Relación de problemas 10

Optimización con restricciones

1. Representa el conjunto de puntos que satisfacen la desigualdad $3x - 3y < 6$. ¿Es un semiplano abierto o cerrado?

2. Representa el conjunto de puntos que satisfacen las desigualdades $x + y \leq 1$ y $2x + 2y \geq 6$.

3. Representa el conjunto de puntos que satisfacen $-x+y \leq 1$, $x+2y \leq 6$, $2x+3y \geq 3$ y $-3x+8y \geq 4$.

4. Una empresa de mobiliario fabrica sillas y mesas. Para cada silla es necesario 20 dm^3 de madera y 4 horas de mano de obra. Para cada mesa, es necesario 50 dm^3 de madera y 3 horas de mano de obra. El fabricante dispone de 3300 dm^3 de madera y una plantilla que le puede proporcionar 380 horas de mano de obra. Además, el fabricante determina que se obtiene una ganancia neta de 3 euros por cada silla vendida y de 6 euros por cada mesa vendida.

   En estas condiciones, ¿cuántas sillas y cuántas mesas debe fabricar a fin de maximizar la ganancia?

5. Una empresa fabrica dos tipos de supercomputadores para centros de cálculo y entidades oficiales, los cuales denotaremos A y B. Para la fabricación necesita dos tipos de máquinas M_1 y M_2. La fabricación de un supercomputador de tipo A requiere 3 días de utilización de la máquina M_1 y un día de la máquina M_2. Cada supercomputador de tipo B requiere la utilización de la máquina M_1 durante 2 días y de la máquina B durante otros 2 días.

   Teniendo en cuenta la disponibilidad de las máquinas, se establece que a lo largo de un periodo se podrán conseguir 600 días de trabajo de la máquina M_1 y 400 días de la M_2. Además, se supone que todas las unidades producidas durante el periodo se venden, dejando una ganancia de 600 euros cada supercomputador de tipo A y 450 euros cada supercomputador de tipo B. ¿Cuántas unidades de cada producto se deben fabricar en el periodo de tiempo considerado para maximizar beneficios? ¿Cuál es el beneficio obtenido?

6. Deben distribuirse 550 microprocesadores en cajas de 40 microprocesadores y 30 microprocesadores. Se requiere que el número de cajas de 40 microprocesadores se al menos el doble del número de cajas de 30 unidades y que haya, como mínimo, 4 cajas de cada tipo. Sabiendo que las cajas de 40 proporcionan una ganancia de 1200 euros y las cajas de 30 unidades proporcionan un beneficio de 1000 euros, ¿cuántas cajas de cada tipo deben utilizarse para obtener el mayor beneficio?

7. Una empresa multinacional quiere constituir en el mercado internacional dos tipos de consultoras A y B. Los beneficios que obtiene por cada tipo de consultora son 400 y 500 euros semanales respectivamente. Hay una cierta restricción al respecto; las consultoras tipo A requieren una plantilla de 4000 empleados, 4 gerentes, 3 delegados y 2 subdirectores, mientras que las consultoras tipo B

necesitan una plantilla de 5000 empleados, 3 gerentes, 2 delegados y 1 subdirector. La multinacional puede contar para su expansión internacional con un número máximo de personal cualificado: 3200 empleados, 24 gerentes, 20 delegados y 16 subdirectores.

En estas circunstancias, ¿cuántas consultoras de cada tipo debe constituir para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el beneficio que obtiene la multinacional?

8. El departamento de producción de una empresa de videojuegos recibe un contrato para producir un número de mandos que requieren el uso de un material de tipo A cuyo coste por unidad es 30 euros y de un material tipo B cuyo coste por unidad es de 80 euros. Para cada mando, pueden usarse como máximo 12 unidades de material A y como mínimo 16 unidades de material tipo B. Cada unidad de tipo A pesa 4 gr y cada unidad de B pesa 6 gr. Si el peso del mando debe ser de exactamente 120 gr, ¿cuál debe ser la composición de los materiales para minimizar los costes? Indica el coste mínimo.

9. Una industria produce dos tipos de productos A y B cuyos costes de producción y limitaciones son las siguientes:

   - Para cada unidad de tipo A, se precisan 20 horas de mano de obra y para cada unidad de tipo B se requieren 10 horas de mano de obra. En total, se dispone de un total de 100000 horas de mano de obra.
   - Se necesitan 10 unidades de materia prima para fabricar cada unidad de tipo A y 20 para cada unidad tipo B, no pudiendo exceder el total de las 180000 disponibles.
   - Cada unidad de tipo A necesita 5 horas de utilización de los equipos de la empresa y 1 hora para cada unidad del tipo B, siendo el total de horas disponibles de los equipos de 40000.
   - El beneficio por cada unidad fabricada del tipo A es de 8 unidades monetarias y por cada unidad del tipo B es de 5 unidades monetarias.

   Encontrar las unidades a producir de los productos A y B para que el beneficio sea máximo e indicar dicho beneficio.

10. El administrador del sistema de suministro de agua de una ciudad tiene que hallar la manera de proporcionar por lo menos 10 millones de metros cúbicos de agua potable por día. El agua se puede tomar de depósitos locales o de una tubería hacia una población vecina. Los depósitos locales pueden suministrar 5 millones de metros cúbicos al día, cantidad que no puede ser excedida. La tubería, debido a su tamaño, puede suministrar 10 millones de metros cúbicos al día, y debido a una cláusula contractual debe bombear por lo menos 6 millones de metros cúbicos por día. Por último, el costo del agua del depósito es de 300 unidades monetarias por millon de metros cúbicos, y el costo de agua de la tubería es de 500 unidades monetarias por millón de metros cúbicos. ¿De qué forma puede el administrador minimizar el gasto diario en agua?

11. Calcula, si existe, la solución del siguiente problema de programación lineal:

    Max $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$

    $$\text{s.a.} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

12. Calcula, si existe, la solución del siguiente problema de programación lineal:

    Min $f(x_1, x_2) = x_1 + 4x_2$

    $$\text{s.a.} \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ 2x_2 - 2x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 3x_1 - 1 \end{cases}$$

13. Resuelve por el método gráfico:

    Max $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

    $$\text{s.a.} \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

14. Resuelve por el método gráfico:

    Max $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$

    $$\text{s.a.} \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

15. Maximizar $f(x, y) = 2x + 4y$ sujeta a las restricciones

    $$\begin{cases} x + y \leq 3 \\ 2x + 4y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

16. Maximizar $f(x, y) = 2x + 3y$ sujeta a las restricciones

    $$\begin{cases} x + y \geq 5 \\ 2x + 3y \geq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

17. Maximizar $f(x, y) = 2x + 3y$ sujeta a las restricciones

    $$\begin{cases} x + y \geq 2 \\ x + 4y \geq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

18. Maximizar $f(x, y) = x + 3y$ sujeta a las restricciones

    $$\begin{cases} x + 2y \geq 3 \\ 4x - y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

19. Minimizar $f(x, y) = 4x + 5y$ sujeta a las restricciones

    $$\begin{cases} x + 2y \geq 3 \\ x + y \geq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$