Capítulo 2

Lógica proposicional

2.1. Lenguaje Proposicional

2.1.1. Introducción

El primer objetivo de la lógica es simbolizar el razonamiento humano. Es decir, producir un lenguaje en el que al menos parte del razonamiento humano (matemático o no) pueda ser expresado. La Lógica proposicional es la aproximación más sencilla a este objetivo. Los elementos del lenguaje humano que vamos a manejar son sentencias declarativas que pueden ser ciertas o falsas (pero no ambas cosas o ninguna de las dos). Cada una de esas sentencias es lo que llamaremos *proposición* o *fórmula bien formada.* El método de trabajo consiste en partir de sentencias simples y combinarlas para formar otras más elaboradas. Las sentencias más simples se denominan *fórmulas atómicas* y se combinan mediante lo que llamamos *conectivas* (o también *operadores lógicos*) y las *reglas de sintaxis* correspondientes.

Un ejemplo de la necesidad de las conectivas y las reglas de sintaxis puede ser el de un niño que escribiera: Hoy es mi cumpleaños. No voy al parque. Estoy enfadado. Todos añadiríamos a esta secuencia de fórmulas atómicas unas conectivas gramaticales para indicar la relación entre ellas; por ejemplo: *Estoy enfadado porque hoy es mi cumpleaños y no voy al parque.* Pero también podríamos componer: *Hoy es mi cumpleaños pero no voy al parque porque estoy enfadado.* Cada una de ellas tiene un significado diferente, así que el discurso del niño puede ser interpretado de distintas formas porque carece de elementos de ligadura entre las distintas sentencias. Además el enlace entre los distintos elementos del discurso debe seguir unas reglas de sintaxis; no sería correcto decir: *Pero hoy es mi cumpleaños o no voy al parque o estoy enfadado.*

Pero esto no basta. El objetivo es simular, en la medida de lo posible, el razonamiento humano. Veamos un ejemplo sencillo. Imagina que quieres saber qué está estudiando Juan. Le preguntas a un antiguo compañero suyo de instituto, y lo más que alcanza a decirte es que está estudiando matemáticas o informática. Entonces, y puesto que conoces a alguien que está en matemáticas, le preguntas por Juan y te afirma con seguridad que no está estudiando matemáticas. Ninguna de tus fuentes de información ha sido capaz de decirte que estudia Juan. Pero a partir de los datos que tienes, fácilmente puedes concluir que Juan estudia informática. Has partido de dos afirmaciones: "Juan estudia matemáticas o informática" y "Juan no estudia matemáticas", y de ellas deduces que Juan estudia informática. Cualquier persona estaría de acuerdo en que esto es una deducción correcta (o un razonamiento correcto).

Imaginemos otra situación. Tres amigos, Antonio, Belén y Carlos mantienen la siguiente conversación:

A: Y David, ¿sabéis donde estuvo ayer?

B: Dijo que iba a ir a la Sierra.

A: Ya, pero ¿donde fue?

B: No sabía si iba a subir al Veleta o al Mulhacén.

C: Yo estuve todo el día en el Veleta y por allí no apareció.

B: Entonces, ya tienes lo que querías saber.

Por supuesto que Belén dedujo que David subió al Mulhacén, y pensó que Antonio hizo la misma deducción. El esquema de la deducción es muy similar al que hemos hecho antes. A partir de dos afirmaciones: "David subió al Veleta o al Mulhacén" y "David no subió al Veleta" concluimos que David subió al Mulhacén.

En ambos casos, los enunciados podemos descomponerlos en otros más simples, añadiendo las conectivas necesarias. Por ejemplo, en el primero los enunciados simples serían *Juan estudia matemáticas* (que representaremos por p) y *Juan estudia informática* (que representaremos como q). Los dos hechos que tenías puedes verlos ahora como p o q y no p. Y a partir de estos dos enunciados podemos deducir q.

En el segundo ejemplo la situación es similar. Llamando p al enunciado *David subió al Veleta* y q al enunciado *David subió al Mulhacén*, las dos afirmaciones que se podían sacar de la conversación son p o q y no p. Y la deducción vuelve a ser en este caso que q es cierto.

Independientemente de lo que pueda significar p (que Juan estudia matemáticas, que David subió al Veleta o cualquier otro enunciado que puede ser verdadero o falso) y de lo que pueda significar q (que Juan estudia informática, que David subió al Mulhacén, etc.), la deducción del enunciado q a partir de p ó q y de no p parece que es una deducción correcta.

Nuestra idea es crear un lenguaje en el que daremos una noción de deducción (implicación semántica o consecuencia lógica lo llamaremos) que recoja este tipo de razonamientos. Las proposiciones básicas de este lenguaje serán los elementos de un conjunto prefijado (finito o infinito numerable) y no tendrán ningún significado asignado. A partir de estas proposiciones básicas, mediante una serie de conectivas y siguiendo unas reglas sintácticas formaremos nuevas proposiciones más complejas.

2.1.2. Elementos del lenguaje proposicional:

Como ya hemos adelantado, necesitamos los siguientes tipos de elementos para construir el lenguaje:

Las proposiciones básicas

Operadores lógicos o Conectivas

Sintaxis del cálculo proposicional

Con esto, pasamos ya a definir el lenguaje proposicional.

Definición 9. *Sea X un conjunto finito o numerable (y distinto del vacío). Definimos el conjunto $\mathtt{Form}(X)$ como sigue:*

- *Todo elemento de X pertenece a $\mathtt{Form}(X)$ (es decir, $X \subseteq \mathtt{Form}(X)$).*
- *Si $\alpha, \beta \in \mathtt{Form}(X)$, entonces son fórmulas:*

  $\alpha \vee \beta$.

  $\alpha \wedge \beta$.

  $\alpha \to \beta$.

  $\alpha \leftrightarrow \beta$.

  $\neg\alpha$.

  Es decir, se tiene que $\{\alpha \vee \beta, \alpha \wedge \beta, \alpha \to \beta, \alpha \leftrightarrow \beta, \neg\alpha\} \subseteq \mathtt{Form}(X)$.
- *Cualquier objeto que no se haya obtenido a partir de las reglas anteriores no pertenece a $\mathtt{Form}(X)$.*

Los elementos de $\mathtt{Form}(X)$ se denominan fórmulas proposicionales*,* fórmulas bien formadas *o simplemente* fórmulas*, mientras que los de X se denominan* proposiciones atómicas *o* variables proposicionales.

Observaciones:

1. Normalmente, vamos a emplear letras del alfabeto latino ($a, b, c...$ o $p, q, r...$) para llamar las proposiciones atómicas, y letras griegas ($\alpha, \beta, \gamma...$) para referirnos a fórmulas que no tienen que ser atómicas.
2. Los símbolos $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$ y $\neg$ se denominan *conectivas.* En la siguiente tabla vemos como se llaman esas conectivas y como leeremos cuando aparezcan.

Conectiva	Nombre	Fórmula	Lectura
$\vee$	Disyunción	$\alpha \vee \beta$	α o β
$\wedge$	Conjunción	$\alpha \wedge \beta$	α y β
$\to$	Implicación	$\alpha \to \beta$	α implica β
$\leftrightarrow$	Equivalencia	$\alpha \leftrightarrow \beta$	α equivale a β
$\neg$	Negación	$\neg\alpha$	No α

Cuando hablemos de la semántica del lenguaje proposicional volveremos sobre el tema de la lectura de las conectivas.

3. Si α_1 es la fórmula $p \vee q$, $\alpha_2 = r$, $\beta_1 = p$ y $\beta_2 = q \to r$, entonces $\alpha_1 \to \alpha_2$ se escribiría como $p \vee q \to r$, exactamente igual que $\beta_1 \vee \beta_2$. Sin embargo, son fórmulas distintas. Para evitar esta ambigüedad, emplearemos paréntesis. Así, $\alpha_1 \to \alpha_2$ se escribiría como $(p \vee q) \to r$, mientras que $\beta_1 \vee \beta_2$ se escribiría como $p \vee (q \to r)$.

   Esto último, aunque evita ambigüedades, puede hacer ilegible una fórmula por la gran cantidad de paréntesis que pueda contener. Para evitar esto, se establecen unas reglas de prioridad entre las conectivas. Estas reglas las podemos resumir en :

   - La conectiva $\neg$ tiene prioridad sobre todas las demás. Así $\neg\alpha \vee \beta$ significa lo mismo que $(\neg\alpha) \vee \beta$, y es por tanto diferente a $\neg(\alpha \vee \beta)$. Lo mismo ocurre con $\neg\alpha \wedge \beta$, $\neg\alpha \to \beta$ y con $\neg\alpha \leftrightarrow \beta$. También $\alpha \vee \neg\beta$ significa lo mismo que $\alpha \vee (\neg\beta)$. Sin embargo, con la escritura $\alpha \vee \neg\beta$ no habría otra posibilidad de lectura.
   - Las conectivas $\vee$ y $\wedge$ tienen prioridad sobre $\to$ y $\leftrightarrow$. Por tanto, $\alpha \vee \beta \to \gamma$ es lo mismo que $(\alpha \vee \beta) \to \gamma$. De acuerdo con este criterio, en el ejemplo anterior la fórmula $p \vee q \to r$ sería $\alpha_1 \to \alpha_2$.
   - Las conectivas $\vee$ y $\wedge$ tienen la misma prioridad. Por tal motivo, no se debe escribir una fórmula de la forma $\alpha \vee \beta \wedge \gamma$, ya que no queda claro si estamos hablando de $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma$ o de $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$. Los paréntesis en estos casos se hacen imprescindibles.
   - El comentario anterior vale también para las conectivas $\to$ y $\leftrightarrow$.
   - Cuando aparece la conectiva $\to$ dos o más veces seguidas asociaremos por la izquierda. Así, $\alpha \to \beta \to \gamma$ significa $(\alpha \to \beta) \to \gamma$, y no $\alpha \to (\beta \to \gamma)$. De todas formas, en estos casos se recomienda el uso de paréntesis.
   - También cuando tengamos la conectiva $\vee$ (o la conectiva $\wedge$ o la conectiva $\leftrightarrow$) dos o más veces, asociaremos por la izquierda. Es decir, $\alpha \vee \beta \vee \gamma$ significa $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma$. Sin embargo, aquí el uso de los paréntesis no es necesario, pues aunque las fórmulas $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma$ y $\alpha \vee (\beta \vee \gamma)$ no son iguales, veremos más adelante que son equivalentes.
   - Por supuesto que cuando pueda haber alguna duda es preferible abusar de los paréntesis para dejarlo todo claro.

4. La elección del conjunto $\{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow, \neg\}$ como conjunto de conectivas no es la única posible para estudiar la lógica proposicional, aunque sí bastante estándar. Algunos autores usan conjuntos más pequeños (tales como el conjunto $\{\neg, \vee\}$ o el conjunto $\{\neg, \to\}$). Con la elección que hemos hecho pensamos que se gana en claridad.

Vamos a ver algunos ejemplos de fórmulas.

Ejemplo 2.1.1.
Sea $X = \{p, q, r, s\}$. Son fórmulas sobre X:
$\alpha_1 = \neg q$, $\alpha_2 = p \to \neg s$, $\alpha_3 = p \vee \neg q \to (\neg q \leftrightarrow s)$, $\alpha_4 = p \vee \neg p$, $\alpha_5 = p \vee q \leftrightarrow \neg q \wedge \neg p$.

Por ejemplo, α_1 es fórmula ya que es la negación de q, que es una fórmula (por pertenecer a X).

Para comprobar que α_3 es fórmula, podemos hacer como sigue:

$\beta_1 = p\vee\neg q$ es una fórmula, pues es la disyunción de p y de $\neg q$. También $\beta_2 = \neg q \leftrightarrow s$ es una fórmula, pues es la equivalencia de $\neg q$ (que es fórmula) y s (que también lo es). Por último, $\alpha_3 = \beta_1 \to \beta_2$.

No son fórmulas sobre X, por ejemplo, $p\neg q$, $r \to \wedge s$.

Hemos visto en este ejemplo como la obtención de una fórmula α se obtiene a partir de fórmulas más sencillas mediante el uso de las conectivas. Estas fórmulas que intervienen en la formación de α se denominan *subfórmulas* de α. Por ejemplo, la fórmula $\neg q$ se obtiene a partir de la fórmula q y la conectiva $\neg$. Por tanto, son subfórmulas de $\neg q$ tanto q como $\neg q$ (toda fórmula es subfórmula de ella misma). El conjunto $\{p, q, s, \neg q, p \vee \neg q, \neg q \leftrightarrow s, p \vee \neg q \to (\neg q \leftrightarrow s)\}$ es el conjunto de todas las subfórmulas de $p \vee \neg q \to (\neg q \leftrightarrow s)$.

A continuación precisamos algo más esta idea.

Definición 10. *Sea X un conjunto y α una fórmula sobre X. Definimos el conjunto de las subfórmulas de α como sigue:*

- $Sub(\alpha) = \{\alpha\}$ *si* $\alpha \in X$.
- $Sub(\alpha) = \{\alpha\} \cup Sub(\alpha_1) \cup Sub(\alpha_2)$ *si* $\alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2$.
- $Sub(\alpha) = \{\alpha\} \cup Sub(\alpha_1) \cup Sub(\alpha_2)$ *si* $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$.
- $Sub(\alpha) = \{\alpha\} \cup Sub(\alpha_1) \cup Sub(\alpha_2)$ *si* $\alpha = \alpha_1 \to \alpha_2$.
- $Sub(\alpha) = \{\alpha\} \cup Sub(\alpha_1) \cup Sub(\alpha_2)$ *si* $\alpha = \alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$.
- $Sub(\alpha) = \{\alpha\} \cup Sub(\alpha_1)$ *si* $\alpha = \neg\alpha_1$.

Es decir, si α es una fórmula atómica, su única subfórmula es ella misma, mientras que si α se obtiene a partir de una o dos fórmulas más sencillas con el uso de una conectiva, ésta (o éstas) fórmulas son subfórmulas de α, así como todas las que han intervenido en su formación (y también la propia α) de subfórmula.

Ejemplo 2.1.2.

1. *Calculamos el conjunto de subfórmulas de las fórmulas $\neg q$, $p \vee \neg q$, $\neg q \leftrightarrow s$ y $p \vee \neg q \to (\neg q \leftrightarrow s)$.*
   - $Sub(\neg q) = \{\neg q\} \cup Sub(q) = \{\neg q\} \cup \{q\} = \{q, \neg q\}$.
   - $Sub(p \vee \neg q) = \{p \vee \neg q\} \cup Sub(p) \cup Sub(\neg q) = \{p \vee \neg q\} \cup \{p\} \cup \{q, \neg q\} = \{p, q, \neg q, p \vee \neg q\}$.
   - $Sub(\neg q \leftrightarrow s) = \{\neg q \leftrightarrow s\} \cup Sub(\neg q) \cup Sub(s) = \{\neg q \leftrightarrow s\} \cup \{q, \neg q\} \cup \{s\} = \{q, \neg q, s, \neg q \leftrightarrow s\}$
   - $$\begin{aligned} Sub(p \vee \neg q \to (\neg q \leftrightarrow s)) &= \{p \vee \neg q \to (\neg q \leftrightarrow s)\} \cup Sub(p \vee \neg q) \cup Sub(\neg q \leftrightarrow s) = \\ &= \{p, q, \neg q, p \vee \neg q, s, \neg q \leftrightarrow s, p \vee \neg q \to (\neg q \leftrightarrow s)\} \end{aligned}$$
2. *Calculamos ahora el conjunto de subfórmulas de $\alpha = r \wedge (p \vee q) \to (\neg p \vee q)$. Entonces:*
   $Sub(\alpha) = \{r \wedge (p \vee q) \to (\neg p \vee q)\} \;\cup\; Sub(r \wedge (p \vee q)) \;\cup\; Sub(\neg p \vee q)$.
   - $Sub(r \wedge (p \vee q)) = \{r \wedge (p \vee q)\} \cup Sub(r) \cup Sub(p \vee q)$.
     - $Sub(r) = \{r\}$.
     - $Sub(p \vee q) = \{p \vee q\} \cup Sub(p) \cup Sub(q) = \{p \vee q\} \cup \{p\} \cup \{q\} = \{p, q, p \vee q\}$.

     Por tanto,
     $Sub(r \wedge (p \vee q)) = \{r \wedge (p \vee q)\} \cup \{r\} \cup \{p, q, p \vee q\} = \{p, q, r, p \vee q, r \wedge (p \vee q)\}$.
   - $Sub(\neg p \vee q) = \{\neg p \vee q\} \cup Sub(\neg p) \cup Sub(q)$.
     - $Sub(\neg p) = \{\neg p\} \cup Sub(p) = \{\neg p\} \cup \{p\} = \{p, \neg p\}$.
     - $Sub(q) = \{q\}$.

Luego $Sub(\neg p \vee q) = \{\neg p \vee q\} \cup \{p, \neg p\} \cup \{q\} = \{p, q, \neg p, \neg p \vee q\}$.

Y volviendo a la fórmula α *se tiene que:*

$$\begin{array}{rl} Sub(\alpha) & = \{r \wedge (p \vee q) \to (\neg p \vee q)\} \cup \{p, q, r, p \vee q, r \wedge (p \vee q)\} \cup \{p, q, \neg p, \neg p \vee q\} \\ & = \{p,\ q,\ r,\ \neg p,\ p \vee q,\ \neg p \vee q,\ r \wedge (p \vee q),\ r \wedge (p \vee q) \to (\neg p \vee q)\} \end{array}$$

Apreciamos en este ejemplo como la definición 10 recoge nuestra idea de reunir a todas las fórmulas que intervenían en la formación de una fórmula α.

Otra forma de llegar a las subfórmulas de una fórmula α es mediante el árbol de formación de α. Este árbol tiene como raíz a la fórmula dada. De este nodo salen una o dos ramas, dependiendo de si la fórmula se ha obtenido a partir de una o dos subfórmulas suyas mediante el uso de una conectiva. Y en cada una de esas ramas situamos a las fórmulas que han dado lugar a α. A su vez de cada uno de estos nodos van colgando ramas hasta llegar a las fórmulas atómicas, que constituyen las hojas del árbol.

Por ejemplo, vamos a construir el árbol de formación de la fórmula $\alpha = p \vee \neg q \to (\neg q \leftrightarrow s)$. En la raíz tenemos la propia fórmula α. Y de este nodo cuelgan dos ramas con las fórmulas $p \vee \neg q$ y $\neg q \leftrightarrow s$, pues α se obtiene a partir de estas dos subfórmulas y la conectiva $\to$

$$\begin{array}{ccc} & p \vee \neg q \to (\neg q \leftrightarrow s) & \\ \swarrow & & \searrow \\ p \vee \neg q & & \neg q \leftrightarrow s \end{array}$$

Ahora, del nodo $p \vee \neg q$ salen dos ramas con las fórmulas p y $\neg q$, mientras que del nodo $\neg q \leftrightarrow s$ salen otras dos ramas con las fórmulas $\neg q$ y s.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & p \vee \neg q \to (\neg q \leftrightarrow s) & & & \\ & & \swarrow & & \searrow & & \\ & p \vee \neg q & & & & \neg q \leftrightarrow s & \\ \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow \\ p & & \neg q & & \neg q & & s \end{array}$$

Tenemos dos nodos que son fórmulas atómicas, y de los otros dos, que tienen ambos a la fórmula $\neg q$ sale una rama con la fórmula q.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & p \vee \neg q \to (\neg q \leftrightarrow s) & & & \\ & & \swarrow & & \searrow & & \\ & p \vee \neg q & & & & \neg q \leftrightarrow s & \\ \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow \\ p & & \neg q & & \neg q & & s \\ & & | & & | & & \\ & & q & & q & & \end{array}$$

Y ya tenemos el árbol de formación de la fórmula α.

Vamos a desglosar la fórmula $r \wedge (p \vee q) \to (\neg p \vee q)$ dando su árbol de formación.

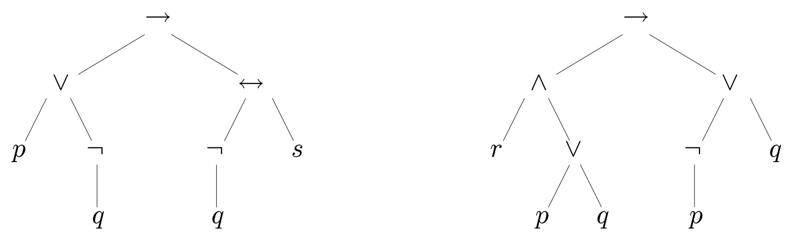
$$\begin{array}{ccccccc} & & & r \wedge (p \vee q) \to (\neg p \vee q) & & & \\ & & \swarrow & & \searrow & & \\ & r \wedge (p \vee q) & & & & \neg p \vee q & \\ \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow \\ r & & p \vee q & & \neg p & & q \\ & \swarrow & & \searrow & | & & \\ & p & & q & p & & \end{array}$$

Con el árbol de formación de una fórmula α, el conjunto de las subfórmulas de α es el conjunto de todos los nodos de árbol.

Si este árbol lo recorremos desde las hojas hasta la raíz, nos da el procedimiento de construcción de la fórmula partiendo desde sus subfórmulas atómicas. Si lo recorremos desde la raíz hasta las hojas, lo que vamos haciendo es ir descomponiendo la fórmula en fórmulas más simples hasta llegar a las fórmulas atómicas.

Observación:

> La estructura de árbol es muy útil para representar las fórmulas. Así, una fórmula sería un árbol que en las hojas tiene las fórmulas atómicas que intervienen y en el resto de los nodos las conectivas. Por ejemplo, las fórmulas $p \vee \neg q \to (\neg q \leftrightarrow s)$ y $r \wedge (p \vee q) \to (\neg p \vee q)$ pueden ser representadas como los árboles:



Ejercicio 2.1.1. *Dadas las siguientes fórmulas, construye su árbol de formación.*

1. $a \wedge \neg b \to c \vee (e \wedge a)$
2. $c \wedge (a \vee b) \to \neg a \vee b$
3. $\neg(a \to b) \to a \wedge \neg(a \wedge b)$
4. $a \wedge (a \vee b \to d) \wedge (d \to \neg a)$
5. $(a \wedge c) \vee b \to d \wedge (d \to \neg a)$
6. $\neg a \to (b \to a) \wedge \neg(a \wedge b)$
7. $(a \wedge \neg(b \to c \vee e)) \vee a$
8. $b \wedge (a \vee b) \to d \wedge \neg(d \to \neg a)$
9. $b \wedge a(\neg b \to d \wedge \neg(d \to \neg a))$
10. $\neg(b \to a) \wedge \neg(a \wedge b) \to \neg a \vee b$

2.2. Semántica de la lógica proposicional

Ya tenemos construido el lenguaje proposicional sobre un conjunto X. Los elementos del conjunto X, así como las fórmulas construidas sobre X no tienen por ahora ningún significado. Una vez hecho esto, vamos a seguir avanzando hacia nuestro objetivo, que no es otro que decidir si un determinado razonamiento es correcto o no. Para esto, podemos optar por dos caminos:

- Camino sintáctico. Consiste en dar una serie de axiomas (que serían esquemas de fórmulas que admitimos como verdaderas), y una o varias reglas, que permiten, a partir de fórmulas que consideramos verdaderas, obtener una nueva fórmula que diremos que también es verdadera. Un ejemplo de axioma podría ser $\alpha \to (\beta \to \alpha)$, y una regla podría ser la conocida como *modus ponens*, que nos dice que si α y $\alpha \to \beta$ son verdaderas, entonces también lo es β. En este camino, no osbstante, no vamos a introducirnos.

- Camino semántico: Le asignamos a cada fórmula de nuestro lenguaje un significado, y basándonos en las posibles asignaciones que podamos hacer definimos lo que sería una deducción correcta.

Nosotros vamos a optar por la segunda opción.

2.2.1. Interpretaciones o valoraciones

El concepto fundamental es el de interpretación.

Definición 11. *Dado un lenguaje proposicional construido sobre el conjunto X, una interpretación es una aplicación $I : X \to \mathbb{Z}_2$.*

Una interpretación lo que hace es asignar un valor de verdad a cada una de las proposiciones atómicas. Si I es una interpretación y p es una fórmula atómica para la que $I(p) = 0$, diremos que p *se interpreta como falsa* o *es falsa* bajo la interpretación I. Por el contrario, si $I(p) = 1$, diremos que p *se interpreta como verdadera*.

Una vez que hemos asignado un valor de verdad a las proposiciones atómicas, lo extendemos a todas las fórmulas del lenguaje mediante las siguientes reglas.

Definición 12. *Dado un lenguaje proposicional cuyo conjunto de fórmulas atómicas es X, y dada una interpretación $I : X \to \mathbb{Z}_2$, extendemos la aplicación I al conjunto $\mathtt{Form}(X)$ siguiendo las siguientes reglas:*

$$
\begin{array}{l}
I(\alpha \vee \beta) = I(\alpha) + I(\beta) + I(\alpha) \cdot I(\beta) \\
I(\alpha \wedge \beta) = I(\alpha) \cdot I(\beta) \\
I(\alpha \to \beta) = 1 + I(\alpha) + I(\alpha) \cdot I(\beta) \\
I(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1 + I(\alpha) + I(\beta) \\
I(\neg\alpha) = 1 + I(\alpha)
\end{array}
$$

Cuadro 2.1: Interpretaciones y conectivas

Observación:

1. Los cálculos que indicamos se realizan en $\mathbb{Z}_2$. Por tanto, la suma que aparece es la suma algebraica, y no la suma booleana. Significa esto que $1 + 1$ vale 0, y no 1. Si α es una fórmula, al valor $I(\alpha)$ se le conoce como *valor de verdad de la fórmula* α bajo la interpretación I. Si vale 1, diremos que α es *verdadera* en esta interpretación, mientras que si vale 0 diremos que es *falsa*.

   Es frecuente hablar de valoraciones en lugar de interpretaciones. En tal caso, en lugar de la letra I para representar una interpretación se suele usar la letra v.

2. Vamos a explicar un poco las reglas que hemos dado para las distintas conectivas.

   a) Comenzamos por la conectiva $\vee$, es decir, la disyunción. Esta conectiva viene a representar la conjunción *o* del español.
   Sin embargo, podemos distinguir dos usos del *o* español: el *o inclusivo* y el *o exclusivo*. Veamos algunos ejemplos:
   En una oferta de trabajo piden a un candidato que tenga conocimientos de inglés o de francés. En tal caso, podría presentarse una persona que supiera francés pero no inglés, que supiera inglés pero no francés, o que dominara ambas lenguas. No podría presentarse alguien que no hablara ninguna de las dos. Este es un ejemplo del uso del *o inclusivo*.
   Pero imaginemos que vamos a subir a un ascensor, y al entrar nos encontramos a alguien que nos pregunta "¿subes o bajas?" El uso de este *o* es diferente al ejemplo anterior, ya que en la pregunta no se contempla la posibilidad de que suba y baje. Estamos hablando entonces de un *o exclusivo*. Hay quien opina que la exclusividad no se encuentra en el *o*, sino en el contexto en que se desarrolla la acción, pues no es posible que se den las dos situaciones a la vez.
   Esta situación es similar a la que se presenta en teoría de conjuntos. La unión de conjuntos es *inclusiva* (pues en la unión de dos conjuntos A y B están los elementos

que pertenecen simultáneamente a A y a B), mientras que la diferencia simétrica es *exclusiva* (pues en la diferencia simétrica de A y B están los elementos que están en A o en B pero no los que están en ambos a la vez). En el caso de que $A \cap B = \emptyset$, la unión y la diferencia coinciden, pero no porque la unión sea exclusiva, sino porque el contexto (conjuntos disjuntos) no permite que la unión sea inclusiva.
La idea del *o inclusivo* es la que se quiere reflejar en la regla que hemos dado para la interpretación de la disyunción de dos fórmulas. $I(\alpha \vee \beta) = I(\alpha) + I(\beta) + I(\alpha) \cdot I(\beta)$. Si α y β son las dos falsas, entonces $\alpha \vee \beta$ debe ser también falsa, mientras que si al menos una de las dos es verdadera, entonces la disyunción de ambas (es decir, $\alpha \vee \beta$), debe ser verdadera.
Para el *o exclusivo* hay otra conectiva, que se denota como $\oplus$.

b) Vamos con la conectiva $\wedge$, es decir, la conjunción. Esta conectiva viene a representar la conjunción *y* del español.
La oración "Juan y Pedro son altos" será verdadera si tanto Juan como Pedro son altos. Es decir, si la oración "Juan es alto" y la oración "Pedro es alto" son ambas verdaderas. En cuanto uno de los dos no sea alto, entonces sería falso decir "Juan y Pedro son altos".
Esto queda recogido en la regla $I(\alpha \wedge \beta) = I(\alpha) \cdot I(\beta)$. Si tanto $I(\alpha)$ como $I(\beta)$ valen 1 entonces $I(\alpha \wedge \beta) = 1$, mientras que en otro caso, $I(\alpha \wedge \beta) = 0$.
En ocasiones, el *y* incluye un matiz de temporalidad. No significan lo mismo las frases *Se asustó y se encerró en su casa* y *Se encerró en su casa y se asustó.*
Sin embargo, en el lenguaje proposicional las fórmulas $\alpha \wedge \beta$ y $\beta \wedge \alpha$ tienen siempre el mismo significado.
Es claro que con este lenguaje formal no podemos recoger toda la riqueza de una lengua.
Otra forma de leer la fórmula $\alpha \wedge \beta$ podría ser α *pero* β.

c) Comentamos ahora la conectiva $\rightarrow$, es decir, la implicación. Esta conectiva viene a representar el condicional, y como ya hemos dicho, $\alpha \rightarrow \beta$ se suele leer *si* α *entonces* β, aunque hay otras muchas lecturas posibles. Algunas de ellas podrían ser: α *es suficiente para* β, β *cuando* α, α *implica* β, β *siempre que* α, β *es necesario para* α, etc.
En un condicional *si* α *entonces* β, llamaremos *antecedente* a la fórmula α y *consecuente* a la fórmula β.
El valor de verdad asignado a la fórmula $\alpha \rightarrow \beta$ suele generar confusión, especialmente en el caso de que $I(\alpha) = 0$ e $I(\beta) = 1$, aunque también en el caso en que $I(\alpha) = I(\beta) = 0$. En el primer caso, $I(\alpha \rightarrow \beta) = 1 + I(\alpha) + I(\alpha) \cdot I(\beta) = 1 + 0 + 0 \cdot 1 = 1$, mientras que en el segundo, $I(\alpha \rightarrow \beta) = 1 + I(\alpha) + I(\alpha) \cdot I(\beta) = 1 + 0 + 0 \cdot 0 = 1$.
Resulta extraño que frases como *si* $2 + 2 = 5$ *los pájaros vuelan* o *si mi novia es extraterrestre, los perros tiene alas* sean consideradas como verdaderas. Esta extrañeza viene porque en un condicional tendemos a ver una relación entre el antecedente y el consecuente, y en estas frases no existe. No tiene nada que ver el que $2 + 2$ valga 5 con que los pájaros vuelen o no.
Pero el lenguaje proposicional que se quiere construir debe ser independiente del significado concreto de un enunciado. Parece claro que un enunciado del tipo *si Belén es alta y delgada entonces Belén es alta* debe ser cierto independientemente de cómo sea Belén. Incluso, debe ser cierto aunque Belén no exista, pues la verdad de ese enunciado está en la estructura de la frase. En el caso de que Belén no sea alta, tenemos una situación de antecedente y consecuente falsos, mientras que si Belén es alta, pero no delgada, tenemos un antecedente falso y un consecuente verdadero. Y en ambos casos, el condicional es verdadero. La única situación que no puede darse es que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso.
Y esto es lo que se ha recogido con la regla $I(\alpha \rightarrow \beta) = 1 + I(\alpha) + I(\alpha) \cdot I(\beta)$. Si $I(\alpha) = 1$ e $I(\beta) = 0$ tenemos que $I(\alpha \rightarrow \beta) = 1 + 1 + 1 \cdot 0 = 0$, mientras que en

cualquier otro caso, $I(\alpha \to \beta) = 1$.

d) En cuanto a la equivalencia, es decir, la conectiva $\leftrightarrow$, lo que tenemos es que $\alpha \to \beta$ se interpreta como verdadera cuando α y β tienen el mismo valor de verdad, y se interpreta como falsa cuando tienen diferente valor de verdad. Algunas lecturas de la fórmula $\alpha \leftrightarrow \beta$ son: *α si, y sólo si, β*, *α es necesario y suficiente para β*, *α equivale a β*, *si α entonces β y recíprocamente*, etc.
En español es poco frecuente el uso de frases con expresiones de la forma *si, y sólo si.* Pero sí ocurre en ocasiones que se expresa un doble condicional con construcciones tales como *si, entonces* o *solo si*. Por ejemplo, al decirle a un niño *si te comes el segundo plato, te podrás tomar el postre*, implícitamente le estamos diciendo que sólo se podrá tomar el postre si se come el segundo plato.

e) Por último, la negación lo que hace es cambiar el valor de verdad de α. Es decir, si α es cierta (bajo una interpretación) entonces $\neg\alpha$ es falsa (bajo esa misma interpretación) y si α es falsa entonces $\neg\alpha$ es cierta. Esto se recoge en la fórmula $I(\neg\alpha) = 1 + I(\alpha)$.

3. Si el conjunto de proposiciones atómicas de partida tiene n elementos, entonces podemos definir un total de 2^n interpretaciones diferentes.

Ejemplo 2.2.1.

Consideremos el conjunto de fórmulas atómicas $X = \{a, b\}$ y la interpretación $I_1 : X \to \mathbb{Z}_2$ dada por

$$I_1(a) = 0; \qquad I_1(b) = 1$$

Vamos a calcular el valor de verdad de la fórmula $\beta = a \wedge b \to \neg a$.
Para esto, calculamos previamente $I_1(a \wedge b)$ e $I_1(\neg a)$.
Tenemos que $I_1(a \wedge b) = I_1(a) \cdot I_1(b) = 0 \cdot 1 = 0$ y que $I_1(\neg a) = 1 + I_1(a) = 1 + 0 = 1$.
Con esto, podemos calcular $I_1(a \wedge b \to \neg a)$.

$$I_1((a \wedge b) \to \neg a) = 1 + I_1(a \wedge b) + I_1(a \wedge b) I_1(\neg a) = 1 + 0 + 0 \cdot 1 = 1$$

Por tanto la fórmula β es verdadera bajo la interpretación I_1.
Tomemos ahora otra interpretación. Concretamente, la siguiente:

$$I_2(a) = 1; \qquad I_2(b) = 1$$

y volvemos a calcular en la misma secuencia que antes el valor de verdad para la misma fórmula β.
$I_2(a \wedge b) = I_2(a) \cdot I_2(b) = 1 \cdot 1 = 1$; $I_2(\neg a) = 1 + I_2(a) = 1 + 1 = 0$. Por tanto,

$$I_2((a \wedge b) \to \neg a) = 1 + I_2(a \wedge b) + I_2(a \wedge b) I_2(\neg a) = 1 + 1 + 1 \cdot 0 = 0$$

Tenemos ahora que la fórmula β es falsa bajo la interpretación I_2.

En este ejemplo observamos que para el cálculo del valor de verdad de una fórmula bajo una interpretación nos hace falta calcular el valor de verdad de las subfórmulas. Y estas se van calculando partiendo de las fórmulas atómicas recorriendo el árbol de formación hacia la raíz, aplicando las reglas de la tabla 2.1 para calcular el valor de verdad de cada nodo.

Supongamos ahora que tenemos la fórmula β del ejemplo anterior, y queremos calcular el valor de verdad de β para una interpretación arbitraria. Tenemos entonces:

$$\begin{array}{rcl} I(\beta) & = & 1 + I(a \wedge b) + I(a \wedge b) \cdot I(\neg a) \\ & = & 1 + I(a) \cdot I(b) + I(a) \cdot I(b) \cdot (1 + I(a)) \\ & = & 1 + I(a) \cdot I(b) + I(a) \cdot I(b) + I(a) \cdot I(b) \cdot I(a) \\ & = & 1 + 0 + I(a)^2 \cdot I(b) \\ & = & 1 + I(a) \cdot I(b) \end{array}$$

Donde hemos usado que $I(a) \cdot I(b) + I(a) \cdot I(b) = 0$ y que $I(a)^2 = I(a)$ (por estar en $\mathbb{Z}_2$). Al final hemos obtenido que para cualquier interpretación I se tiene que

$$I(a \wedge b \to \neg a) = 1 + I(a) \cdot I(b)$$

Esta expresión se conoce como *polinomio de Gegalkine* de la fórmula β. El polinomio de Gegalkine de una fórmula α es un polinomio, con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$, con tantas variables como fórmulas atómicas intervengan en α (aunque algunas podrían no aparecer), y que nos da el valor de verdad de la fórmula para cada interpretación.

Tomamos la misma fórmula β, y para la interpretación I_2 tenemos que $I_2(\beta) = 1 + I_2(a) \cdot I_2(b) = 1 + 1 \cdot 1 = 1 + 1 = 0$, como ya habíamos obtenido antes.

Observación:

1. La escritura *Gegalkine* proviene de una transcripción del alfabeto cirílico. Por tal motivo en la literatura podemos encontrarlo también como polinomio de Zhegalkine.
2. Aunque formalmente es incorrecto, para el cálculo del polinomio de Gegalkine a veces se identifica cada fórmula proposicional con la correspondiente variable del polinomio de Gegalkine. Teniendo en cuenta esto, podríamos haber escrito

$$a \wedge b \to \neg a = 1 + a \wedge b + (a \wedge b)(\neg a) = 1 + a \cdot b + (a \cdot b) \cdot (1 + a) = 1 + a \cdot b + a \cdot b + a \cdot b \cdot a = 1 + a^2 \cdot b = 1 + a \cdot b$$

   En cualquier caso, nosotros evitaremos esta escritura.
3. Aunque nosotros no la hemos usado, algunos autores emplean la conectiva $\oplus$, que se corresponde con el *o exclusivo*. Con esta conectiva se tiene que $I(\alpha \oplus \beta) = I(\alpha) + I(\beta)$, lo que permite identificar el *o exclusivo* con la suma algebraica (de la misma forma que podemos identificar la conectiva $\wedge$ con el producto). Por tal motivo, en algunos lugares podemos encontrar el polinomio de Gegalkine como una expresión de una fórmula en la que se usan únicamente las conectivas $\oplus$ y $\wedge$.

Ejemplo 2.2.2.

Vamos a calcular el polinomio de Gegalkine de la fórmula $\alpha = \neg(a \to b) \to (\neg a \to \neg b)$. Para esto, vamos a calcular el polinomio de Gegalkine de las subfórmulas $\neg(a \to b)$ y $\neg a \to \neg b$.

Comenzamos con la primera:

$$\begin{aligned} I(\neg(a \to b)) &= 1 + I(a \to b) \\ &= 1 + 1 + I(a) + I(a) \cdot I(b) \\ &= I(a) + I(a) \cdot I(b) \end{aligned}$$

Y ahora

$$\begin{aligned} I(\neg a \to \neg b) &= 1 + I(\neg a) + I(\neg a) \cdot I(\neg b) \\ &= 1 + 1 + I(a) + (1 + I(a)) \cdot (1 + I(b)) \\ &= I(a) + 1 + I(a) + I(b) + I(a) \cdot I(b) \\ &= 1 + I(b) + I(a) \cdot I(b) \end{aligned}$$

Y con esto,

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= 1 + I(\neg(a \to b)) + I(\neg(a \to b)) \cdot I(\neg a \to \neg b) \\ &= 1 + I(a) + I(a) \cdot I(b) + (I(a) + I(a) \cdot I(b)) \cdot (1 + I(b) + I(a) \cdot I(b)) \\ &= 1 + I(a) + I(a) \cdot I(b) + I(a) + I(a) \cdot I(b) + I(a)^2 \cdot I(b) + I(a) \cdot I(b) + I(a) \cdot I(b)^2 + I(a)^2 \cdot I(b)^2 \\ &= 1 + I(a) + I(a) \cdot I(b) + I(a) + I(a) \cdot I(b) + I(a) \cdot I(b) + I(a) \cdot I(b) + I(a) \cdot I(b) + I(a) \cdot I(b) \\ &= 1 + 2 \cdot I(a) + 6 \cdot I(a) \cdot I(b) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Es decir, el polinomio de Gegalkine es el polinomio constante 1. Esto significa que bajo cualquier interpretación de las proposiciones atómicas el valor de verdad de la fórmula α es 1. A las fórmulas que verifican esta propiedad las llamaremos *tautologías*.

2.2.2. Tabla de verdad para una fórmula

Supongamos que α es una fórmula construida sobre el conjunto $X = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. El número posible de interpretaciones que podemos definir es 2^n (tantas como aplicaciones $X \to \mathbb{Z}_2$).

Podemos entonces crear una tabla con las 2^n interpretaciones que existen. Esta tabla se conoce como *tabla de verdad* de la fórmula α. Puesto que las interpretaciones se calculan siguiendo las reglas dadas en el cuadro 2.1, vamos a dar la tabla de las cinco conectivas:

α	β	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \to \beta$	$\alpha \leftrightarrow \beta$	$\neg\alpha$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

Cuadro 2.2: Tabla de verdad

En ella se han recogido todas las posibilidades para los valores de verdad de una fórmula en la que sólo aparece una conectiva. A partir de esta tabla se pueden calcular los valores de verdad de una fórmula cualquiera para todas las interpretaciones posibles del conjunto de fórmulas atómicas que intervengan, es decir, la tabla de verdad de esa fórmula.

Ejemplo 2.2.3.

1. *Consideremos la fórmula*

$$\alpha = \neg(a \to b) \to (\neg a \to \neg b)$$

Vamos a obtener su tabla de verdad. Para eso, vamos a partir de todas las posibles interpretaciones que podemos dar a las proposiciones atómicas que intervienen en la fórmula α, y las vamos a ir extendiendo a las distintas subfórmulas de α.

El conjunto de subfórmulas es $\{a,\ b,\ a \to b,\ \neg(a \to b),\ \neg a,\ \neg b,\ \neg a \to \neg b,\ \neg(a \to b) \to (\neg a \to \neg b)\}$, en el que vemos que hay dos atómicas, lo que nos dice que tenemos un total de cuatro posibles interpretaciones.

La tabla que habría que rellenar es la siguiente:

a	b	$a \to b$	$\neg(a \to b)$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \to \neg b$	$\neg(a \to b) \to (\neg a \to \neg b)$
0	0						
0	1						
1	0						
1	1						

donde hemos indicado ya las cuatro posibles interpretaciones. Ahora podemos rellenar las columnas tercera ($a \to b$), quinta ($\neg a$) y sexta ($\neg b$).

a	b	$a \to b$	$\neg(a \to b)$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \to \neg b$	$\neg(a \to b) \to (\neg a \to \neg b)$
0	0	1		1	1		
0	1	1		1	0		
1	0	0		0	1		
1	1	1		0	0		

La tercera nos permite rellenar la cuarta ($\neg(a \to b)$), mientras que la quinta y la sexta nos permiten rellenar la séptima ($\neg a \to \neg b$).

a	b	$a \to b$	$\neg(a \to b)$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \to \neg b$	$\neg(a \to b) \to (\neg a \to \neg b)$
0	0	1	0	1	1	1	
0	1	1	0	1	0	0	
1	0	0	1	0	1	1	
1	1	1	0	0	0	1	

Y ahora, apoyándonos en la cuarta y séptima (y en la quinta columna del cuadro 2.2) rellenamos la octava que es la que nos interesa.

a	b	$a \to b$	$\neg(a \to b)$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \to \neg b$	$\neg(a \to b) \to (\neg a \to \neg b)$
0	0	1	0	1	1	1	**1**
0	1	1	0	1	0	0	**1**
1	0	0	1	0	1	1	**1**
1	1	1	0	0	0	1	**1**

Y podemos ver como la fórmula α se interpreta como verdadera en cualquier caso, algo que ya habíamos comprobado al calcular su polinomio de Gegalkine.

2. *Vamos a tomar la fórmula $\beta = a \wedge b \to \neg a$. Sabemos que su polinomio de Gegalkine es $1 + I(a) \cdot I(b)$. Vamos a calcular la tabla de verdad de esta fórmula, y vamos a añadirle una columna a la derecha en la que evaluaremos la expresión $1 + I(a) \cdot I(b)$, y comprobaremos como esta columna coincide con los valores de verdad de β.*

a	b	$a \wedge b$	$\neg a$	$a \wedge b \to \neg a$	$1 + I(a) \cdot I(b)$
0	0	0	1	1	$1 + 0 \cdot 0 = \mathbf{1}$
0	1	0	1	1	$1 + 0 \cdot 1 = \mathbf{1}$
1	0	0	0	1	$1 + 1 \cdot 0 = \mathbf{1}$
1	1	1	0	0	$1 + 1 \cdot 1 = \mathbf{0}$

3. *Sea ahora la fórmula:*

$$\varphi = (a \wedge b \to c) \wedge (\neg(a \wedge b) \to d)$$

Vamos a calcular su tabla de verdad. Puesto que intervienen cuatro fórmulas atómicas, la tabla de verdad tiene $2^4 = 16$ filas.

2.2.3. Clasificación de fórmulas

Hemos visto en la sección precedente que hay fórmulas que son ciertas para cualquier interpretación. Es lo que hemos llamado una tautología. Según los valores de verdad que toma una fórmula, podemos clasificarla en alguno de los siguientes grupos:

Definición 13. *Sea α una fórmula de un lenguaje proposicional:*

1. *α es una* **tautología** *si para cualquier interpretación I se tiene que $I(\alpha) = 1$.*
2. *α es* **satisfacible** *si existe al menos una interpretación I para la que $I(\alpha) = 1$.*
3. *α es* **refutable** *si existe al menos una interpretación I para la que $I(\alpha) = 0$.*
4. *α es* **contradicción** *si para cualquier interpretación I se tiene que $I(\alpha) = 0$.*
5. *α es* **contingente** *si es satisfacible y refutable.*

Veamos algunos ejemplos:

a	b	c	d	$a \wedge b$	$a \wedge b \to c$	$\neg(a \wedge b)$	$\neg(a \wedge b) \to d$	φ
0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	1	1

Ejemplo 2.2.4.

- *La fórmula* $\alpha = p \to (q \to p)$ *es una tautología. Para comprobarlo, construyamos su tabla de verdad:*

p	q	$q \to p$	$p \to (q \to p)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

  y vemos que la fórmula es cierta para cualquier interpretación.

  La fórmula también es satisfacible, pues hay una interpretación (en este caso todas) para la que la fórmula es cierta.

- *La fórmula* $\alpha = p \vee \neg q \to \neg r \wedge (q \to p)$ *es satisfacible. Esto podemos comprobarlo si tomamos, por ejemplo, la interpretación* $I(p) = I(q) = 1, I(r) = 0$ *pues en tal caso se tiene que* $I(\alpha) = 1$*, ya que:*

  $I(p \vee \neg q) = 1$; $I(q \to p) = 1$; $I(\neg r) = 1$; $I(\neg r \wedge (q \to p)) = 1$ *y por tanto,* $I(\alpha) = 1$.

  También es refutable, pues para la interpretación $I(p) = I(q) = I(r) = 1$ *la fórmula es falsa.*

  $I(p \vee \neg q) = 1$; $I(q \to p) = 1$; $I(\neg r) = 0$; $I(\neg r \wedge (q \to p)) = 0$ *y por tanto,* $I(\alpha) = 0$.

  La fórmula α *es entonces contingente.*

- *La fórmula* $\alpha = (p \to \neg q) \wedge (p \wedge q)$ *es una contradicción, pues su tabla de verdad es*

p	q	$\neg q$	$p \to \neg q$	$p \wedge q$	$(p \to \neg q) \wedge (p \wedge q)$
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0

Observación:

1. Podemos considerar las fórmulas divididas en cuatro grupos: tautologías, satisfacibles, refutables y contradicciones.

   En tal caso, cada fórmula pertenece exactamente a dos de estos grupos. Puede ser tautología y satisfacible, puede ser satisfacible y refutable, o puede ser refutable y contradicción.

2. Si en lugar de dividirlas en los cuatro grupos anteriores lo hacemos en los tres siguientes: tautologías, contingentes y contradicciones; entonces cada fórmula pertenece a uno (y sólo uno) de esos tres grupos.

3. Si α es una fórmula, no significa lo mismo decir α *no es tautología* que decir $\neg\alpha$ *es tautología*.

   En el primer caso estamos diciendo que α es refutable, mientras que en el segundo que α es contradicción.

   Es decir, α es refutable si, y sólo si, α no es tautología; y α es contradicción si, y sólo si, $\neg\alpha$ es tautología.

A continuación vamos a enumerar algunas fórmulas que son tautologías. Tanto α, β como γ representan fórmulas cualesquiera de un lenguaje proposicional (no necesariamente fórmulas atómicas). Mediante una tabla de verdad, o con el polinomio de Gegalkine podemos comprobarlo.

1. $\alpha \rightarrow \alpha$.
2. $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$.
3. $\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$.
4. $\alpha \vee \beta \rightarrow \beta \vee \alpha$.
5. $\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta \wedge \alpha$.
6. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$.
7. $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$.
8. $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$.
9. $\alpha \vee \neg\alpha$.
10. $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$.
11. $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge \alpha) \rightarrow \beta$.
12. $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha$.
13. $((\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha) \rightarrow \beta$.
14. $(\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$.
15. $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$.
16. $(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha)$.
17. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$.
18. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \vee \gamma \rightarrow \beta))$.
19. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \wedge \gamma))$.

2.3. Equivalencia Lógica

Uno de los conceptos más importantes en la lógica proposicional es el de *equivalencia lógica*. Aquí damos una definición semántica, en función del significado de las fórmulas. Podría darse también definirse la equivalencia lógica de forma sintáctica.

Definición 14. *Sean α, β dos fórmulas de un lenguaje proposicional. Se dice que son lógicamente equivalentes si para cualquier interpretación I se tiene que $I(\alpha) = I(\beta)$.*

Es decir, las dos fórmulas tienen, en cualquier caso, el mismo significado.

Si α y β son dos fórmulas lógicamente equivalentes, escribiremos $\alpha \equiv \beta$.

Para determinar la equivalencia lógica de dos fórmulas podemos usar los dos métodos que hemos descrito en la sección anterior (calcular el polinomio de Gegalkine de ambas fórmulas, o calcular la tabla de verdad). Más adelante veremos otras formas para estudiar la equivalencia lógica. Podemos también utilizar el siguiente resultado:

Sean α y β dos fórmulas. Son equivalentes:

1. α y β son lógicamente equivalentes:
2. $\alpha \leftrightarrow \beta$ es una tautología.
3. $\alpha \leftrightarrow \neg\beta$ es una contradicción.
4. $\alpha \to \beta$ y $\beta \to \alpha$ son tautologías.

Observación: Si α es una fórmula, β_1 es una subfórmula de α y β_2 es una fórmula lógicamente a β_1, entonces la fórmula que resulta de sustituir en α una aparición de β_1 por β_2 es lógicamente equivalente a α.

Enumeramos a continuación una serie de equivalencias lógicas que es conveniente memorizar.

$$\begin{array}{rcl}
\alpha & \equiv & \neg\neg\alpha \\
\alpha \to \beta & \equiv & \neg\alpha \vee \beta \\
\alpha \leftrightarrow \beta & \equiv & (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha) \\
\neg(\alpha \wedge \beta) & \equiv & \neg\alpha \vee \neg\beta \\
\neg(\alpha \vee \beta) & \equiv & \neg\alpha \wedge \neg\beta \\
\alpha \vee (\beta \vee \gamma) & \equiv & (\alpha \vee \beta) \vee \gamma \\
\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) & \equiv & (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \\
\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) & \equiv & (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \wedge \gamma) \\
\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) & \equiv & (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)
\end{array}$$

Cuadro 2.3: Equivalencias

Cuando hablamos de las reglas de prioridad de las conectivas, estuvimos viendo el caso en que hubiera dos conectivas $\vee$ (o dos conectivas $\wedge$ o dos conectivas $\leftrightarrow$) seguidas. Es decir, el caso en que tuviéramos una fórmula de la forma $\alpha \vee \beta \vee \gamma$. Dijimos entonces que asociaríamos por la izquierda (es decir, $\alpha \vee \beta \vee \gamma$ sustituía a $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma$). Puesto que $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma$ es lógicamente equivalente a $\alpha \vee (\beta \vee \gamma)$ no es relevante el que asociemos por la izquierda o por la derecha, y por tanto, aún tratándose de fórmulas distintas, puede escribirse $\alpha \vee \beta \vee \gamma$. Lo mismo vale para $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ y para $\alpha \leftrightarrow \beta \leftrightarrow \gamma$. Vamos a hacer una tabla para justificar esta última:

α	β	γ	$\alpha \leftrightarrow \beta$	$(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow \gamma$	$\beta \leftrightarrow \gamma$	$\alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma)$
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Y vemos como las columnas correspondientes a $(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow \gamma$ y $\alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma)$ coinciden.

Vamos a calcular también las tablas de verdad de $(\alpha \to \beta) \to \gamma$ y de $\alpha \to (\beta \to \gamma)$

α	β	γ	$\alpha \to \beta$	$(\alpha \to \beta) \to \gamma$	$\beta \to \gamma$	$\alpha \to (\beta \to \gamma)$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Y vemos aquí que no coinciden las columnas de $(\alpha \to \beta) \to \gamma$ y de $\alpha \to (\beta \to \gamma)$, lo cual hace recomendable el uso de los paréntesis.

Pregunta: ¿Pueden ser lógicamente equivalentes dos fórmulas en las que aparezcan conjuntos distintos de proposiciones atómicas?

2.4. Consecuencia lógica

2.4.1. Conjuntos satisfacibles e insatisfacibles

En esta sección estudiaremos el que posiblemente sea el concepto más importante de la lógica. El de la consecuencia lógica. Esto nos dirá cuando, a partir de una serie de enunciados, otro enunciado puede deducirse de ellos.

Antes de definirlo, necesitamos algunos conceptos previos.

Definición 15. *Sea $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}$ un conjunto de fórmulas de un lenguaje proposicional. Se dice que Γ es* satisfacible *si existe una interpretación I para la que $I(\gamma_1) = I(\gamma_2) = \cdots = I(\gamma_n) = 1$.*

Si $\Gamma = \emptyset$ entonces Γ es satisfacible.

Un conjunto de fórmulas es insatisfacible si no es satisfacible.

Es decir, un conjunto es satisfacible si existe una iterpretación para la que todas las fórmulas son ciertas. En el caso del conjunto vacío, cualquier interpretación hace ciertas (y falsas) todas las fórmulas. Por tanto, el conjunto vacío es satisfacible.

Se tiene entonces que Γ es insatisfacible si no existe ninguna interpretación I que haga ciertas todas las fórmulas. Si $\Gamma \neq \emptyset$ esto es equivalente a que para cualquier interpretación I existe un elemento $\alpha \in \Gamma$ tal que $I(\alpha) = 0$.

Un conjunto de fórmulas puede ser satisfacible o insatisfacible (pero no tautología, contingente, etc.).

Una fórmula puede ser satisfacible, refutable, tautología, contradicción o contingente.

Si un conjunto Γ tiene un único elemento, es decir, $\Gamma = \{\gamma\}$ entonces Γ es satisfacible si, y sólo si, γ es satisfacible. Y Γ es insatisfacible si, y sólo si, γ es una contradicción.

La siguiente proposición nos dice que estudiar si un conjunto de fórmulas es satisfacible o insatisfacible se puede hacer estudiando la satisfacibilidad o no de una fórmula.

Proposición 2.4.1. *Sea* $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}$ *un conjunto de fórmulas. Entonces son equivalentes:*

1. Γ *es insatisfacible*
2. $\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ *es contradicción.*
3. *Para cualquier interpretación* I, $I(\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n) = 0$.
4. *Para cualquier interpretación* I, $\prod_{i=1}^{n} I(\gamma_i) = 0$.

Notemos que si $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}$ es un conjunto de fórmulas, y una (o más) de las fórmulas γ_i es de la forma $\gamma_i = \gamma_{i1} \wedge \gamma_{i2}$, entonces Γ es insatisfacible si, y sólo si, lo es el conjunto que resulta de sustituir en Γ la fórmula γ_i por las dos fórmulas γ_{i1} y γ_{i2}.

Ejemplo 2.4.1.

1. *El conjunto* $\{p \vee q, \neg p, \neg q\}$ *es insatisfacible. Es claro que las tres fórmulas no pueden ser verdaderas a la vez, pues si* $\neg p$ *y* $\neg q$ *son ciertas, entonces* $p \vee q$ *es falsa.*

   Vamos a comprobarlo haciendo la tabla de verdad de las tres fórmulas:

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$\neg q$
0	0	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	1	0	1
1	1	1	0	0

   podemos ver que en ninguna fila los tres últimos elementos valen 1.

2. *Sean* $\gamma_1 = p \vee \neg q \to q$, $\gamma_2 = p \leftrightarrow q$ *y* $\gamma_3 = q \to (p \leftrightarrow \neg q)$. *Entonces el conjunto* $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ *es también insatisfacible. La tabla de verdad de las tres fórmulas (no vamos a indicar los pasos intermedios) es:*

p	q	$p \vee \neg q \to p$	$p \leftrightarrow q$	$q \to (p \leftrightarrow \neg q)$
0	0	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	0

   y vemos que no hay ninguna interpretación para la que las tres fórmulas sean ciertas. Obviamente, si calculáramos la tabla de verdad de $\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_3$ *nos quedaría una columna con todo ceros.*

p	q	$p \vee \neg q \to p$	$p \leftrightarrow q$	$q \to (p \leftrightarrow \neg q)$	$(\gamma_1 \wedge \gamma_2) \wedge \gamma_3$
0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0

2.4.2. Implicación semántica.

Al comienzo del tema pusimos un ejemplo de un razonamiento elemental que todos consideramos correcto. A partir de dos premisas: *Juan estudia matemáticas o informática* y *Juan no estudia matemáticas*, llegamos a una conclusión: *Juan estudia informática.* Este razonamiento lo consideramos correcto porque es independiente de que Juan estudie o no matemáticas, estudie o no informática, incluso de que esta persona Juan exista. De hecho, cuando he escrito esto no estoy pensando en ninguna persona en concreto. Seguiría siendo igualmente válido si en lugar de Juan pusiera "mi perro" (por cierto, no tengo perro). La validez o no del razonamiento no está en la verdad individual de cada uno de los enunciados, sino que, en el caso de que las premisas fueran ciertas, no queda otra opción que la conclusión sea también cierta.

Y esta es la idea que recoge el concepto de implicación semántica o consecuencia lógica. Cuando las premisas o hipótesis son ciertas, la conclusión tiene que serlo.

Definición 16. *Sea Γ un conjunto de fórmulas de un lenguaje proposicional y sea α una fórmula del mismo lenguaje. Decimos que α es consecuencia lógica de Γ si para cualquier interpretación para la que todas las proposiciones de Γ sean verdaderas se tiene que la fórmula α es también cierta.*

En tal caso, escribiremos:

$$\Gamma \vDash \alpha$$

y leeremos

$$\alpha \text{ es consecuencia lógica de } \Gamma$$

o también

$$\Gamma \text{ implica semánticamente } \alpha.$$

A las fórmulas del conjunto Γ se les llama *premisas* o *hipótesis*, mientras que α se le llama *conclusión* o *tesis*. La expresión $\Gamma \vDash \alpha$ corresponde un razonamiento lógicamente correcto.

Observación:

Si $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}$ y $\Gamma \vDash \alpha$, escribiremos $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n \vDash \alpha$.

Para ver si $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n \vDash \alpha$ tenemos que comprobar que ocurre **sólo** en las interpretaciones en que todas las premisas sean ciertas. Si para esas interpretaciones la conclusión (α) es también cierta, entonces la implicación semántica será cierta.

Pero si hay alguna interpretación I tal que $I(\gamma_1) = I(\gamma_2) = \cdots = I(\gamma_n) = 1$ e $I(\alpha) = 0$ (es decir, las premisas son ciertas y la conclusión es falsa), entonces α no es consecuencia lógica de $\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}$.

Cuando el conjunto Γ sea vacío, la expresión $\Gamma \vDash \alpha$ significa que α es una tautología. En tal caso, escribiremos $\vDash \alpha$.

Ejemplo 2.4.2.

Vamos a comprobar que $p \vee q, \neg p \vDash q$. Para esto, calculamos la tabla de verdad de las fórmulas $p \vee q$, $\neg p$ y q.

	p	q	$p \vee q$	$\neg p$	q
I_0	0	0	0	1	0
I_1	0	1	1	1	1
I_2	1	0	1	0	0
I_3	1	1	1	0	1

Y ahora nos fijamos en las interpretaciones en las que $p \vee q$ y $\neg p$ se interpretan como ciertas. Esto sólo ocurre con la interpretación I_1. Y para esta interpretación, I_1, se tiene que q se interpreta como cierta ($I_1(q) = 1$). Por tanto, q es consecuencia lógica de $p \vee q$ y $\neg p$.

Teorema 2.4.1. . *Sea Γ un conjunto de fórmulas y α otra fórmula. Son equivalentes:*

1. $\Gamma \vDash \alpha$
2. $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ *es insatisfacible.*

3. *Para cualquier interpretación I, se tiene que* $[\prod_{\gamma\in\Gamma} I(\gamma)](1 + I(\alpha)) = 0$

Demostración: La equivalencia entre 1 y 2 puede verse como sigue:

Supongamos que $\Gamma \vDash \alpha$. Vamos a comprobar que no hay ninguna interpretación que haga simultáneamente ciertas a las fórmulas $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n, \neg\alpha$.

De existir esa interpretación, tendríamos que $I(\gamma_1) = I(\gamma_2) = \cdots I(\gamma_n) = 1$, y por ser α consecuencia lógica de Γ tendríamos que $I(\alpha) = 1$, luego $I(\neg\alpha) = 0$. Luego no pueden ser ciertas simultáneamente las fórmulas de $\Gamma \cup \neg\{\alpha\}$.

Si ahora tenemos que $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfacible e I es una interpretación que hace ciertas todas las premisas, entonces no puede hacer cierta a $\neg\alpha$, luego $I(\neg\alpha) = 0$ y por tanto $I(\alpha) = 1$.

La equivalencia entre 2 y 3 es inmediata a partir de la proposicion 2.4.1. ■

Ejemplo 2.4.3.

1. *Apoyándonos en este teorema, vamos a ver que $p \vee q, \neg p \vDash q$ (algo que ya hemos comprobado en el ejemplo anterior). Para esto, hay que comprobar que el conjunto $\{p \vee q, \neg p, \neg q\}$ es insatisfacible. Pero esto también lo comprobamos (ver ejemplo 2.4.1).*

2. *Vamos a probar que $\{p \vee q \to r, \neg r\} \vDash \neg q$*

   Lo haremos de diferentes formas:

   - *Tablas de verdad.*

     De esta forma, podemos optar por construir una tabla de verdad con las fórmulas $p \vee q \to r$, $\neg r$ y $\neg q$, o bien una tabla de verdad con las fórmulas $p \vee q \to r$, $\neg r$ y $\neg\neg q$.

	p	q	r	$p \vee q \to r$	$\neg r$	$\neg q$
I_0	0	0	0	1	1	1
I_1	0	0	1	1	0	1
I_2	0	1	0	0	1	0
I_3	0	1	1	1	0	0
I_4	1	0	0	0	1	1
I_5	1	0	1	1	0	1
I_6	1	1	0	0	1	0
I_7	1	1	1	1	0	0

	p	q	r	$p \vee q \to r$	$\neg r$	q
I_0	0	0	0	1	1	0
I_1	0	0	1	1	0	0
I_2	0	1	0	0	1	1
I_3	0	1	1	1	0	1
I_4	1	0	0	0	1	0
I_5	1	0	1	1	0	0
I_6	1	1	0	0	1	1
I_7	1	1	1	1	0	1

     Si queremos resolverlo analizando la primera tabla, debemos fijarnos en aquellas interpretaciones para las que tanto $p \vee q \to r$ como $\neg r$ se interpreten como ciertas. Esto ocurre únicamente para I_0. Y puesto que $I_0(\neg q) = 1$, podemos concluir que $p \vee q \to r, \neg r \vDash \neg q$. Lo que ocurra en el resto de las filas de la tabla no nos dice nada acerca de si la implicación es o no cierta.

     Si queremos resolverlo analizando la segunda tabla, debemos ver si hay alguna interpretación para la que $p \vee q \to r$, $\neg r$ y q sean ciertas a la vez. Como esto no ocurre, significa que el conjunto $\{p \vee q \to r, \neg r, \neg q\}$ es insatisfacible, luego $p \vee q \to r, \neg r \vDash \neg q$.

   - *Ecuaciones en $\mathbb{Z}_2$*

     Lo que tenemos que ver es que ocurre si tenemos una interpretación I para la que $I(\neg r) = 1$ e $I(p \vee q \to r) = 1$. Calculamos el polinomio de Gegalkine de ambas fórmulas:

$$\begin{aligned} I(p \vee q \to r) &= 1 + I(p \vee q) + I(p \vee q) \cdot I(r) \\ &= 1 + I(p) + I(q) + I(p) \cdot I(q) + (I(p) + I(q) + I(p) \cdot I(q)) \cdot I(r) \\ &= 1 + I(p) + I(q) + I(p) \cdot I(q) + I(p) \cdot I(r) + I(q) \cdot I(r) + I(p) \cdot I(q) \cdot I(r) \end{aligned}$$

$$I(\neg r) = 1 + I(r)$$

     De las ecuaciones $I(p \vee q \to I(r) = 1$, $I(\neg r) = 1$ tenemos:

$$\begin{aligned} I(p) + I(q) + I(p) \cdot I(q) + I(p) \cdot I(r) + I(q) \cdot I(r) + I(p) \cdot I(q) \cdot I(r) &= 0 \\ I(r) &= 0 \end{aligned}$$

     Si ahora sustituimos la segunda en la primera, nos queda:

$$I(p) + I(q) + I(p) \cdot I(q) = 0$$

Y si $I(q) = 1$ nos quedaría $I(p) + 1 + I(p) = 0$, de donde $1 = 0$, lo cual es imposible. Por tanto, $I(q)$ no puede valer uno, lo que implica que $I(q) = 0$, es decir, $I(\neg q) = 1$.

En resumen, hemos tomado una interpretación para la que $I(p \vee q \to r) = I(\neg r) = 1$ y hemos llegado a la conclusión que $I(\neg q) = 1$. Por tanto, $\neg q$ es consecuencia lógica de $p \vee q \to r$ y $\neg r$.

3. *Vamos a estudiar si*

$$b \to c \vee a,\ a \leftrightarrow \neg(b \wedge d),\ d \to a \wedge b \vDash b \leftrightarrow c \vee d$$

Para esto, vamos a calcular la tabla de verdad de las fórmulas $b \to c \vee a$, $a \leftrightarrow \neg(b \wedge d)$, $d \to a \wedge b$, y para aquellas interpretaciones en las que las tres fórmulas sean verdaderas, daremos la interpretación de $b \leftrightarrow c \vee d$.

	a	b	c	d	$b \to c \vee a$	$a \leftrightarrow \neg(b \wedge d)$	$d \to a \wedge b$	$b \leftrightarrow c \vee d$
I_0	0	0	0	0	1	0	1	
I_1	0	0	0	1	1	0	0	
I_2	0	0	1	0	1	0	1	
I_3	0	0	1	1	1	0	0	
I_4	0	1	0	0	0	0	1	
I_5	0	1	0	1	0	1	0	
I_6	0	1	1	0	1	0	1	
I_7	0	1	1	1	1	1	0	
I_8	1	0	0	0	1	1	1	1
I_9	1	0	0	1	1	1	0	
I_{10}	1	0	1	0	1	1	1	0
I_{11}	1	0	1	1	1	1	0	
I_{12}	1	1	0	0	1	1	1	0
I_{13}	1	1	0	1	1	0	1	
I_{14}	1	1	1	0	1	1	1	1
I_{15}	1	1	1	1	1	0	1	

Las únicas interpretaciones para las que $b \to c \vee a$, $a \leftrightarrow \neg(b \wedge d)$ y $d \to a \wedge b$ son ciertas son I_8, I_{10}, I_{12} e I_{14}. Sólo para esas hemos calculado el valor de verdad de $b \leftrightarrow c \vee d$. Lo que ocurra en las 12 restantes no influye para nada en que la implicación semántica sea cierta o no.

Si el valor de verdad de $b \leftrightarrow c \vee d$ hubiera sido 1 para estas cuatro interpretaciones, habríamos obtenido que $\{b \to c \vee a,\ a \leftrightarrow \neg(b \wedge d),\ d \to a \wedge b\} \vDash b \leftrightarrow c \vee d$. Pero las interpretaciones I_{10} e I_{12} nos dice que esto último no es cierto.

Nota:

Si Γ es un conjunto insatisfacible, y α es una fórmula cualquiera, entonces el conjunto $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfacible, luego $\Gamma \vDash \alpha$. Es decir, *a partir de algo falso se puede deducir cualquier cosa.*

Sobre el filósofo, lógico y matemático británico Bertrand Russell se cuenta la siguiente anécdota. Defendía él que se podía llegar a cualquier conclusión si partíamos de algún supuesto falso. Entonces, uno de sus estudiantes de filosofía le planteó: *Imagínese que usted piensa que $2 + 2 = 5$. ¿Podría deducir que usted es el Papa?*. A esto, Russell respondió:

Si $2 + 2 = 5$ podemos restar 3 a ambos miembros de la igualdad, lo que nos daría $1 = 2$, lo que por simetría nos dice que $2 = 1$. Ahora bien, el Papa y yo somos dos. Pero como $2 = 1$, el Papa y yo somos 1. Por tanto, yo soy el Papa.

2.4.3. Teorema de La Deducción

Una de las herramientas más útiles en los problemas de consecuencia lógica es el siguiente resultado, conocido como Teorema de la Deducción. Este teorema nos dice como en algunos casos, dado un problema de implicación semántica podemos pasar una fórmula de un miembro del signo $\vDash$ al otro miembro. Cuando estudiemos lógica de predicados, nos encontraremos con el mismo teorema.

Teorema 2.4.2 (Teorema de la Deducción).

Sea Γ un conjunto de fórmulas (que podría ser vacío) de un lenguaje proposicional, y α, β, otras dos fórmulas. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\Gamma \vDash \alpha \to \beta$
2. $\Gamma \cup \{\alpha\} \vDash \beta$

Demostración: Tenemos que:

$\Gamma \vDash \alpha \to \beta$	si, y sólo si,	$\Gamma \cup \{\neg(\alpha \to \beta)\}$ es insatisfacible	(por teorema 2.4.1)
	si, y sólo si,	$\Gamma \cup \{\neg(\neg\alpha \vee \beta)\}$ es insatisfacible	(pues $\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$)
	si, y sólo si,	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \neg\beta\}$ es insatisfacible	(pues $\neg(\neg\alpha \vee \beta) \equiv \alpha \wedge \beta$)
	si, y sólo si,	$\Gamma \cup \{\alpha,\ \neg\beta\}$ es insatisfacible	
	si, y sólo si,	$\Gamma \cup \{\alpha\} \cup \{\neg\beta\}$ es insatisfacible	
	si, y sólo si,	$\Gamma \cup \{\alpha\} \vDash \beta$	(por teorema 2.4.1)

■

Ejemplo 2.4.4.

Vamos a demostrar, usando el teorema de la deducción, que si α y β son dos fórmulas de un lenguaje proposicional, entonces $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ es una tautología.

Sabemos que eso es equivalente a que $\vDash \alpha \to (\beta \to \alpha)$.

Aplicamos el teorema de la deducción, y tenemos que eso es equivalente a que $\alpha \vDash \beta \to \alpha$. Y nuevamente por el teorema de la deducción nos queda que hemos de comprobar que $\alpha, \beta \vDash \alpha$.

Y esto último es evidente, pues si I es una interpretación para la que $I(\alpha) = I(\beta) = 1$ entonces $I(\alpha) = 1$.

Ejercicio 2.4.1. *Usando el Teorema de la Deducción prueba que las siguientes fórmulas son tautologías:*

1. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ *(autodistributiva de la implicación)*
2. $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha)$ *(ley clásica de reducción al absurdo)*

Ejemplo 2.4.5.

Sean φ, ψ, χ, θ, τ fórmulas de un lenguaje proposicional. Vamos a comprobar que

$$\alpha = \big(\big(((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi\big) \to \tau\big) \to \big((\tau \to \varphi) \to (\theta \to \varphi)\big)$$

es una tautología.

Lo que vamos a hacer es comprobar que α es consecuencia lógica de $\emptyset$ (es decir, $\vDash \alpha$). Y para esto, usaremos el teorema de la deducción y el teorema 2.4.1.

$\vDash \alpha$ *si, y sólo si,* $\vDash \big(\big(((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi\big) \to \tau\big) \to \big((\tau \to \varphi) \to (\theta \to \varphi)\big)$

si, y sólo si, $\big(((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi\big) \to \tau \vDash \big((\tau \to \varphi) \to (\theta \to \varphi)\big)$

si, y sólo si, $\big(((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi\big) \to \tau,\ \tau \to \varphi \vDash \theta \to \varphi$

si, y sólo si, $\big(((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi\big) \to \tau,\ \tau \to \varphi,\ \theta \vDash \varphi$

si, y sólo si, $\{\big(((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi\big) \to \tau,\ \tau \to \varphi,\ \theta,\ \neg\varphi\}$ *es insatisfacible.*

Ahora se trata de demostrar que no hay ninguna interpretación para la que todas estas fórmulas sean verdaderas, es decir, que no existe I tal que $I\big(\big(((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi\big) \to \tau\big) = 1$, $I(\tau \to \varphi) = 1$, $I(\theta) = 1$, $I(\neg\varphi) = 1$.

Para esto, vamos a suponer que I es una interpretación que verifica que $I(\theta) = I(\neg\varphi) = I(\tau \to \varphi) = 1$, y demostremos que $I\big(\big(((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi\big) \to \tau\big) = 0$.

Puesto que $I(\neg\varphi) = 1$, entonces $I(\varphi) = 0$.

Y ahora, $1 = I(\tau \to \varphi) = 1 + I(\tau) + I(\tau) \cdot I(\varphi) = 1 + I(\tau) + 0$. Luego $I(\tau) = 0$.

Por tanto, nuestra interpretación verifica que $I(\theta) = 1$ e $I(\tau) = I(\varphi) = 0$.

Calculamos:

$$\begin{array}{rcl} I(\varphi \to \psi) & = & 1 + I(\varphi) + I(\varphi)\cdot I(\psi) \\ & = & 1 + 0 + 0\cdot I(\psi) \\ & = & 1 \end{array}.$$

$$\begin{array}{rcl} I(\neg\chi \to \neg\theta) & = & 1 + I(\neg\chi) + I(\neg\chi)\cdot I(\neg\theta) \\ & = & 1 + 1 + I(\chi) + (1 + I(\chi)\cdot(1 + I(\theta)) \\ & = & I(\chi) + 1 + I(\chi) + I(\theta) + I(\chi)\cdot I(\theta) \\ & = & I(\chi) + 1 + I(\chi) + 1 + I(\chi)\cdot 1 \\ & = & I(\chi) + 1 + I(\chi) + 1 + I(\chi) \\ & = & I(\chi) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} I((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) & = & 1 + I((\varphi \to \psi) + I((\varphi \to \psi))\cdot I((\neg\chi \to \neg\theta)) \\ & = & 1 + 1 + 1\cdot I(\chi) \\ & = & I(\chi) \end{array}$$

Llamamos γ a la fórmula $(\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)$ entonces $I(\gamma) = I(\chi)$ y

$$\begin{array}{rcl} I(((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi) & = & I(\gamma \to \chi) \\ & = & 1 + I(\gamma) + I(\gamma)\cdot I(\chi) \\ & = & 1 + I(\chi) + I(\chi)^2 \\ & = & 1 + I(\chi) + I(\chi) \\ & = & 1 \end{array}$$

Y si llamamos δ a la fórmula $((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi$, se tiene que $I(\delta) = 0$, luego

$$\begin{array}{rcl} I((((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi) \to \tau) & = & I(\delta \to \tau) \\ & = & 1 + I(\delta) + I(\delta)\cdot I(\tau) \\ & = & 1 + 1 + 1\cdot 0 \\ & = & 0 \end{array}$$

Que es lo que queríamos demostrar.
Y con esto podemos concluir que el conjunto

$$\{(((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi\big) \to \tau,\ \tau \to \varphi,\ \theta,\ \neg\varphi\}$$

es insatisfacible, que es lo que estábamos comprobando.

Con esta comprobación (que este conjunto es insatisfacible) hemos demostrado que α es una tautología.

Un intento de resolver este ejercicio usando tablas de verdad es tedioso (como son 5 proposiciones básicas la tabla de verdad tiene $2^5 = 32$ filas y hay también demasiadas subfórmulas que evaluar) así que por su extensión tiene una alta probabilidad de error.

De todas formas, en el cuadro 2.4 (que se encuentra al final del capítulo) está resuelto por tablas de verdad.

Más adelante, veremos otras formas para estudiar si un conjunto es o no insatisfacible.

El teorema de la deducción nos dice como actuar en un problema de implicación semántica cuando la tesis es una implicación. El último ejemplo es un caso en el que la aplicación de este teorema simplifica mucho los cálculos. Vamos a continuación a dar una serie de resultados, basados en parte en este teorema y el teorema 2.4.1, y que nos dicen como proceder en el caso de que la tesis no sea una implicación.

Lo que vamos a hacer es dar una serie de enunciados equivalentes. En todos los casos, suponemos que Γ es un conjunto de fórmulas (podría ser vacío) y que α y β son dos fórmulas.

En esta situación

1. Son equivalentes:

   - $\Gamma \vDash \alpha \to \beta$.
   - $\Gamma \cup \{\alpha\} \vDash \beta$.

- $\Gamma \cup \{\alpha,\ \neg\beta\}$ es insatisfacible.
- $\Gamma \cup \{\neg\beta\} \vDash \neg\alpha$.

2. Son equivalentes:
   - $\Gamma \vDash \alpha \vee \beta$.
   - $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vDash \beta$.
   - $\Gamma \cup \{\neg\beta\} \vDash \alpha$.
   - $\Gamma \cup \{\neg\alpha, \neg\beta\}$ es insatisfacible.

3. Son equivalentes:
   - $\Gamma \vDash \alpha \wedge \beta$.
   - $\Gamma \vDash \alpha$ y $\Gamma \vDash \beta$.
   - $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ y $\Gamma \cup \{\neg\beta\}$ son insatisfacibles.

4. Son equivalentes:
   - $\Gamma \vDash \alpha \leftrightarrow \beta$.
   - $\Gamma \vDash \alpha \to \beta$ y $\Gamma \vDash \beta \to \alpha$.
   - $\Gamma \cup \{\alpha\} \vDash \beta$ y $\Gamma \cup \{\beta\} \vDash \alpha$.
   - $\Gamma \cup \{\alpha,\ \neg\beta\}$ y $\Gamma \cup \{\neg\alpha,\ \beta\}$ son insatisfacibles.

2.5. Forma clausular de una fórmula.

Hasta el momento, hemos planteado el problema fundamental: el de la implicación semántica. Y hemos visto dos formas de resolverlo: mediante las tablas de verdad y mediante ecuaciones en $\mathbb{Z}_2$. También hemos analizado ejemplos en los que es mejor un método o el otro.

El problema de la implicación semántica permite además estudiar si una fórmula α es tautología (α es tautología si, y sólo si, $\vDash \alpha$) y si dos fórmulas α y β son lógicamente equivalentes (α y β son lógicamente equivalentes si, y sólo si, $\alpha \vDash \beta$ y $\beta \vDash \alpha$).

En lo que sigue, vamos a dar nuevos métodos para resolver este problema. En concreto, vamos a dar dos, que son el algoritmo de Davis-Putnam y el método de resolución. En ambos casos el objeto sobre el que se trabaja es la cláusula.

Comenzamos con las definiciones necesarias.

Supongamos que tenemos un lenguaje proposicional construido sobre un conjunto X.

- Un *literal* es una proposición atómica (es decir, un elemento de X) o su negada.

  Por ejemplo, si $X = \{a, b, c\}$ hay seis literales que son a, b, c, $\neg a$, $\neg b$ y $\neg c$. No es un literal $\neg\neg b$ aunque sea lógicamente a b que sí lo es.

  Si λ es un literal, denotaremos como λ^c al literal que es equivalente a $\neg\lambda$. Es decir, si λ es una fórmula atómica, digamos a, entonces $\lambda^c = \neg a$, mientras que si λ es el negado de una fórmula atómica (por ejemplo, $\lambda = \neg b$) entonces λ^c es la fórmula atómica (es decir, $\lambda^c = b$).

- Una *cláusula* es una disyunción de literales, de forma que no haya dos literales que provengan de la misma proposición atómica. Es decir, si aparece el literal λ, éste solo lo puede hacer una vez, y no puede estar el literal λ^c. En la definición de cláusula se incluye el caso de *disyunción de un literal*. Dicho de otra forma, todo literal es una cláusula.

  También se incluye el caso de una *disyunción de cero literales*. Esta cláusula se denomina cláusula vacía, y la denotaremos como $\square$. Para cualquier interpretación I se tiene que $I(\square) = 0$ (es decir, la cláusula vacía es insatisfacible).

  Son ejemplos de cláusulas a, $a \vee b$, $\neg a \vee c$, $a \vee \neg b \vee \neg c$, $\neg c$, $\square$. No son cláusulas $a \vee \neg a$, $a \wedge b$, $a \vee b \vee a$.

- Una fórmula se dice que está en **forma clausular** si está escrita como conjunción de cláusulas.

  Se incluye el caso de *conjunción de una cláusula*. Es decir, una cláusula es una fórmula que está en forma clausular.

  No se incluye el caso de *conjunción de cero cláusulas*.

  Lo siguiente son ejemplos de fórmulas en forma clausular.

  1. $(a \vee \neg b) \wedge (b \vee c)$. Es conjunción de dos cláusulas: $a \vee \neg b$ y $b \vee c$.
  2. $b \vee c$. Es una cláusula.
  3. $a \wedge b$. Es conjunción de dos cláusulas: a y b.
  4. $b \wedge \neg b$. Es conjunción de dos cláusulas b y $\neg b$.
  5. $\square$. Es una cláusula. Notemos que esta fórmula es lógicamente equivalente a la anterior.
  6. $(b \vee a \vee \neg c) \wedge (b \vee \neg a \vee \neg c)$. Es conjunción de dos cláusulas: $b \vee a \vee \neg c$ y $b \vee \neg a \vee \neg c$.
  7. $(a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge \square$. Es conjunción de tres cláusulas. Sin embargo, esta fórmula es lógicamente equivalente a $\square$. Por este motivo, cuando aparece la cláusula vacía no suele escribirse en conjunción con otras cláusulas.

  No están en forma clausular las siguientes fórmulas:

  $\neg(a \vee b)$, $(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \vee c)$, $a \rightarrow b$.

Una vez definida la forma clausular, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.5.1. *Sea α una fórmula que no es tautología. Entonces existe otra fórmula β, lógicamente equivalente a α, y que está en forma clausular.*

La fórmula $\neg(a \vee b)$, que no está en forma clausular es lógicamente equivalente a $\neg a \wedge \neg b$, que está en forma clausular.

La fórmula $(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \vee c)$ es lógicamente a $\neg a \vee \neg b \vee c$ que es una cláusula.

La fórmula $a \rightarrow b$ es lógicamente equivalente a $\neg a \vee b$, que está en forma clausular.

Observación:

- Dada una fórmula, puede haber varias fórmulas distintas equivalentes a ella y en forma clausular. Por ejemplo, las fórmulas $(\neg a \vee \neg c) \wedge (a \vee b \vee \neg c)$ y $(a \vee b \vee \neg c) \wedge (b \vee \neg c)$ están en forma clausular y son equivalentes.Por tal motivo, no es correcto decir *la forma clausular de* α. Nosotros, sin embargo, nos referiremos a la forma clausular de una fórmula α como alguna de las fórmulas en forma clausular que son equivalentes a α.
- En una fórmula en forma clausular no aparecen las conectivas $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$. Por tanto, para calcular la forma clausular de una fórmula es necesario sustituir las subfórmulas en que aparezcan estas conectivas por otras equivalentes en que no aparezcan.
- En una fórmula en forma clausular, la conectiva $\neg$ va siempre unida a una fórmula atómica.
- En una fórmula en forma clauslar, las conectivas $\wedge$ están situadas más externas que las conectivas $\vee$ (vistas en el árbol de la fórmula, estarían situadas en nodos más próximos a la raíz).

Con estas observaciones, vamos a dar un método para transformar una fórmula δ en otra que sea lógicamente equivalente y que esté en forma clausular. Para esto, podemos seguir los siguientes pasos:

1. Si tenemos una subfórmula de la forma $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$, la sustituimos por $(\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \wedge (\alpha_2 \rightarrow \alpha_1)$.
2. Si tenemos una subfórmula de la forma $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$ la sustituimos por $\neg\alpha_1 \vee \alpha_2$.
3. Cualquier subfórmula de la forma $\neg\neg\alpha$ la sustituimos por α.

4. Introducimos la conectiva $\neg$ dentro de los paréntesis utilizando las equivalencias lógicas:

$$\neg(\alpha_1 \vee \alpha_2) \equiv \neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2; \qquad \neg(\alpha_1 \wedge \alpha) \equiv \neg\alpha_1 \vee \neg\alpha_2$$

   Es posible que al hacer esto, aparezcan nuevas subfórmulas de la forma $\neg\neg\alpha_1$. La sustituimos por α_1.

   Llegados aquí, nos encontraremos una fórmula en la que solo intervienen las conectivas $\vee$, $\wedge$ y $\neg$. Además, esta última solo actuá sobre las fórmulas atómicas. Pero puede ocurrir que no estén bien distribuidos las conectivas $\vee$ y $\wedge$.

5. Si tenemos una subfórmula de la forma $\alpha_1 \vee (\beta_1 \wedge \beta_2)$ la sustituimos por $(\alpha_1 \vee \beta_1) \wedge (\alpha_1 \vee \beta_2)$. Y lo mismo si la subfórmula es de la forma $(\alpha_1 \vee \alpha_2) \wedge \beta_1$. La sustituimos por $(\alpha_1 \vee \beta_1) \wedge (\alpha_2 \vee \beta_1)$.

   En este punto, las fórmulas que encontremos pueden ser algo más complicadas. En lugar de encontrarnos con la disyunción de dos fórmulas, podemos encontrarnos con la disyunción de 3 o más. Y cada una de estas puede ser la conjunción de dos subfórmulas, o de tres o más. La idea es siempre la misma. Distribuirlas de forma que las conectivas $\wedge$ que se encuentran dentro de los paréntesis queden fuera de los paréntesis. Y las conectivas $\vee$ que están fuera de los paréntesis queden dentro de los paréntesis.

   Vamos a ver algunos casos:

   - Tenemos una subfórmula de la forma $\alpha \vee \beta$, y ahora $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$ y $\beta = \beta_1 \wedge \beta_2$. Entonces

$$\alpha \vee \beta = \alpha \vee (\beta_1 \wedge \beta_2) \equiv (\alpha \vee \beta_1) \wedge (\alpha \vee \beta_2)$$

     Y ahora, en cada uno de los paréntesis volvemos a aplicar la propiedad distributiva.

$$\alpha \vee \beta \equiv ((\alpha_1 \wedge \alpha_2) \vee \beta_1) \wedge ((\alpha_1 \wedge \alpha_2) \vee \beta_2) \equiv (\alpha_1 \vee \beta_1) \wedge (\alpha_1 \vee \beta_2) \wedge (\alpha_2 \vee \beta_1) \wedge (\alpha_2 \vee \beta_2)$$

   - Tenemos una subfórmula de la forma $\alpha \vee \beta \vee \gamma$, donde $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$ y $\beta = \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3$. Es decir, tenemos

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \vee (\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) \vee \gamma$$

     Aplicamos la propiedad distributiva las veces necesarias, tal y como hemos hecho en el ejemplo precedente, hasta conseguir que las conectivas $\vee$ estén dentro de los paréntesis y las conectivas $\wedge$ estén fuera. Al final nos queda:

$$(\alpha_1 \vee \beta_1 \vee \gamma) \wedge (\alpha_1 \vee \beta_2 \vee \gamma) \wedge (\alpha_1 \vee \beta_3 \vee \gamma) \wedge (\alpha_2 \vee \beta_1 \vee \gamma) \wedge (\alpha_2 \vee \beta_2 \vee \gamma) \wedge (\alpha_2 \vee \beta_3 \vee \gamma)$$

Para actuar de manera ordenada es convenientese proceder de una de las dos formas siguientes:
- Empezar por las subfórmulas más pequeñas e ir yendo progresivamente hacia subfórmulas más grandes (es decir, ir recorriendo el árbol de abajo hacia arriba)
- Empezar por las subfórmulas más grandes y seguir el camino inverso al anterior.

Ejemplo 2.5.1.
Queremos hallar la forma clausular de

$$\alpha = \big[(a \vee ((b \wedge c) \vee (d \wedge \neg e))) \wedge (\neg b \vee c)\big] \vee \big[(a \wedge \neg c) \wedge (c \vee \neg b \vee d)\big]$$

Notemos que no tenemos ninguna conectiva $\to$, ninguna conectiva $\leftrightarrow$, y las veces que aparece la conectiva $\neg$ actúa únicamente sobre fórmulas atómicas. Entonces, hemos de aplicar sólo la propiedad distributiva.

De las dos formas que hemos indicado, vamos a hacerlo de abajo hacia arriba. Para esto, buscamos las subfórmulas más pequeñas que sean disyunción de dos o más fórmulas, y alguna de éstas sea una conjunción. Dicho de otra forma, tenemos que encontrar la conectiva $\wedge$ *dentro de un paréntesis, y la conectiva* $\vee$ *fuera de él.*

Nos encontramos con la subfórmula $(b \wedge c) \vee (d \wedge \neg e)$*. Sustituimos esta sufórmula por*

$$(b \vee d) \wedge (b \vee \neg e) \wedge (c \vee d) \wedge (c \vee \neg e)$$

y nos queda

$$\alpha \equiv \big[\big(a \vee ((b \vee d) \wedge (b \vee \neg e) \wedge (c \vee d) \wedge (c \vee \neg e))\big) \wedge (\neg b \vee c)\big] \vee \big[a \wedge \neg c \wedge (c \vee \neg b \vee d)\big]$$

La siguiente subfórmula donde encontramos una disyunción de fórmulas, en la que alguna de ellas es una conjunción es en

$$\beta = a \vee ((b \vee d) \wedge (b \vee \neg e) \wedge (c \vee d) \wedge (c \vee \neg e))$$

Vemos que tiene la forma $a \vee (\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \beta_4)$*. La sustituimos por* $(a \vee \beta_1) \wedge (a \vee \beta_2) \wedge (a \vee \beta_3) \wedge (a \vee \beta_4)$*. La fórmula* α *es entonces equivalente a*

$$\big[\big((a \vee b \vee d) \wedge (a \vee b \vee \neg e) \wedge (a \vee c \vee d) \wedge (a \vee c \vee \neg e)\big) \wedge (\neg b \vee c)\big] \vee \big[a \wedge \neg c \wedge (c \vee \neg b \vee d)\big]$$

Y ahora, por la asociatividad de $\wedge$ *podemos cambiarla por*

$$\big((a \vee b \vee d) \wedge (a \vee b \vee \neg e) \wedge (a \vee c \vee d) \wedge (a \vee c \vee \neg e) \wedge (\neg b \vee c)\big) \vee \big(a \wedge \neg c \wedge (c \vee \neg b \vee d)\big)$$

Y nos encontramos ahora con una fórmula que responde a la forma

$$\beta \vee \gamma = (\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \beta_4 \wedge \beta_5) \vee (\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_3)$$

que después de aplicar la distributividad se transforma en la conjunción de 15 fórmulas. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \alpha \quad \equiv \quad & (a \vee b \vee d \vee a) \ \wedge \ (a \vee b \vee \neg e \vee a) \ \wedge \ (a \vee c \vee d \vee a) \ \wedge \ (a \vee c \vee \neg e \vee a) \ \wedge \ (\neg b \vee c \vee a) \ \wedge \\ & \wedge \ (a \vee b \vee d \vee \neg c) \ \wedge \ (a \vee b \vee \neg e \vee \neg c) \ \wedge \ (a \vee c \vee d \vee \neg c) \ \wedge \ (a \vee c \vee \neg e \vee \neg c) \ \wedge \\ & \wedge \ (\neg b \vee c \vee \neg c) \ \wedge (a \vee b \vee d \vee c \vee \neg b \vee d) \ \wedge \ (a \vee b \vee \neg e \vee c \vee \neg b \vee d) \ \wedge \\ & \wedge \ (a \vee c \vee d \vee c \vee \neg b \vee d) \ \wedge \ (a \vee c \vee \neg e \vee c \vee \neg b \vee d) \ \wedge \ (\neg b \vee c \vee c \vee \neg b \vee d) \end{aligned}$$

Y finalmente, para obtener la forma clausular, eliminamos aquellos términos en los que aparezca $\lambda \vee \lambda^c$*, puesto que son tautologías, y los literales repetidos haciendo uso de la equivalencia* $\beta \vee \beta \equiv \beta$*:*

$$(a \vee b \vee d) \ \wedge \ (a \vee b \vee \neg e) \ \wedge \ (a \vee c \vee d) \ \wedge \ (a \vee c \vee \neg e) \ \wedge \ (a \vee \neg b \vee c) \ \wedge \ (a \vee b \vee \neg c \vee d) \ \wedge$$

$$\wedge \ (a \vee b \vee \neg c \vee \neg e) \ \wedge \ (a \vee \neg b \vee c \vee d) \ \wedge \ (a \vee \neg b \vee c \vee d \vee \neg e) \ \wedge \ (\neg b \vee c \vee d)$$

Y esta ya es una forma clausular. Ahora bien, si tenemos en cuenta la siguiente equivalencia lógica

$$(\beta \vee \gamma) \wedge \beta \equiv \beta$$

podemos simplificarla aún más, ya que

- $(a \vee \neg b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee c \vee d) \wedge (a \vee \neg b \vee c \vee d \vee \neg e) \ \equiv a \vee \neg b \vee c.$
- $(a \vee b \vee d) \wedge (a \vee b \vee \neg c \vee d) \equiv a \vee b \vee d.$

Y por tanto, otra forma clausular de α es:

$$(a \vee b \vee d) \wedge (a \vee b \vee \neg e) \wedge (a \vee c \vee d) \wedge (a \vee c \vee \neg e) \wedge (a \vee \neg b \vee c) \wedge (a \vee b \vee \neg c \vee \neg e) \wedge (\neg b \vee c \vee d)$$

Veamos a continuación otros ejemplos completos de cómo obtener la forma clausular de una fórmula.

Ejemplo 2.5.2.

1. *Sea $\alpha = ((a \vee \neg b) \to (\neg c \to b)) \wedge ((a \to b) \leftrightarrow c)$. Vamos a calcular una forma clausular para α.*
   Tal y como hemos explicado más arriba, realizamos este proceso en varias etapas:

   - *En primer lugar, sustituimos la conectiva $\leftrightarrow$. Nos queda entonces:*
     $$\begin{array}{rcl} \alpha & = & ((a \vee \neg b) \to (\neg c \to b)) \wedge ((a \to b) \leftrightarrow c) \\ & \equiv & ((a \vee \neg b) \to (\neg c \to b)) \wedge \big[((a \to b) \to c) \wedge (c \to (a \to b))\big] \end{array}$$
   - *A continuación sustituimos las conectivas $\to$. El orden en que se haga esto no es importante. Una forma de hacerlo es:*
     $$\begin{array}{rcl} \alpha & \equiv & \big((a \vee \neg b) \to (\neg c \to b)\big) \wedge \big[\big((a \to b) \to c\big) \wedge \big(c \to (a \to b)\big)\big] \\ & \equiv & \big(\neg(a \vee \neg b) \vee (\neg c \to b)\big) \wedge \big[\big((\neg a \vee b) \to c\big) \wedge \big(c \to (\neg a \vee b)\big)\big] \\ & \equiv & \big(\neg(a \vee \neg b) \vee (\neg\neg c \vee b)\big) \wedge \big[\big(\neg(\neg a \vee b) \vee c\big) \wedge \big(\neg c \vee (\neg a \vee b)\big)\big] \end{array}$$
   - *Eliminamos la doble negación*
     $$\begin{array}{rcl} \alpha & \equiv & \big(\neg(a \vee \neg b) \vee (\neg\neg c \vee b)\big) \wedge \big[\big(\neg(\neg a \vee b) \vee c\big) \wedge \big(\neg c \vee (\neg a \vee b)\big)\big] \\ & \equiv & \big(\neg(a \vee \neg b) \vee (c \vee b)\big) \wedge \big[\big(\neg(\neg a \vee b) \vee c\big) \wedge \big(\neg c \vee (\neg a \vee b)\big)\big] \end{array}$$
   - *Introducimos las conectivas $\neg$ en los paréntesis y eliminamos de nuevo las dobles negaciones que nos aparezcan.*
     $$\begin{array}{rcl} \alpha & \equiv & \big(\neg(a \vee \neg b) \vee (c \vee b)\big) \wedge \big[\big(\neg(\neg a \vee b) \vee c\big) \wedge \big(\neg c \vee (\neg a \vee b)\big)\big] \\ & \equiv & \big((\neg a \wedge \neg\neg b) \vee (c \vee b)\big) \wedge \big[\big((\neg\neg a \wedge \neg b) \vee c\big) \wedge \big(\neg c \vee (\neg a \vee b)\big)\big] \\ & \equiv & \big((\neg a \wedge b) \vee (c \vee b)\big) \wedge \big[\big((a \wedge \neg b) \vee c\big) \wedge \big(\neg c \vee (\neg a \vee b)\big)\big] \end{array}$$
     Como podemos ver, únicamente tenemos las conectivas $\vee$, $\wedge$ y $\neg$, y la conectiva $\neg$ afecta solo a proposiciones atómicas.
   - *Distribuimos las conectivas $\vee$ y $\wedge$.*
     Si nos fijamos, nuestra fórmula es ahora conjunción de tres subfórmulas:
     $\alpha_1 = (\neg a \wedge b) \vee (c \vee b)$, $\alpha_2 = (a \wedge \neg b) \vee c$ *y* $\alpha_3 = \neg c \vee (\neg a \vee b)$
     Entonces, hallamos por serparado la forma clausular de cada una de estas subfórmulas:
     - $\alpha_1 = (\neg a \wedge b) \vee c \vee b \equiv (\neg a \vee b \vee c) \wedge (b \vee c \vee b) \equiv (\neg a \vee b \vee c) \wedge (b \vee c)$
       Esta última fórmula podría simplificarse a $b \vee c$, pero por ahora lo dejamos así.
     - $\alpha_2 = (a \wedge \neg b) \vee c \equiv (a \vee c) \wedge (\neg b \vee c)$.
     - $\alpha_3 = \neg c \vee (\neg a \vee b) \equiv \neg a \vee b \vee \neg c$.

     Y tenemos entonces que:
     $$\begin{array}{rcl} \alpha & \equiv & \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \\ & \equiv & (\neg a \vee b \vee c) \wedge (b \vee c) \wedge (a \vee c) \wedge (\neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c) \end{array}$$
     Y ya tenemos una forma clausular de α.
     Ahora podemos simplificarla si nos valemos de la equivalencia lógica $(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta) \equiv \alpha$. Esta equivalencia lógica nos dice, en nuestro caso:
     - $(\neg a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c) \equiv \neg a \vee b$
     - $(\neg b \vee c) \wedge (b \vee c) \equiv c$.

     Luego $\alpha \equiv (\neg a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge c$.
     Y puesto que $(a \vee c) \wedge c \equiv c$ nos queda finalmente:
     $$\alpha \equiv (\neg a \vee b) \wedge c$$

2. *Vamos a calcular la forma clausular de:*

$$\alpha = \big[\big((a \to b) \wedge \neg c\big) \to \big(\neg b \leftrightarrow (c \vee a)\big)\big] \vee \big[d \vee \big(\neg c \to (a \wedge b)\big)\big]$$

En este caso vamos a seguir un orden diferente al del ejemplo anterior.

La fórmula dada es equivalente a

$$\big[\neg\big((a \to b) \wedge \neg c\big) \vee \big(\neg b \leftrightarrow (c \vee a)\big)\big] \vee \big[d \vee \big(\neg c \to (a \wedge b)\big)\big]$$

que está expresada como disyunción de tres fórmulas:

$$\neg\big((a \to b) \wedge \neg c\big) \qquad \neg b \leftrightarrow (c \vee a) \qquad d \vee \big(\neg c \to (a \wedge b)\big)$$

Calculamos la forma clausular de cada una de estas fórmulas por separado.

$$\begin{array}{l|l|l}
\neg\big((a \to b) \wedge \neg c\big) & \neg b \leftrightarrow (c \vee a) & d \vee \big(\neg c \to (a \wedge b)\big) \\
\neg\big((\neg a \vee b) \wedge \neg c\big) & \big(\neg b \to (c \vee a)\big) \wedge \big((c \vee a) \to \neg b\big) & d \vee \big(\neg\neg c \vee (a \wedge b)\big) \\
\neg(\neg a \vee b) \vee \neg\neg c & \big(\neg\neg b \vee (c \vee a)\big) \wedge \big(\neg(c \vee a) \vee \neg b\big) & d \vee \big(c \vee (a \wedge b)\big) \\
(\neg\neg a \wedge \neg b) \vee \neg\neg c & \big(b \vee (c \vee a)\big) \wedge \big((\neg c \wedge \neg a) \vee \neg b\big) & d \vee \big((c \vee a) \wedge (c \vee b)\big) \\
(a \wedge \neg b) \vee c & (a \vee b \vee c) \wedge \big((\neg c \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee \neg b)\big) & (d \vee c \vee a) \wedge (d \vee c \vee b) \\
(a \vee c) \wedge (\neg b \vee c) & (a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg b \vee \neg c) & (a \vee c \vee d) \wedge (b \vee c \vee d)
\end{array}$$

Es decir, hemos llegado a que la fórmula inicial es equivalente a una de la forma

$$(C_1 \wedge C_2) \vee (C_1' \wedge C_2' \wedge C_3') \vee (C_1'' \wedge C_2'')$$

que es equivalente a

$$(C_1 \vee C_1' \vee C_1'') \wedge (C_1 \vee C_1' \vee C_2'') \wedge (C_1 \vee C_2' \vee C_1'') \wedge (C_1 \vee C_2' \vee C_2'') \wedge (C_1 \vee C_3' \vee C_1'') \wedge (C_1 \vee C_3' \vee C_2'') \wedge$$

$$\wedge (C_2 \vee C_1' \vee C_1'') \wedge (C_2 \vee C_1' \vee C_2'') \wedge (C_2 \vee C_2' \vee C_1'') \wedge (C_2 \vee C_2' \vee C_2'') \wedge (C_2 \vee C_3' \vee C_1'') \wedge (C_2 \vee C_3' \vee C_2'')$$

Y ahora $C_1 \vee C_1' \vee C_1' = (a \vee c) \vee (a \vee b \vee c) \vee (a \vee c \vee d) \equiv a \vee b \vee c \vee d$, *también* $C_1 \vee C_1' \vee C_2'' \equiv a \vee b \vee c \vee d$ *mientras que el resto de términos podemos eliminarlos, ya que son tautologías, al contener al mismo tiempo un literal y su negación.*

Y así, podemos concluir que la fórmula α *es equivalente a*

$$a \vee b \vee c \vee d$$

2.6. El problema de la implicación semántica

Hemos definido en secciones precedentes lo que significa

$$\Gamma \vDash \alpha$$

que viene a decirnos cuando un razonamiento es correcto desde el punto de vista lógico. Vamos a desarrollar técnicas que nos permitan dar respuesta a este problema dentro de la lógica proposicional.

Hemos visto (teorema 2.4.1) que el problema de la implicación semántica lo podemos transformar en un problema de insatisfacibilidad. Más precisamente, la respuesta a los problemas

$$\Gamma \vDash \alpha \qquad \text{y} \qquad \Gamma \cup \{\neg\alpha\}$$

es siempre la misma.

Además, hemos visto dos formas de resolver el problema: con tablas de verdad o con ecuaciones en $\mathbb{Z}_2$.

De momento, vamos a aparcar el tema de la implicación semántica, y vamos a fijarnos únicamente en estudiar si un conjunto de fórmulas es satisfacible o insatisfacible.

En la sección anterior aprendimos a calcular, dada una fórmula, otra fórmula lógicamente equivalente a ella y que está en forma clausular.

Entonces, a la hora de determinar si un conjunto de fórmulas es insatisfacible o no, podemos sustituir cada fórmula por otra que esté en forma clausular.

Esto lo recogemos en el siguiente teorema.

Teorema 2.6.1. *Sea Γ un conjunto de fórmulas; Γ' un conjunto de fórmulas que se obtiene sustituyendo cada fórmula de Γ por una forma clausular de esa fórmula, y Γ'' el conjunto que resulta de sustituir cada fórmula de Γ' por las cláusulas que la forman. Entonces son equivalentes:*

1. *Γ es insatisfacible.*

2. *Γ' es insatisfacible.*

3. *Γ'' es insatisfacible.*

Por tanto, el problema de estudiar si un conjunto de fórmulas es o no insatisfacible lo podemos transformar en un problema de estudiar si un conjunto de cláusulas es o no insatisfacible.

Y juntando esto con el teorema 2.4.1, un problema de implicación semántica lo podemos transformar en estudiar si un conjunto de cláusulas es o no insatisfacible.

En lo que sigue vamos a desarrollar dos métodos para determinar si un conjunto de cláusulas es o no insatisfacible. Estos dos métodos son el algoritmo de Davis-Putnam y el método de resolución.

2.6.1. Algoritmo de Davis-Putnam:

Antes de entrar a detallar el algoritmo, introducimos un poco de nomenclatura.

Si C es una cláusula, y λ es un literal que aparece en la cláusula, denotaremos como $C - \lambda$ a la disyunción de todos los literales que aparecen en C a excepción del literal λ.

Por ejemplo, si $C = p \vee \neg q \vee r$ y $\lambda = p$ entonces $C - \lambda = C - p = \neg q \vee r$, mientras que $C - \neg q = p \vee r$.

Una cláusula que tenga un único literal se llama *cláusula unit*. Por ejemplo, si $C = \neg b$ entonces C es una cláusula unit.

En el caso de que C sea una cláusula unit, es decir, $C = \lambda$ entonces $C - \lambda = \Box$ (cláusula vacía).

Sea Σ un conjunto de cláusulas, y λ un literal tal que, bien él, bien su complementario, aparece en alguna de las cláusulas de Σ (para esto, Σ debe tener al menos una cláusula distinta de la cláusula vacía). Vamos a definir un nuevo conjunto de cláusulas Σ_λ. Para ello, dividimos el conjunto Σ en tres subconjuntos disjuntos:

1. El conjunto formado por las cláusulas que tienen al literal λ. Momentáneamente lo denotaremos como $\Sigma_{\lambda 1}$.

2. El conjunto formado por las cláusulas que tienen al literal λ^c. Momentáneamente lo denotaremos como $\Sigma_{\lambda 2}$.

3. El conjunto formado por las cláusulas que no tienen ni al literal λ ni al literal λ^c. Momentáneamente lo denotaremos como $\Sigma_{\lambda 3}$.

Por la definición de cláusula, $\Sigma_{\lambda 1} \cap \Sigma_{\lambda 2} = \emptyset$. Por la definición de $\Sigma_{\lambda 3}$ es claro que $\Sigma_{\lambda 3} \cap \Sigma_{\lambda 1} = \emptyset$ y $\Sigma_{\lambda 3} \cap \Sigma_{\lambda 2} = \emptyset$. También se tiene que $\Sigma = \Sigma_{\lambda 1} \cup \Sigma_{\lambda 2} \cup \Sigma_{\lambda 3}$.

El conjunto Σ_λ se obtiene añadiendo a $\Sigma_{\lambda 3}$ todas las cláusulas de la forma $C - \lambda^c$ donde $C \in \Sigma_{\lambda 2}$. Dicho de otra forma. Vamos recorriendo todas las cláusulas de Σ. Si $C \in \Sigma$ pueden darse tres posibilidades:

1. $C \in \Sigma_{\lambda 1}$ (es decir, C tiene al literal λ). Esa cláusula la eliminamos.
2. $C \in \Sigma_{\lambda 2}$. Entonces añadimos la cláusula $C - \lambda^c$ al conjunto Σ_λ (es decir, eliminamos el literal λ^c de la cláusula).
3. $C \in \Sigma_{\lambda 3}$. Entonces añadimos C al conjunto Σ_λ.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 2.6.1.
Sea $\Sigma = \{b \vee c,\ \neg a \vee b \vee c \vee d,\ \neg e,\ a \vee \neg c \vee d,\ \neg a \vee \neg d,\ c \vee \neg d,\ a \vee d,\ \neg c \vee d\}$. *Vamos a tomas varios literales* λ *y calcular* Σ_λ.

- $\lambda = a$. *Tenemos* $\Sigma_a = \{b \vee c,\ b \vee c \vee d,\ \neg e,\ \neg d,\ c \vee \neg d,\ \neg c \vee d\}$

  Esto se ha obtenido pues

  $$\begin{aligned}\Sigma_{a1} &= \{a \vee \neg c \vee d,\ a \vee d\}\\ \Sigma_{a2} &= \{\neg a \vee b \vee c \vee d,\ \neg a \vee \neg d\}\\ \Sigma_{a3} &= \{b \vee c,\ \neg e,\ c \vee \neg d,\ \neg c \vee d\}\end{aligned}$$

  De las cláusulas de Σ_{a2} *quitamos el literal* $\neg a$ *(lo que nos da las cláusulas* $b \vee c \vee d$ *y* $\neg d$*), y las de* Σ_{a3} *se quedan tal cual. Las de* Σ_{a1} *no aparecen en* Σ_a.

- *Ahora tomamos* $\lambda = \neg a$. *En este caso, tenemos:*

  $$\begin{aligned}\Sigma_{\neg a1} &= \{\neg a \vee b \vee c \vee d,\ \neg a \vee \neg d\}\\ \Sigma_{\neg a2} &= \{a \vee \neg c \vee d,\ a \vee d\}\\ \Sigma_{\neg a3} &= \{b \vee c,\ \neg e,\ c \vee \neg d,\ \neg c \vee d\}\end{aligned}$$

  Luego $\Sigma_{\neg a} = \{\neg c \vee d,\ d,\ b \vee c,\ \neg e,\ c \vee \neg d,\ \neg c \vee d\}$.

- *Calculamos el conjunto* Σ_e.

  $$\begin{aligned}&\Sigma_{e1} = \emptyset.\\ &\Sigma_{e2} = \{\neg e\}.\\ &\Sigma_{e3} = \{b \vee c,\ \neg a \vee b \vee c \vee d,\ a \vee \neg c \vee d,\ \neg a \vee \neg d,\ c \vee \neg d,\ a \vee d,\ \neg c \vee d\}.\end{aligned}$$

  Por cada elemento $C \in \Sigma_{e2}$ *debe quedarnos una cláusula en* Σ_e*, que se obtiene quitando el literal* $\neg e$ *de* C. *Por tal motivo, en el conjunto* Σ_e *tendremos la cláusula vacía. Es decir, nos queda:*

  $$\Sigma_e = \{\square,\ b \vee c,\ \neg a \vee b \vee c \vee d,\ a \vee \neg c \vee d,\ \neg a \vee \neg d,\ c \vee \neg d,\ a \vee d,\ \neg c \vee d\}.$$

Con todo esto, podemos describir el algoritmo de Davis-Putnam. Este algoritmo se basa en tres reglas:

1. Sea Σ un conjunto de cláusulas. Supongamos que en Σ hay una cláusula unit λ. Entonces

   Σ es insatisfacible si, y sólo si, Σ_λ es insatisfacible.

2. Sea Σ un conjunto de cláusulas. Supongamos que en Σ aparece un literal puro λ. Es decir, hay al menos una cláusula en la que aparece el literal λ y el literal λ^c no aparece en ninguna. Entonces

   Σ es insatisfacible si, y sólo si, Σ_λ es insatisfacible.

3. Sea Σ un conjunto de cláusulas, y sea λ un literal que aparece en alguna cláusula de Σ. Entonces:

   Σ es insatisfacible si, y sólo si, Σ_λ y Σ_{λ^c} son insatisfacibles.

Vamos a dar una demostración de la regla tercera. Notemos en primer lugar que esta regla podemos enunciarla también como

$$\Sigma \text{ es satisfacible si, y sólo si, } \Sigma_\lambda \text{ es satisfacible o } \Sigma_{\lambda^c} \text{ es satisfacible.}$$

La demostración la dividimos en dos partes:

1. En primer lugar probamos que si Σ es satisfacible, entonces uno de los dos conjuntos, Σ_λ o Σ_{λ^c} es satisfacible.

   Por ser Σ satisfacible, existe una interpretación I para la que todas las cláusulas de Σ se interpretan como ciertas. Supongamos que para esa interpretación se tiene que $I(\lambda) = 1$ (si $I(\lambda) = 0$ entonces $I(\lambda^c) = 1$ y se haría de igual forma) y veamos que todas las cláusulas de Σ_λ se interpretan como ciertas con la interpretación I.

   Si $C \in \Sigma_\lambda$ pueden darse dos posibilidades:

   - $C \in \Sigma_{\lambda 3}$. En tal caso, $C \in \Sigma$ luego $I(C) = 1$.
   - $C = C' - \lambda^c$ con $C' \in \Sigma_{\lambda 2}$. Por tanto, $C' = \lambda^c \vee C$. Puesto que $I(C') = 1$ (ya que $C' \in \Sigma$) e $I(\lambda^c) = 0$ concluimos que $I(C) = 1$.

   Luego hemos visto que en ambos casos $I(C) = 1$. Es decir, todas las cláusulas de Σ_λ se interpretan como verdaderas con la interpretación I.

2. Ahora hay que comprobar que si alguno de los conjuntos Σ_λ o Σ_{λ^c} es satisfacible, entonces Σ lo es.

   Supongamos que es Σ_λ quien es satisfacible (si fuera el otro se haría igual). Y sea I una interpretación que hace ciertas a todas las cláusulas de Σ_λ. Puesto que en Σ_λ no aparece ni el literal λ ni λ^c, el valor de $I(\lambda)$ no afecta al valor de verdad de las cláusulas de Σ. Entonces, podemos suponer que $I(\lambda) = 1$.

   Sea ahora C una cláusula de Σ. Pueden darse tres posibilidades:

   - $C \in \Sigma_{\lambda 1}$. En tal caso, $C = \lambda \vee C_1$ para alguna cláusula C_1 (concretamente para $C_1 = C - \lambda$). Es claro que $I(C) = 1$ (pues $I(\lambda) = 1$).
   - $C \in \Sigma_{\lambda 2}$. En tal caso, $C = \lambda^c \vee C_1$, con $C_1 \in \Sigma_\lambda$. Entonces, puesto que $I(C_1) = 1$ tenemos que $I(C) = 1$.
   - $C \in \Sigma_{\lambda 3}$. En tal caso $C \in \Sigma_\lambda$, luego $I(C) = 1$.

   Y vemos que en todos los casos $I(C) = 1$. Por tanto, el conjunto Σ es satisfacible.

Observación:

La regla importante del algoritmo de Davis-Putnam es la tercera. Las otras dos son casos particulares de la tercera. Vamos a ver que ocurre con las reglas primera y segunda.

1. Regla 1. Si $C = \lambda$ es una cláusula unit, entonces Σ_{λ^c} contiene a la cláusula vacía, luego es insatisfacible.

   La regla 3 nos diría que Σ es insatisfacible si, y sólo si, Σ_λ y Σ_{λ^c} lo son. Pero como este último sabemos que lo es, entonces esa condición podemos suprimirla, y nos queda la regla 1.

2. Regla 2. Si λ es un literal puro entonces $\Sigma_{\lambda 2} = \emptyset$, luego $\Sigma_\lambda = \Sigma_{\lambda 3}$. Y como $\Sigma_{\lambda 3} = \Sigma_{\lambda^c 3}$ podemos ver como $\Sigma_\lambda \subseteq \Sigma_{\lambda^c}$. En tal caso, si Σ_λ es insatisfacible, entonces Σ_{λ^c} también lo es, por tanto

   $$\Sigma_\lambda \text{ y } \Sigma_{\lambda^c} \text{ son insatisfacibles si, y sólo si, } \Sigma_\lambda \text{ lo es.}$$

   Y tenemos entonces la regla 2.

Para aplicar el algoritmo de Davis-Putnam a un conjunto Σ, miramos a ver si en Σ hay alguna cláusula unit. Si la hay, aplicamos la regla 1. Si no, miramos si hay algún literal puro. Si lo hay, aplicamos la regla 2. Si no, elegimos una fórmula atómica que aparezca en alguna cláusula y aplicamos la regla 3.

Una vez vistas las tres reglas, explicamos en que consiste el algoritmo de Davis-Putnam.
Supongamos que Σ es un conjunto de cláusulas.

- El algoritmo de Davis-Putnam nos dice si el conjunto Σ es satisfacible o insatisfacible. Caso de ser satisfacible nos proporciona una interpretación I para la que todas las cláusulas de Σ se interpretan como verdaderas.

- Este algoritmo genera un árbol en el que cada nodo es un conjunto de cláusulas. La raíz del árbol es el conjunto Σ, y de cada nodo salen una o dos ramas dependiendo de que apliquemos las reglas 1 o 2, o la regla 3.
- Una vez situados en un nodo, miramos si en el conjunto de cláusulas hay una cláusula unit. Si es que sí, aplicamos la regla 1, luego ese nodo tendrá un hijo. Si no hay cláusula unit miramos si hay algún literal puro. De haberlo, aplicamos la regla 2 (por lo que este nodo tendrá un hijo), y de no haberlo, elegimos una fórmula atómica que aparezca en alguna cláusula y aplicamos la regla 3. En tal caso, de ese nodo colgarán dos ramas.
- Conforme descendemos por el árbol, vamos obteniendo conjuntos que tienen menos cláusulas y/o que tienen cláusulas con menos literales.
- Puede ocurrir que lleguemos al conjunto vacío (nos quedamos sin cláusulas) o que lleguemos a un conjunto con la cláusula vacía (nos quedamos sin literales). En cualquiera de los dos casos de ese nodo ya no cuelga ninguna rama.
- Por tanto, las hojas del árbol son, bien conjuntos de cláusulas a los que pertenece la cláusula vacía, bien el conjunto vacío.
- El paso de cada nodo a uno de sus hijos se hace eligiendo un literal. La regla que apliquemos nos dice que literal hemos elegimos.
- Si la cláusula vacía pertenece a todas las hojas, el conjunto Σ es insatisfacible. Si hay alguna hoja que sea el conjunto vacío el conjunto es satisfacible. En este último caso, podemos recorrer el árbol desde la raíz hasta esa hoja y anotar cada uno de los literales que nos permiten descender por el árbol. Si tomamos una interpretación para la que todos estos literales sean ciertos, tendremos una interpretación para la que todas las cláusulas del conjunto Σ se interpreten como verdaderas.
- Si en una hoja encontramos el conjunto vacío no es necesario explorar el resto del árbol, pues ya sabemos que el conjunto Σ es satisfacible.

Vamos a hacer algunos ejemplos de aplicación del algoritmo.

Ejemplo 2.6.2.

1. *Tomamos el conjunto* $\Sigma = \{b \vee c,\ \neg a \vee b \vee c \vee d,\ \neg e,\ a \vee \neg c \vee d,\ \neg a \vee \neg d,\ c \vee \neg d,\ a \vee d,\ \neg c \vee d\}$. *Vamos a estudiar si es o no insatisfacible. Lo haremos por el algoritmo de Davis-Putnam.*

   - *Observamos el conjunto, y vemos que tenemos una cláusula unit* $\lambda = \neg e$. *Aplicamos la regla 1, y nos queda que* Σ *es insatisfacible si, y sólo si, lo es* $\Sigma_{\neg e}$. *El conjunto* $\Sigma_{\neg e}$, *al que llamaremos* Σ_1 *es*
   $$\Sigma_1 = \{b \vee c,\ \neg a \vee b \vee c \vee d,\ a \vee \neg c \vee d,\ \neg a \vee \neg d,\ c \vee \neg d,\ a \vee d,\ \neg c \vee d\}$$
   - *Ahora no tenemos cláusulas unit, pero el literal* $\lambda = b$ *es un literal puro. Por tanto aplicamos la regla 2, y nos queda que* Σ *es insatisfacible si, y sólo si, lo es* $(\Sigma_1)_b = \Sigma_2$, *donde*
   $$\Sigma_2 = \{a \vee \neg c \vee d,\ \neg a \vee \neg d,\ c \vee \neg d,\ a \vee d,\ \neg c \vee d\}$$
   - *En este conjunto no hay cláusulas unit ni literales puros. Elegimos una fórmula atómica que aparezca en* Σ_2, *por ejemplo* $\lambda = a$, *y aplicamos la regla 3. Entonces tenemos que* Σ_2 *es insatisfacible si, y sólo si, lo son* $(\Sigma_2)_a$ *y* $(\Sigma_2)_{\neg a}$. *Llamemos a estos conjuntos* Σ_3 *y* Σ_3'.
   $$\Sigma_3 = \{\neg d,\ c \vee \neg d,\ \neg c \vee d\}; \qquad \Sigma_3' = \{\neg c \vee d,\ c \vee \neg d,\ d\}$$
   Hemos quitado la repetición de la cláusula $\neg c \vee d$.

- *Vamos a estudiar el conjunto Σ_3. En él tenemos una cláusula unit, que es $\neg d$. Por la regla 1, Σ_3 es insatisfacible si, y sólo si, $(\Sigma_3)_{\neg d} = \Sigma_4$ lo es. Y $\Sigma_4 = \{\neg c\}$.*
- *Si aplicamos aquí la regla 1 ($\lambda = \neg c$) obtenemos el conjunto vacío. Con esto deducimos que Σ_4 es satisfacible, luego lo es Σ_3, Σ_2, Σ_1 y Σ.*

Tenemos entonces que Σ_4 es satisfacible, lo que implica que Σ lo es. No necesitamos entonces ver que le ocurre a Σ'_3. Una interpretación que haga ciertas todas las cláusulas de Σ sería la que hace ciertas a los literales $\neg c$, $\neg d$, a, b y $\neg e$. Es decir, la interpretación siguiente:

$$I(a) = 1; \quad I(b) = 1; \quad I(c) = 0; \quad ; I(d) = 0; \quad I(e) = 0.$$

A continuación vamos a escribir el árbol que genera el algoritmo.

$$\{b \vee c,\ \neg a \vee b \vee c \vee d,\ \neg e,\ a \vee \neg c \vee d,\ \neg a \vee \neg d,\ c \vee \neg d,\ a \vee d,\ \neg c \vee d\}$$

$$\Big|\ \lambda = \neg e$$

$$\{b \vee c,\ \neg a \vee b \vee c \vee d,\ a \vee \neg c \vee d,\ \neg a \vee \neg d,\ c \vee \neg d,\ a \vee d,\ \neg c \vee d\}$$

$$\Big|\ \lambda = b$$

$$\{a \vee \neg c \vee d,\ \neg a \vee \neg d,\ c \vee \neg d,\ a \vee d,\ \neg c \vee d\}$$

$$\begin{array}{ccc}
\lambda = a & & \lambda = \neg a \\
\{\neg d,\ c \vee \neg d,\ \neg c \vee d\} & & \{\neg c \vee d,\ c \vee \neg d,\ d\} \\
\lambda = \neg d & & \lambda = d \\
\{\neg c\} & & \{c\} \\
\lambda = \neg c & & \lambda = c \\
\emptyset & & \emptyset
\end{array}$$

La rama de la derecha no habría sido necesario hacerla, ya que la rama de la izquierda acaba en el conjunto vacío, luego con eso sabemos que Σ es satisfacible. De todas formas, la rama de la derecha nos da otra interpretacion para la que todas las cláusulas de Σ son ciertas que sería:

$$I(a) = 0; \quad I(b) = 1; \quad I(c) = 1; \quad ; I(d) = 1; \quad I(e) = 0.$$

2. *Vamos a demostrar que la fórmula*

$$(a \to (b \to c)) \to (\neg(a \to \neg b) \to c)$$

es una tautología. Esto sabemos que es equivalente a probar:

$$\vDash (a \to (b \to c)) \to (\neg(a \to \neg b) \to c)$$

por el teorema de la deducción esto se traduce en demostrar que

$$\{a \to (b \to c)\} \vDash \neg(a \to \neg b) \to c$$

y aplicando otra vez el teorema de la deducción nos queda el problema

$$\{a \to (b \to c), \neg(a \to \neg b)\} \vDash c$$

Lo que es equivalente a demostrar que el conjunto

$$\{a \to (b \to c), \neg(a \to \neg b), \neg c\}$$

es insatisfacible.

Hallamos la forma clausular de cada una de las fórmulas anteriores:

$a \to (b \to c)$	$\neg(a \to \neg b)$	$\neg c$
$\neg a \vee (b \to c)$	$\neg(\neg a \vee \neg b)$	
$\neg a \vee (\neg b \vee c)$	$\neg\neg a \wedge \neg\neg b$	
$\neg a \vee \neg b \vee c$	$a \wedge b$	

Y entonces lo que nos queda probar es que el siguiente conjunto de cláusulas es insatisfacible;

$$\{\neg a \vee \neg b \vee c,\ a,\ b,\ \neg c\}$$

Tenemos una cláusula unit a, por tanto, el conjunto nos queda

$$\{\neg b \vee c,\ b,\ \neg c\}$$

En este conjunto tenemos también una cláusula unit (b), por tanto, el conjunto de cláusulas se reduce a:

$$\{c, \neg c\}$$

que claramente es insatisfacible.

También, y puesto que en este conjunto tenemos una cláusula unit, podríamos reducir el conjunto y nos quedaría

$$\{\square\}$$

El árbol en este caso sería:

$$\begin{array}{c}
\{\neg a \vee \neg b \vee c,\ a,\ b,\ \neg c\} \\
\Big|\ \lambda = a \\
\{\neg b \vee c,\ b,\ \neg c\} \\
\Big|\ \lambda = b \\
\{c, \neg c\} \\
\Big|\ \lambda = c \\
\{\square\}
\end{array}$$

3. *En el ejemplo 2.4.5 demostramos que*

$$\vDash \big(\big(((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi\big) \to \tau\big) \to \big((\tau \to \varphi) \to (\theta \to \varphi)\big)$$

haciendo uso de ecuaciones en $\mathbb{Z}_2$. Vamos a demostrarlo ahora con el algoritmo de Davis-Putnam. En el citado ejemplo vimos, usando el teorema de la deducción y el teorema 2.4.1 que este problema equivalía a demostrar que el conjunto de fórmulas

$$\big\{\big[[(\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)] \to \chi\big] \to \tau,\quad \tau \to \varphi,\ \theta,\ \neg\varphi)\big\}$$

es insatisfacible.

Las dos últimas están en forma clausular. En cuanto a $\tau \to \varphi$ *su forma clausular es* $\neg\tau \vee \varphi$.

Hallemos entonces la forma clausular de $\beta = \big[[(\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)] \to \chi\big] \to \tau$

$$
\begin{array}{rcl}
\beta & = & \big[[(\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)] \to \chi\big] \to \tau \\
 & \equiv & \neg\big[[(\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)] \to \chi\big] \vee \tau \\
 & \equiv & \neg\big[\neg[(\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)] \vee \chi\big] \vee \tau \\
 & \equiv & \neg\big[\neg[\neg(\varphi \to \psi) \vee (\neg\chi \to \neg\theta)] \vee \chi\big] \vee \tau \\
 & \equiv & \neg\big[\neg[\neg(\neg\varphi \vee \psi) \vee (\neg\neg\chi \vee \neg\theta)] \vee \chi\big] \vee \tau \\
 & \equiv & \big[\neg\neg[\neg(\neg\varphi \vee \psi) \vee (\neg\neg\chi \vee \neg\theta)] \wedge \neg\chi\big] \vee \tau \\
 & \equiv & \big[[\neg(\neg\varphi \vee \psi) \vee (\chi \vee \neg\theta)] \wedge \neg\chi\big] \vee \tau \\
 & \equiv & \big[[(\neg\neg\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\chi \vee \neg\theta)] \wedge \neg\chi\big] \vee \tau \\
 & \equiv & \big[[(\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\chi \vee \neg\theta)] \wedge \neg\chi\big] \vee \tau \\
 & \equiv & \big[[(\varphi \vee \chi \vee \neg\theta) \wedge (\neg\psi \vee \chi \vee \neg\theta)] \wedge \neg\chi\big] \vee \tau \\
 & \equiv & [(\varphi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau) \wedge (\neg\psi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau)] \wedge (\neg\chi \vee \tau)
\end{array}
$$

Por tanto, hemos de probar que el conjunto de cláusulas

$$\{\varphi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau, \quad \neg\psi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau, \quad \neg\chi \vee \tau, \quad \varphi \vee \neg\tau, \quad \neg\varphi, \quad \theta\}$$

es insatisfacible.

$$
\begin{array}{c}
\{\varphi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau, \quad \neg\psi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau, \quad \neg\chi \vee \tau, \quad \varphi \vee \neg\tau, \quad \neg\varphi, \quad \theta\} \\
\Big| \; \lambda = \neg\varphi \\
\{\chi \vee \neg\theta \vee \tau, \quad \neg\psi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau, \quad \neg\chi \vee \tau, \quad \neg\tau, \; \theta\} \\
\Big| \; \lambda = \neg\tau \\
\{\chi \vee \neg\theta, \quad \neg\psi \vee \chi \vee \neg\theta, \quad \neg\chi, \; \theta\} \\
\Big| \; \lambda = \neg\chi \\
\{\neg\theta, \quad \neg\psi \vee \neg\theta, \; \theta\} \\
\Big| \; \lambda = \neg\theta \\
\{\square\}
\end{array}
$$

Como el árbol tiene una única rama, y acaba en un conjunto que contiene a la cláusula vacía, el conjunto es insatisfacible.

4. *Estudia si es cierto que*

$$(a \to \neg c) \to a, \quad a \to \neg b, \quad \neg(\neg c \wedge \neg b) \vDash (\neg c \to a) \to b$$

Lo primero que hacemos es transformar este problema en un problema de satisfacibilidad o insatisfacibilidad de un conjunto de fórmulas.

Por el teorema de la deducción, este problema es equivalente a

$$(a \to \neg c) \to a, \quad a \to \neg b, \quad \neg(\neg c \wedge \neg b), \quad \neg c \to a \vDash b$$

y a su vez, este es equivalente a comprobar si el siguiente conjunto de fórmulas

$$\Sigma = \{(a \to \neg c) \to a, \quad a \to \neg b, \quad \neg(\neg c \wedge \neg b), \quad \neg c \to a, \quad \neg b\}$$

es insatisfacible.

Calculamos entonces la forma clausular de cada una de las fórmulas:

$$\begin{array}{lllll}
(a \to \neg c) \to a & a \to \neg b & \neg(\neg c \wedge \neg b) & \neg c \to a & b \\
(\neg a \vee \neg c) \to a & \neg a \vee \neg b & c \vee b & c \vee a & \\
\neg(\neg a \vee \neg c) \vee a & & & & \\
(a \wedge c) \vee a & & & & \\
(a \vee a) \wedge (c \vee a) & & & & \\
 & & & & \\
a & \neg a \vee \neg b & b \vee c & a \vee c & \neg b
\end{array}$$

Por tanto, nos proponemos estudiar si el conjunto de cláusulas

$$\{a, \quad \neg a \vee \neg b, \quad b \vee c, \quad a \vee c, \quad \neg b\}$$

es o no insatisfacible. Aplicamos para ello el algoritmo de Davis-Putnmam.

$$\begin{array}{c}
\{a, \quad \neg a \vee \neg b, \quad b \vee c, \quad a \vee c, \quad \neg b\} \\
\Big| \; \lambda = a \\
\{\neg b, \quad b \vee c, \quad \neg b\} \\
\Big| \; \lambda = \neg b \\
\{c\} \\
\Big| \; \lambda = c \\
\emptyset
\end{array}$$

Al haber llegado al conjunto vacío, el conjunto de cláusulas del que partíamos es satisfacible, y por tanto, la respuesta a si

$$(a \to \neg c) \to a, \quad a \to \neg b, \quad \neg(\neg c \wedge \neg b) \vDash (\neg c \to a) \to b$$

es que no.

Pero además, el algoritmo nos dice que si tomamos una interpretación I para la que los literales a, $\neg b$ y c sean ciertos, entonces con esa interpretación todas las cláusulas del conjunto Σ son verdaderas. Obviamente, la interpretación de la que estamos hablando es la dada por $I(a) = 1$, $I(b) = 0$, $I(c) = 1$.

Esta interpretación es una prueba de que la implicación

$$(a \to \neg c) \to a, \quad a \to \neg b, \quad \neg(\neg c \wedge \neg b) \vDash (\neg c \to a) \to b$$

es falsa, pues con esa interpretación

$$I((a \to \neg c) \to a) = 1; \; I(a \to \neg b) = 1; \; I(\neg(\neg c \wedge \neg b)) = 1; \quad \textit{mientras que } I((\neg c \to a) \to b) = 0.$$

Es decir, I es una interpretación que hace ciertas todas las premisas, pero que hace falsa la conclusión. Luego esta conclusión no puede deducirse de las premisas.

2.6.2. Método de Resolución

Para terminar el tema vamos a estudiar otro método para saber si un conjunto de cláusulas es satisfacible o insatisfacible.

Este método que vamos a dar es un método sintáctico, pues nos da una forma de, a partir de dos fórmulas con una determinada estructura, obtener nuevas fórmulas que son consecuencia de éstas.

La ventaja de este método es que, además de ser fácil de utilizar, podremos adaptarlo a cuando estudiemos lógica de predicados.

El método se basa en el siguiente resultado:

Teorema 2.6.2. *Sean α, β, γ tres fórmulas en un lenguaje proposicional. Entonces*

$$\{\alpha \vee \beta, \neg\alpha \vee \gamma\} \vDash \beta \vee \gamma$$

Demostración:
Sea I una interpretación para la que $I(\alpha \vee \beta) = 1$ y $I(\neg\alpha \vee \gamma) = 1$. Pueden darse dos casos:

- $I(\beta) = 1$, en cuyo caso $I(\beta \vee \gamma) = 1$.
- $I(\beta) = 0$. Ahora, puesto que $I(\alpha \vee \beta) = 1$ deducimos que $I(\alpha) = 1$, es decir, $I(\neg\alpha) = 0$, y como $I(\neg\alpha \vee \gamma) = 1$ podemos concluir que $I(\gamma) = 1$, lo que implica que $I(\beta \vee \gamma) = 1$.

■

El concepto de Resolvente

Lo primero que necesitamos para aplicar el método de resolución es el concepto de resolvente.

Supongamos que C es una cláusula, y que λ es un literal que aparece en la cláusula C. Como en la sección anterior denotaremos por $C - \lambda$ a la cláusula que resulta de eliminar el literal λ de la cláusula C. Por ejemplo, si $C = a \vee \neg b \vee d$ entonces $C - a = \neg b \vee d$, mientras que $C - \neg b = a \vee d$. Si $C = b$ entonces $C - b = \square$.

Definición 17. *Sean C_1 y C_2 dos cláusulas. Supongamos que λ es un literal tal que aparece en la cláusula C_1 y λ^c aparece en C_2. Una cláusula que sea equivalente a $(C_1 - \lambda) \vee (C_2 - \lambda^c)$ es lo que se denomina una* resolvente *de C_1 y C_2.*

Observación:

En la definición de resolvente hay dos casos especiales:

1. La fórmula $(C_1 - \lambda) \vee (C_2 - \lambda)$ es una tautología (por ejemplo, si $C_1 = a \vee b \vee \neg c$ y $C_2 = \neg a \vee c \vee d$). En este caso, consideraremos excepcionalmente a la fórmula $(C_1 - \lambda) \vee (C_2 - \lambda)$ una resolvente, aún cuando no sea una cláusula (en el ejemplo, la resolvente sería $b \vee c \vee \neg c \vee d$ o $a \vee \neg a \vee b \vee d$). No obstante, en este caso, esta resolvente no aporta nada al método de resolución. Lo que **nunca** puede hacerse es obtener como resolvente $b \vee d$ (algunos llaman a esto *resolver a la doble*).
2. $C_1 = \lambda$ y $C_2 = \lambda^c$. En este caso, la resolvente es $\square$.

El teorema 2.6.2 nos dice que si C_1 y C_2 son cláusulas y R una resolvente suya, entonces $\{C_1, C_2\} \vDash R$.

Ejemplo 2.6.3.

1. *Si tenemos las cláusulas $C_1 = \neg a \vee b$ y $C_2 = a$ entonces una resolvente de C_1 y C_2 es b. Nótese que $C_1 \equiv a \to b$, luego al obtener esta resolvente lo que estamos afirmando es que*

$$\{a, a \to b\} \vDash b$$

un hecho conocido como "modus ponens".

2. *Supongamos que* $C_1 = a \vee \neg c \vee d$ *y* $C_2 = b \vee c \vee d$. *Entonces* $C_1 - \neg c = a \vee d$ *y* $C_2 - c = b \vee d$, *luego* $(C_1 - \neg c) \vee (C_2 - c) = (a \vee d) \vee (b \vee d) \equiv a \vee b \vee d$.

El *método de resolución* (sin variables) pretende, dado un conjunto de cláusulas, obtener resolventes de dichas cláusulas que son añadidas al conjunto (estas nuevas cláusulas se dice que se han deducido por resolución). Todas estas cláusulas que se van obteniendo son consecuencia lógica del conjunto de partida.

Si Γ es un conjunto de cláusulas, y C es una cláusula, se dice que C se deduce de Γ por resolución si, bien $C \in \Gamma$, bien C se puede obtener calculando resolventes con los elementos de Γ o con nuevas cláslulas obtendias mediante este proceso.

Más precisamente tenemos:

Definición 18. *Sea* Γ *un conjunto de cláusulas, y* C *una cláusula. Una* deducción (por resolución) *de* C *a partir de* Γ *es una sucesión de cláusulas* $C_1, C_2, \cdots, C_n$ *donde:*

- $C_n = C$.
- $C_i \in \Gamma$ *o* C_i *es una resolvente de dos cláusulas del conjunto* $\{C_1, \cdots, C_{i-1}\}$

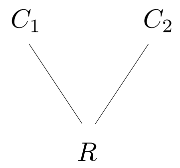
Ejemplo 2.6.4.

Sea $\Gamma = \{\neg a \vee b,\ \neg c \vee \neg d,\ b \vee \neg c,\ \neg b \vee c,\ a \vee b,\ a \vee c\}$. *Vamos a dar una deducción de la cláusula* $\neg d$. *Tomamos:*

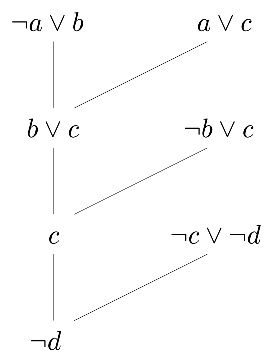
- $C_1 = \neg a \vee b$ *que pertenece a* Γ.
- $C_2 = a \vee c$ *que pertenece a* Γ.
- $C_3 = b \vee c$ *que es una resolvente de* C_1 *y* C_2.
- $C_4 = \neg b \vee c$ *que pertenece a* Γ.
- $C_5 = c$, *que es una resolvente de* C_3 *y* C_4.
- $C_6 = \neg c \vee \neg d$ *que pertenece a* Γ.
- $C_7 = \neg d$ *que es una resolvente de* C_5 *y* C_6.

Tenemos entonces que $\Gamma \vDash d$.

Si C_1 y C_2 son dos cláusulas, el hecho de que R es una resolvente de C_1 y C_2 lo representaremos:



Siguiendo este criterio, la deducción que acabamos de hacer la podemos escirbir como sigue:



Estamos ya en condiciones de dar el teorema fundamental de esta sección:

Teorema 2.6.3 (Principio de resolución)**.** *Sea Γ un conjunto de cláusulas. Entonces Γ es insatisfacible si, y sólo si, hay una deducción por resolución de la cláusula vacía.*

Cuando queremos demostrar que $\Gamma \vDash \alpha$ y para eso buscamos una deducción de la cláusula vacía a partir del conjunto $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ se dice que estamos haciendo una demostración por refutación: negamos lo que queremos demostrar (la tesis), y tratamos de llegar a una contradicción (la cláusula vacía). Por el contrario, si lo que hacemos es una deducción de α a partir de Γ, como hemos hecho en el ejemplo anterior (en el que hemos dado una demostración de $\neg d$), se dice que hacemos una demostración directa.

Vamos a ver ahora algunos ejemplos de aplicación de este teorema.

Ejemplo 2.6.5.

1. *Vamos a demostrar que la fórmula*

$$\alpha = (a \to (b \to c)) \to (\neg(a \to \neg b) \to c)$$

es una tautología. Esto sabemos que es equivalente a probar:

$$\vDash (a \to (b \to c)) \to (\neg(a \to \neg b) \to c)$$

aplicando el teorema de la deducción dos veces el problema se transforma en

$$\{a \to (b \to c), \neg(a \to \neg b)\} \vDash c$$

o equivalentemente, en demostrar que el conjunto

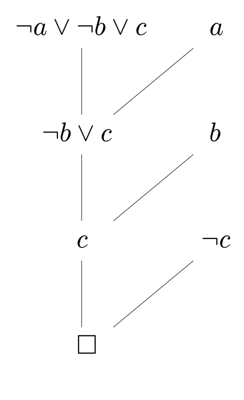
$$\{a \to (b \to c), \neg(a \to \neg b), \neg c\}$$

es insatisfacible.

En el ejemplo 2.6.2 calculamos la forma clausular de estas fórmulas. Lo que nos queda entonces es probar que el conjunto de cláusulas

$$\{\neg a \vee \neg b \vee c,\ a,\ b,\ \neg c\}$$

es insatisfacible. Para eso buscamos una deducción de la cláusula vacía.



Al llegar a la cláusula vacía deducimos que el conjunto de cláusulas es insatisfacible, y por tanto la fórmula α es una tautología.

2. *Ya hemos demostrado de varias formas que la fórmula*

$$\models \big((((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi\big) \to \tau\big) \to \big((\tau \to \varphi) \to (\theta \to \varphi)\big)$$

   es una tautología. Ahora vamos a hacerlo utilizando el Principio de Resolución.

   En primer lugar necesitamos transformar el problema en otro equivalente que consiste en decidir si un conjunto de cláusulas es satisfacible o insatisfacible.

   Como esto ya se ha hecho en la sección del algoritmo de Davis-Putnam (ver ejemplo 2.6.2), copiamos el resultado: hemos de probar que el conjunto de cláusulas

$$\{\varphi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau, \quad \neg\psi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau, \quad \neg\chi \vee \tau, \quad \varphi \vee \neg\tau, \quad \neg\varphi, \quad \theta\}$$

   es insatisfacible.

   Tratamos entonces de deducir la cláusula vacía.

$$\begin{array}{ccc}
\varphi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau & & \neg\chi \vee \tau \\
\mid & \diagup & \\
\varphi \vee \neg\theta \vee \tau & & \varphi \vee \neg\tau \\
\mid & \diagup & \\
\varphi \vee \neg\theta & & \neg\varphi \\
\mid & \diagup & \\
\neg\theta & & \theta \\
\mid & \diagup & \\
\square & &
\end{array}$$

   Al haber obtenido la cláusula vacía, concluimos que la fórmula inicial es una tautología.

3. *Estudiemos si es verdad que*

$$\{q \to p \vee r\} \models (p \to q) \to \big(p \to ((r \to q) \to r)\big)$$

   En primer lugar, aplicamos el teorema de la deducción 3 veces, y el problema se transforma en estudiar si

$$\{q \to p \vee r,\ p \to q,\ p,\ r \to q\} \models r$$

   Y ahora, vamos a resolver esto de cuatro formas diferentes, tal y como hemos ido viendo a lo largo del tema.

   - *Ecuaciones en $\mathbb{Z}_2$.*

     Supongamos que tenemos una interpretación para la que todas las premisas son ciertas. Es decir, I es una interpretación tal que

$$\left.\begin{array}{l}
I(q \to p \vee r) = 1 \\
I(p \to q) = 1 \\
I(r \to q) = 1 \\
I(p) = 1
\end{array}\right\}$$

Si calculamos el polinomio de Gegalkine de $r \to q$, $p \to q$ y $q \to p \vee r$ tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 1 + I(q) + I(q)\cdot I(r) + I(q)\cdot I(p) + I(q)\cdot I(r)\cdot I(p) = 1 \\ 1 + I(p) + I(p)\cdot I(q) = 1 \\ 1 + I(r) + I(r)\cdot I(q) = 1 \\ I(p) = 1 \end{array}\right\}$$

Si sustituimos $I(p)$ por 1 en la segunda ecuación nos queda:

$$\left.\begin{array}{l} 1 + I(q) + I(q)\cdot I(r) + I(q)\cdot I(p) + I(q)\cdot I(r)\cdot I(p) = 1 \\ 1 + 1 + I(q) = 1 \\ 1 + I(r) + I(r)\cdot I(q) = 1 \\ I(p) = 1 \end{array}\right\}$$

Es decir, $I(q) = 1$. Y ahora sustituimos en la primera y la tercera.

$$\left.\begin{array}{l} 1 + 1 + 1\cdot I(r) + 1\cdot 1 + 1\cdot I(r)\cdot 1 = 1 \\ I(q) = 1 \\ 1 + I(r) + I(r)\cdot 1 = 1 \\ I(p) = 1 \end{array}\right\}$$

Y podemos comprobar como esas dos ecuaciones son ciertas independientemente del valor de $I(r)$. Por tanto, no podemos deducir que $I(r) = 1$ (podría valer cero), luego no es cierto que

$$\{q \to p \vee r\} \vDash (p \to q) \to \big(p \to ((r \to q) \to r)\big)$$

Una interpretación que nos lo muestra es $I(p) = 1$, $I(q) = 1$ e $I(r) = 0$.

- *Tablas de verdad.*
  Calculamos la tabla de verdad de las fórmulas $q \to p \vee r$, $p \to q$, p y $r \to q$.

	p	q	r	$p \vee r$	$q \to p \vee r$	$p \to q$	$r \to q$
I_0	0	0	0	0	1	1	1
I_1	0	0	1	1	1	1	0
I_2	0	1	0	0	0	1	1
I_3	0	1	1	1	1	1	1
I_4	1	0	0	1	1	0	1
I_5	1	0	1	1	1	0	0
I_6	1	1	0	1	1	1	1
I_7	1	1	1	1	1	1	1

  Las únicas interpretaciones para las que son ciertas $q \to p \vee r$, $p \to q$, p y $r \to q$ son I_6 e I_7. Y en una de ellas (I_6), se tiene que r es falsa. Por tanto, r no es consecuencia lógica de $q \to p \vee r$, $p \to q$, p, $r \to q$ y consiguientemente, $(p \to q) \to \big(p \to ((r \to q) \to r\big)$ no es consecuencia lógica de $q \to p \vee r$.

- *Algoritmo de Davis-Putnam*
  En primer lugar calculamos la forma clausular de todas las premisas y la negación de la conclusión. Lo que tenemos entonces es que probar que el conjunto

$$\{\neg p \vee q,\ \neg q \vee p \vee r,\ p,\ \neg r \vee q,\ \neg r\}$$

  es insatisfacible. Aplicamos el algoritmo de Davis-Putnam.

$$
\begin{array}{c}
\{\neg p \vee q,\ \neg q \vee p \vee r,\ p,\ \neg r \vee q,\ \neg r\} \\
\Big| \ \lambda = p \\
\{q,\ \neg r \vee q,\ \neg r\} \\
\Big| \ \lambda = q \\
\{\neg r\} \\
\Big| \ \lambda = r \\
\emptyset
\end{array}
$$

Al llegar al conjunto vacío, el conjunto de cláusulas es satisfacible. Y una interpretación que hace ciertas todas las cláusulas es la que cumple que $I(p) = 1$, $I(q) = 1$ e $I(\neg r) = 1$.

- *Resolución.*

  Partimos del conjunto de cláusulas que hemos obtenido en el apartado anterior cuando hemos aplicado el algoritmo de Davis-Putnan.

$$\{\neg p \vee q,\ \neg q \vee p \vee r,\ p,\ \neg r \vee q,\ \neg r\}$$

y vamos a tratar de encontrar por resolución la cláusula vacía.

$$
\begin{array}{cc}
\neg p \vee q & p \\
\big| & \diagup \\
q & \neg q \vee p \vee r \\
\big| & \diagup \\
p \vee r & \neg r \\
\big| & \diagup \\
p & \neg p \vee q \\
\big| & \diagup \\
q &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cc}
\neg q \vee p \vee r & \neg r \\
\big| & \diagup \\
\neg q \vee p & \neg r \vee q \\
\big| & \diagup \\
p \vee \neg r & \neg p \vee q \\
\big| & \diagup \\
q \vee \neg r & p \vee r \\
\big| & \diagup \\
p \vee q &
\end{array}
$$

Podemos seguir calculando resolventes. En esta ocasión no llegaremos nunca a la cláusula vacía.

Pero cuando nos encontremos con una situación así podemos plantearnos si no llegamos a la cláusula vacía porque no somos capaces de encontrar el camino apropiado o porque no existe ese camino.

En este ejemplo sabemos que no existe ese camino ya que el problema lo hemos resuelto antes por otros métodos. Pero si no tenemos esa información. ¿Cuándo paramos?

En este ejemplo, de todas formas, no es muy complicado. Entre las cláusulas que nos han ido apareciendo nos hemos encontrado a p, a q y a $\neg r$. Probamos con una interpretación que haga ciertas a estas cláusulas y comprobamos que todas las cláusulas son ciertas con esa interpretación, luego el conjunto es satisfacible.

Hemos visto en estos ejemplos como usar el método de resolución para hacer una demostración por refutación de una tesis. Pero este método también permite hacer demostraciones directas.

Si tenemos un conjunto de fórmulas Γ y calculamos la forma clausular de cada una de ellas, cualquier cláusula que obtengamos por resolución será consecuencia lógica de Γ.

Vamos a ver un ejemplo.

Ejemplo 2.6.6.

Cuatro amigos, Ana, Benjamín, Carmen y Daniel están pensando en ir a visitar a Emilio, que está enfermo.

Dice Ana: Benjamín, si tú no vas yo tampoco.

Dice Carmen: Ana, si tú no vas no te preocupes, que voy yo.

Dice Daniel: ¡Si va Carmen, yo no voy!

Dice Benjamín: Yo hago lo que haga Carmen.

A partir de esto, ¿quien va a ver a Emilio?

Para resolver esto, vamos a denotar por a al enunciado Ana va a ver a Emilio*, b al enunciado* Benjamín va a ver a Emilio*, c al enunciado* Carmen va a ver a Emilio *y d al enunciado* Daniel va a ver a Emilio.

Entonces:

Lo que dice Ana podemos traducirlo como $\neg b \to \neg a$.

Lo que dice Carmen lo podemos traducir como $\neg a \to c$.

Lo que dice Daniel lo traducimos como $c \to \neg d$.

Lo que dice Benjamín lo traducimos como $b \leftrightarrow c$.

Entonces, lo que tenemos es un conjunto de fórmulas $\{\neg b \to \neg a,\ \neg a \to c,\ c \to \neg d,\ b \leftrightarrow c\}$. Calculamos la forma clausular de cada una de estas fórmulas:

- $\neg b \to \neg a \equiv \neg\neg b \vee \neg a \equiv \neg a \vee b$.
- $\neg a \to c \equiv \neg\neg a \vee c \equiv a \vee c$.
- $c \to \neg d \equiv \neg c \vee \neg d$.
- $b \leftrightarrow c \equiv (b \to c) \wedge (c \to b) \equiv (\neg b \vee c) \wedge (b \vee \neg c)$.

Y tenemos entonces el siguiente conjunto de cláusulas:

$$\{\neg a \vee b,\ a \vee c,\ c \vee \neg d,\ \neg b \vee c,\ b \vee \neg c\}$$

Y ahora calculamos resolventes:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\neg a \vee b \arrow[d, dash] & a \vee c \arrow[dl, dash] & & & \\
b \vee c \arrow[d, dash] & \neg b \vee c \arrow[dl, dash] & & c \arrow[d, dash] & c \vee \neg d \arrow[dl, dash] \\
c \arrow[d, dash] & b \vee \neg c \arrow[dl, dash] & & \neg d & \\
b & & & &
\end{tikzcd}$$

Todas las cláusulas que hemos obtenido son consecuencia lógica del conjunto

$$\{\neg b \to \neg a,\ \neg a \to c,\ c \to \neg d,\ b \leftrightarrow c\},$$

ya que se han obtenido mediante resolución. Entre estas cláusulas se encuentran b, c y $\neg d$, que significan que Benjamín y Carmen van a visitar a Emilio y que Daniel no va. Por tanto, de los datos que tenemos puede deducirse eso. Sobre Ana no podemos deducir si va o no va.

Por supuesto que no puede hacerse la siguiente resolvente:

$$\begin{array}{ccc} \neg b \vee c & & b \vee \neg c \\ & \square & \end{array}$$

Esto nos llevaría a la conclusión errónea de que el conjunto $\{\neg b \to \neg a,\ \neg a \to c,\ c \to \neg d,\ b \leftrightarrow c\}$ es insatisfacible, lo que significaría que alguna de las cuatro afirmaciones que hacen Ana, Benjamín, Carmen o Daniel tiene que ser falsa, pues no pueden darse las 4 a la vez.

De hecho, si analizamos esto un poco más lo que ocurre en este ejemplo, lo que tendríamos es que el conjunto de cláusulas $\{\neg b \vee c,\ b \vee \neg c\}$ sería insatisfacible (pues de él se deduce la cláusula vacía). Pero estas cláusulas son las que se obtienen de la afirmación de Benjamín yo hago lo que haga Carmen*. Esto significaría que esa afirmación es contradictoria o lo que es lo mismo, nunca podría darse una situación así.*

Estrategias de resolución.

El teorema 2.6.3 nos dice que un conjunto de cláusulas es insatisfacible si, y sólo si, podemos deducir por resolución la cláusula vacía. Por tanto si mediante resolución logramos la cláusula vacía sabemos que el conjunto es insatisfacible. Pero, ¿qué ocurre si no encontramos la cláusula vacía? Esto puede ocurrir por dos motivos. El primero que no se pueda deducir la cláusula vacía, y el segundo que sí se pueda pero no hayamos dado con el camino correcto.

Vamos entonces a estudiar algunas estrategias para calcular resolventes.

Estrategia de saturación.

Esto, en realidad no es una estrategia. Se trata de calcular resolventes. Paramos, bien cuando encontremos la cláusula vacía, bien cuando no se puedan calcular más resolventes.

Puesto que el número posible de cláusulas para un conjunto de n fórmulas atómicas es 3^n, este método siempre acaba, pero puede ser muy largo.

Para seguir un cierto orden, partimos de nuestro conjunto de cláusulas, que llamaremos Σ_0.

En una primera etapa calculamos todas las resolventes que podemos hacer con estas cláusulas, y las añadimos al conjunto. Tenemos así un nuevo conjunto Σ_1.

En la siguiente etapa calculamos todas las resolventes que podemos hacer con las cláusulas de $Sigma_1$. Al nuevo conjunto lo llamamos Σ_2.

De esta forma, vamos obteniendo una sucesión de conjuntos de cláusulas $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \cdots$ que en algún momento tiene que estabilizarse. Si llegamos a ese momento sin haber obtenido la cláusula vacía el conjunto Σ es satisfacible. Vamos a ver un ejemplo.

Ejemplo 2.6.7.

Partimos del conjunto de cláusulas $\Sigma_0 = \{\neg p \vee q,\ \neg q \vee p \vee r,\ p,\ \neg r \vee q,\ \neg r\}$.

Vamos a llamar a estas cláusulas C_1, C_2, C_3, C_4 y C_5.

Formamos el conjunto Σ_1. Para ello, calculamos todas las posibles resolventes con cláusulas de Σ_0. No contamos los casos en que obtengamos una tautología (por ejemplo, C_1 con C_2. En tal caso, las cláusulas que obtenemos son:

q, que es resolvente de C_1 y C_3. La llamaremos C_6.

$\neg q \vee p$, que es resolvente de C_2 y C_5. La llamaremos C_7.

Y ya no podemos obtener más resolventes. Por tanto,

$$\Sigma_1 = \{\neg p \vee q,\ \neg q \vee p \vee r,\ p,\ \neg r \vee q,\ \neg r,\ q,\ \neg q \vee p\}$$

Vamos a calcular Σ_2. *Para esto, calculamos todas las posibles resolventes con las cláusulas de* Σ_1. *Únicamente hemos de mirar aquellas que obtengamos a partir de* C_6 *ó* C_7 *con cualquiera de las cláusulas de* Σ_1. *Las cláusulas que obtenemos son:*

$p \vee r$, *que es resolvente de* C_6 *y* C_2. *La llamaremos* C_8.

p, *que es resolvente de* C_7 *y* C_1. *Pero esta ya la teníamos. Es* C_3. *También se obtiene* p *como resolvente de* C_6 *y* C_7.

$p \vee \neg r$, *que se obtiene como resolvente de* C_7 *y* C_4. *La llamaremos* C_9.

Tenemos entonces:

$$\Sigma_2 = \{\neg p \vee q,\ \neg q \vee p \vee r,\ p,\ \neg r \vee q,\ \neg r,\ q,\ \neg q \vee p,\ p \vee r,\ p \vee \neg r\}$$

Calculamos Σ_3.

$q \vee r$ *es resolvente de* C_8 *y* C_1. *La llamaremos* C_{10}.

$p \vee q$ *es resolvente de* C_8 *y* C_4. *La llamaremos* C_{11}.

El resto de resolventes que se pueden obtener ya han aparecido antes.

El conjunto Σ_3 *es:*

$$\Sigma_3 = \{\neg p \vee q,\ \neg q \vee p \vee r,\ p,\ \neg r \vee q,\ \neg r,\ q,\ \neg q \vee p,\ p \vee r,\ p \vee \neg r,\ q \vee r,\ p \vee q\}$$

Y podemos comprobar que ya no pueden obtenerse más resolventes. Como entre las resolventes obtenidas no está la cláusula vacía, el conjunto es satisfacible.

Resolución lineal.

En los ejemplos que hemos hecho de resolución (ver ejemplo 2.6.5) observamos que en todos ellos cada resolvente que hemos obtenido (salvo la primera) provenía de hacer una resolvente con una cláusula obtendida en el paso inmediatamente anterior, junto con otra cláusula. Esto daba lugar a que en la representación que hacíamos de las resolventes, todas aparecieran formando una línea.

Dada una deducción de una fórmula por resolución diremos que es *lineal* si para cada nueva resolvente que obtenemos hacemos uso de la obtenida en la etapa inmediatamente anterior.

Vamos a ver algún ejemplo.

Ejemplo 2.6.8.

Sea $\Sigma = \{p \vee q,\ p \vee \neg q,\ \neg p \vee \neg r,\ \neg p \vee \neg q,\ \neg p \vee q \vee r\}$. *Llamemos* C_1, C_2, C_3, C_4 *y* C_5 *a las cláusulas de* Σ *en el mismo orden que las hemos escrito.*

Vamos a ver que Σ *es un conjunto insatisfacible. Para esto, vamos a dar una deducción de la cláusula vacía.*

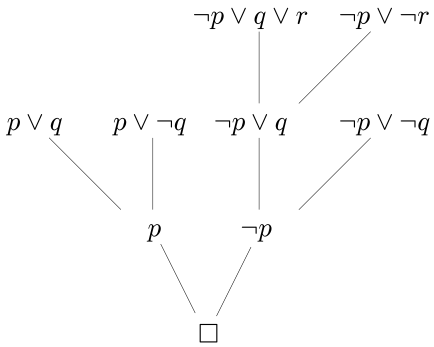
$C_6 = p$ *resolvente de* C_1 *y* C_2.

$C_7 = \neg p \vee q$ *resolvente de* C_3 *y* C_5.

$C_8 = \neg p$ *resolvente de* C_7 *y* C_4.

$C_9 = \square$ *resolvente de* C_8 *y* C_6.

Y podemos ver como no es lineal, pues al obtener C_7 *no se ha usado la cláusula obtenida en el paso anterior* (C_6). *Vamos a representar esta deducción de forma gráfica.*



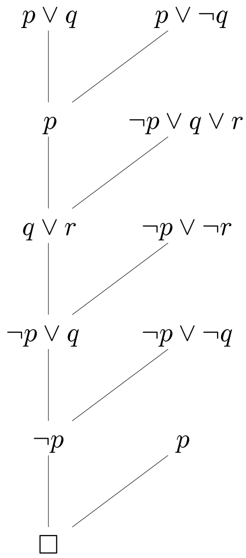
Y vemos como hay dos ramas que se unen para llegar a la cláusula vacía.

La estrategia de resolución lineal es una estrategia completa. Esto significa que si un conjunto de cláusulas es insatisfacible, entonces hay una deducción lineal de la cláusula vacía.

En el ejemplo último que hemos hecho, hemos visto una deducción no lineal de la cláusula vacía. Por lo que acabamos de decir, debe haber también una deducción lineal de la cláusula vacía. Veámosla.

Ejemplo 2.6.9.

A partir del conjunto $\Sigma = \{p \vee q,\ p \vee \neg q,\ \neg p \vee \neg r,\ \neg p \vee \neg q,\ \neg p \vee q \vee r\}$ *vamos a dar una deducción lineal de la cláusula vacía.*



Es decir, que siempre que tengamos una deducción de la cláusula vacía podemos obtener una deducción lineal de la cláusula vacía.

Estrategias input.

Dado un conjunto de cláusulas Σ, una deducción a partir de Σ (por resolución) se dice *input* si al menos una de las dos cláusulas que se usan para calcular cada una de las resolventes pertenece al conjunto Σ.

Ejemplo 2.6.10.

Vamos a analizar las deducciones que hemos hecho en los ejemplos anteriores.

1. *En el ejemplo 2.6.4 tomamos el conjunto* $\{\neg a \vee b,\ \neg c \vee \neg d,\ b \vee \neg c,\ \neg b \vee c,\ a \vee b,\ a \vee c\}$ *e hicimos una deducción de la cláusula* $\neg d$*. Esta deducción es una deducción input, ya que:*

La primera resolvente ($b \vee c$) se obtuvo a partir de las cláusulas $\neg a \vee b$ y $a \vee c$, ambas pertenecientes al conjunto Γ. Obviamente, en cualquier deducción por resolución la primera resolvente tiene que hacerse con elementos del conjunto inicial.

La segunda resolvente (c) se obtuvo a partir de las cláusulas $b \vee c$ y $\neg b \vee c$. Esta última pertenecía a Γ.

La tercera resolvente ($\neg d$ se obtuvo a partir de las cláusulas c y $\neg c \vee \neg d$, y esta última pertenecía a Γ.

2. *Nos vamos ahora al ejemplo 2.6.5.*

   - *Ahí hicimos una deducción de la cláusula vacía a partir del conjunto $\{\neg a \vee \neg b \vee c,\ a,\ b,\ \neg c\}$. Esta deducción era una deducción input, como puede comprobarse fácilmente.*
   - *A partir de $\{\varphi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau,\ \ \neg\psi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau,\ \ \neg\chi \vee \tau,\ \ \varphi \vee \neg\tau,\ \ \neg\varphi,\ \ \theta\}$ se hizo una deducción de la cláusula vacía. Esta deducción también es input.*
   - *Del conjunto $\Sigma = \{\neg p \vee q,\ \neg q \vee p \vee r,\ p,\ \neg r \vee q,\ \neg r\}$ hicimos dos deducciones. La primera es input. La segunda no lo es. El motivo es que la última resolvente, $p \vee q$, se obtiene de las cláusulas $q \vee \neg r$ y $p \vee r$, y ninguna de las dos pertenece a Σ.*

3. *En el ejemplo 2.6.8 dimos una deducción no lineal de la cláusula vacía. Esta deducción tampoco es input, pues la cláusula vacía se obtiene como resolvente de las cláusulas p y $\neg p$, y ninguna de estas pertenece al conjunto inicial de cláusulas.*

La ventaja de las deducciones input es que nos acota el número de posibles resolventes. Sin embargo, esta estrategia no es completa. Para comprobarlo, podemos fijarnos, por ejemplo, en el conjunto de cláusulas $\Sigma = \{p \vee q,\ p \vee \neg q,\ \neg p \vee \neg r,\ \neg p \vee \neg q,\ \neg p \vee q \vee r\}$, que analizamos en los ejemplos 2.6.8 y 2.6.9. Este conjunto es insatisfacible, pues de él dedujimos la cláusula vacía. Sin embargo no hay ninguna deducción input de la cláusula vacía. Una razón podría ser que todas las cláusulas de Σ tienen dos o más literales, luego si hacemos una resolvente con una de estas cláusulas, ésta tendrá al menos un literal.

Sin embargo, hay una situación en que la estrategia input sí es completa. Vamos a pasar a describirla. Para ello, previamente damos algunos conceptos.

Definición 19. *Dado un lenguaje proposicional construido sobre el conjunto X:*

1. *Un literal se dice positivo si es una fórmula atómica (es decir, si pertenece a X).*
2. *Un literal se dice negativo si es el negado de una fórmula atómica.*
3. *Una cláusula se dice* negativa *si todos los literales que aparecen en ella son literales negativos.*
4. *Una cláusula se dice* cláusula de Horn *si tiene exactamente un literal positivo.*
5. *Un conjunto de cláusulas es un* conjunto de Horn *si tiene exactamente una cláusula negativa, y el resto de las cláusulas son cláusulas de Horn.*

Ejemplo 2.6.11.

1. *Toda fórmula atómica es una cláusula de Horn.*
2. *La cláusula vacía es una cláusula negativa (todos sus literales son negativos).*
3. *Las cláusulas $\neg a \vee \neg b \vee c$, a, b son cláusulas de Horn. Cada una de ellas tiene exactamente un literal positivo. Para la primera cláusula es c, para la segunda cláusula es a y para la tercera cláusula es b.*
4. *El conjunto $\{\neg a \vee \neg b \vee c,\ a,\ b,\ \neg c\}$ es un conjunto de Horn, ya que tiene una cláusula negativa ($\neg c$), y el resto son cláusulas de Horn.*
5. *El conjunto $\{\varphi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau,\ \ \neg\psi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau,\ \ \neg\chi \vee \tau,\ \ \varphi \vee \neg\tau,\ \ \neg\varphi,\ \ \theta\}$ no es un conjunto de Horn, pues, por ejemplo, la primera cláusula tiene tres literales positivos.*

6. *El conjunto* $\{p \vee q,\ p \vee \neg q,\ \neg p \vee \neg r,\ \neg p \vee \neg q,\ \neg p \vee q \vee r\}$ *no es un conjunto de Horn.*

La importancia de los conjuntos de Horn viene dada por el siguiente teorema.

Teorema 2.6.4. *Sea Σ un conjunto de cláusulas de un lenguaje proposicional que es un conjunto de Horn. Entonces Σ es insatisfacible si, y sólo si, existe una deducción lineal-input de la cláusula vacía que se inicia en la cláusula negativa.*

Observación:

1. No es lo mismo un conjunto formado por cláusulas de Horn que un conjunto de Horn. En el primero no hay cláusulas negativas, mientras que en el segundo hay una cláusula negativa. Además, todo conjunto formado por cláusulas de Horn es satisfacible (basta tomar la interpretación que asigna el valor de verdad 1 a todas las fórmulas atómicas).

2. El teorema no afirma que todo conjunto de Horn sea insatisfacible, sino que para los conjuntos de Horn que sean insatisfacibles se puede encontrar una deducción lineal-input de la cláusula vacía. Por tanto, cuando tengamos un conjunto de Horn, únicamente intentaremos deducciones lineales-input.

3. La resolvente de una cláusula de Horn y una cláusula negativa vuelve a ser una cláusula negativa. Por tanto, todas las resolventes que se obtienen en una deducción lineal-input con inicio la cláusula negativa son cláusulas negativas.

4. Para que nos dé la cláusula vacía como resolvente de una cláusula negativa y una cláusula de Horn, la única posibilidad es que ambas cláusulas tengan sólo un literal. Por tanto, para que un conjunto de Horn sea insatisfacible es necesario (pero no suficiente) que haya al menos una cláusula que sea una fórmula atómica.

5. Hay conjuntos de cláusulas para los que hay una deducción lineal-input de la cláusula vacía pero que no son conjuntos de Horn. Un ejemplo de esta afirmación es el conjunto $\{\varphi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau,\ \ \neg\psi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau,\ \ \neg\chi \vee \tau,\ \ \varphi \vee \neg\tau,\ \ \neg\varphi,\ \ \theta\}$.

Vamos a ver algunos ejemplos más:

Ejemplo 2.6.12.

1. *Supongamos que tenemos el conjunto de cláusulas*

$$\Sigma = \{\neg q \vee p,\ \neg r \vee \neg s \vee q,\ r,\ \neg p,\ \neg r \vee s\}$$

Vamos a demostrar que es insatisfacible. Para esto, comprobamos en primer lugar que es un conjunto de Horn.

El conjunto Σ tiene exactamente una cláusula negativa ($\neg p$) y el resto de las cláusulas tienen todas un literal positivo.

Al ser un conjunto de Horn probamos con una resolución lineal. Y empezamos por la cláusula negativa.

$$\begin{tikzcd}
\neg p \arrow[d, dash] & \neg q \vee p \arrow[dl, dash] \\
\neg q \arrow[d, dash] & \neg r \vee \neg s \vee q \arrow[dl, dash] \\
\neg r \vee \neg s \arrow[d, dash] & \neg r \vee s \arrow[dl, dash] \\
\neg r \arrow[d, dash] & r \arrow[dl, dash] \\
\square &
\end{tikzcd}$$

Vemos como todas las resolventes que hemos obtenido son cláusulas negativas, y como para la última resolvente (cláusula vacía) hemos tenido que hacer uso de la cláusula r, que es una fórmula atómica.

2. *Supongamos que sabemos lo siguiente:*

   Si apruebo, me dan beca.
   Si estudio y me ayuda mi amigo Pepe, apruebo.
   Si me dan beca, me voy de fiesta.

   Entonces, me dice Pepe que si lo invito a comer, me ayuda. Lo que hago en ese momento es ponerme a estudiar, y quedar con Pepe para invitarlo a comer. ¿Conseguiré irme de fiesta?

   Vamos a ponerle nombre a los distintos enunciados que aparecen aquí.

   - *Llamaremos a al enunciado* apruebo.
   - *Llamaremos b al enunciado* me dan beca.
   - *Llamaremos e al enunciado* estudio.
   - *Llamaremos f al enunciado* me voy de fiesta.
   - *Llamaremos i al enunciado* invito a Pepe a comer.
   - *Llamaremos p al enunciado* Pepe me ayuda.

   En tal caso, lo que tenemos es:

   - Si apruebo, me dan beca*, que lo podemos escribir como $a \to b$.*
   - Si estudio y me ayuda mi amigo Pepe, apruebo*, que lo representamos como $e \wedge p \to a$.*
   - Si me dan beca me voy de fiesta*, que se corresponde con la fórmula $b \to f$.*
   - Si me invitas a comer, te ayudo*, que lo escribimos como $i \to p$.*

   Entonces, lo que tenemos que ver es si

$$\{a \to b,\ e \wedge p \to a,\ b \to f,\ i \to p,\ e,\ i\} \vDash f$$

   o lo que es lo mismo, si el conjunto

$$\{a \to b,\ e \wedge p \to a,\ b \to f,\ i \to p,\ e,\ i,\ \neg f\}$$

   es insatisfacible.

Calculamos la forma clausular de las cuatro primeras fórmulas de este conjunto (el resto están en forma clausular).

$$\begin{array}{cccc}
a \to b & e \wedge p \to a & b \to f & i \to p \\
\neg a \vee b & \neg(e \wedge p) \vee a & \neg b \vee f & \neg i \vee p \\
 & \neg e \vee \neg p \vee a & &
\end{array}$$

Luego lo que tenemos que ver es si el conjunto de cláusulas

$$\Sigma = \{\neg a \vee b,\ \neg e \vee \neg p \vee a,\ \neg b \vee f,\ \neg i \vee p,\ e,\ i,\ \neg f\}$$

es insatisfacible. Puesto que este conjunto es un conjunto de Horn, intentamos una resolución lineal-input comenzando por la cláusula negativa ($\neg f$).

$$\begin{tikzcd}
\neg f \arrow[d, dash] & \neg b \vee f \arrow[dl, dash] \\
\neg b \arrow[d, dash] & \neg a \vee b \arrow[dl, dash] \\
\neg a \arrow[d, dash] & \neg e \vee \neg p \vee a \arrow[dl, dash] \\
\neg e \vee \neg p \arrow[d, dash] & \neg i \vee p \arrow[dl, dash] \\
\neg e \vee \neg i \arrow[d, dash] & e \arrow[dl, dash] \\
\neg i \arrow[d, dash] & i \arrow[dl, dash] \\
\square &
\end{tikzcd}$$

Ahora vamos a seguir la deducción que hemos hecho. Nos preguntamos si iré de fiesta.

> *En primer lugar, suponemos que no iré de fiesta ($\neg f$).*
>
> *Puesto que si me dan beca me voy de fiesta, deducimos que no me pueden dar beca, ya que si me la dieran me iría de fiesta (es decir, deducimos $\neg b$, que es una resolvente de $\neg f$ y $\neg b \vee f$).*
>
> *Otro enunciado es que si apruebo me dan beca. Por tanto, deducimos que no apruebo ($\neg a$).*
>
> *Ahora bien, aprobaba si estudiaba y me ayudaba Pepe, luego, o no estudio, o no me ayuda Pepe ($\neg e \vee \neg p$).*
>
> *Y como Pepe me ayudaba si lo invitaba a comer, entonces, o no estudio, o no lo invito a comer.*
>
> *Pero habíamos dicho que me ponía a estudiar, luego la única posibilidad es que no lo invite a comer ($\neg i$)*
>
> *Y también había decidido invitarlo a comer. Aquí está la contradicción ($\square$), que viene de suponer que no me voy de fiesta.*

En este caso, también podríamos haber hecho una demostración directa:

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[d, dash] & \neg i \vee p \arrow[dl, dash] \\
p \arrow[d, dash] & \neg e \vee \neg p \vee a \arrow[dl, dash] \\
\neg e \vee a \arrow[d, dash] & e \arrow[dl, dash] \\
a \arrow[d, dash] & \neg a \vee b \arrow[dl, dash] \\
b \arrow[d, dash] & \neg b \vee f \arrow[dl, dash] \\
f &
\end{tikzcd}$$

Y seguimos los pasos de la deducción:

> *Puesto que si invito a Pepe él me ayuda, y decido invitarlo, deducimos que él me ayuda (p).*
> *Si estudio y me ayuda, apruebo. Como sabemos que me va a ayudar, entonces basta con que estudie para que apruebe ($\neg e \vee a$).*
> *Puesto que estudio, entonces apruebo (a).*
> *Si apruebo, me dan beca. Luego me dan beca (b).*
> *Si me dan beca, me voy de fiesta. Por tanto, me voy de fiesta (f).*

Cuando tenemos un conjunto de Horn, a la cláusula negativa se le suele denominar *cláusula objetivo*. A las cláusulas de Horn que constan de sólo un literal (es decir, fórmulas atómicas) se les denomina *hechos*, mientras que a a las cláusulas de Horn con más de un literal se las llama *reglas*. Este último ejemplo nos justifica esta nomenclatura.

Si nuestro conjunto de cláusulas es un conjunto de Horn, entonces podemos probar con una deducción lineal-input con inicio en la cláusula negativa. Pero cuando el conjunto no sea de Horn, no sabemos si esta estrategia nos va a dar la solución. Sin embargo, hay conjuntos que no son conjuntos de Horn, pero que podrían transformarse en conjuntos de Horn con algunas modificaciones, de forma que el primer conjunto es insatisfacible si, y sólo si, lo es el segundo.

Vamos a ver algún ejemplo.

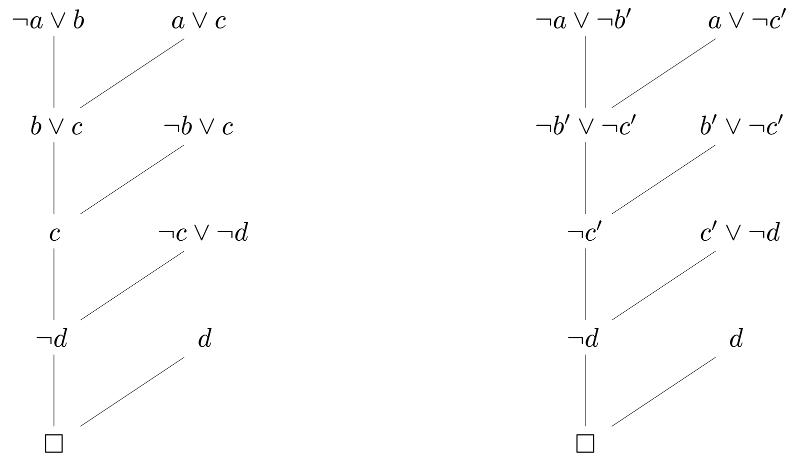
Ejemplo 2.6.13.
Sea $\Sigma = \{\neg a \vee b,\ a \vee c,\ \neg c \vee \neg d,\ \neg b \vee c,\ b \vee \neg c,\ d\}$.

Este conjunto no es un conjunto de Horn. Por tanto, para ver si es satisfacible o insatisfacible no nos bastaría con estudiar la resolución lineal-input. Sin embargo, si definimos las fórmulas $b' = \neg b$ *y* $c' = \neg c$ *el conjunto nos queda:*

$$\Sigma' = \{\neg a \vee \neg b',\ a \vee \neg c',\ c' \vee \neg d,\ b' \vee \neg c',\ \neg b' \vee c',\ d\}$$

Y este conjunto es de Horn, y es insatisfacible si, y sólo si, lo es Σ. *Por tanto, podemos probar por una estrategia lineal-input con inicio en la cláusula* $\neg a \vee \neg b'$, *que sería lo mismo que comenzar por* $\neg a \vee b$.

Vamos a poner la deducción de $\square$ *a partir del conjunto* Σ, *y la misma a partir del conjunto* Σ'.



Lo que nos planteamos ahora es, dado un conjunto de cláusulas Σ, ver si puede transformarse en un conjunto de Horn. Para esto, necesitamos sustituir algunos literales que aparecen en las cláusulas de Σ por sus complementarios. El problema es, saber si es posible y en caso afirmativo elegir los literales que vamos a sustituir.

Para proceder de forma ordenada, elegiremos una cláusula que después de la transformación será la cláusula negativa, y vamos sustituyendo los literales que nos hagan falta para que esta cláusula sea negativa, y el resto sean cláusulas de Horn. Si conseguimos que el conjunto se transforme en un conjunto de Horn ya lo tenemos. Si no es posible, probamos con otra cláusula como cláusula negativa.

Vamos a ver algunos ejemplos.

Ejemplo 2.6.14.

1. *Comenzamos por el conjunto $\Sigma = \{\neg a \vee b,\ a \vee c,\ \neg c \vee \neg d,\ \neg b \vee c,\ b \vee \neg c,\ d\}$, que ya sabemos que se puede transformar en un conjunto de Horn. Elegimos una cláusula y vemos si esta podría ser la cláusula negativa.*

   a) *Comenzamos por la cláusula $\neg c \vee \neg d$. Si queremos que esta cláusula sea la cláusula negativa, los literales c y d deben quedar como están. Escribimos el conjunto Σ, pero fijando estos literales. Para distinguirlos del resto, los pondremos en negrita.*

   $$\{\neg a \vee b,\ a \vee \mathbf{c},\ \neg\mathbf{c} \vee \neg\mathbf{d},\ \neg b \vee \mathbf{c},\ b \vee \neg\mathbf{c},\ \mathbf{d}\}$$

   Ahora, la cláusula $a \vee \mathbf{c}$ tiene que ser cláusula de Horn. Puesto que el literal c no podemos sustituirlo, hemos de sustituir a por $\neg a'$. Tendríamos entonces:

   $$\{\mathbf{a}' \vee b,\ \neg\mathbf{a}' \vee \mathbf{c},\ \neg\mathbf{c} \vee \neg\mathbf{d},\ \neg b \vee \mathbf{c},\ b \vee \neg\mathbf{c},\ \mathbf{d}\}$$

   Para que $\mathbf{a}' \vee b$ sea cláusula de Horn, hay que sustituir b por $\neg b'$, con lo que tenemos:

   $$\{\mathbf{a}' \vee \neg\mathbf{b}',\ \neg\mathbf{a}' \vee \mathbf{c},\ \neg\mathbf{c} \vee \neg\mathbf{d},\ \mathbf{b}' \vee \mathbf{c},\ \neg\mathbf{b}' \vee \neg\mathbf{c},\ \mathbf{d}\}$$

   Y ya no podemos hacer más sustituciones. El conjunto que nos ha resultado no es un conjunto de Horn.

   b) *Probamos ahora con la cláusula $\neg a \vee b$. En este caso, el literal a se queda como está, y el literal b lo sustituimos por $\neg b'$. Tenemos el conjunto:*

   $$\{\neg\mathbf{a} \vee \neg\mathbf{b}',\ \mathbf{a} \vee c,\ \neg c \vee \neg d,\ \mathbf{b}' \vee c,\ \neg\mathbf{b}' \vee \neg c,\ d\}$$

   Para que $\mathbf{a} \vee c$ sea cláusula de Horn, hay que sustituir c por $\neg c'$.

   $$\{\neg\mathbf{a} \vee \neg\mathbf{b}',\ \mathbf{a} \vee \neg\mathbf{c}',\ \mathbf{c} \vee \neg d,\ \mathbf{b}' \vee \neg\mathbf{c}',\ \neg\mathbf{b}' \vee \mathbf{c}',\ d\}$$

   Y el conjunto que tenemos es un conjunto de Horn.

2. *Vamos a ver si el conjunto* $\{\varphi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau,\ \ \neg\psi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau,\ \ \neg\chi \vee \tau,\ \ \varphi \vee \neg\tau,\ \ \neg\varphi,\ \ \theta\}$ *se puede transformar en un conjunto de Horn.*

   a) *Probamos con* $\varphi \vee \chi \vee \neg\theta \vee \tau$ *como cláusula negativa. Para eso sustituimos* φ, χ *y* τ, *mientras que dejamos igual a* θ.

   $$\{\neg\varphi' \vee \neg\chi' \vee \neg\theta \vee \neg\tau',\ \ \neg\psi \vee \neg\chi' \vee \neg\theta \vee \neg\tau',\ \ \chi' \vee \neg\tau',\ \ \neg\varphi' \vee \tau',\ \ \varphi',\ \ \theta\}$$

   Y si nos fijamos en la segunda cláusula, sustituyendo ψ *por* $\neg\psi'$ *obtenemos un conjunto de Horn.*

   $$\{\neg\varphi' \vee \neg\chi' \vee \neg\theta \vee \neg\tau',\ \ \psi' \vee \neg\chi' \vee \neg\theta \vee \neg\tau',\ \ \chi' \vee \neg\tau',\ \ \neg\varphi' \vee \tau',\ \ \varphi',\ \ \theta\}$$

Como ejercicio, comprueba que el conjunto $\{p \vee q,\ p \vee \neg q,\ \neg p \vee \neg r,\ \neg p \vee \neg q,\ \neg p \vee q \vee r\}$ no puede transformarse en un conjunto de Horn.

$$\alpha = \Big(\underbrace{\Big(\underbrace{\big(\underbrace{\underbrace{(\varphi\to\psi)}_{\beta_1}\to\underbrace{(\neg\chi\to\neg\theta)}_{\beta_2}}_{\beta_3}\big)\to\chi}_{\beta_4}\Big)\to\tau}_{\beta}\Big)\to\Big(\underbrace{\underbrace{(\tau\to\varphi)}_{\gamma_1}\to\underbrace{(\theta\to\varphi)}_{\gamma_2}}_{\gamma}\Big)$$

φ	ψ	χ	θ	τ	$\varphi \to \psi$ β_1	$\neg\chi \to \neg\theta$ β_2	$\beta_1 \to \beta_2$ β_3	$\beta_3 \to \chi$ β_4	$\beta_4 \to \tau$ β	$\tau \to \phi$ γ_1	$\theta \to \phi$ γ_2	$\gamma_1 \to \gamma_2$ γ	$\beta \to \gamma$ α
0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Cuadro 2.4: Tabla de verdad de $\big((((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi\big) \to \tau\big) \to \big((\tau \to \varphi) \to (\theta \to \varphi)\big)$