Atividade 1

1. Mostre que
$$\begin{aligned} d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) = (x - y)^2 \end{aligned}$$
não é uma métrica em $\mathbb{R}$.

2. Seja $d : M \times M \to \mathbb{R}$ uma métrica. Mostre que as funções
$$\alpha(x, y) = \sqrt{d(x, y)}, \quad \beta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad \gamma(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$$
são métricas em M. **Dica:** Para a função β, utilize a função $f(t) = \frac{t}{1+t}$ (a qual é crescente, pois...).

3. Seja $(V, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado cuja norma $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ é induzida de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ de maneira usual, isto é, $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$, para $v \in V$. Prove a **Lei do Paralelogramo**
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \forall\, x, y \in V.$$