

Reprezentacja układów liniowych niezmienniczych w czasie w Matlabie

Sprawozdanie

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica
Modelowanie Systemów Dynamicznych 2022
WEAliIB, Automatyka i Robotyka

Data wykonania ćwiczenia:
12.10.2022r.

Data oddania sprawozdania:
18.10.2022r.

Jakub Górski

Grupa dziekańska nr 3

Spis Treści

1. Cel ćwiczeń
2. Wstęp teoretyczny
3. Wykonanie zadań
 - 3.1. Transformata Laplace'a – przykład z konspektu
 - 3.2. Zadanie 1
 - 3.3. Model zawieszenia samochodowego – przykład z konspektu
 - 3.4. Zadanie 2
 - 3.5. Schemat blokowy
 - 3.6. Zera, bieguny, wzmocnienie – przykład z konspektu
 - 3.7. Zadanie 3
 - 3.8. Przestrzeń stanów – przykład z konspektu
 - 3.9. Zadanie 4
 - 3.10. Zadanie 5
4. Wnioski
5. Bibliografia

1. Cel ćwiczeń

Zadaniem laboratorium jest zdobycie wiedzy dotyczącej reprezentacji i konwersji liniowych układów dynamicznych przy użyciu odpowiednich poleceń oraz funkcji dostarczonych przez oprogramowanie *Matlab/Simulink*.

2. Wstęp teoretyczny

Układ LTI to układ o operatorze g , wejściu $u(t)$ i wyjściu $y(t)$, który spełnia zasadę superpozycji:

$$g[u_1(t) + u_2(t)] = y_1(t) + y_2(t)$$

zasadę jednorodności:

$$g[au(t)] = ay(t)$$

oraz jest niezmienniczy w czasie, czyli odpowiedzią na opóźnione wejście będzie opóźnione wyjście:

$$g[u(t - \tau)] = y(t - \tau)$$

W *Matlabie* można reprezentować układy liniowe niezmiennicze w czasie korzystając z jednej z czterech metod:

- za pomocą transmitancji,
- przy wykorzystaniu zer, biegunów i wzmocnienia układu,
- w przestrzeni stanów,
- za pomocą schematu blokowego znajdującego się w *Simulinku*.

3. Wykonanie zadań

3.1. Transformata Laplace'a – przykład z konspektu

Poniżej znajduje się kod z przykładu podanego w podrozdziale konspektu o nazwie „Transformata Laplace'a”.

```
%% Transformata Laplace'a - przykład
syms t s
syms a positive
f = heaviside(t-a)
Fs = laplace(f,t,s)
```

Kod do przykładu „Transformata Laplace'a”

$$Fs = \frac{\exp(-a*s)}{s}$$

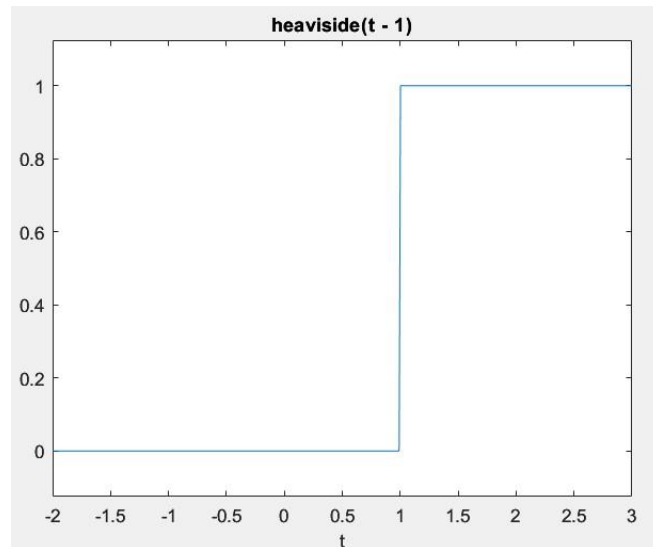
Wynik funkcji *laplace*

3.2. Zadanie 1

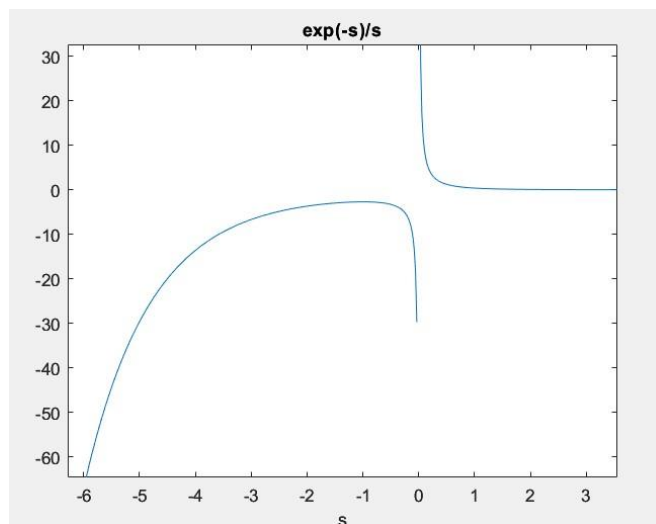
Celem tego zadanie jest narysowanie funkcji Heaviside'a dla parametru $a = 1$ oraz jej transformaty Laplace'a, wykorzystując przy tym funkcję *ezplot*.

```
%% Zadanie 1
syms t s
f = heaviside(t-1)
Fs = laplace(f,t,s)
%% Zadanie 1 - (wykres funkcji Heaviside'a dla a = 1)
ezplot(f, [-2, 3])
%% Zadanie 1 - (wykres transformaty Laplace'a funkcji Heaviside'a dla a = 1)
ezplot(Fs)
```

Kod do zadania 1



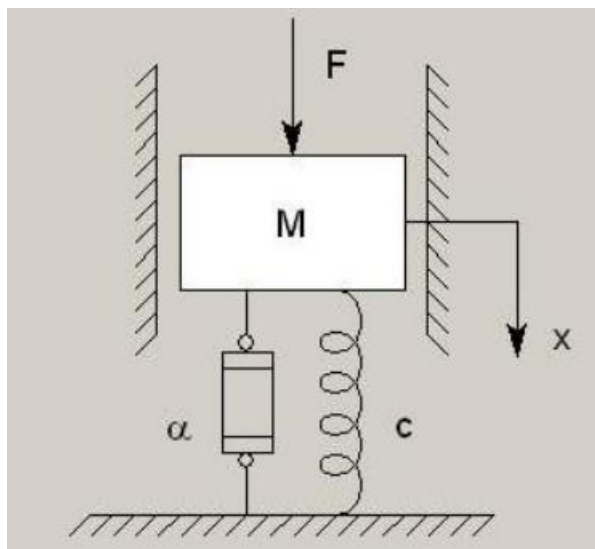
Wykres funkcji Heaviside'a dla parametru $a = 1$



Wykres transformaty Laplace'a funkcji Heaviside'a dla parametru $a = 1$

3.3. Model zawieszenia samochodowego – przykład z konspektu

Model zawieszenia samochodowego został uproszczony do układu inercyjnego II rzędu, w którym masa zgromadzona jest w sprężynie i tłumiku. W momencie przyłożenia siły w kierunku pionowym masa zaczyna się przemieszczać.



Uproszczony schemat modelu zawieszenia samochodowego

Oznaczenia:

- F – siła zewnętrzna
- M – masa układu
- α - stała tłumika
- c – stała sprężyny
- x – przemieszczenie zawieszenia

Równanie różniczkowe II rzędu opisujące układ:

$$M\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx = F$$

Po obłożeniu obu stron równania transformacją Laplace'a, a także wykonaniu przekształceń otrzymujemy się poniższą transmitancję zadanego układu.

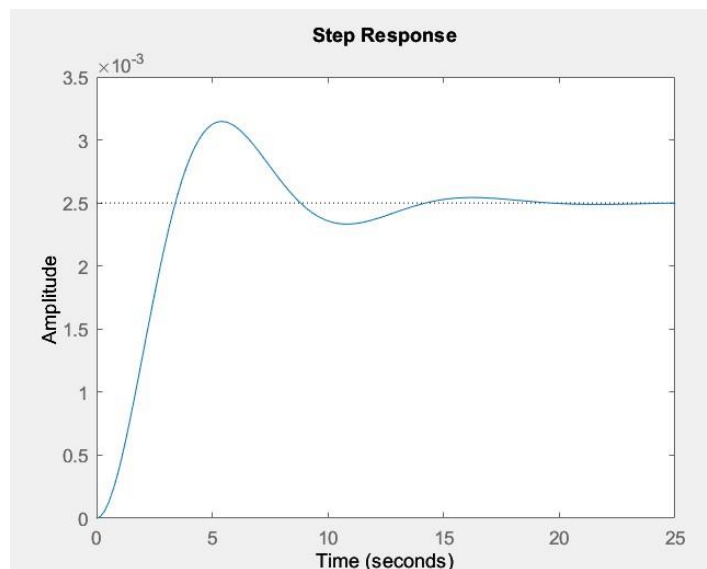
$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + \alpha s + c}$$

W ramach przykładu przyjęto podane wartości parametrów:

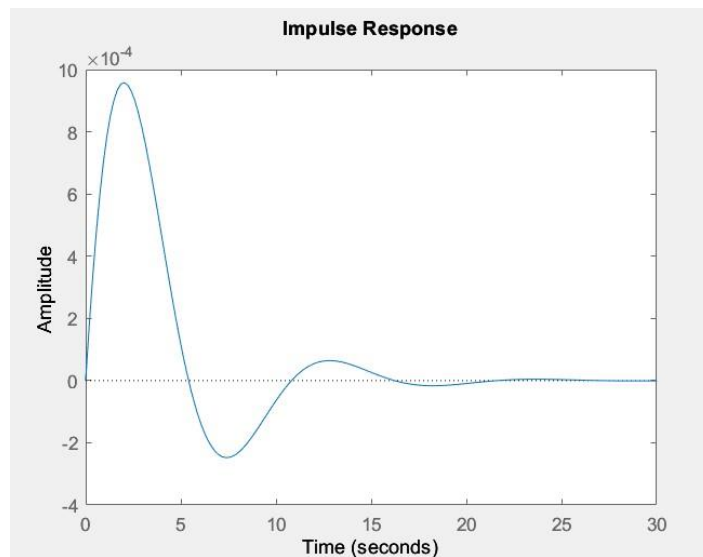
- $M = 1000$,
- $F = 1000$,
- $\alpha = 500$,
- $c = 400$,

%% Transmitancja - przykład licz = [0 0 1]; mian = [1000 500 400];	
%% Transmitancja - przykład c.d. (odpowiedź skokowa dla 'licz' i 'mian') step(licz,mian)	
%% Transmitancja - przykład c.d. (odpowiedź impulsowa dla 'licz' i 'mian') impulse(licz,mian)	
%% Transmitancja - przykład c.d. (zastosowanie funkcji 'tf') obiekt = tf(licz,mian) get(obiekt)	
%% Transmitancja - przykład c.d. (odpowiedź skokowa dla 'obiekt') step(obiekt)	
%% Transmitancja - przykład c.d. (odpowiedź impulsowa dla 'obiekt') impulse(obiekt)	
%% Transmitancja - przykład c.d. (konwersja transmitancji do reprezentacji zera/bieguna/wzmocnienie) [z, p, k] = tf2zp(licz,mian)	
%% Transmitancja - przykład c.d. (przedstawienie graficzne zer i biegunów - I sposób) pzmap(p,z)	
%% Transmitancja - przykład c.d. (przedstawienie graficzne zer i biegunów - II sposób) pzmap(licz,mian)	
%% Transmitancja - przykład c.d. (przedstawienie graficzne zer i biegunów - III sposób) pzmap(obiekt)	

Kod do przykładu związanego z modelowaniem zawieszenia samochodu



Odpowiedź skokowa dla zadanej transmitancji (taka sama, gdy jako argumentu użyje się struktury *obiekt*, czy też *licz* i *mian*)



Odpowiedź impulsowa dla zadanej transmitancji (taka sama, gdy jako argumentu użyje się struktury *obiekt*, czy też *licz* i *mian*)

```

obiekt =

      1
-----
1000 s^2 + 500 s + 400

Continuous-time transfer function.

    Numerator: {[0 0 1]}
  Denominator: {[1000 500 400]}
    Variable: 's'
      IODelay: 0
    InputDelay: 0
  OutputDelay: 0
    InputName: {''}
    InputUnit: {''}
  InputGroup: [1x1 struct]
  OutputName: {''}
  OutputUnit: {''}
  OutputGroup: [1x1 struct]
        Notes: [0x1 string]
      UserData: []
        Name: ''
          Ts: 0
    TimeUnit: 'seconds'
  SamplingGrid: [1x1 struct]

```

Wynik zastosowania funkcji *tf* oraz polecenia *get*


```

z =

0x1 empty double column vector

p =

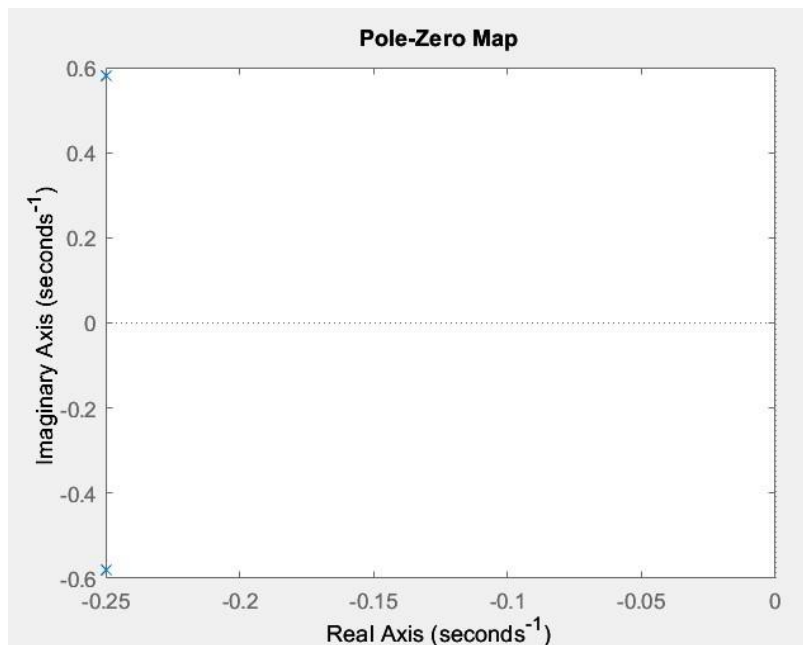
-0.2500 + 0.5809i
-0.2500 - 0.5809i

k =

1.0000e-03

```

Zera, bieguny i wzmacnienie dla zadanej transmitancji



Przedstawienie graficzne zer i biegunów przy pomocy funkcji *pzmap* (niezależne od sposobu podania argumentów)

3.4. Zadanie 2

1. **Czy bieguny są rzeczywiste?**

Nie. Są wartościami zespolonymi.

Czy układ jest stabilny?

Układ jest asymptotycznie stabilny (części rzeczywiste wartości zespolonych są ujemne).

2. Wykonanie tego polecenia opiera się na obliczeniu zer, biegunów i wzmacnienia transmitancji bazując na wykorzystaniu funkcji *tf2zp*.

```

%% Zadanie 2
%% punkt b
licz = [0 0 1];
mian = [1000 500 400];
[z, p, k] = tf2zp(licz,mian)

Kod do punktu b z zadania 2

z =

0x1 empty double column vector

p =

-0.2500 + 0.5809i
-0.2500 - 0.5809i

k =

1.0000e-03

```

Zera, bieguny i wzmocnienie transmitancji

Postać **sfaktoryzowana** transmitancji:

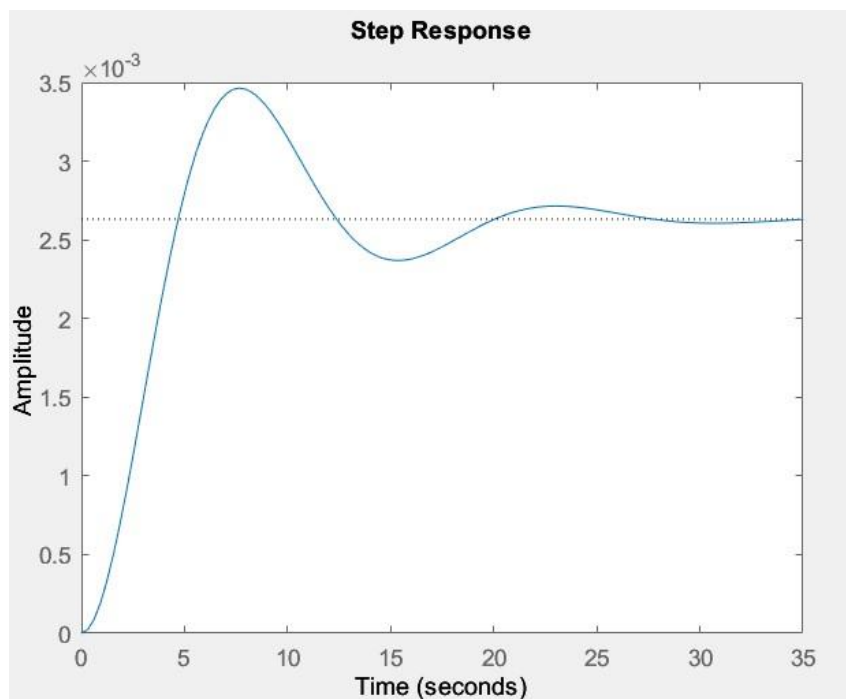
$$G(s) = 0.001 \frac{1}{(s + 0.25 - 0.5809i)(s + 0.25 + 0.5809i)}$$

3. Zadanie polega na dobraniu parametrów układu w taki sposób, by zaobserwować odpowiedź skokową układu oscylacyjnego, a także układu tłumionego.

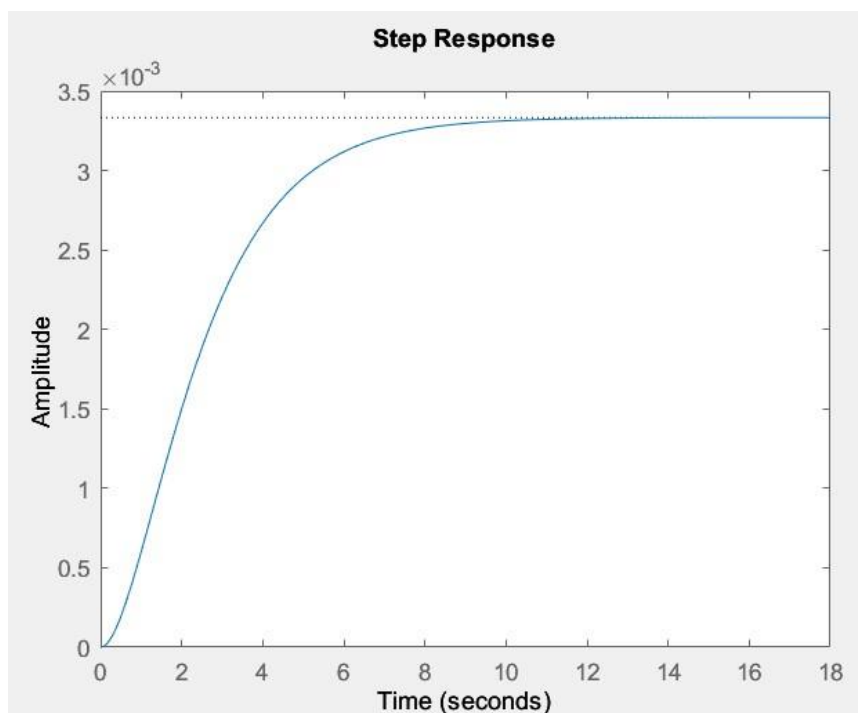
<pre> %% punkt c (układ oscylacyjny) M = 2000; c = 380; a = 600; E = a/(2*sqrt(c*M)) licz = [0 0 1]; mian = [M a c]; obiekt = tf(licz, mian) %% punkt c c.d. (odpowiedź układu na skok jednostkowy w przypadku układu oscylacyjnego) step(obiekt) </pre>	
<pre> %% punkt c c.d. (układ tłumiony) M = 500; c = 300; a = 800; E = a/(2*sqrt(c*M)) licz = [0 0 1]; mian = [M a c]; obiekt = tf(licz, mian) %% punkt c c.d. (odpowiedź układu na skok jednostkowy w przypadku układu tłumionego) step(obiekt) </pre>	

Kod do punktu c z zadania 2

W pierwszej sytuacji $\xi = 0.3441 < 1$ (układ oscylacyjny), w drugim przypadku $\xi = 1.0328 > 1$ (układ tłumiony).



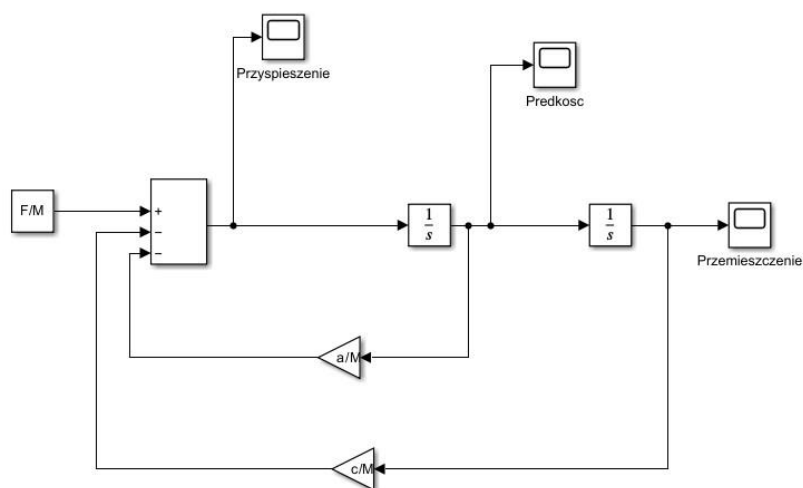
Odpowiedź układu oscylacyjnego na skok jednostkowy



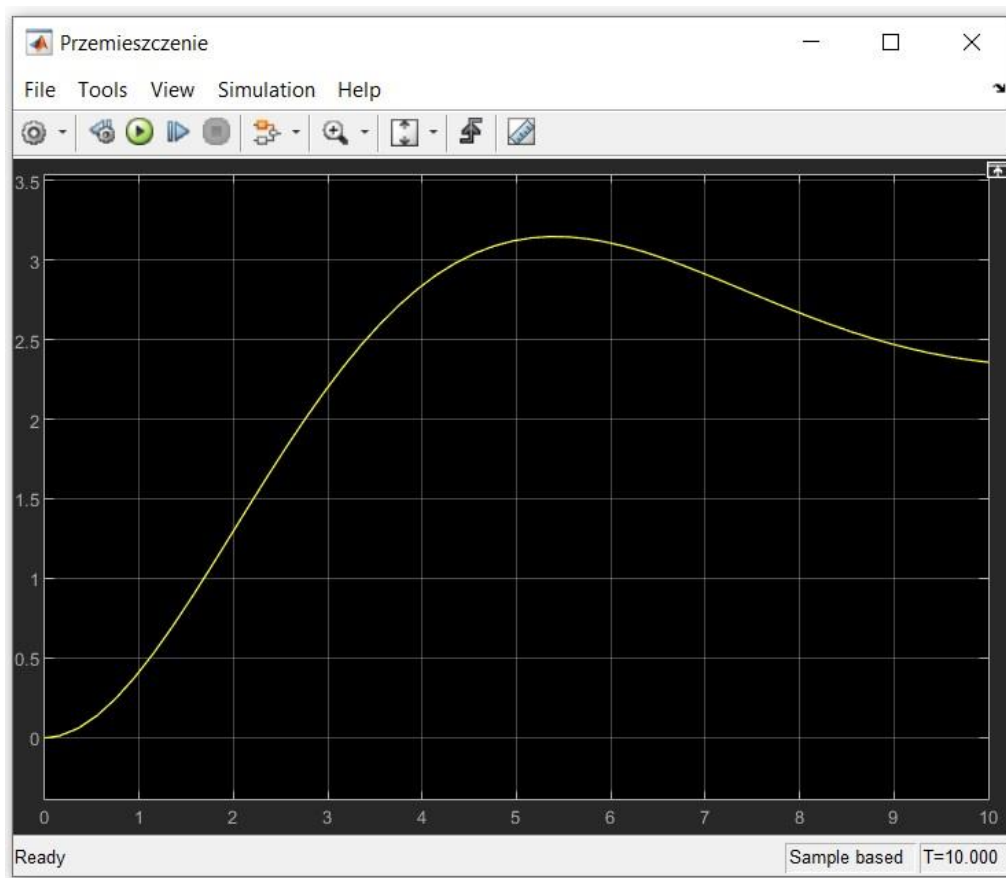
Odpowiedź układu tłumionego na skok jednostkowy

3.5. Schemat blokowy

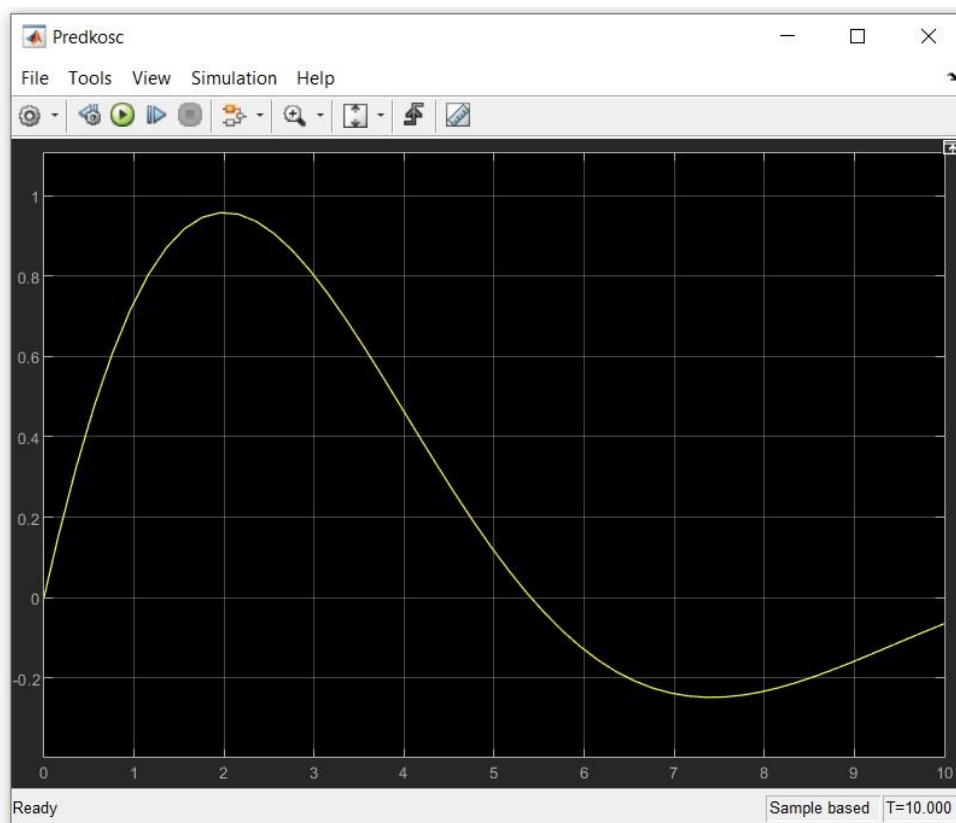
Ćwiczenie opiera się na utworzeniu przedstawionego w konspekcie schematu blokowego w *Simulinku* przy tych samych parametrach, co w podrozdziale 3.3..



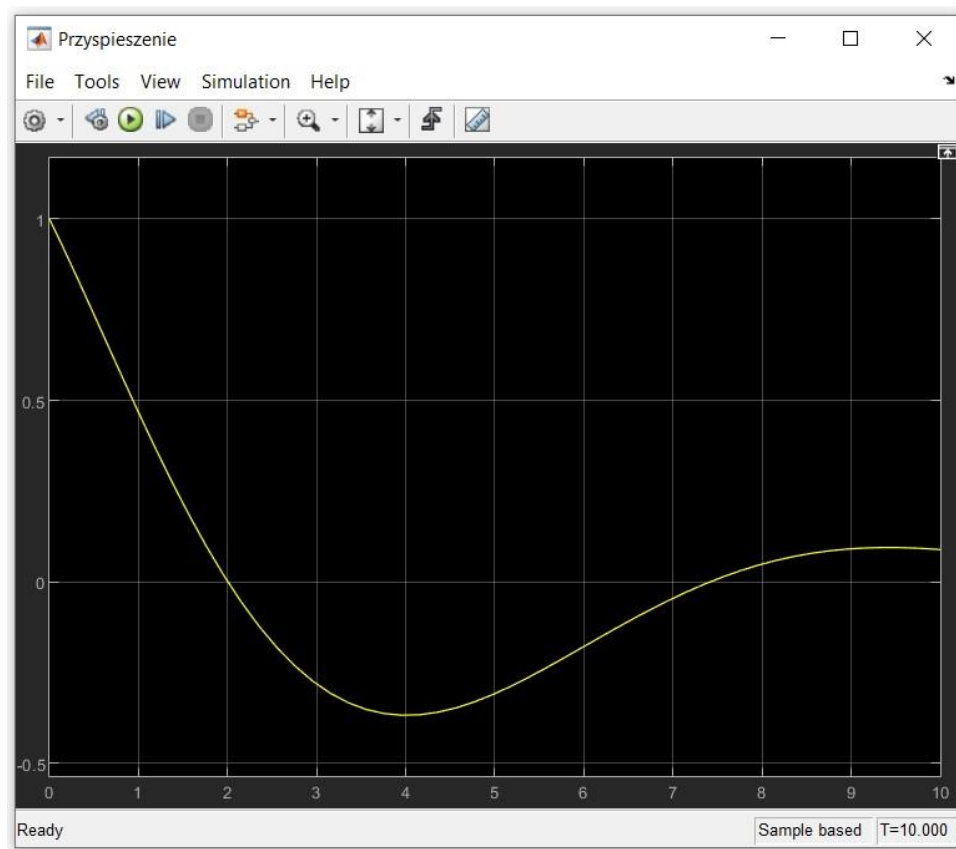
Schemat blokowy



Przebieg przemieszczenia x zaobserwowany na oscyloskopie



Przebieg prędkości \dot{x} zaobserwowany na oscyloskopie



Przebieg prędkości \ddot{x} zaobserwowany na oscyloskopie

3.6. Zera, bieguny, wzmocnienie – przykład z konspektu

```
%% Zera, bieguny, wzmocnienie - przykład
[licz, mian] = zp2tf(-1/3, [0 -1 -3], 3)
printsys(licz, mian)
obiekt = zpk(-1/3, [0 -1 -3], 3)
```

Kod do przykładu podanego w konspekcie

num/den =

$$\frac{3s + 1}{s^3 + 4s^2 + 3s}$$

Wynik funkcji *printsys*

obiekt =

$$\frac{3(s+0.3333)}{s(s+1)(s+3)}$$

Wynik funkcji *zpk*

3.7. Zadanie 3

Poleceniem do tej części laboratorium jest zapisanie transmitancji $G(s) = \frac{4s+1}{s(0.2s+1)(10s+1)}$ w *Matlabie*, stosując przy tym funkcję *zpk*. Na wstępie należy

przekształcić podaną transmitancję do postaci $G(s) = 2 \frac{s+\frac{1}{4}}{s(s+5)(s+\frac{1}{10})}$.

```
%% Zadanie 3
obiekt = zpk(-1/4, [0 -5 -1/10], 2)
```

Kod do zadania 3

obiekt =

$$\frac{2(s+0.25)}{s(s+5)(s+0.1)}$$

Wynik funkcji *zpk* z zadania 3

3.8. Przestrzeń stanów – przykład z konspektu

```
%% Przestrzeń stanów - przykład
M = 1000;
a = 500;
c = 400;
A = [0 1; -c/M -a/M]
B = [0; 1/M]
C = [1 0]
D = 0
obiekt = ss(A, B, C, D)
k = dcgain(A, B, C, D)

%% Przestrzeń stanów - przykład c.d. (odpowiedź skokowa dla argumentu 'obiekt')
step(obiekt)

%% Przestrzeń stanów - przykład c.d. (odpowiedź impulsowa dla argumentu 'obiekt')
impulse(obiekt)

%% Przestrzeń stanów - przykład (odpowiedź skokowa dla argumentów 'A', 'B', 'C', 'D')
step(A, B, C, D)

%% Przestrzeń stanów - przykład (odpowiedź impulsowa dla argumentów 'A', 'B', 'C', 'D')
impulse(A, B, C, D)
```

Kod do przykładu podanego w konspekcie

```
obiekt =
```

```
A =
      x1      x2
x1      0      1
x2    -0.4    -0.5
```

```
B =
      u1
x1      0
x2    0.001
```

```
C =
      x1      x2
y1      1      0
```

```
D =
      u1
y1      0
```

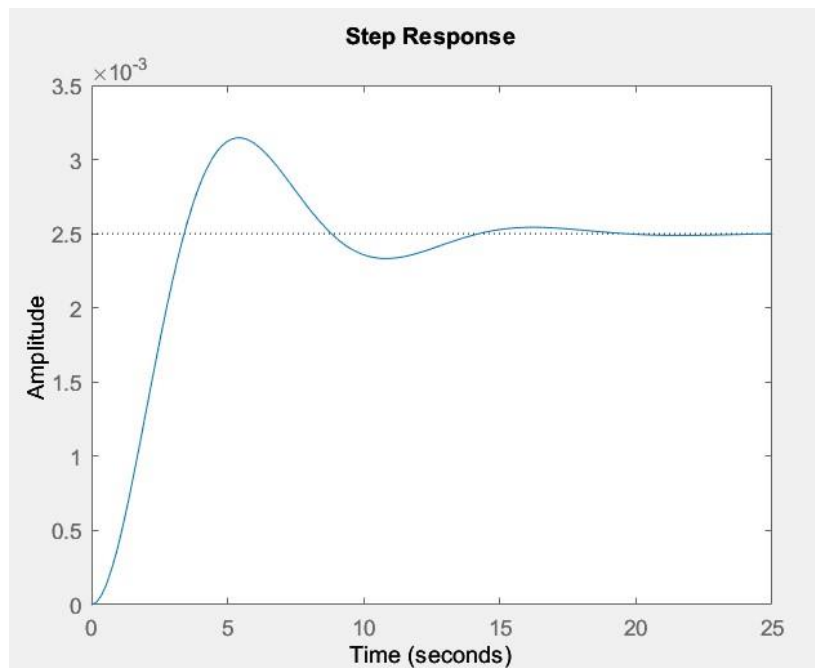
Continuous-time state-space model.

Wynik funkcji ss

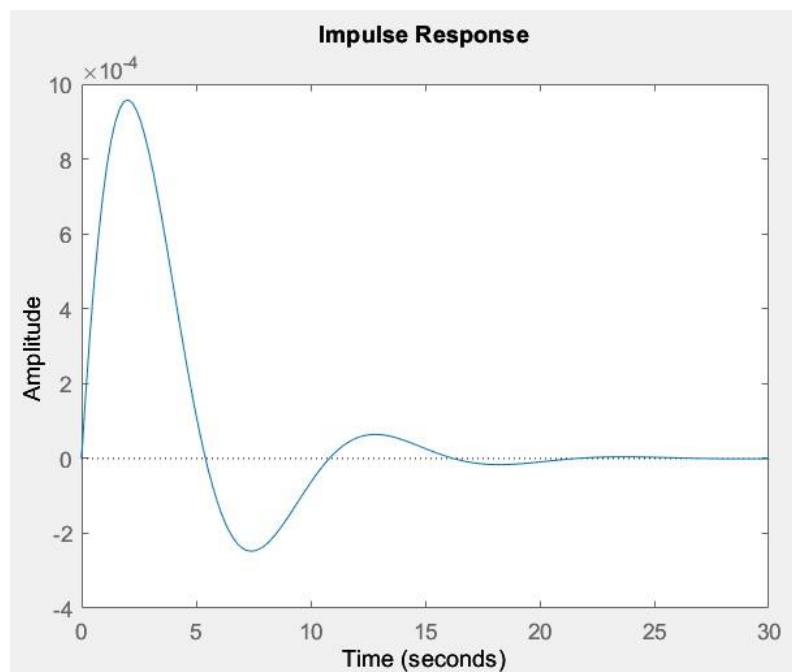
```
k =
```

```
0.0025
```

Wynik funkcji *dcgain* (wzmocnienie)



Odpowiedź skokowa dla zadanego układu (niezależne od sposobu podania argumentów)



Odpowiedź impulsowa dla zadanego układu (niezależne od sposobu podania argumentów)

3.9. Zadanie 4

Polecenie opiera się na konwersji transmitancji modelu zawieszenia do przestrzeni stanów przy pomocy funkcji `zp2ss` i `tf2ss`.

```
%% Zadanie 4 ('zp2ss')
licz = [0 0 1];
mian = [1000 500 400];
[z, p, k] = tf2zp(licz,mian);
[A, B, C, D] = zp2ss(z, p, k)
step(A, B, C, D)

%% Zadanie 4 c.d. ('tf2ss')
[A, B, C, D] = tf2ss(licz, mian)
step(A, B, C, D)
```

Kod do zadania 4

```
A =

    -0.5000    -0.6325
     0.6325         0
```

```
B =

     1
     0
```

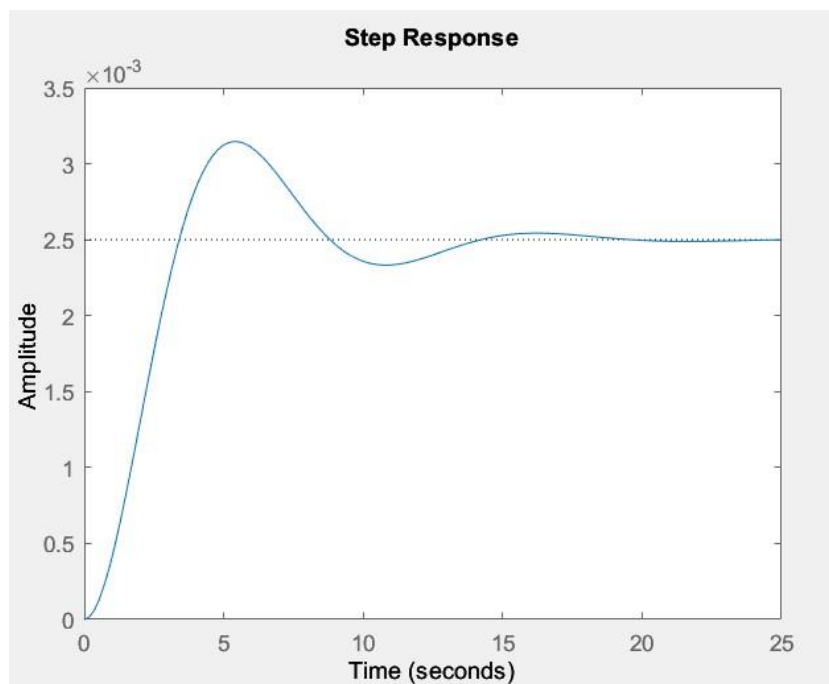
```
C =

     0    0.0016
```

```
D =

     0
```

Wynik dla funkcji `zp2ss`



Odpowiedź skokowa dla macierzy powstałych w wyniku działania funkcji *zp2ss*

A =

```
-0.5000    -0.4000
 1.0000         0
```

B =

```
1
0
```

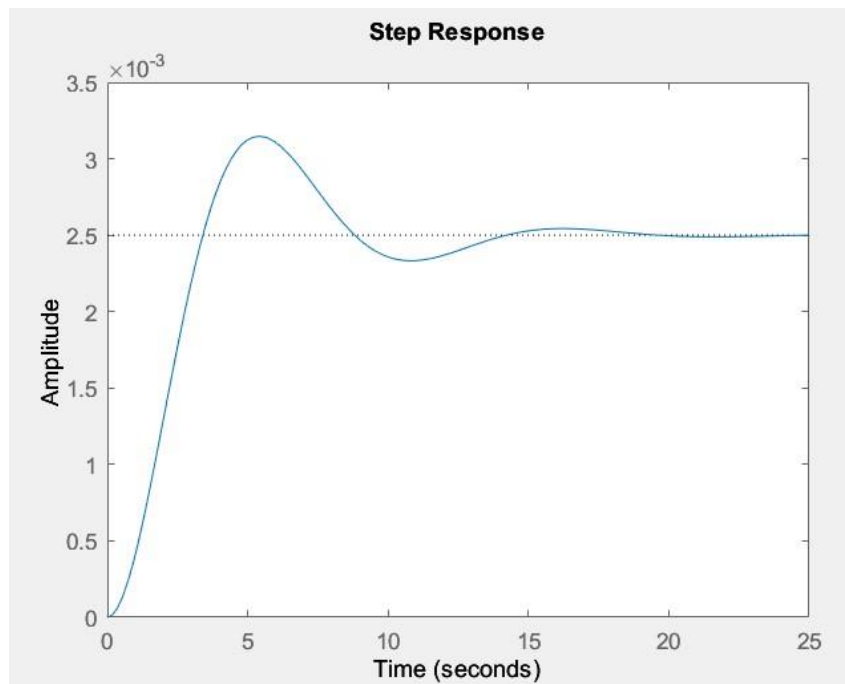
C =

```
1.0e-03 *
         0    1.0000
```

D =

```
0
```

Wynik dla funkcji *tf2ss*



Odpowiedź skokowa dla macierzy powstałych w wyniku działania funkcji `tf2ss`

Opracowując wyniki można zauważyć, że wynikowe macierze posiadają różne wartości w zależności od wybranej metody, natomiast analizując wykresy odpowiedzi skokowych nie dostrzega się dużych różnic.

3.10.Zadanie 5

Ta część laboratorium wymaga znalezienia transmitancji zastępczej dla połączeń szeregowych, równoległych oraz ujemnego sprzężenia zwrotnego przy założeniu, że $G_{sys1}(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+1}$, a także $G_{sys2}(s) = \frac{1}{s^3+s^2-2s+1}$.

```
%% Zadanie 5
licz_sys1 = [0 1 1];
mian_sys1 = [1 5 1];
sys1 = tf(licz_sys1, mian_sys1)
licz_sys2 = [0 0 0 1];
mian_sys2 = [1 1 -2 1];
sys2 = tf(licz_sys2, mian_sys2)
sys_series = series(sys1, sys2)
sys_parallel = parallel(sys1, sys2)
sys_feedback = feedback(sys1, sys2)
```

Kod do zadania 5

```
sys_series =

          s + 1
-----
s^5 + 6 s^4 + 4 s^3 - 8 s^2 + 3 s + 1
```

Continuous-time transfer function.

```
sys_parallel =

          s^4 + 2 s^3 + 4 s + 2
-----
s^5 + 6 s^4 + 4 s^3 - 8 s^2 + 3 s + 1
```

Continuous-time transfer function.

```
sys_feedback =

          s^4 + 2 s^3 - s^2 - s + 1
-----
s^5 + 6 s^4 + 4 s^3 - 8 s^2 + 4 s + 2
```

Continuous-time transfer function.

Wyniki do zadania 5

4. Wnioski

Środowisko *Matlab/Simulink* posiada wiele sposobów reprezentacji układów LTI. Przy zastosowaniu odpowiednich poleceń użytkownik jest w stanie dokonać konwersji między wybranymi metodami przedstawiania omawianych treści. Korzystając z funkcji *step* oraz *impulse* środowisko generuje wykresy ukazujące odpowiednio odpowiedź skokową i odpowiedź impulsową układu potrzebne w analizie pracy systemów.

5. Bibliografia

- konspekt do zajęć zatytułowanych „Reprezentacja układów LTI w Matlabie”
- dokumentacja *Matlaba*