Métodos de integración

- Integrales inmediatas
  - Por el primer teorema fundamental del cálculo integral

Teorema: Primer teorema fundamental del cálculo integral. Sea $f(x)$ una función integrable Riemann en el intervalo $[a,b]$, definimos la función $F(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$. Si $f(x)$ es continua en $c \in (a,b)$, $F(x)$ es derivable en c con derivada $F'(c) = f(c)$.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad \operatorname{arccosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad x > 1$$

$$\tanh x = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \qquad \operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}; \quad 0 < x \leq 1$$

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}; \quad \text{si } n \neq -1$$

$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log|x|$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x \qquad \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x; \quad [-1,1]$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcsinh}\, x \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh}\, x; \;\; x > 1 \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \operatorname{arctanh}\, x$$

Métodos de integración

Integral por partes

Teorema: Integración por partes: Sean $f'(x)$ y $g'(x)$ continuas. Se cumple entonces que

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \int [f(x)g(x)]'\,\mathrm{d}x = \int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\,\mathrm{d}x \\ &= \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

En general la integración por partes es útil cuando la función a integrar es un producto de dos funciones, una cuya derivada es más sencilla y otra cuya primitiva se conoce, la primera se tomará como la función f y la segunda como la función g'.

Ejercicio $$\int x\, e^x\,\mathrm{d}x$$

tomamos $f(x) = x$ y $g'(x) = e^x$ y escribimos:

$$\begin{aligned} \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = xe^x - e^x = (x-1)e^x. \end{aligned}$$

Métodos de integración

Integración por sustitución

Teorema: Integración por sustitución o cambio de variables Sean $f(x)$ y $g'(x)$ continuas y sea $F(x)$ la primitiva de $f(x)$ entonces se cumple

$$\int f[g(x)]\, g'(x)\, \mathrm{d}x = F[g(x)]$$

$$F[g(x)]' = F'[g(x)]\, g'(x) = f[g(x)]\, g'(x)$$

$$\int f[g(x)]\, g'(x)\, \mathrm{d}x = \int F[g(x)]'\, \mathrm{d}x = F(g(x))$$

Otra forma de entender la integral por sustitución es como un cambio de variables:

$$u(x) = g(x) \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}u = g'(x)\, \mathrm{d}x$$

De forma que

$$\int f[g(x)]\, g'(x)\, \mathrm{d}x = \int f(u)\, \mathrm{d}u = F(u) = F[g(x)]$$

☑ *Ejercicio* $$\int \frac{1}{x \log x}\, \mathrm{d}x$$

$$f(x) \rightarrow \frac{1}{x}, \quad g(x) \rightarrow \log x, \quad f[g(x)] = \frac{1}{\log x}, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

Como la primitiva de $f(x)$ es $F(x) = \int f(x)\, \mathrm{d}x = \log x$, tenemos usando el teorema:

$$\int \frac{1}{x \log x}\, \mathrm{d}x = \int f[g(x)]g'(x)\, \mathrm{d}x = \int F[g(x)]'\, \mathrm{d}x = \log(\log x)$$

Alternativamente diríamos que hacemos un cambio de variables $x \rightarrow u$:

$$u = g(x) = \log x \rightarrow \mathrm{d}u = g'(x)\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

de forma que:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \log u = \log(\log x)$$

Métodos de integración

Integración de funciones racionales

Consideramos ahora el cálculo de primitivas de funciones racionales:

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,\mathrm{d}x,$$

donde $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ son polinomios en x de grados n y m respectivamente, con $n < m$ respectivamente:

$$P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n$$
$$Q_m(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + ... + b_m$$

Teorema: todo polinomio $Q_m(x)$ de coeficientes reales se puede escribir de la forma

$$Q_m(x) = (x-\alpha_1)^{r_1}\dots(x-\alpha_p)^{r_p}\dots(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{s_1}\dots(x^2+\beta_q x+\gamma_q)^{s_q}$$

donde $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ son reales y $\beta_i^2 - 4\gamma_i < 0$.

Los monomios corresponden a p raices reales $\alpha_{1,\dots,p}$ con multiplicidades $r_1, \dots, r_p$. Los binomios corresponden a $2q$ raices complejas que aparecen en pares complejo conjugados caracterizados por por los números reales β_i, γ_i que aparecen con multiplicidad s_i, con $i = 1, \dots, q$.

Métodos de integración

Ejemplo:

Ejemplo: Factorizar el polinomio $Q_3(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

Las raices de este polinomio se obtienen resolviendo la ecuación cúbica:

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$$

Es facil comprobar que $x = -1$ es una raiz, por tanto podemos factorizar $(x+1)$:

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x+1)P_2(x)$$

donde $P_2(x)$ es un polinomio de grado 2, que de forma general escribimos como $P_2(x) = Ax^2 + Bx + C$:

$$x^3+2x^2+2x+1 = (x+1)(Ax^2+Bx+C) = Ax^3+(A+B)x^2+(B+C)x+C$$

Las constantes A, B, C se pueden calcular igualando los coeficientes de las potencias de x:

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ A + B &= 2 \\ B + C &= 2 \\ C &= 1 \end{aligned}$$

que tiene como única solución $A = B = C = 1$.

Tenemos pues $Q_3(x) = (x+1)(x^2+x+1)$. La factorización es completa porque el factor x^2+x+1 es de la forma $x^2+\beta x+\gamma$ con $\beta = 1, \gamma = 1$ y por tanto $\beta^2 - 4\gamma = -3 < 0$ y no tiene raices reales.

Ejemplo:

Ejemplo: Factorizar el polinomio $Q_4(x) = x^4 + 1$

Este polinomio no tiene raices reales porque es $Q_4(x) > 0$ para todo x real. Segun el teorema en la factorización no aparecen monomios así que deben aparecer dos binomios (o uno solo con multiplicidad doble), por tanto:

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)(x^2 + \beta_2 x + \gamma_2) \\ &= (x^4 + (\beta_1 + \beta_2)x^3 + (\gamma_1 + \gamma_2 + \beta_1\beta_2)x^2 + (\gamma_1\beta_2 + \beta_1\gamma_2)x + \gamma_1\gamma_2. \end{aligned}$$

Igualando término a término encontramos:

$$\begin{aligned} 0 &= \beta_1 + \beta_2 \\ 0 &= \gamma_1 + \gamma_2 + \beta_1\beta_2 \\ 0 &= \gamma_1\beta_2 + \beta_1\gamma_2 \\ 1 &= \gamma_1\gamma_2. \end{aligned}$$

La solución es $\beta_1 = -\beta_2 = \sqrt{2}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ de forma que

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

y este es el resultado final porque se cumple $\beta_i^4 - 4\gamma_i < 0$ para $i = 1, 2$.

Métodos de integración

Teorema: toda fracción de polinomios $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ se puede descomponer en fracciones simples de la siguiente manera:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \sum_{i=1}^{p} \frac{A_1^i}{x-\alpha_i} + \frac{A_2^i}{(x-\alpha_i)^2} + \ldots + \frac{A_{r_i}^i}{(x-\alpha_i)^{r_i}}$$
$$+ \sum_{j=1}^{q} \frac{B_1^j x + C_1^j}{x^2+\beta_j x+\gamma_j} + \frac{B_2^j x + C_2^j}{(x^2+\beta_j x+\gamma_j)^2} + \ldots + \frac{B_{s_j} x + C_{s_j}}{(x^2+\beta_j x+\gamma_j)^{s_j}}$$

dada la factorización del denominador:

$$Q_m(x) = (x-\alpha_1)^{r_1} \ldots (x-\alpha_p)^{r_p} \ldots (x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{s_1} \ldots (x^2+\beta_q x+\gamma_q)^{s_q}.$$

- *Ejemplo*:

Ejemplo: Descomponer en fracciones simples la función:

$$\frac{3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+2x+1}$$

$$\frac{3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+2x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1},$$

$$\frac{3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+2x+1} = \frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+x+1)}$$
$$= \frac{(A+B)x^2+(A+B+C)x+(A+C)}{x^3+2x^2+2x+1}$$

$$A+B=3$$
$$A+B+C=3$$
$$A+C=1$$

que tiene como única solución: $A=1, B=2, C=0$.

Sustituyendo tenemos por tanto la descomposición:

$$\frac{3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+2x+1} = \frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2+x+1}.$$

Métodos de integración

Gracias a los potentes teoremas del algebra que nos llevan a la descomposición en fracciones simples, podemos reducir la integración de funciones racionales a la de fracciones simples que son de dos tipos:

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^r}\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^s}\,\mathrm{d}x$$

donde $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma$ son reales y r, s enteros positivos.

Las integrales con monomios son inmediatas:

$$r = 1 \Rightarrow \int \frac{A}{(x-\alpha)}\,\mathrm{d}x = A\log(x-\alpha)$$

$$r > 1 \Rightarrow \int \frac{A}{(x-\alpha)^r}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{r-1}\frac{A}{(x-\alpha)^{r-1}}$$

Las integrales con binomios se pueden reescribir:

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^s}\,\mathrm{d}x &= \frac{B}{2}\int \frac{2x+2C/B+\beta-\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^s}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{B}{2}\int \frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^s}\,\mathrm{d}x + \int \frac{C-\beta B/2}{(x^2+\beta x+\gamma)^s}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Si $s = 1$ las integrales que quedan son inmediatas:

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^s}\,\mathrm{d}x =& \frac{B}{2}\log(x^2+\beta x+\gamma) \\ &+ \frac{C-\beta B/2}{\sqrt{a}}\arctan\left(\frac{x+\beta/2}{\sqrt{a}}\right)\end{aligned}$$

donde hemos definido $a = \gamma - \beta^2/4$.

Si $s > 1$, tenemos:

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^s}\,\mathrm{d}x =& -\frac{B}{2(s-1)}\frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^{s-1}} \\ &+ \frac{C-\beta B/2}{a^s}\sqrt{a}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)^s}\end{aligned}$$

con $u = (x+\beta/2)/\sqrt{a}$. La última integral se puede reducir ya que se cumple:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)^s} = \frac{2s-3}{2s-2}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)^{s-1}} + \frac{1}{2s-2}\frac{u}{(u^2+1)^{s-1}}$$

Por tanto todas las integrales de fracciones simples se pueden expresar en términos de funciones elementales.

Integrales de funciones trigonométricas

Funciones producto de sin x y cos x

Consideramos integrales de la forma:

$$\int \sin^n x \cos^m x \, \mathrm{d}x$$

- $n = 2p$, $m = 2q$ son ambos pares, se pueden usar las fórmulas del ángulo doble $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$ y $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ recursivamente hasta reducir a integrales con potencias impares, que se pueden hacer como en los casos anteriores.

- Si n es impar, sea $n - 1 = 2p$ entonces:
$$\int \sin x \sin^{2p} x \cos^m x \, \mathrm{d}x = \int \sin x (1 - \cos^2 x)^p \cos^m x \, \mathrm{d}x$$
Haciendo la sustitución $u = \cos x, \ \mathrm{d}u = -\sin x \, \mathrm{d}x$:
$$= -\int (1 - u^2)^p u^m \, \mathrm{d}u$$
y el problema se reduce a encontrar la primitiva de un polinomio.

- Si m es impar, sea $m - 1 = 2q$ entonces:
$$\int \sin^n x \cos^{2q} x \cos x \, \mathrm{d}x = \int \sin^n x (1 - \sin^2 x)^q \cos x \, \mathrm{d}x$$
Haciendo la sustitución $u = \sin x, \ \mathrm{d}u = \cos x \, \mathrm{d}x$:
$$= \int (1 - u^2)^q u^n \, \mathrm{d}u$$
y el problema de nuevo se reduce a encontrar la primitiva de un polinomio.

Métodos de integración

Productos cos(ax) o sin(ax)

Se usan, recursivamente si es necesario, las relaciones de trigonometría:

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$$
$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}\left[\sin(A+B) + \sin(A-B)\right]$$
$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) + \cos(A+B)\right]$$

hasta reducirlas a los tipos anteriores.

Funciones racionales de cos x o sin x

Las funciones racionales de $\sin x$ y $\cos x$, se pueden transformar en funciones racionales normales con el cambio:

$$u = \tan\frac{x}{2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

dado que

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2} \qquad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Este método sin embargo sólo debe usarse como último recurso.

Ejercicio

Ejercicio: Calcular

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$$

Respuesta: Usando el cambio $u = \cos x$:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\log(u) = -\log(\cos x) = \log\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

Integrales impropias

- Integrales impropias

Definición: Se llama integral impropia a aquella en que:

1. Alguno o ambos de los límites de integración es ∞:

$$[a, \infty), (-\infty, a], (-\infty, \infty)$$

2. La función no está acotada en el rango de integración

Estas integrales se definen como límites de integrales propias.

Integrales impropias

Límites de integración infinitos

Supongamos que queremos integrar la función $f(x)$ en los intervalos:

$$[a, \infty) \quad \text{o} \quad (-\infty, b].$$

Sean las primitivas:

$$F(y) = \int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x \quad G(y) = \int_y^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Las integrales impropias de $f(x)$ en dichos intervalos se definen como los límites:

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \lim_{y\to\infty} F(y)$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \lim_{y\to-\infty} G(y)$$

Si el límite existe decimos que la integral *converge* y si no que *diverge*.

Integrales impropias

- *Ejemplo:*

Ejemplo: Calcular
$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

Según la definición:
$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{y\to\infty}\left(\int_1^y f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

Dado que una primitiva de $1/x^2$ es $-1/x$:
$$\lim_{y\to\infty} \left.\frac{-1}{x}\right|_1^y \mathrm{d}x = \lim_{y\to\infty} -\frac{1}{y} + 1 = 1.$$

Por tanto la integral *converge*.

- *Ejemplo:*

Ejemplo: Calcular
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x}$$

La función:
$$F(y) = \int_1^y \frac{dx}{x} = \log x|_1^y = \log y,$$

por tanto:
$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} \equiv \lim_{y\to\infty} F(y) = \infty$$

y la integral *diverge*.

Integrales impropias

Funciones no acotadas

Supongamos primero que la función $f(x)$ es continua en $[a, b)$, pero

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty.$$

Definimos entonces la integral:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \lim_{y \to b^-} \int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x$$

y si el límite existe la integral converge y toma el valor del límite y si no existe la integral diverge.

Si la función no está acotada en algun punto $c \in (a, b)$, definimos la integral en $[a, b]$ de la forma:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \lim_{y \to c^-} \int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{y \to c^+} \int_y^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

En este caso, decimos que la integral converge si *ambos* límites existen y toma el valor de la suma. Si alguno no existe, la integral diverge.

Integrales impropias

- *Ejemplo*:

Ejemplo: Calcular

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$$

La función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ no está acotada en $x = 1$, por tanto definimos la integral impropia:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} = \lim_{y\to 1} \int_0^y \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} = \lim_{y\to 1} -2\sqrt{1-y} + 2 = 2.$$

Por tanto la integral converge y vale 2.

- *Ejemplo*:

Ejemplo: Calcular

$$\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$$

La función diverge en $x = 1$ que está en el intervalo de integración, por tanto:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} &= \lim_{y\to 1^-} \int_0^y \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{y\to 1^+} \int_y^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{y\to 1^-} \left(-\frac{1}{y-1} - 1\right) + \lim_{y\to 1^+} \left(\frac{1}{y-1} - 1\right)\end{aligned}$$

Ninguno de los dos límites existe y por tanto la integral *diverge*.