiperplanos frontera que determinan a *C*.

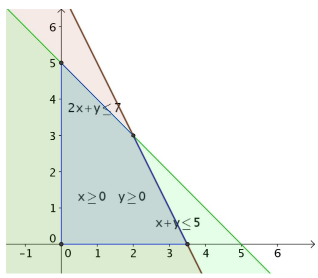
El conjunto de soluciones factibles en un problema de programación lineal es un subconjunto convexo poliédrico.

El método gráfico

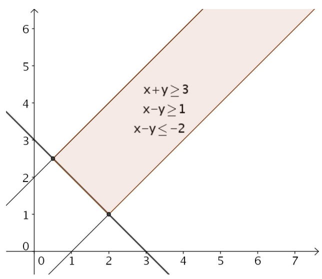
En el caso de R^2 se pueden representar las restricciones de un problema de programación lineal, dando lugar al denominado **conjunto de soluciones**, que será *factible* si la intersección de los semiplanos es no vacía y *no factible* en caso de que dicha intersección sea vacía.



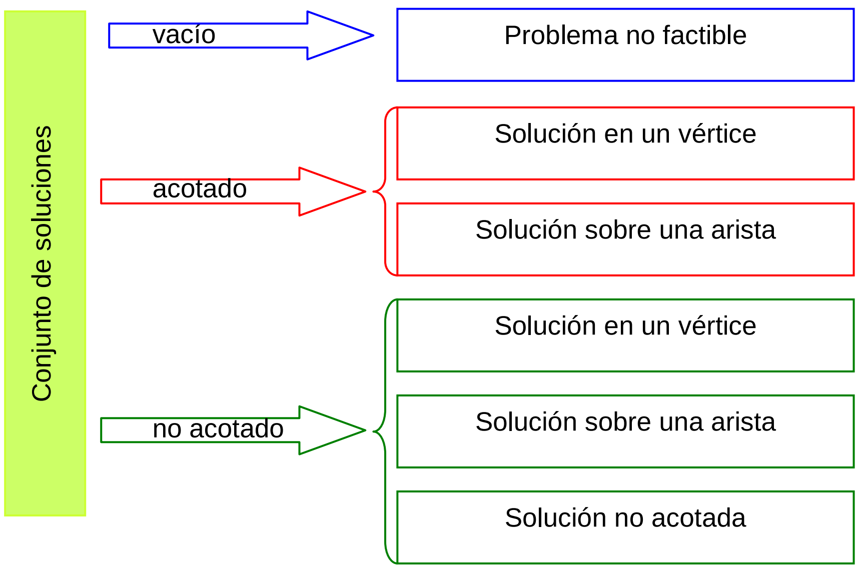
Problema **no factible**



Conjunto de soluciones **factible acotado**



Conjunto de soluciones **factible no acotado**



El método simplex

Se trata de un procedimiento iterativo

1. Paso inicial: Determinar una solución factible en un vértice.
2. Prueba de optimalidad: La solución factible en un vértice es óptima cuando ninguna de las soluciones en vértices adyacentes a ella sean mejores.
3. Paso iterativo: Traslado a una mejor solución factible en un vértice adyacente (repetir las veces que sea necesario).