

Алгоритм Евклида

Реджепова Джахан

2 января, 2024, Москва, Россия

Российский Университет Дружбы Народов

Цели и задачи

Цель лабораторной работы

Изучение алгоритма Евклида нахождения НОД и его вариаций.

Выполнение лабораторной работы

Наибольший общий делитель (НОД) – это число, которое делит без остатка два числа и делится само без остатка на любой другой делитель данных двух чисел. Проще говоря, это самое большое число, на которое можно без остатка разделить два числа, для которых ищется НОД.

- Вход. Целые числа a, b ; $0 < b < a$.
 - Выход. $d = \text{НОД}(a, b)$.
1. Положить $r_0 = a, r_1 = b, i = 1$.
 2. Найти остаток r_{i+1} от деления r_{i-1} на r_i .
 3. Если $r_{i+1} = 0$, то положить $d = r_i$. В противном случае положить $i = i + 1$ и вернуться на шаг 2.
 4. Результат: d .

Бинарный алгоритм Евклида

- Вход. Целые числа a, b ; $0 < b \leq a$.
 - Выход. $d = \text{НОД}(a, b)$.
1. Положить $g = 1$.
 2. Пока оба числа a и b четные, выполнять $a = a/2, b = b/2, g = 2g$ до получения хотя бы одного нечетного значения a или b .
 3. Положить $u = a, v = b$.
 4. Пока $u \neq 0$, выполнять следующие действия.
 - Пока u четное, полагать $u = u/2$.
 - Пока v четное, полагать $v = v/2$.
 - При $u \geq v$ положить $u = u - v$. В противном случае положить $v = v - u$.
 5. Положить $d = gv$.
 6. Результат: d

Расширенный алгоритм Евклида

- Вход. Целые числа a, b ; $0 < b \leq a$.
- Выход: $d = \text{НОД}(a, b)$; такие целые числа x, y , что $ax + by = d$.

1. Положить

$$r_0 = a, r_1 = b, x_0 = 1, x_1 = 0, y_0 = 0, y_1 = 1, i = 1$$

2. Разделить с остатком r_{i-1} на r_i :

$$r_{(i-1)} = q_i * r_i + r_{i+1}$$

3. Если $r_{(i+1)} = 0$, то положить $d = r_i, x = x_i, y = y_i$.

В противном случае положить

$$x_{(i+1)} = (x_{(i-1)} - q_i * x_i, y_{(i+1)} = (y_{(i-1)} - q_i * y_i, \\ i = i + 1 \text{ и вернуться на шаг 2.}$$

4. Результат: d, x, y .

Пример работы алгоритма

```
In [2]: 1 main()
        Введите числа a999
        Введите число b99
        Вызываем функцию Евклида
        9
        А теперь можно вызвать функцию расширенного
        (9, 1, -10)
        А теперь функция бинарного Евклида
        9.0
        А теперь функция расширенного бинарного Евклида
        (9.0, 12.0, -121.0)
```

Рис. 1: Работа алгоритма

Выводы

Изучили алгоритм Евклида нахождения НОД.