

Modelowanie $\frac{1}{4}$ zawieszenia samochodu

Sprawozdanie

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica
Modelowanie Systemów Dynamicznych 2022
WEAliIB, Automatyka i Robotyka

Data wykonania ćwiczenia:
09.11.2022r.

Data oddania sprawozdania:
15.11.2022r.

Jakub Górski
Grupa dziekańska nr 3

Spis Treści

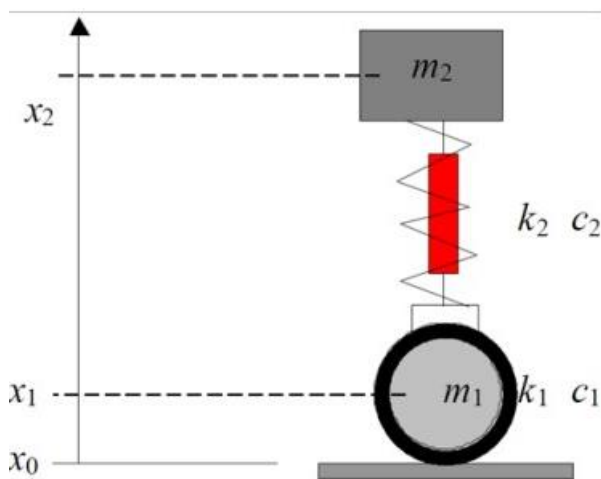
1. Cel ćwiczeń
2. Wstęp teoretyczny
3. Wykonanie zadań
 - 3.1. Wyznaczenie transmitancji
 - 3.2. Model zawieszenia z wykorzystaniem blozków integratorów
 - 3.3. Model zawieszenia z wykorzystaniem blozka *state space*
4. Wnioski
5. Bibliografia

1. Cel ćwiczeń

Celem laboratorium jest zamodelowanie w *Matlabie* oraz w *Simulinku* ¼ zawieszenia samochodu, a także znalezienie charakterystyk przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia poszczególnych elementów układu w reakcji na dany rodzaj podłoża.

2. Wstęp teoretyczny

Poniższe zdjęcie zawiera przybliżony schemat ¼ zawieszenia samochodu.



Przybliżony schemat ¼ zawieszenia samochodu

Oznaczenia:

x_0 – pionowe przemieszczenie podłoża.

x_1 – pionowe przemieszczenie środka masy koła m_1 . W ramach zajęć ustalono, że działanie opony jest przybliżone układem sprężyny o stałej k_1 i tłumika o stałej c_1 , które to części są połączone równolegle. (Położenie równowagi - x_{10})

x_2 – pionowe przemieszczenie środka masy nadwozia m_2 . (Położenie równowagi – x_{20})

Równania dynamiki omawianego modelu:

$$\begin{cases} m_2 \ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_{20} - x_1 + x_{10}) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ m_1 \ddot{x}_1 = -k_1(x_1 - x_{10} - x_0) - c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_0) + k_2(x_2 - x_{20} - x_1 + x_{10}) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{cases}$$

Aby uprościć powyższy układ równań wprowadzono zmienne odchyłkowe:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_{10} \\ y_2 = x_2 - x_{20} \end{cases}$$

Pochodne pierwszego i drugiego stopnia zmiennych y_1 i y_2 :

$$\dot{y}_1 = \dot{x}_1$$

$$\ddot{y}_1 = \ddot{x}_1$$

$$\dot{y}_2 = \dot{x}_2$$

$$\ddot{y}_2 = \ddot{x}_2$$

Po zastosowaniu powyższych tożsamości równania dynamiki przyjmują postać:

$$\begin{cases} m_2 \ddot{y}_2 = -k_2(y_2 - y_1) - c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) \\ m_1 \ddot{y}_1 = -k_1(y_1 - x_0) - c_1(\dot{y}_1 - \dot{x}_0) + k_2(y_2 - y_1) + c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{y}_2 = -\frac{k_2}{m_2}(y_2 - y_1) - \frac{c_2}{m_2}(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) \\ \ddot{y}_1 = -\frac{k_1}{m_1}(y_1 - x_0) - \frac{c_1}{m_1}(\dot{y}_1 - \dot{x}_0) + \frac{k_2}{m_1}(y_2 - y_1) + \frac{c_2}{m_1}(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{y}_2 = \frac{k_2}{m_2}y_1 - \frac{k_2}{m_2}y_2 + \frac{c_2}{m_2}\dot{y}_1 - \frac{c_2}{m_2}\dot{y}_2 \\ \ddot{y}_1 = -\frac{k_1 + k_2}{m_1}y_1 + \frac{k_2}{m_1}y_2 - \frac{c_1 + c_2}{m_1}\dot{y}_1 + \frac{c_2}{m_1}\dot{y}_2 + \frac{k_1}{m_1}x_0 + \frac{c_1}{m_1}\dot{x}_0 \end{cases}$$

W celu znalezienia równania stanu opisywanego modelem ustalono cztery zmienne stanu:

$$y_1, y_2, y_3 = \dot{y}_1 - \frac{c_1}{m_1}x_0, y_4 = \dot{y}_2$$

Równanie stanu:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_3 + \frac{c_1}{m_1}x_0 \\ \dot{y}_2 = y_4 \\ \dot{y}_3 = -\frac{k_1 + k_2}{m_1}y_1 + \frac{k_2}{m_1}y_2 - \frac{c_1 + c_2}{m_1}y_3 + \frac{c_2}{m_1}y_4 + \left(\frac{k_1}{m_1} - \frac{(c_1 + c_2)c_1}{m_1^2}\right)x_0 \\ \dot{y}_4 = \frac{k_2}{m_2}y_1 - \frac{k_2}{m_2}y_2 + \frac{c_2}{m_2}y_3 - \frac{c_2}{m_2}y_4 + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}x_0 \end{cases}$$

Postać macierzowa równania stanu:

$$\dot{y} = Ay + Bx_0,$$

gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{c_1 + c_2}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & -\frac{c_2}{m_2} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{m_1} \\ 0 \\ \frac{k_1}{m_1} - \frac{(c_1 + c_2)c_1}{m_1^2} \\ \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} \end{bmatrix}.$$

Zmiennymi wyjścia są y_1, y_2, y_3, y_4 .

Równanie wyjścia w postaci macierzowej:

$$w = Cy + Dx_0,$$

gdzie:

w – wektor zmiennych wyjściowych,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Wykonanie zadań

Na zajęciach przyjęto, że:

$$m_1 = 90 \text{ kg},$$

$$m_2 = 600 \text{ kg},$$

$$k_1 = 370000 \text{ N/m},$$

$$k_2 = 35000 \text{ N/m},$$

$$c_1 = 100 \text{ Ns/m},$$

$$c_2 = 2000 \text{ Ns/m}.$$

3.1. Wyznaczenie transmitancji

```
m1 = 90;
m2 = 600;
k1 = 370000;
k2 = 35000;
c1 = 100;
c2 = 2000;

A = [0 0 1 0; 0 0 0 1; -(k1+k2)/m1 k2/m1 -(c1+c2)/m1 c2/m1; k2/m2 -k2/m2 c2/m2 -c2/m2];
B = [c1/m1; 0; k1/m1-(c1+c2)*c1/m1^2; (c1*c2)/(m1*m2)];
C = diag([1 1 1 1]);
D = zeros(4, 1);

sys = ss(A, B, C, D, 'InputName', 'droga', 'StateName', {'pozycja koła', 'pozycja karoserii', ...
    'prędkość koła', 'prędkość karoserii'}, 'OutputName', {'pozycja koła', 'pozycja karoserii', 'prędkość koła', 'prędkość karoserii'});

figure;
step(sys);

t = 0:0.01:9;
u = 0.1*square(t); % fala prostokątna o okresie 2pi
figure;
lsim(sys, u, t);

[licz, mian] = ss2tf(A, B, C, D);

G1 = tf(licz(1,:), mian, 'InputName', 'droga', 'OutputName', 'pozycja koła');
G2 = tf(licz(2,:), mian, 'InputName', 'droga', 'OutputName', 'pozycja karoserii');
G3 = tf(licz(3,:), mian, 'InputName', 'droga', 'OutputName', 'prędkość koła');
G4 = tf(licz(4,:), mian, 'InputName', 'droga', 'OutputName', 'prędkość karoserii');

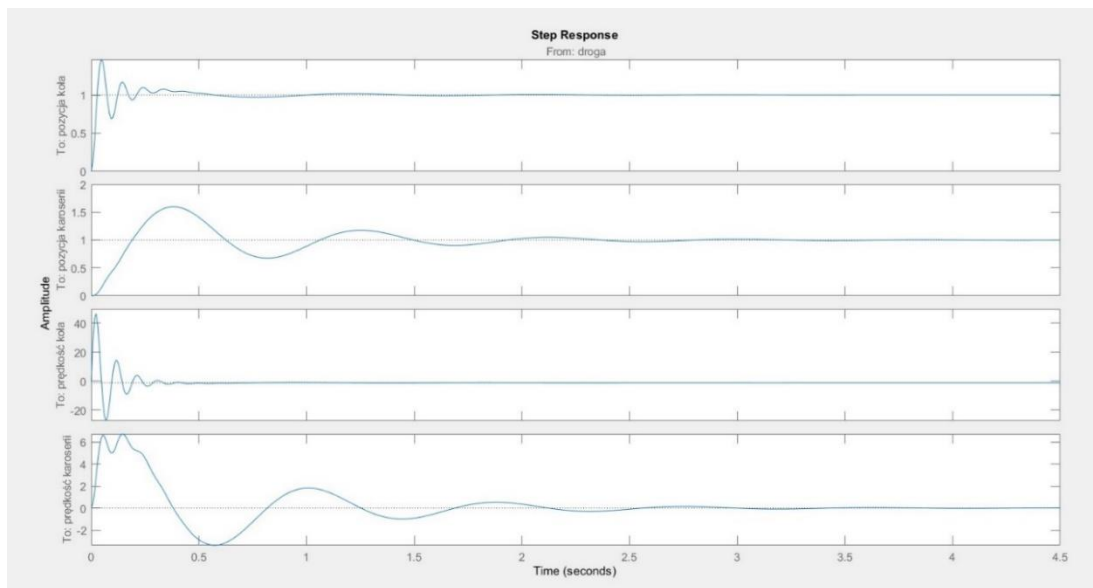
figure;
subplot(4, 1, 1);
step(G1, t);
subplot(4, 1, 2);
step(G2, t);
subplot(4, 1, 3);
step(G3, t);
subplot(4, 1, 4);
step(G4, t);
```

Kod potrzebny do wyznaczenia szukanych transmitancji

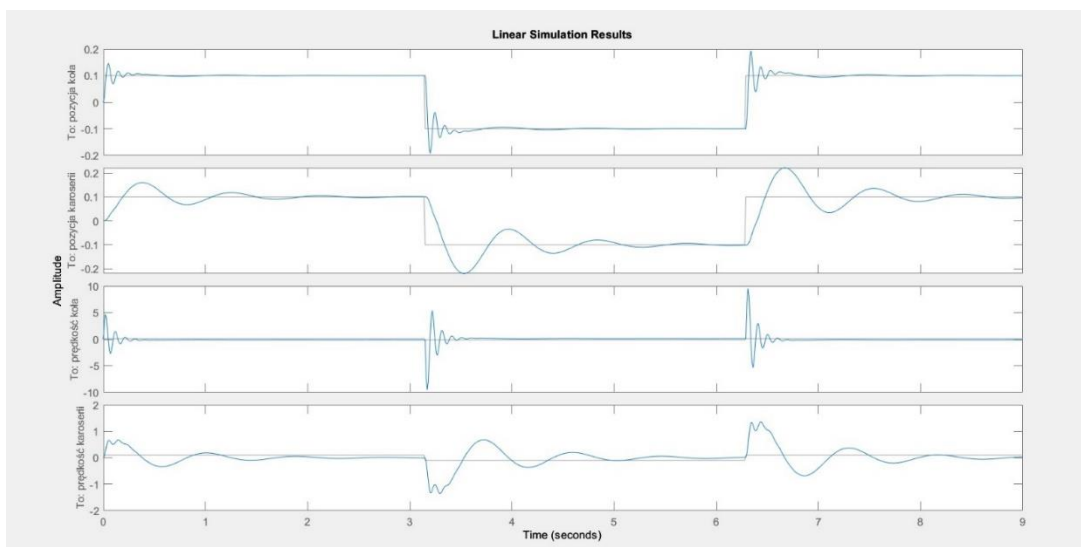
Funkcja *ss* służy do tworzenia modelu *state space*. W powyższym przypadku zmienną wejściową nazwano 'droga', zmienne stanu – 'pozycja koła', 'pozycja karoserii', 'prędkość koła', 'prędkość karoserii' a zmienne wyjściowe są tak samo nazwane jak zmienne stanu.

Za pomocą funkcji *ss2tf* można przekształcić model *state space* na model *transfer function*.

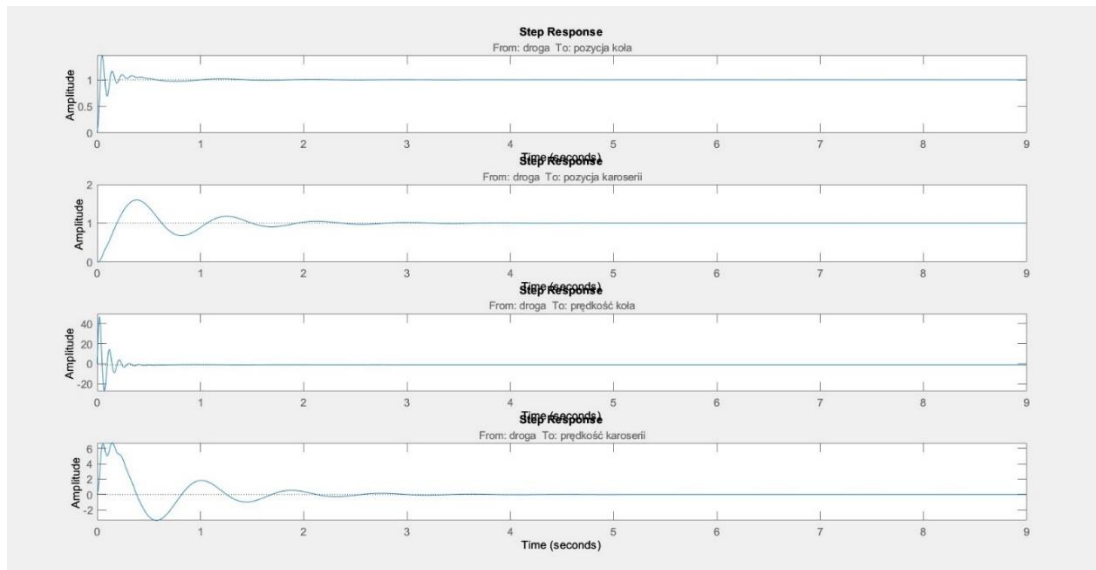
Funkcja *tf* tworzy model typu *transfer function*.



Wykresy pozycji i prędkości koła oraz karoserii w czasie (reakcja na skok jednostkowy; argumentem funkcji *step* jest model *state space*)



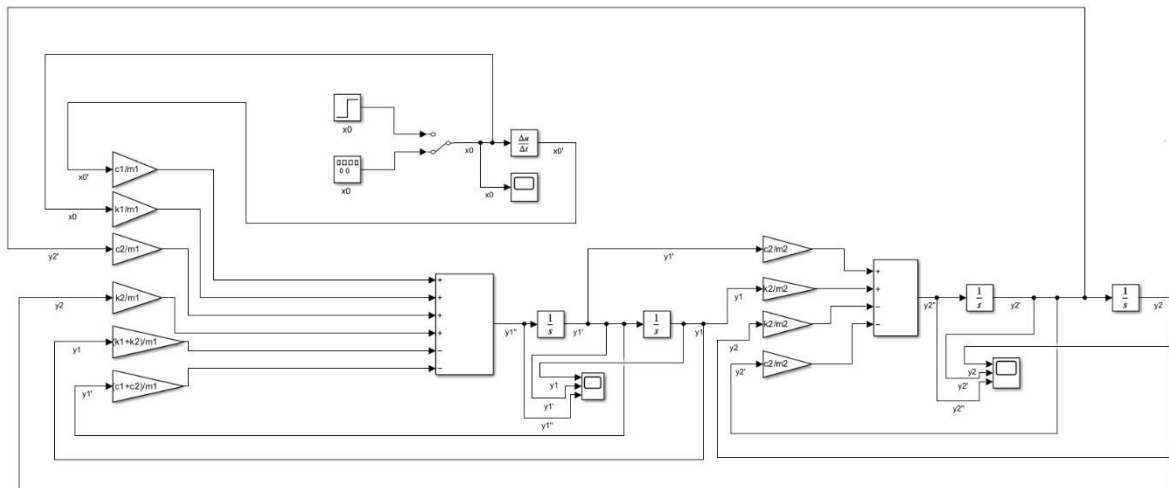
Wykresy pozycji i prędkości koła oraz karoserii w czasie (reakcja na fale prostokątną o okresie 2π ; argumentami funkcji *lsim* są model *state space* oraz wektory u i t)



Wykresy pozycji i prędkości koła oraz karoserii w czasie (reakcja na skok jednostkowy; argumentami funkcji *step* są modele *transfer function*)

3.2. Model zawieszenia z wykorzystaniem blozków integratorów

Poniżej przedstawiono schemat modelu 1/4 zawieszenia samochodu wykonany w programie *Simulink* z wykorzystaniem integratorów.

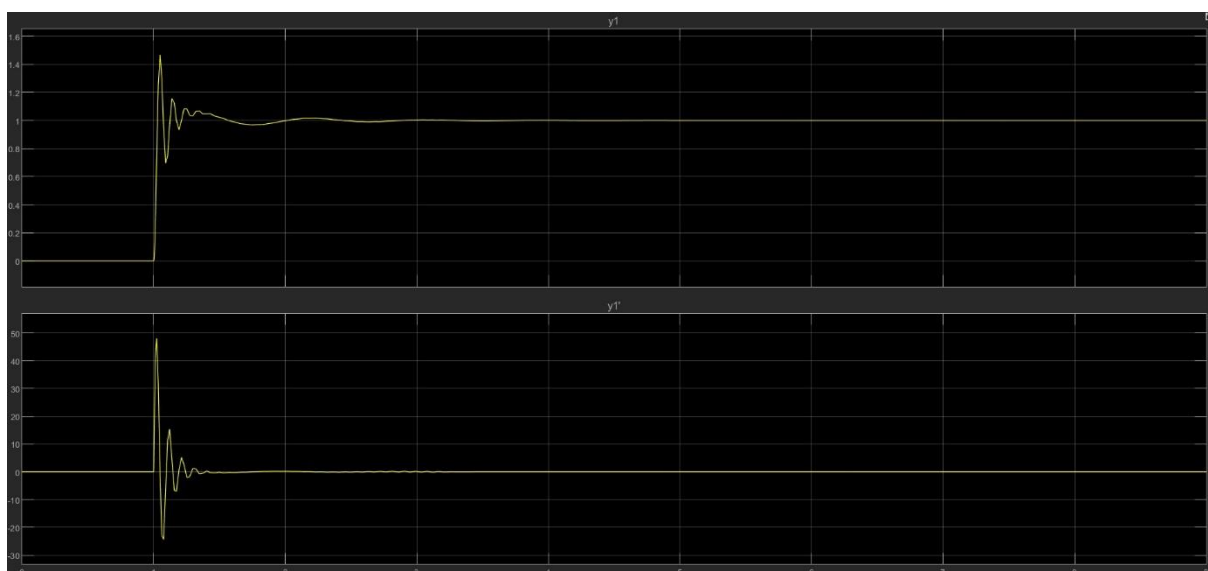


Schemat modelu zawieszenia przy wykorzystaniu integratorów

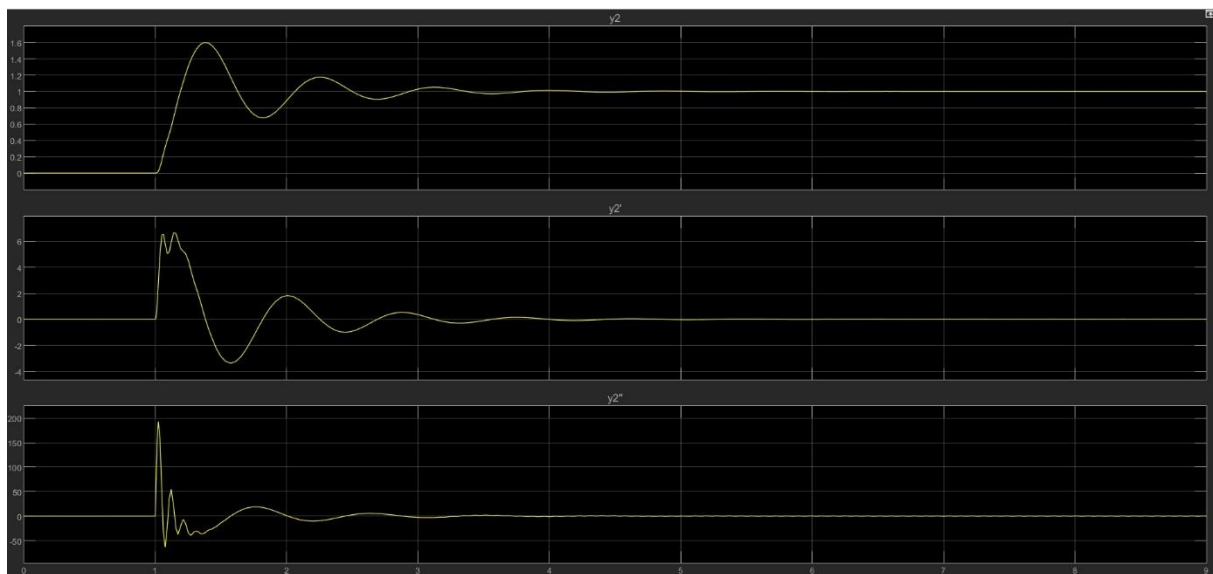
W celu zaprezentowania reakcji układu na różne rodzaje podłoża użyto bločka *step* (skok jednostkowy o wartości 1) i bloku *signal generator* (rodzaj sygnału – *square*, amplituda – 0.1). Do przełączania między wskazanymi efektami wykorzystano *manual switch*.



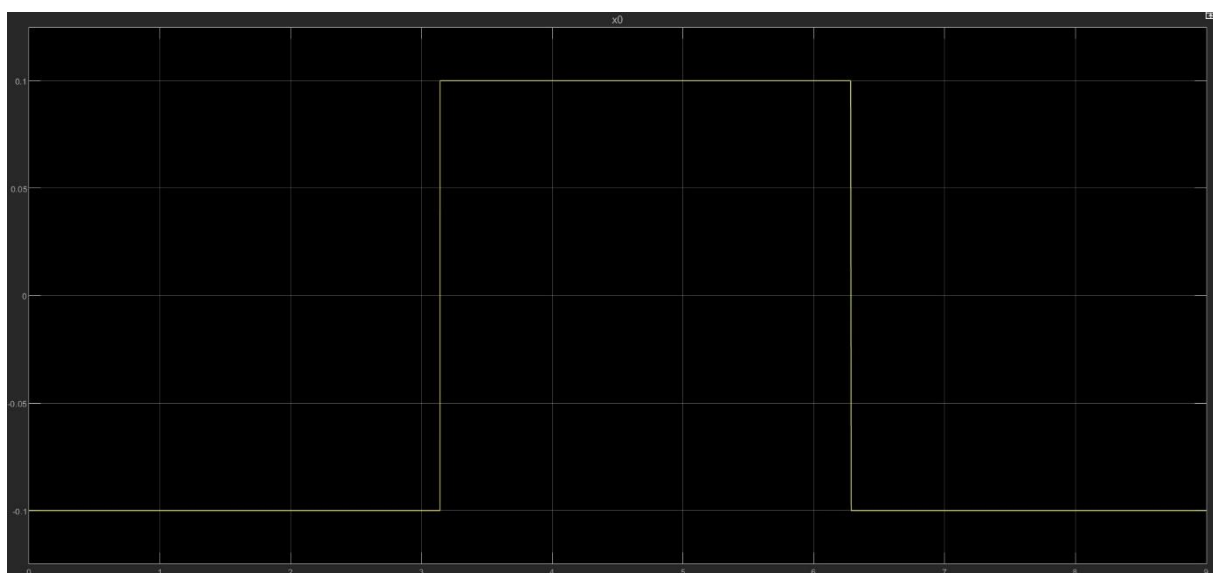
Wykres pionowego przemieszczenia drogi (skok jednostkowy)



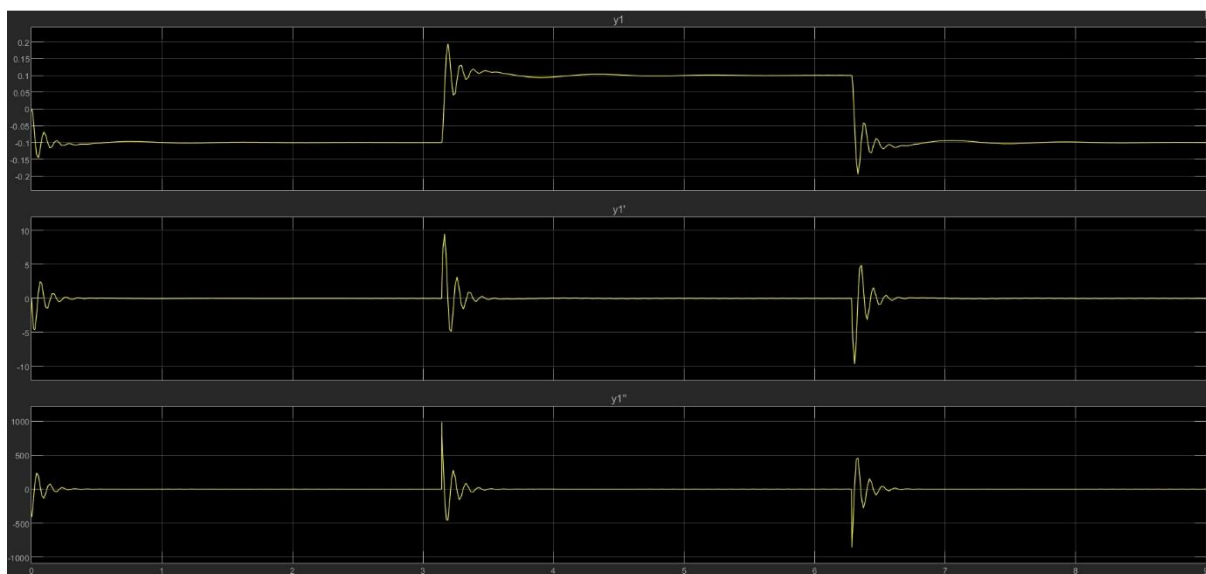
Wykres, odpowiednio, pionowego przemieszczenia i pionowej prędkości środka masy koła (skok jednostkowy)



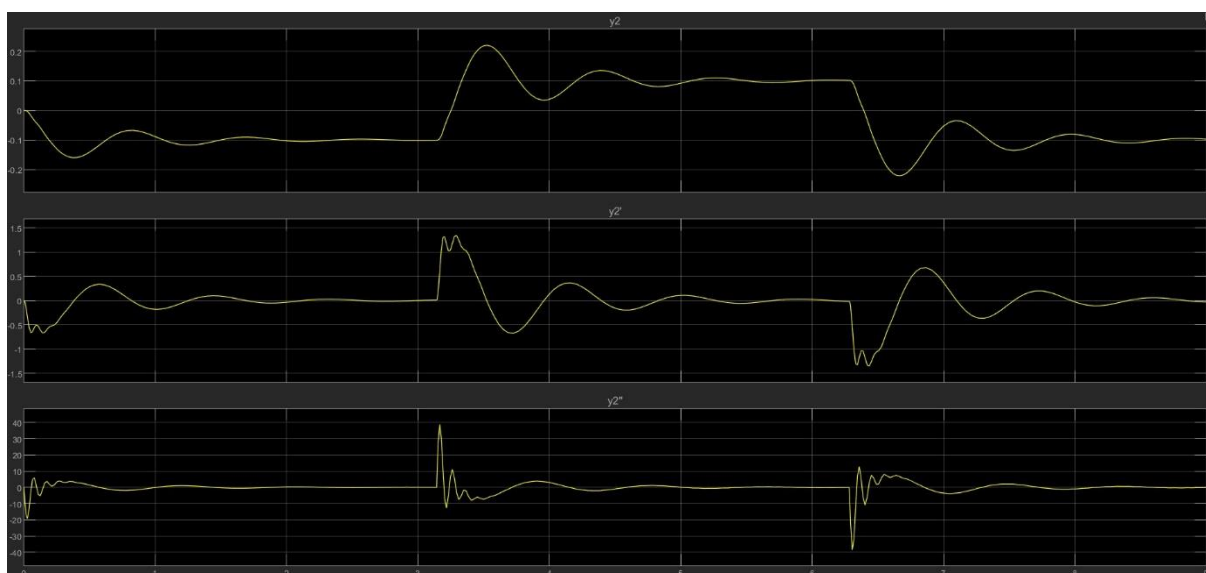
Wykres, odpowiednio, pionowego przemieszczenia, pionowej prędkości i pionowego przyspieszenia środka masy karoserii (skok jednostkowy)



Wykres pionowego przemieszczenia drogi (sygnał prostokątny)



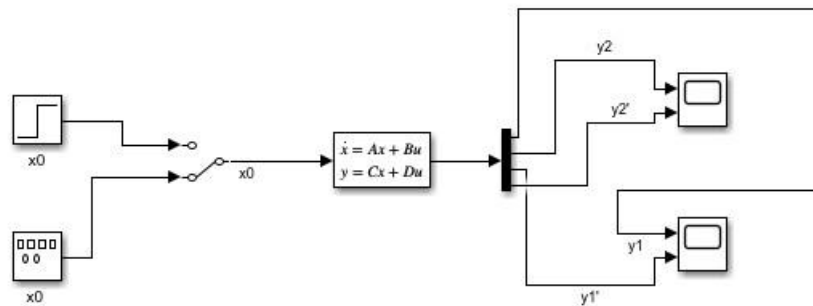
Wykres, odpowiednio, pionowego przemieszczenia, pionowej prędkości i pionowego przyspieszenia środka masy koła (sygnał prostokątny)



Wykres, odpowiednio, pionowego przemieszczenia, pionowej prędkości i pionowego przyspieszenia środka masy karoserii (sygnał prostokątny)

3.3. Model zawieszenia z wykorzystaniem bloczka *state space*

Przedstawiony poniżej schemat ukazuje model zawieszenia samochodu utworzonego w *Simulinku*, przy zastosowaniu bloczku *state space*.

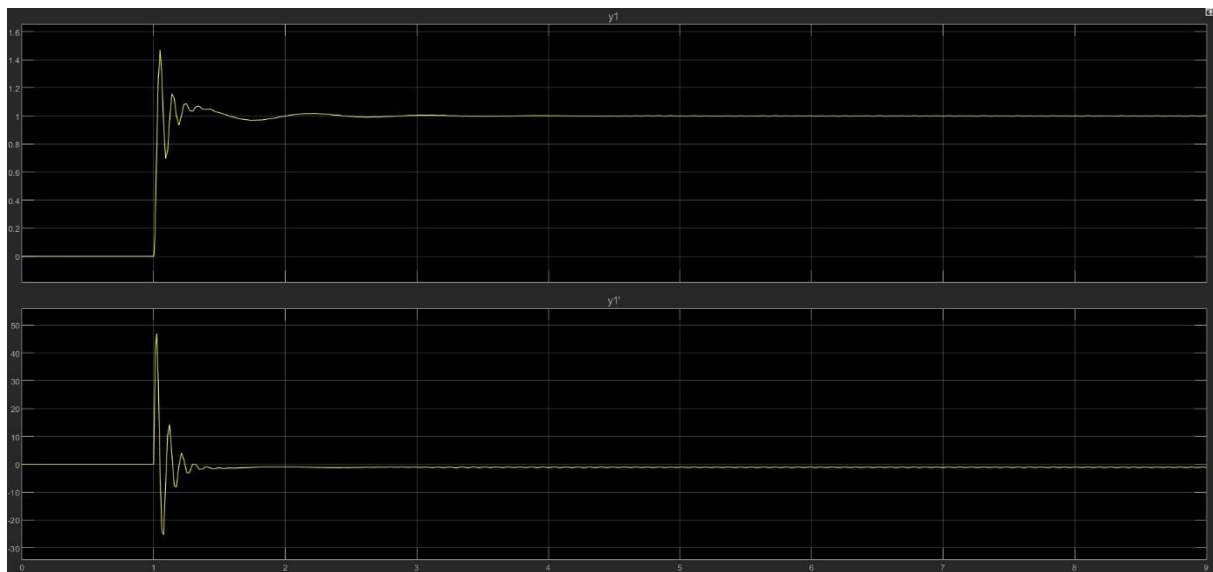


Schemat modelu zawieszenia przy wykorzystaniu bloku *state space*

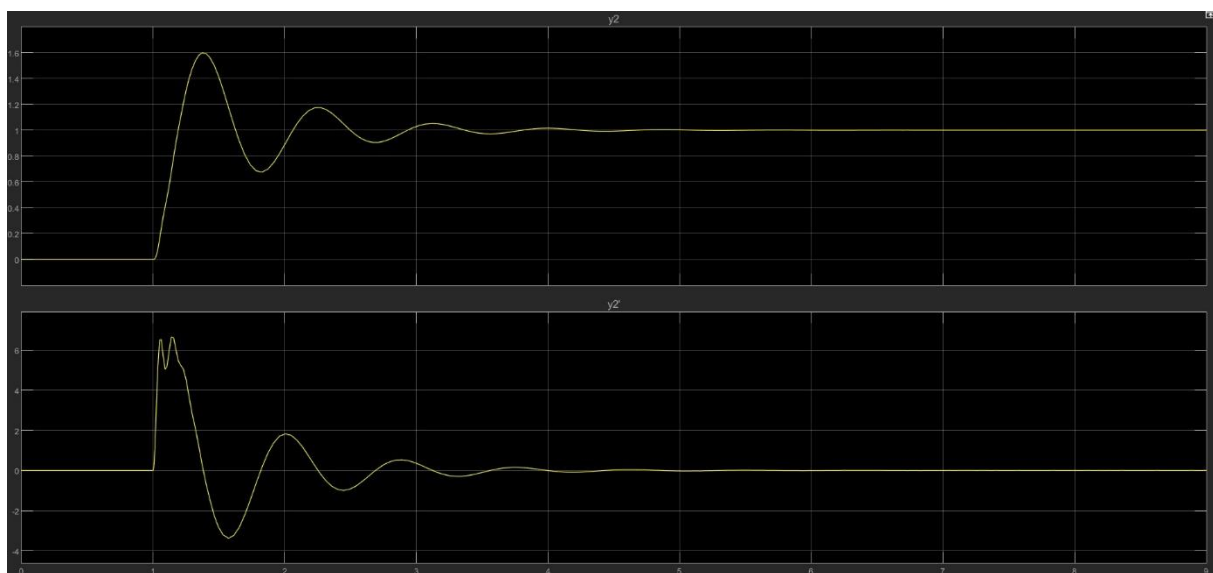
Jako parametry bloku *state space* podano macierze A , B , C , D .



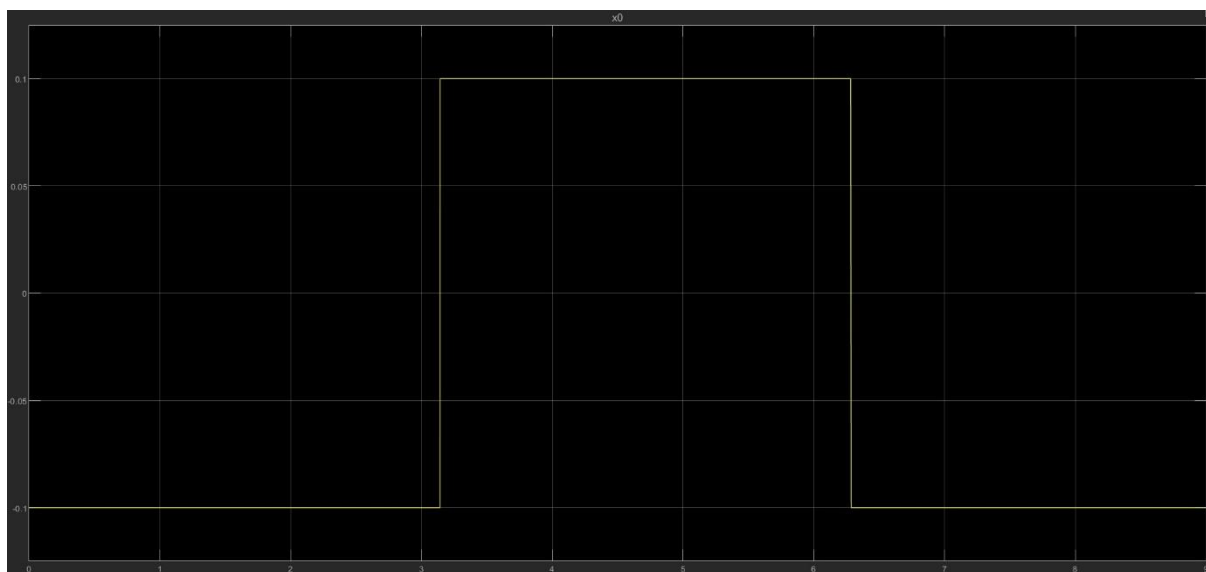
Wykres pionowego przemieszczenia drogi (skok jednostkowy)



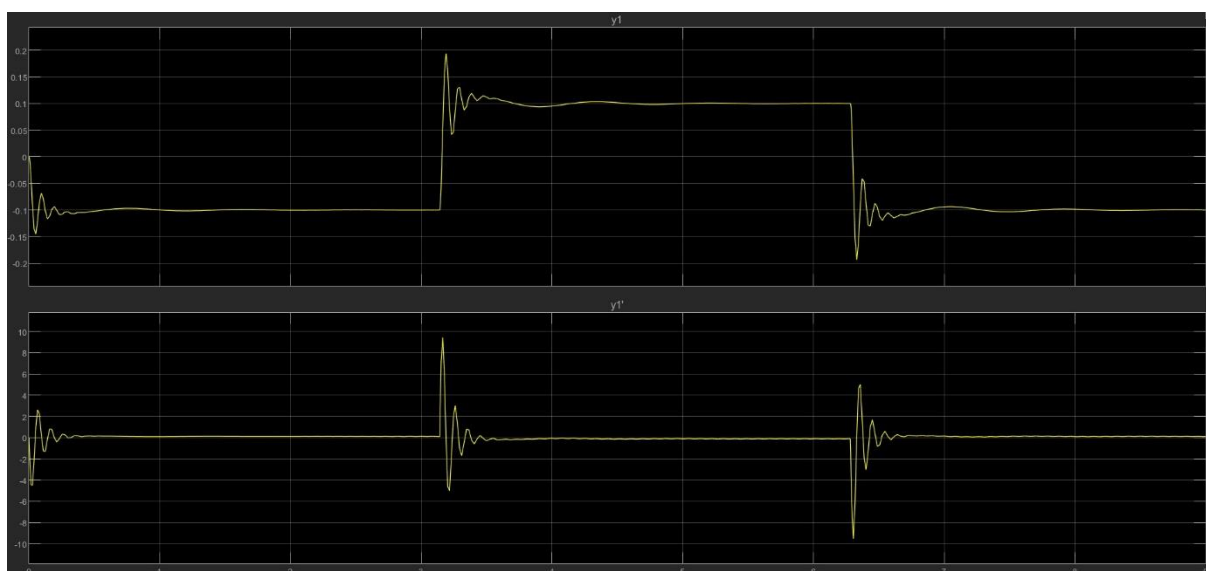
Wykres, odpowiednio, pionowego przemieszczenia i pionowej prędkości środka masy koła (skok jednostkowy)



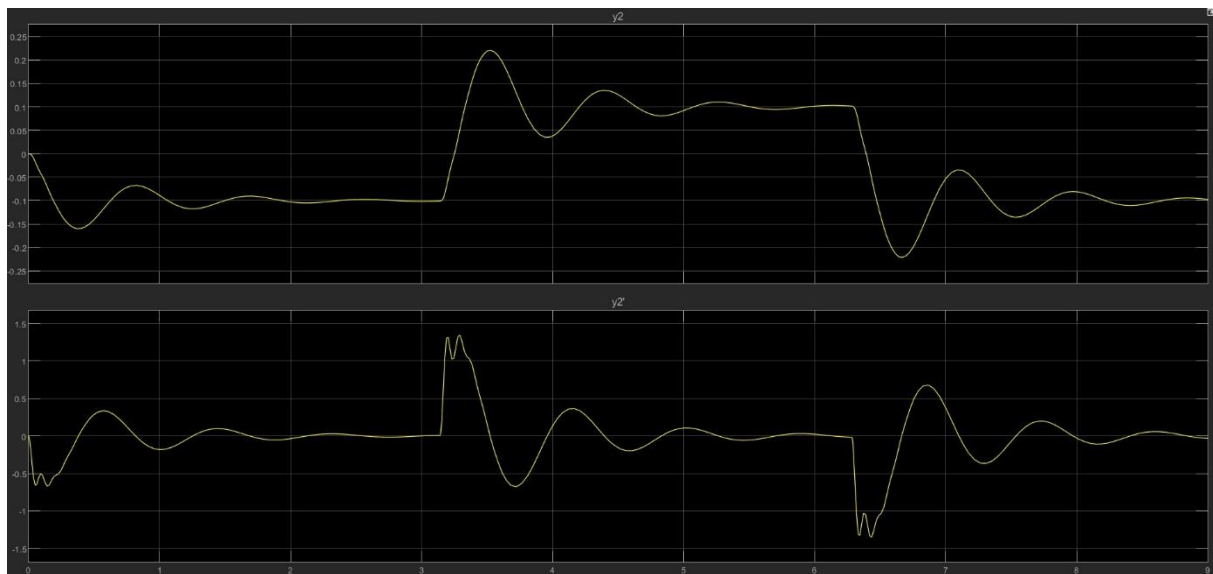
Wykres, odpowiednio, pionowego przemieszczenia i pionowej prędkości środka masy karoserii (skok jednostkowy)



Wykres pionowego przemieszczenia drogi (sygnał prostokątny)



Wykres, odpowiednio, pionowego przemieszczenia oraz pionowej prędkości środka masy koła (sygnał prostokątny)



Wykres, odpowiednio, pionowego przemieszczenia oraz pionowej prędkości środka masy karoserii (sygnał prostokątny)

4. Wnioski

Wykonanie wskazanych w laboratorium zadań pozwala na praktyczne wykorzystanie wiedzy dotyczącej m. in. równań stanu i równań wyjścia wskazanego układu, modelowania wybranego systemu, wykorzystując przy tym oprogramowanie *Simulink*, czy też tworzenie określonych transmitancji. Podczas zajęć po raz pierwszy student ma okazję modelować złożony układ fizyczny, co pozwala na opanowanie i szlifowanie umiejętności rozwiązywania wybranych poleceń, które będą do wykonania w przyszłości.

5. Bibliografia

- konspekt do zajęć zatytułowanych „Modelowanie $\frac{1}{4}$ zawieszenia samochodu”