Topologia e espaços métricos

Roberto Imbuzeiro Oliveira*

7 de Fevereiro de 2014

Conteúdo

1 Preliminares sobre conjuntos **2**

2 Introdução aos espaços métricos **3**
2.1 Definição 3
2.2 Exemplos 3
2.2.1 A reta real 3
2.2.2 O espaço Euclideano de d dimensões 4
2.2.3 A métrica discreta 5
2.2.4 Restrições 5
2.3 Sequências, limites e completude 6
2.4 Continuidade 7

3 Introdução à topologia: abertos, fechados e companhia **8**
3.1 Uniões e interseções 9
3.2 Caracterizando os fechados via limites 10
3.3 Continuidade, abertos e fechados 11
3.4 Fechos, interiores e pontos de acumulação 13
3.5 Como são os abertos de $\mathbb{R}$? 14
3.6 Mais exercícios 15

4 Conjuntos conexos **15**
4.1 Conexidade e funções contínuas 16
4.2 Os conjuntos conexos de $\mathbb{R}$ são os intervalos 18
4.3 Aplicações 20

*IMPA, Rio de Janeiro, RJ, Brazil, 22430-040.

5 Conjuntos compactos **21**
5.1 Compactos são completos 21
5.2 Compactos são totalmente limitados 23
5.3 O critério das subsequências convergentes 26
5.4 Compactos de $\mathbb{R}^d$: o teorema de Heine-Borel 29
5.5 Critérios topológicos para a compacidade 29
5.6 Continuidade uniforme 32
5.7 Conjuntos perfeitos 33
Estas notas serão atualizadas ao longo das próximas aulas.

1 Preliminares sobre conjuntos

Aqui observamos alguns fatos sobre conjuntos que não havíamos observado antes.

Em primeiro lugar, é possível falar de uniões e interseções de um número arbitrário de conjuntos. Mais exatamente: suponha que $I \neq \emptyset$ é um conjunto e a cada $i \in I$ está associado um conjunto A_i[1]. (Neste caso dizemos que $\{A_i\}_{i\in I}$ *é uma família de conjuntos indexada por* I). Definimos as uniões $\cup_{i\in I} A_i$ e interseções $\cup_{i\in I} A_i$ pelas regras:

$$\forall x \,:\, \text{“}x \in \bigcup_{i\in I} A_i\text{”} \Leftrightarrow \text{“}\exists i \in I \,:\, x \in A_i\text{”}.$$

$$\forall x \,:\, \text{“}x \in \bigcap_{i\in I} A_i\text{”} \Leftrightarrow \text{“}\forall i \in I \,:\, x \in A_i\text{”}.$$

Em segundo lugar, observamos que, se todos os A_i estão contidos num mesmo conjunto X, podemos falar do complemento $A_i^c := X\backslash A_i$ de cada A_i com relação a X. Notamos que a operação de tomar complementos é idempotente ($(A^c)^c = A$) e troca interseção por união:

$$\bigcup_{i\in I} A_i^c = \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c.$$

[1] A maneira correta de pensar nisso seria imaginar que temos uma função $f : I \to \mathcal{A}$, onde $\mathcal{A}$ é um conjunto cujos elementos são conjuntos. Sendo assim, A_i seria um “sinônimo” de $f(i)$.

2 Introdução aos espaços métricos

Neste trecho do curso estudaremos um pouco da teoria de espaços métricos, com ênfase em problemas *topológicos*, isto é, relacionados a conjuntos abertos e fechados e a funções contínuas.

2.1 Definição

Definição 1 *Um espaço métrico é um conjunto* $X \neq \emptyset$ *munido de uma função* $\mathsf{d} : X \times X \to [0, +\infty)$*, chamada de* métrica sobre X*, com as seguintes propriedades.*

1. d **é não-negativa e separa pontos distintos:** *para quaisquer* $a, b \in X$*,* $\mathsf{d}(a, b) = 0$ *se e somente se* $a = b$*;*

2. d **é simétrica:** *para qualquer par* $(a, b) \in X \times X$*,* $\mathsf{d}(a, b) = \mathsf{d}(b, a)$*;*

3. d **satisfaz a desigualdade triangular:** *para quaisquer* $a, b, c \in X$*,* $\mathsf{d}(a, b) \leq \mathsf{d}(a, c) + \mathsf{d}(c, b)$*.*

Todas as propriedades de métrica acima têm uma *interpretação intuitiva* se pensamos em d como uma noção de distância. A propriedade 1 diz que a distância de um lugar a ele mesmo é nula, mas que qualquer outro lugar está a distância positiva. A segunda propriedade afirma que ir de a a b não é mais fácil ou difícil que ir de b a a. A terceira propriedade afirma que ir de a para c e depois para b não pode resultar em um caminho mais curto que a rota direta de a para b.

2.2 Exemplos

Veremos abaixo os principais exemplos de espaços métricos que serão recorrentes no curso. Ocasionalmente usaremos a convenção de denotar por d_X a métrica de X; isto será útil quando tratarmos muitos espaços métricos de uma única vez.

2.2.1 A reta real

$X = \mathbb{R}$ com a métrica $\mathsf{d}(a, b) := |a - b|$ $((a, b) \in \mathbb{R}^2)$. As duas primeiras propriedades da definição de métrica são triviais. A terceira é consequência de "$|x + y| \leq |x| + |y|$"aplicada a $x = a - c$ e $y = c - b$. *Em todas estas notas tomaremos esta métrica como a métrica padrão sobre* $\mathbb{R}$*, a não ser quando o contrário for dito.*

2.2.2 O espaço Euclideano de d dimensões

Nossa segunda classe mais importante de exemplos é dada por $X = \mathbb{R}^d$ com $d \in \mathbb{N}$. Os elementos deste conjunto serão representados na forma $x \in \mathbb{R}^d$, com as d coordenadas de x escritas como $x[1], x[2], \ldots, x[d]$. Às vezes usaremos as seguintes operações:

- *Soma e diferença:* dados $x, y \in \mathbb{R}^d$, definimos $x \pm y \in \mathbb{R}^d$ como o vetor de coordenadas $x[i] \pm y[i]$ $(1 \leq i \leq d)$.
- *Multiplicação por escalar:* se $x \in \mathbb{R}^d$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\, x$ é o vetor de coordenadas $\lambda\, x[i]$ $(1 \leq i \leq d)$.

A métrica que normalmente usaremos sobre $\mathbb{R}^n$ será a *Euclideana.* Para defini-la, vamos primeiro fixar a *norma Euclideana:*

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x[i]^2}\ (x \in \mathbb{R}^d)$$

e então definir $\mathsf{d}(a, b) := \|a - b\|$ para $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (aqui definimos a soma e subtração de vetores coordenada a coordenada). Provaremos abaixo que d tem as três propriedades pedidas de uma métrica.

1. Veja que $\|x\| \geq 0$ sempre, com igualdade se e somente se todas as coordenadas de x são nulas. A propriedade segue quando se aplica isto a $x = a - b$.
2. Vem do fato que $\|x\| = \|-x\|$, onde $-x$ é o vetor de coordenadas $-x[i]$ (com $i \in [n]$), uma vez que se aplica isto a $x = a - b$.
3. Como no caso de $X = \mathbb{R}$, vamos tomar $x = a - c$ e $y = c - b$ e argumentar que $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. De fato, como a função que leva $t \geq 0$ em t^2 é crescente, basta provar que

$$\|x + y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x[i] + y[i])^2$$

é menor ou igual a $(\|x\| + \|y\|)^2$. Para isto expandimos os quadrados acima.

$$\|x + y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x[i]^2 + \sum_{i=1}^{n} y[i]^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} x[i] y[i].$$

Veja que a primeira soma do lado direito é $\|x\|^2$, a segunda é $\|y\|^2$ e a terceira pode ser cotada superiormente por $\|x\|\,\|y\|$ (isto é precisamente a desigualdade de Cauchy Schwartz!). Portanto, temos

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2+2\sum_{i=1}^{n} x[i]y[i]. \leq \|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\,\|y\| = (\|x\|+\|y\|)^2.$$

Em todas estas notas tomaremos esta métrica como a métrica padrão sobre $\mathbb{R}^d$, a não ser quando o contrário for dito. No entanto, outras métricas são possíveis.

Exercício 1 (Distância do máximo) *Defina* $\|x\|_\infty := \max\{|x[1]|, \dots, |x[d]|\}$ *($x \in \mathbb{R}^d$). Prove que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \,:\, \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \sqrt{d}\,\|x\|_\infty.$$

Mostre que pode haver igualdade tanto na desigualdade inferior quanto na superior. Mostre ainda que

$$\mathsf{d}(a,b) := \|a-b\|_\infty \; ((a,b) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$$

define outra métrica sobre $\mathbb{R}^d$.

2.2.3 A métrica discreta

Os exemplos acima podem passar a impressão de que todo espaço métrico é "agradável"e que a métrica sempre tem uma boa interpretação como distância. Há, no entanto, um exemplo simples de métrica que não tem qualquer interpretação clara. Esta métrica – chamada de métrica discreta sobre X – tem a seguinte forma:

$$\mathsf{d}(a,b) := \begin{cases} 1 & \text{se } a \neq b \\ 0 & \text{se não.} \end{cases} \quad ((a,b) \in X^2)$$

Embora esquisita, esta métrica serve para treinar os conceitos que veremos abaixo. Não custa lembrar: *qualquer resultado que queiramos provar para qualquer espaço métrico tem de valer para esta classe estranha!*

2.2.4 Restrições

Nossa última classe de exemplos é obtida por restrições: se $Y \subset X$ não é vazio, a restrição de uma métrica d_X sobre X define uma métrica d_Y sobre Y [exercício]. Por exemplo, $Y = \mathbb{Q}$, ou $Y = [0,1]$ também podem ser tomado como espaços métricos com a métrica $\mathsf{d}_Y(a,b) = |a-b|$ $((a,b) \in Y^2)$.

2.3 Sequências, limites e completude

Fixo um espaço métrico (X, d_X), podemos falar de sequências $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. Assim como no caso de sequências reais, isto é apenas uma forma de escrever uma função de $\mathbb{N}$ em X, que trataremos como uma sucessão de termos em X. Não é difícil adaptar as definições da reta $\mathbb{R}$ para este caso.

Definição 2 *Uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ converge (segundo a métrica d_X) a um $x \in X$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow \mathsf{d}(x_n, x) < \varepsilon.$$

Como no caso de números, trocar $< \varepsilon$ por $\leq \varepsilon$ na definição não muda nada.

Definição 3 *Uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ é Cauchy (segundo a métrica d_X) se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : m, n \geq n_0 \Rightarrow \mathsf{d}(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

(X, d_X) é dito completo se toda sequência de Cauchy no espaço converge.

A prova de que "convergente"$\Rightarrow$"Cauchy"no caso real se adapta perfeitamente ao caso de espaços métricos gerais. A recíproca nem sempre é verdadeira, pois nem todo espaço métrico é completo. Vejamos isto em alguns exemplos.

Exemplo 1 $(\mathbb{R}, \mathsf{d}_{\mathbb{R}})$ *é completo, mas* $(\mathbb{Q}, \mathsf{d}_{\mathbb{Q}})$ *não é.*

Exemplo 2 $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$ *é completo. De fato, suponha que $\{x_n\}_n \subset \mathbb{R}^2$ é Cauchy. O exercício 1 acima implica tanto a primeira quanto a segunda coordenadas de x_n formam sequências de Cauchy, que portanto têm limites $x[1], x[2]$. O mesmo exercício nos permite concluir que x_n converge ao vetor x com estas coordenadas. O raciocínio é o mesmo para dimensões $d = 3, 4, 5, \ldots$*

Exercício 2 *Prove mais formalmente que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ converge a $x \in \mathbb{R}^d$ se e somente se $x_n[i] \to x[i]$ para cada coordenada $1 \leq i \leq d$.*

Exercício 3 *Calcule o limite dos vetores cujas coordenadas são $n/n!$, $n^2/n!$, $\ldots$, $n^d/n!$ (com $n \in \mathbb{N}$).*

Exemplo 3 *Suponha que $x \in X$ é discreto, isto é, que existe um $r > 0$ tal que $\forall x \in X$ e $\forall y \in X \backslash \{x\}$, $\mathsf{d}(x,y) \geq r$. Neste caso x_n é Cauchyse e somente se existe um n_0 tal que $x_n = x_{n_0}$ para todo $n \geq n_0$ (de fato, basta tomar o n_0 correspondendo à escolha de $\varepsilon = r$). Mais ainda: quando isto acontece, $\lim x_n = x_{n_0}$. Segue disto que todo conjunto vira um espaço métrico completo com a métrica dscreta.*

Exercício 4 *Prove que $x_n \to x$ se e somente se $\mathsf{d}_X(x_n, x) \to 0$ (note que $\mathsf{d}_X(x_n, x)$ é sequência de números reais).*

2.4 Continuidade

Vamos definir logo de cara um dos conceitos mais importantes do curso.

Definição 4 *Sejam (X, d_X), (Y, d_Y) espaços métricos e $f : X \to Y$ uma função. Dizemos que f é contínua em $x \in X$ se para toda sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ com $x_n \to x$, temos $f(x_n) \to f(x)$. f é dita contínua se é contínua em todo $x \in X$.*

Exemplo 4 *Se $X = Y = \mathbb{R}$ vemos claramente que as funções $f(x) = a\,x + b$ (com a e b contantes), $f(x) = x^k$ ($k \in \mathbb{N}$), $\dots$ são contínuas, por causa das regras sobre limites de produtos. A função $f(x) = 1/x$ é contínua em $X = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. A soma e o produto de funções contínuas também é contínua.*

Exercício 5 *Enuncie de forma precisa e prove a afirmação de que a composição de funções contínuas é contínua.*

Exemplo 5 *Se $X = \mathbb{R}^d$ e $Y = \mathbb{R}$, qualquer função que seja um polinômio nas variáveis $x[1], \dots, x[d]$ é contínua. Se P é um destes polinômios, $1/P(x)$ é contínua quando tomamos como domínio o conjunto*

$$\tilde{X} := \{x \in X \,:\, P(x) \neq 0\}.$$

Proposição 1 *Seja d a métrica discreta sobre X, um conjunto com dois ou mais pontos. Então:*

- *qualquer função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua, mas*
- *uma função $f : \mathbb{R} \to X$ só pode ser contínua se é constante.*

A primeira parte vem do fato que, em X, $x_n \to x$ se e somente se $x_n \to x$ para todo n grande. A segunda parte será evidente quando falarmos de conexidade.

Exercício 6 *Dado $L > 0$, suponha que $f : X \to Y$ é L-Lipschitz, isto é, temos $\mathsf{d}_Y(f(x), f(x')) \leq L\,\mathsf{d}_X(x, x')$ para quaisquer $x, x' \in X$. Mostre que f é contínua.*

Exercício 7 *Fixo $x_0 \in X$, defina $f : X \to \mathbb{R}$ com $f(x) := \mathsf{d}_X(x, x_0)$ ($x \in X$). Mostre que f é 1-Lipshitz e portanto contínua.*

Exercício 8 *Fixe $S \subset X$, $S \neq \emptyset$.*

1. *Mostre que, para qualquer $x \in X$, o conjunto*

$$\{\mathsf{d}_X(x, s) \,:\, s \in S\}$$

tem um ínfimo.

2. *Prove que $\mathsf{d}_X(x, S) := \inf\{\mathsf{d}_X(x, s) \,:\, s \in S\}$ é função 1-Lipschitz (e portanto contínua) de X em $\mathbb{R}$.*

Nas seções seguintes seguintes faremos a relação entre continuidade e conceitos "topológicos."

3 Introdução à topologia: abertos, fechados e companhia

Nesta seção (X, d_X) é um espaço métrico dado. Dados $x \in X$ e $r \geq 0$, denotamos por $B_X(x, r)$ ou apenas $B(x, r)$ a chamada *bola aberta de raio r ao redor de x*:

$$B(x, r) := \{y \in X \,:\, \mathsf{d}(x, y) < r\}.$$

Também definimos a bola fechada $B_X[x, r]$ ou $B[x, r]$ como

$$B[x, r] := \{y \in X \,:\, \mathsf{d}(x, y) \leq r\}.$$

Exercício 9 *Mostre que, dados $0 \leq r' < r$,*

$$B(x, 0) = \emptyset B[x, 0] = \{x\} \subset B[x, r'] \subset B(x, r) \subset B[x, r].$$

Mostre que $B[x, 0] = B[x, 1/2] = B(x, 1)$ se a métrica é discreta.

Definição 5 *$A \subset X$ é dito aberto (segundo a métrica d_X) se para todo $x \in X$ existe um $\delta > 0$ tal que $B_X(x, \delta) \subset A$. $F \subset X$ é dito* fechado *se $X \backslash F$ é aberto.*

Exemplo 6 *Todos os subconjuntos são abertos e fechados se a métrica é discreta.*

Exemplo 7 *Considere uma bola aberta $B(x,r)$. Afirmamos que ela é um conjunto aberto. Para isto precisamos mostrar que, dado qualquer $y \in B(y,r)$, temos $B(y,\delta) \subset B(x,r)$ para algum $\delta > 0$.*

De fato, dado $y \in B(x,r)$, temos $r' := \mathsf{d}(x,y) < r$. Tomando $\delta := r - r'$, que é positivo, vemos que

$$\forall z \in B(y,\delta) \, : \, \mathsf{d}(z,x) \leq \mathsf{d}(z,y) + \mathsf{d}(x,y) < \delta + r' = r.$$

Portanto todo $z \in B(y,\delta)$ também está em $B(x,r)$, ou seja, $B(y,\delta) \subset B(x,r)$ CQD.

Exemplo 8 *De forma semelhante, podemos provar que $B[x,r]$ é fechado para todo $r \geq 0$ (isto inclui o caso de $\{x\} = B[x,0]$). Para fazer isto mostraremos que $X \backslash B[x,r]$ é aberto. De fato, para qualquer $y \in X \backslash B[x,r]$ temos $\mathsf{d}(y,x) =: r' > r$, portanto, se $\delta := r' - r$, temos*

$$\forall z \in B(y,\delta) \, : \, \mathsf{d}(z,x) \geq \mathsf{d}(y,x) - \mathsf{d}(z,y) > r' - \delta = r,$$

o que implica $B(y,\delta) \subset X \backslash B[x,r]$. Como $\delta > 0$ e podemos encontrar o δ para qualquer $y \in X \backslash B[x,r]$, deduzimos que $X \backslash B[x,r]$ é aberto, de modo que $B[x,r]$ é fechado.

Exercício 10 *Prove que $\emptyset$ e X são ambos abertos e fechados.*

Exercício 11 *Prove que todos os subconjuntos de X são abertos se usamos a métrica discreta.*

Exercício 12 *Prove que os intervalos abertos e fechados de $\mathbb{R}$ são mesmo abertos e fechados.*

3.1 Uniões e interseções

Um dos fatos básicos sobre abertos é que qualquer união de abertos é aberta. Isto inclui uniões de um número infinito de conjuntos.

Proposição 2 *Seja $\mathcal{A}$ uma família de subconjuntos abertos de X. Então a união $\cup_{A \in \mathcal{A}} A$ é aberta.*

Prova: Suponha que $a \in \cup_{A \in \mathcal{A}} A$. Devemos provar que existe $\delta > 0$ tal que $B(a,\delta) \subset \cup_{A \in \mathcal{A}} A$. Para isto basta tomar um A tal que $a \in A$ (tem de existir, pois a pertence à união) e observar que, como este A é aberto, tem de existir $\delta > 0$ com $B(a,\delta) \subset A$. Como $A \subset \cup_{A \in \mathcal{A}} A$, isto também implica $B(a,\delta) \subset \cup_{A \in \mathcal{A}} A$, $\square$

Não pode valer um resultado análogo para interseções de um número infinito de abertos. Por exemplo, em $\mathbb{R}$, a família

$$\mathcal{A} := \{(-t, t) \,:\, t > 0\}$$

tem interseção $\{0\}$, que não é aberto. No entanto, vale que a interseção de um número *finito* de abertos é aberta.

Proposição 3 *Sejam $A_1, \ldots, A_m \subset X$ abertos. Então $\cap_{i=1}^m A_i$ é aberto.*

Prova: Se $a \in \cap_{i=1}^m A_i$, temos que $a \in A_i$ para cada i. Como estes conjuntos são abertos, existem $\delta_1, \ldots, \delta_m > 0$ tais que $B(a, \delta_i) \subset A_i$, $1 \leq i \leq m$. Mas então

$$\delta := \min\{\delta_1, \ldots, \delta_i\} > 0$$

é tal que

$$\forall 1 \leq i \leq m \,:\, B(a, \delta) \subset A_i,$$

o que implica $B(a, \delta)] \subset \cap_{i=1}^m A_i$. $\square$

Nos exercícios a seguir, é bom lembrar que um conjunto é fechado se e somente se tem complementar aberto.

Exercício 13 *Mostre que qualquer interseção de conjuntos fechados é fechada. Prove ainda que a união de um número finito de conjuntos fechados resulta em outro conjunto fechado.*

3.2 Caracterizando os fechados via limites

Nas definições acima definimos *fechado* em função de *aberto*. Grosso modo, chamaremos de *topológicos* todos os resultados e definições que forem feitos a partir dos conjuntos abertos. Deste modo, a própria definição de fechado é topológica.

A nossa definição de aberto é *métrica* (isto é, depende de d); damos abaixo uma formulação métrica para os conjuntos fechados.

Proposição 4 *$F \subset X$ é fechado se e somente se $\lim_n x_n \in F$ para toda sequência convergente $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset F$.*

Prova: Como a definição de fechado é em função da de aberto, temos de recorrer a $A := X \backslash F$. O que a proposição diz é:

$$A \text{ é aberto } \Leftrightarrow \text{ toda seq. convergente } \{x_n\}_n \subset X \backslash A \text{ tem limite em } X \backslash A.$$

Vamos provar primeiro a direção "$\Rightarrow$". Supondo que A é aberto, seja $\{x_n\}_n$ qualquer sequência convergente contida em $X\backslash A$ e seja $x = \lim_n x_n$. Fixando $y \in A$, mostraremos que $x \neq y$; o fato de que y pode ser qualquer elemento de A implica $x \notin A$, como desejado. Fixe então $y \in A$. Como A é aberto, $\exists r > 0 : B(y,r) \in A$. Por outro lado, como $x_n \notin A$ para todo n, temos:

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n \notin B(y,r), \text{ isto é, } \mathsf{d}(x_n, y) \geq r.$$

O exercício 7 nos mostra que a função $\mathsf{d}_X(\cdot, y)$ é contínua. Como $x_n \to x$, isto implica que $\mathsf{d}(x_n, y) \to \mathsf{d}(x, y)$. Pelas propriedades do limite de números reais, isto nos diz que $d(x,y) \geq r > 0$.

Para terminar a prova, mostraremos que, se A *não é aberto*, então $\exists \{x_n\} \subset F$ com $\lim_n x_n \in A$. De fato, se A não é aberto, então existe $z \in A$ com $B(z,r) \not\subset A$ para todo $r > 0$. Isto quer dizer que a bola aberta $B(z,r)$ sempre tem pelo menos um elemento de $F = X\backslash A$. Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos escolher um elemento

$$x_n \in F \cap B(z, 1/n).$$

Afirmamos que a sequência $\{x_n\}$ converge a z. De fato, para provar isto, basta mostrar que $\mathsf{d}(x_n, z) \to 0$ (ver exercício 4). Para isto, observe que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathsf{d}(x_n, z) \geq a_n := 0$ e

$$\mathsf{d}(x_n, z) \leq b_n := 1/n, \text{ já que } x_n \in B(z, 1/n).$$

Portanto, a sequência $\{\mathsf{d}(x_n, z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ está "sanduichada" entre duas sequências $a_n, b_n \to 0$, o que significa $\mathsf{d}(x_n, z) \to 0$.

Vamos agora concluir a prova observando o que fizemos. Nossa missão era provar que, se A não é aberto, existe uma sequência $\{x_n\}_n \subset F$ convergindo a $z \notin F$. Veja que, de fato, a sequência $\{x_n\}_n$ que acabamos de construir só tem elementos de F; por outro lado, $z = \lim_n x_n \in A = X\backslash F$; portanto, missão cumprida. $\square$

3.3 Continuidade, abertos e fechados

Nosso objetivo nesta seção é apresentar a ideia de continuidade de forma topológica, ao invés da forma métrica (via limites) que já mostramos acima. Na prova da equivalência a seguir, veremos ainda uma outra definição métrica de continuidade.

Recorreremos a uma notação que será muito usada no que segue: dados $f : X \to Y$ e $S \subset Y$,

$$f^{-1}(S) := \{x \in X : f(x) \in S\}.$$

Exercício 14 *Mostre que*

$$f^{-1}(S \cup R) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(R),\ f^{-1}(S \cap R) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(R)$$

e

$$f^{-1}(S \backslash R) = f^{-1}(S) \backslash f^{-1}(R).$$

Teorema 1 *Sejam* (X, d_X) *e* (Y, d_Y) *espaços métricos. Dada* $f : X \to Y$, *as seguintes afirmações são equivalentes.*

1. f *é contínua, isto é, se* $\{x_n\}_n \cup \{x\} \subset X$ *e* $x_n \to x$ *(segundo a métrica* d_X*), então* $f(x_n) \to f(x)$ *(segundo a métrica* d_Y*).*

2. *Para qualquer* $F \subset Y$ *fechado em* Y, $f^{-1}(F) \subset X$ *é fechado em* X.

3. *Para qualquer* $A \subset Y$ *aberto,* $f^{-1}(A) \subset X$ *é aberto.*

4. *Para todos* $x \in X$ *e* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que:*

$$\forall x' \in X \ : \text{“}\mathsf{d}_X(x, x') < \delta\text{”} \Rightarrow \text{“}\mathsf{d}_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon\text{”}.$$

Prova: **Passo** 1 $\Rightarrow$ 2**.** Tome f contínua e $F \subset Y$ fechado. Tome uma sequência convergente $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset f^{-1}(F)$ com limite $x \in X$; nosso objetivo é provar que $x \in f^{-1}(F)$, ou seja, que $f(x) \in F$. Mas isto é simples, já que $f(x_n) \to f(x)$ (por continuidade), $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ (já que $x_n \in f^{-1}(F)$ para cada n) e F é fechado (de modo que o limite de qualquer sequência convergente em F também está em F).
Passo 2 $\Rightarrow$ 3**.** Vem do exercício anterior à prova juntamente com o fato de que A é aberto se e somente se $X \backslash A$ é fechado.
Passo 3 $\Rightarrow$ 4**.** Fixos $\varepsilon > 0$ e $x \in X$, vamos encontrar o δ desejado. Para fazer isto observe que a bola $B_Y(f(x), \varepsilon) \subset Y$ é um aberto de Y, de modo que (pelo item 3) $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ é aberto. Como $f(x) \in B(f(x), \varepsilon)$, x é um elemento do aberto $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$; pela definição de aberto, isto implica que $\exists \delta > 0$ tal que $B_X(x, \delta) \in f^{-1}(B(f(y), \varepsilon))$. Isto quer dizer que, para todo $x' \in B(x, \delta)$ – ou seja, todo $x' \in X$ com $\mathsf{d}_X(x, x') < \delta$ – temos $f(x') \in B(f(x), \varepsilon)$ – ou seja, $\mathsf{d}_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Em outras palavras, o δ que apresentamos é precisamente o que tínhamos de encontrar.
Passo 4 $\Rightarrow$ 1**.** Suponha que $x_n \to x$ em X; nosso objetivo é provar que $\lim_n f(x_n) = f(x)$, ou seja, que dado $\varepsilon > 0$ existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$\mathsf{d}_Y(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$ se $n \geq n_0$. Para isto, fixamos $\varepsilon > 0$ e achamos o n_0 correspondente. Pelo item 4 podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $\mathsf{d}_X(x', x) < \delta$ implica $\mathsf{d}_Y(f(x'), f(x)) < \varepsilon$. Como $x_n \to x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathsf{d}_X(x_n, x) < \delta$ sempre que $n \geq n_0$. Mas então temos $\mathsf{d}_Y(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$ sempre que $n \geq n_0$. Ou seja, este n_0 assegura a propriedade desejada. □

3.4 Fechos, interiores e pontos de acumulação

Vamos definir aqui algumas outras noções topológicas e fazer alguns comentários sobre elas. Novamente (X, d) é um espaço métrico.

Definição 6 *O interior de $S \subset X$, denotado por S^o, é definido por:*

$$S^o := \bigcup_{A \subset S \,:\, A \text{ aberto}} A.$$

O fecho de S é:

$$\overline{S} := \bigcap_{F \supset S \,:\, F \text{ fechado}} F.$$

Note que o interior é um aberto (proposição 2) e o fecho é um fechado (exercício 13). Propriedades sinples de conjuntos mostram o seguinte.

Exercício 15 *Mostre que o complementar do fecho de S é o interior do complementar de S.*

Exercício 16 *Prove que $x \in S^o$ se e somente se $B(x, \delta) \subset S$ para algum $\delta > 0$.*

Proposição 5 *Se $S \neq \emptyset$, $\overline{S} = \{x \in X \,:\, \mathsf{d}(x, S) = 0\}$.*

Prova: Defina $F = \{x \in X \,:\, \mathsf{d}(x, S) = 0\}$. Recorde que $x \mapsto d(x, S)$ é função contínua. Portanto, a pré imagem de $\{0\}$, que é precisamente F, é fechada, já que $\{0\} \subset \mathbb{R}$ é fechado. Como $\overline{S}$ está contido em qualquer fechado contendo S, e ainda $S \subset F$ claramente, temos $\overline{S} \subset F$.

Por outro lado, se x satisfaz $d(x, S) = \delta > 0$ (ou seja, $x \notin F$), isto quer dizer que a bola $B(x, \delta/2)$ não pode interceptar S. Desta forma vemos que $x \notin \tilde{F}$ e $S \subset \tilde{F}$, onde $\tilde{F} := X \backslash B(x, \delta/2)$ é fechado. Deduzimos que,

$$x \notin F \Rightarrow \exists \tilde{F} \text{ fechado}, \tilde{F} \supset S \text{ com } x \notin \tilde{F}.$$

Como $\tilde{F} \supset \overline{S}$, isso quer dizer que $x \notin F \Rightarrow x \notin \overline{S}$. Isto quer dizer que $\forall x : x \in \overline{S} \Leftrightarrow x \in F$, ou seja, $\overline{S} = F$. □

Definição 7 *O conjunto de pontos de acumulação de $S \subset X$, denotado por S' é o conjunto que contem como elementos os $x \in X$ tais que, para todo $r > 0$, $B(x, r) \cap S$ contem um elemento diferente de x.*

Exercício 17 *Mostre que $\mathbb{N}' = \emptyset$ e $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ (como subconjuntos de $\mathbb{R}$).*

3.5 Como são os abertos de $\mathbb{R}$?

Em princípio é impossível dar uma "cara" aos abertos de um espaço métrico. Apesar desta dificuldade geral, o teorema a seguir mostra que em $\mathbb{R}$ é possível descrever os abetos de forma bastante direta.

Teorema 2 *Todo conjunto aberto de $\mathbb{R}$ que não é vazio pode ser escrito como a união de um número enumerável de intervalos abertos disjutos.*

Observe que esta é uma caracterização completa, já que os intervalos abertos são mesmo abertos e toda união de abertos é aberta.
Prova: A ideia da prova será, em primeiro lugar, achar pra cada $q \in A$ racional, o *maior* intervalo aberto I_q tal que $q \in I_q \subset A$. Depois veremos que cada $x \in A$ está em um destes intervalos. Depois disto teremos de mostrar que podemos selecionar intevalos disjuntos entre eles.

Passo 1 - construção dos intervalos. Dado $q \in \mathbb{Q} \cap A$, definimos I_q como a união de todos os intervalos abertos contidos em A que têm q como elemento. Mais exatamente, definimos

$$\mathcal{I}_q := \{I \subset A \,:\, q \in I,\ I \text{ intervalo aberto } \} \text{ e } I_q := \bigcup_{I \in \mathcal{I}_q} I.$$

Note que a família $\mathcal{I}_q$ contem pelo menos um intervalo ao redor de q porque $q \in A$ e A é aberto. Já vimos no primeiro teste que a união de intervalos *contidos em* $[0, 1]$ com interseção não vazia é intervalo; a mesma prova funciona se os intervalos são ilimitados, contanto que permitamos sup e inf infinitos. Deste modo, I_q é um intervalo. Além disto, como I_q é a união de conjuntos abertos, ele também é aberto. Portanto, $I_q \neq \emptyset$ é um intervalo aberto que está contido em A.

Passo 2 - intervalos disjuntos. Considere a família de intervalo

$$\mathcal{V} := \{I_q \,:\, q \in A \cap \mathbb{Q}\}.$$

Esta família é enumerável porque pode ser escrita como a união enumerável dos conjuntos unitários $\{I_q\}$ (a união é enumerável porque $\mathbb{Q}$ é). Afirmamos que quaisquer intervalos distintos nesta família são disjuntos. De fato, considere $I_q, I_r \in \mathcal{V}$ com $I_q \cap I_r \neq \emptyset$. O argumento já usado no passo anterior nos diz que $I_q \cap I_r$ é intervalo aberto. Ao mesmo tempo, $I_q \cup I_r \subset A$ (pois cada intervalo está contido em A) e $q \in I_q \cup I_r$. Portanto $I_q \cup I_r$ é um intervalo da coleção $\mathcal{I}_q$ definida acima. Segue que:

$$I_q \cup I_r \subset \bigcup_{I \in \mathcal{I}_q} I = I_q.$$

Como claramente $I_q \subset I_q \cup I_r$, temos $I_q = I_q \cup I_r$. Do mesmo modo podemos concluir que $I_r = I_q \cap I_r$ e portanto $I_q = I_r$.

Passo 3 - fim da prova. Falta apenas mostrar que a união dos I_q's é A. De fato, como cada $I_q \subset A$, a união está contida em A, e falta mostrar que $A \subset \cup_{I_q \in \mathcal{V}} I_q$. Isto é, precisamos mostrar que cada $x \in A$ está num dos I_q's. Mas isto é simples, pois sabemos que um dado $x \in A$ está num intervalo $J = (x - \delta, x + \delta) \subset A$. Necessariamente J contem um elemento $q \in \mathbb{Q}$, que pertence a A porque $q \in J$ e $J \subset A$. Vemos então que $J \in \mathcal{I}_q$, de modo que $J \subset \cup_{I \in \mathcal{I}_q} I = I_q$, logo $x \in I_q$. $\square$

3.6 Mais exercícios

Exercício 18 (Acrescentado em 28/01/2014) *Seja (X, d_X) um espaço métrico completo e considere um subconjunto $Y \subset X$, $Y \neq \emptyset$. Prove que Y é fechado se e somente se é um espaço métrico completo com a métrica d_Y obtida por restrição de d_X.*

4 Conjuntos conexos

Nesta seção (X, d_X) é um espaço métrico fixo.

Intuitivamente, um conjunto em um espaço métrico é conexo se não há nenhuma maneira de dividir seus elementos em dois conjuntos dicotômicos e bem separados. A definição abaixo é uma maneira formal de desenvolver esta ideia.

Definição 8 *Dado $Y \subset X$, uma cisão de Y é um par de conjuntos $L, R \subset X$ com $Y = L \cup R$, $\overline{L} \cap R = \emptyset$ e $\overline{R} \cap L = \emptyset$. Esta cisão é dita trivial se $L = \emptyset$ (e portanto $R = Y$) ou $R = \emptyset$ (e então $L = Y$). Dizemos que Y é conexo se as únicas cisões possíveis de Y são triviais. Y é desconexo se não é conexo.*

No final desta seção, veremos que esta definição tem a ver com o comportamento de funções contínuas sobre Y. Mais precisamente, mostraremos que Y é conexo se e somente se a imagem de Y por qualquer função contínua $f : Y \to \mathbb{R}$ é um intervalo. Isto é típico de resultados topológicos: eles nos dão uma informação relevante sobre funções contínuas gerais, sem especificar exatamente como cada função se comporta.

Exercício 19 *Considerando o caso particular em que $Y = X$, mostre que, em qualquer cisão temos $\overline{L} = L$ e $\overline{R} = R$, de modo que L e R são simultaneamente abertos e fechados em X. Deduza que X é conexo se e somente se os únicos conjuntos simultaneamente abertos e fechados em X são $\emptyset$ e o próprio X.*

Esta é uma definição topológica. Observe que nossas condições implicam $L \cap R = \emptyset$; as condições sobre o fecho implicam que os conjuntos L e R são separados. O estudo das propriedades da conexidade usará a seguinte propriedade.

Proposição 6 *Dados conjuntos $L, R \subset X$, $\overline{L} \cap R = \emptyset$ se e somente se toda sequência $\{x_n\}_n \subset$ com $x_n \to x \in R$ tem a propriedade de que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ com $x_n \notin L$ para todo $n \geq n_0$.*

Prova: Seja $A := X \backslash \overline{L}$. Como $\overline{L}$ é fechado, A é aberto. Veja que $\overline{L} \cap R = \emptyset$ se e somente se $R \subset A$. Portanto, se $x_n \to x \in R \subset A$, podemos encontrar $\delta > 0$ com $B_X(x, \delta) \subset A$ e então tem de existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq n_0 \, : \, \mathsf{d}_X(x_n, x) < \delta, \text{ isto é, } x_n \in B_X(x, \delta) \subset A.$$

Por outro lado, suponha que toda sequência $\{x_n\}_n \subset$ com $x_n \to x \in R$ tem a propriedade de que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ com $x_n \notin L$ para todo $n \geq n_0$. Como os elementos do fecho são precisamente aqueles que são limites de sequências contidas em L, vemos que *nenhum R pode pertencer ao fecho de L*, isto é, $R \cap \overline{L} = \emptyset$. $\Box$

4.1 Conexidade e funções contínuas

Imagine que Y é conexo e pintamos seus elementos com duas cores. Intuitivamente, como Y é conexo, os conjuntos com as duas cores não podem ser bem divididos: tem de existir uma "região de fronteira" onde há uma passagem abrupta de uma cor a outra. Dito de outro modo, a função que atribui cada ponto a sua cor tem de ser *descontínua*. A única forma de evitar este problema seria *não utilizar uma das cores*. O teorema a seguir transforma isto num critério para conexidade que aplicaremos algumas vezes a seguir.

Teorema 3 *$Y \subset X$, $Y \neq \emptyset$ é conexo se e somente se toda função contínua $f : Y \to \{0, 1\}$ é constante. (Usamos a métrica discreta em $\{0, 1\}$.)*

Prova: A ideia é que há uma correspondência 1 a 1 entre as funções conínuas $f : Y \to \{0, 1\}$ e as cisões $Y = L \cup R$; basta tomar $L = f^{-1}(\{0\})$ e $R = f^{-1}(\{1\})$ e vice-versa. De fato, vamos ver que *se $f : Y \to \{0, 1\}$ é uma função dada, f é contínua se e somente se $L := f^{-1}(\{0\}), R := f^{-1}(\{1\})$ é cisão.* Para provar isto, lembramos que:

$$f \text{ é contínua } \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_n \cup \{x\} \subset Y,\, x_n \to x \text{ implica } f(x_n) \to f(x)$$

No entanto, a métrica no contradomínio de f é discreta, de modo que $f(x_n) \to f(x)$ se e somente se $f(x_n) = f(x)$ para todo n grande. Isto é,

$$f \text{ é contínua } \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_n \cup \{x\} \subset Y,\, x_n \to x \text{ implica } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 f(x_n) = f(x).$$

Traduzindo em termos de L e R, pedir que f seja contínua equivale a pedir que, se $x \in R$, então $x_n \in R$ para todo $n \geq n_0$ enquanto que, se $x \in L$, então $x_n \in L$ para todo $n \geq n_0$. A Proposição 6 mostra que isto ocorre se e somente se $L \cup R$ é uma cisão.

Para terminar a prova, notamos que a função f é constante se e somente se a cisão correspondente L, R é trivial (ou seja, um dos conjuntos é vazio). $\square$

Uma aplicação muito importante do Teorema é que a imagem de conjuntos conexos por funções contínuas é sempre conexa.

Proposição 7 *Sejam (X, d_X) e (Z, d_Z) espaços métricos. Se $f : X \to Z$ é contínua e $Y \subset X$ é conexo, então $f(Y)$ é conexa.*

Prova: Chame de S a imagem de f. Considere uma função $g : S \to \{0, 1\}$ contínua. Como f é contínua e Y é conexo, $g \circ f$ é constante sobre Y. Ou seja:

$$\forall x, x' \in Y \,:\, g(f(x)) = g(f(x')).$$

Os elementos de S são precisamente os pontos da forma $f(x)$ com $x \in X$. Deduzimos que:

$$\forall s, s' \in S \,:\, g(s) = g(s')$$

ou seja, toda função contínua $g : S \to \{0, 1\}$ é constante. Portanto S também é conexo. $\square$

O teorema também dá condições suficientes para que uma união de conjuntos seja conexa. Intuitivamente é claro que, quando unimos conjuntos conexos S, R, só é possível produzir um conjunto *desconexo* se não há um ponto comum de S e R. O Lema a seguir mostra uma versão mais geral disto.

Lema 1 *Considere um espaço métrico (X, d_X) e uma família $\mathcal{F} \neq \emptyset$ de subconjuntos de X que não são vazios. Suponha que $V \cap W \neq \emptyset$ para quaisquer $V, W \in \mathcal{F}$. Então $S := \cup_{V \in \mathcal{F}} V$ é conexo.*

Prova: Seja $f : S \to \{0, 1\}$ uma função contínua. Nosso objetivo é provar que f é constante.

Para este fim, notamos primeiramente que a restrição de f a cada conjunto $V \in \mathcal{F}$ função contínua. Em particular, como cada V é conexo (por hipótese), $f|_V$ é constante. Isto é, para todo $V \in \mathcal{F}$ existe um $b_V \in \{0, 1\}$ tal que $f(x) = b_V$ para todo $x \in V$.

Vamos provar que todos os b_V's são iguais. De fato, se tomamos $V \neq W$ elementos de $\mathcal{F}$, sabemos (por hipótese) que existe um elemento $x \in V \cap W$; portanto $b_V = b_W = f(x)$.

O que concluímos é que f é constante em cada conjunto $V \in \mathcal{F}$ e que os valores tomados por f nestes conjuntos são todos iguais. Isto implica que f é constante sobre todo $S = \cup_{V \in \mathcal{F}} V$. $\square$

Exercício 20 *Prove que, no teorema anterior, podemos pedir apenas que $\mathcal{F}$ seja* irredutível*, o que quer dizer que, se $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ é uma subfamília com $\mathcal{A} \neq \emptyset, \mathcal{F}$, então existem $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{F} \backslash \mathcal{A}$ com $A \cap B \neq \emptyset$.*

4.2 Os conjuntos conexos de $\mathbb{R}$ são os intervalos

A seguir será extremamente importante termos uma caracterização dos conjuntos conexos de $\mathbb{R}$. Por sorte, esta não é uma tarefa difícil.

Teorema 4 *Os subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ que não são vazios são precisamente os intervalos.*

Este teorema terá algumas consequências importantes, que veremos mais adiante.

Prova: Lembre que $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ é intervalo se e somente se $(\inf E, \sup E) \subset E$.

Não é intervalo $\Rightarrow$ não é conexo. Vamos supôr primeiramente que E *não é intervalo* e provar que ele tem uma cisão que não é trivial. Como E não é intervalo, existe $x_0 \in (\inf E, \sup E)$ que não pertence a E. Podemos tomar $L = E \cap (-\infty, x)$ e $R = E \cap (x, +\infty)$ e observar que:

$$\overline{L} \cap R = \emptyset \text{ porque } \overline{L} \subset (-\infty, x] \text{ e } R \cap (-\infty, x] = \emptyset.$$

Um argumento semelhante mostra que $\overline{R} \cap L = \emptyset$. Além disto, E tem de conter elementos em $[\inf E, x)$ e $(x, \sup E]$, portanto $L, R \neq \emptyset$. Deduzimos que L, R é uma cisão de E que não é trivial.

É intervalo $\Rightarrow$ é conexo. Observe que todo intervalo é união de intervalos fechados limitados que contêm um ponto em comum [exercício]. Portanto, basta provar este resultado no caso em que $E = [a, b]$ com $-\infty < a \leq b < +\infty$ (v. Lema 1).

Para isto vamos tomar uma $f : [a, b] \to \{0, 1\}$ contínua e supôr (para chegar a uma contradição) que que f não é constante. Tome então $a \leq x_1 < y_1 \leq b$ com $f(x_1) \neq f(y_1)$. Vamos definir $x_2, y_2, x_3, y_3, \dots$ com $a \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$, $b \geq y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq \dots$ e $f(x_n) \neq f(y_n)$ para todo n, mas $y_n - x_n \to 0$. Faremos isto usando o "velho truque" de dividir o intervalo $[x_n, y_n]$ em 2 e notar que o ponto médio do intervalo tem valor de f diferente de um dos dois extremos. Disto poderemos deduzir que:

- $x_n \to x$ (pois é não descrescente e limitada);
- $y_n \to x$ (pois $|y_n - x_n| = y_n - x_n \to 0$;
- mas $|f(y_n) - f(x_n)| = 1$ para todo n, pois $f(x_n), f(y_n) \in \{0, 1\}$ e $f(x_n) \neq f(y_n)$.

O resultado será que $0 = |f(x) - f(x)| =\neq \lim_n |f(x_n) - f(y_n)|$, o que contradiz a premissa de que f não é constante.

O argumento é bem simples. Já definimos x_1 e y_1 acima. Suponha que $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ já foram definidos de forma que $x_i \leq y_i$, $y_i - x_i = 2^{1-i}(y_1 - x_1)$ e $f(y_i) \neq f(x_i)$ para cada $1 \leq i \leq n$. Note que o ponto médio $z_n = (x_n + y_n)/2$ pertence a $[a, b]$ e uma das possibilidades abaixo vale:

1. $f(z_n) \neq f(x_n)$. Neste caso tomamos $x_{n+1} = x_n$, $y_{n+1} = z_n$.
2. $f(z_n) = f(x_n)$. Como $f(x_n \neq f(y_n)$, temos $f(z_n) \neq f(y_n)$ e podemos tomar $x_{n+1} = z_n$, $y_{n+1} = y_n$.

Claramente, $f(x_{n+1}) \neq f(y_{n+1})$, $x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n$ e $y_{n+1} - x_{n+1} = (y_n - x_n)/2$. É fácil deduzir disto que valem as propriedades desejadas. $\square$

4.3 Aplicações

O teorema a seguir é um dos mais importantes de todo o cálculo.

Teorema 5 (Teorema do valor intermediário) *Seja $I \neq \emptyset$ um intervalo de $\mathbb{R}$. Então a imagem de I por f é intervalo. Em particular*

$$\forall a, b \in I \ \text{ com } f(a) \leq f(b),\, \forall c \in [f(a), f(b)]\, \exists x \in I \, : \, f(x) = c.$$

O "em particular" é consequência do fato que $f(a), f(b) \in f(I)$ e que $f(I)$ é intervalo, logo todo ponto $c \in [f(a), f(b)]$ está na imagem de I. Note que este teorema segue da Proposição 7 combinada com o Teorema 4. Também podemos provar este teorema diretamente a partir do argumento de bisseção de intervalo usado na prova do Teorema.

De qualquer modo, o que já vimos permite provar resultados muito mais gerais.

Definição 9 *Dado (X, d_X), $Y \subset X$ é dito conexo por caminhos se dados quaisquer $a, b \in Y$ existe uma função contínua $\gamma : [0,1] \to Y$ (uma "curva") com $\gamma(0) = a$ e $\gamma(1) = b$.*

Exercício 21 *Mostre que qualquer bola aberta ou fechada em $\mathbb{R}^d$ é conexa por caminhos.*

Exercício 22 *Suponha que $C \subset \mathbb{R}^d$ é convexo, isto é, $\forall x, y \in C$ e $0 < t < 1$ temos que $t\,x + (1-t)\,y \in C$. Prove que C é conexo por caminhos.*

Teorema 6 *Um conjunto conexo por caminhos é conexo. Qualquer imagem de um conjunto conexo por caminhos por uma função contínua é também conexa por caminhos, logo conexa.*

Prova: Suponha que (X, d_X) é dado e $Y \subset X$ é conexo por caminhos. Vamos mostrar que Y é conexo tomando uma $f : Y \to \{0,1\}$ contínua e mostrando que f é constante.

Se $a, b \in Y$ e $\gamma : [0,1] \to Y$ é uma curva ligando $\gamma(0) = a$ a $\gamma(1) = b$, vemos que $f \circ \gamma : [0,1] \to \{0,1\}$ é contínua. Como $[0,1]$ é intervalo (logo conexo), $f \circ \gamma$ é constante, emm partcular

$$f(a) = f(\gamma(0)) = f(\gamma(1)) = f(b).$$

Como quaisquer $a, b \in Y$ são ligados por uma curva, deduzimos que $f(a) = f(b)$ para todos $a, b \in Y$, portanto f é constante. O fato de que a imagem de conexo por caminhos também é conexo por caminhos é um exercício. $\square$

Exercício 23 *Prove que $Y \subset X$, $Y \neq \emptyset$ é conexo se e somente se $f(Y)$ é intervalo para toda $f : Y \to \mathbb{R}$ conínua. [Dica: o "somente se" já está provado. O "se"resulta do fato de que um intervalo $I \subset \{0,1\}$ só pode conter um ponto.]*

5 Conjuntos compactos

Esta parte ainda vai passar por alterações bem grandes.

Muitos problemas em Matemática Pura e Aplicada podem ser postos na forma de problemas de minimização.

> *Dado um conjunto S e uma função $f : S \to \mathbb{R}$, encontre $s_* \in S$ tal que $f(s_*) \leq f(s)$ para todo $s \in S$.*

Por exemplo: os problemas de achar o mínimo de uma função $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, de achar a curva de menor comprimento ligando dois pontos em uma superfície e de achar uma superfície mínima para um contorno dado têm todos esta forma.

Nem todo problema desta forma tem solução. Por exemplo, a função $f(x) = -1/x$ não atinge um valor mínimo no domínio $S = (0, +\infty)$. Definiremos um conjunto como *compacto* se este problema não ocorre quando f é contínua.

Definição 10 *Um espaço métrico (K, d_K) é dito compacto se para toda $f : K \to \mathbb{R}$ contínua existe um $x_* \in K$ tal que $f(x_*) = \inf_{x \in K} f(x)$. Se $K \subset X$, dizemos que K é compacto (e escrevemos $K \subset\subset X$) se K é compacto (na acepção anterior) com a métrica induzida por X.*

Veremos nesta seção que os espaçcompactos têm uma teoria extremamente rica tanto do ponto de vista métrico quanto do ponto de vista topológico.

5.1 Compactos são completos

Começamos com o fato de que todo compacto é completo do ponto de vista métrico.

Teorema 7 *Se (K, d_K) é compacto, ele é um espaço métrico completo.*

Antes da prova, observe que o teorema implica que todo $K \subset\subset X$ é subconjunto fechado de X (v. exercício 18).

Prova: Vamos provar que *se K não é completo, então não é compacto.* Suponha então que existe $\{x_n\}_n \subset K$ que é Cauchy, mas não converge (em K). Nossa *intuição* é de que existe em algum "universo maior" um limite para esta sequência, dado por um $x_* \notin K$. A função $f : K \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \mathsf{d}(x, x_*)$ é contínua e sempre positiva (já que $x_* \notin K$), mas toma valores arbitrariamente pequenos ao longo da sequência. Isto quer dizer que $\inf_{x\in K} f(x) = 0$, mas não há ponto atingindo este valor.

Evidentemente, o que descrevemos acima é só intuição. A rigor o x_* não existe. No entanto, *se ele existisse*, teríamos $\mathsf{d}(x, x_*) = \lim \mathsf{d}(x, x_n)$ para todo n. Mostraremos que este limite faz sentido de qualquer forma e o usaremos para definir uma f contínua que não atinge seu ínfimo. Eis os passos formais.

Passo 1 - definindo uma f. Notamos primeiramente que para todo $x \in K$ existe o limite:

$$f(x) := \lim_n \mathsf{d}_K(x_n, x) \in \mathbb{R}.$$

Isto segue do fato que $\{\mathsf{d}_K(x_n, x)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é Cauchy, que provamos a seguir. Veja primeiramente que, pela desigualdade triangular,

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \forall x \in K \,:\, |\mathsf{d}_K(x_n, x) - \mathsf{d}_K(x_m, x)| \leq \mathsf{d}_K(x_n, x_m)$$

O fato que $\{x_n\}_n$ é Cauchy implica que para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que o lado direito acima é $< \varepsilon$ para $n, m \geq n_0$. Deste modo, dado $\varepsilon > 0$ existe um n_0 tal que

$$\forall m, n \geq n_0 \, \forall x \in K \,:\, |\mathsf{d}_K(x_n, x) - \mathsf{d}_K(x_m, x)| < \varepsilon.$$

Isto é precisamente a afirmação de que $\{\mathsf{d}_K(x_n, x)\}_n$ é Cauchy para todo x.

Passo 2 - o ínfimo de f é 0, mas $f(x) > 0$ para todo x. Veja primeiramente que $f(x) > 0$ para todo $x \in K$. De fato, f é sempre não negativa (pois é limite de termos não negativos) e $f(x) = 0$ implicaria $d(x_n, x) \to 0$, ou seja, $x_n \to x$ (contradição com o fato de que x_n não converge).

Falta mostrar que $\inf_{x\in K} f(X) = 0$. Para isso primeiro fixamos $\varepsilon > 0$. Vamos observar que, tomando n_0 como acima:

$$\forall m, n \geq n_0 \,:\, d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Tomando o limite quando $m \to +\infty$ vemos que $f(x_n) \leq \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Logo $\inf_{x \in K} f(x) \leq \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, isto quer dizer que $\inf_{x \in K} f(x) \leq 0$. Como já vimos, f nunca toma valores negativos, e disto deduzimos $\inf_{x \in K} f(x) = 0$.

Passo 3 - f é contínua. Observe que este passo termina a prova pois ele implica que f é contínua e $f(z) \neq \inf_{x \in K} f(x)$ para todo $z \in K$, o que mostra que K *não é compacto* pela nossa definição. Vamos provar na verdade que f é 1-Lipschitz (v. exercício 6). Isto é bastante dieto: dados $x, x' \in K$, a desigualdade triangular nos diz que

$$\forall n \in \mathbb{N} \mathsf{d}(x, x_n) \leq \mathsf{d}(x', x_n) + \mathsf{d}(x, x')$$

e tomando limites obtemos

$$f(x) \leq f(x') + \mathsf{d}(x, x').$$

Trocando os papeis de x e x' descobrimos que $|f(x) - f(x')| \leq \mathsf{d}(x, x')$. Como $x, x' \in K$ são arbitrários, isto nos dá o resultado desejado. $\Box$

5.2 Compactos são totalmente limitados

Vimos acima que todo conjunto compacto é completo. A recíproca não é verdadeira, como mostra, por exemplo, o caso $K = \mathbb{R}$ (com a métrica usual). Nesta seção mostraremos que há uma propriedade extra que um compacto tem de satisfazer. De fato, vamos ver a seguir que ela é equivalente a compacidade se K é completo.

Definição 11 *Considere um espaço métrico (X, d_X). Um conjunto $S \subset X$ é* separado *se existe um $\delta > 0$ tal que $\mathsf{d}_X(s, s') \geq \delta$ para todos $s, s' \in S$, $s \neq s'$. Dizemos que (X, d_X) é* totalmente limitado *se ele não contem um conjunto infinito que é separado.*

Esta definição tem uma reformulação equivalente que será importante mais adiante.

Proposição 8 *Um espaço métrico (X, d_X) é totalmente limitado se e somente se vale a seguinte propriedade: para todo $\varepsilon > 0$ existe uma coleção finita de bolas abertas $B_X(x_i, \varepsilon)$, $1 \leq i \leq k$, com $X = \cup_{i=1}^k B_X(x_i, \varepsilon)$.*

Prova: Vamos provar primeiro que a existência da coleção de bolas implica que X é totalmente limitado. Fixe $\delta > 0$ e tome $\varepsilon = \delta/2$. Supondo $X \subset \cup_{i=1}^{k} B_X(x_i, \varepsilon)$, qualquer conjunto infinito $S \subset X$ tem de conter infinitos elementos em pelo menos uma das bolas $B_X(x_i, \varepsilon)$ (isto é o caso infinito do Princípio das Casas dos Pombos). Em particular, usando a desigualdade triangular, vemos que S obrigatoriamente possui infinitos pares de elementos a distância $< \delta$; de fato, dados $s, s' \in S \cap B_X(x_i, \varepsilon)$

$$\mathsf{d}_X(s, s') \leq \mathsf{d}_X(x_i, s) + \mathsf{d}_X(x_i, s') < \delta.$$

Como $\delta > 0$ é arbirtrário, deduzimos que qualquer conjunto infinito $S \subset X$ não é separado e portanto X é totalmente limitado.

Vamos provar agora a direção contrária. Fixe $\varepsilon > 0$. Supondo que *não existe uma coleção finita de bolas de raio $\varepsilon > 0$ cobrindo X*, vamos construir um conjunto separado infinito $S \subset X$. A construção é recursiva.

1. Escolha $x_1 \in X$ arbitrariamente.

2. Dados $x_1, \ldots, x_n \in X$, escolha x_{n+1} de modo que $\mathsf{d}_X(x_{n+1}, x_i) \geq \varepsilon$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Note que esta recursão faz sentido: sob a nossa hipótese, temos que para todo $n \in \mathbb{N}$ as bolas $B(x_1, \varepsilon), \ldots, B(x_n, \varepsilon)$ não cobrem X, portanto existe um $x_{n+1} \in X$ que não está em qualquer uma das bolas. É fácil verificar que o conjunto

$$S := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

é separado, já que a recursão garante $\mathsf{d}_X(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ quando $1 \leq i < j$. $\square$

Lema 2 *Todo espaço métrico compacto é totalmente limitado.*

Prova: Vamos mostrar que um espaço métrico (X, d_X) que *não é totalmente limitado* não pode ser compacto. Para isto partimos de um conjunto $S \subset X$ que é infinito e separado: $\mathsf{d}(s, s') \geq \delta$ para quaisquer elementos distintos $s, s' \in S$. Sem perda de generalidade, suporemos que S é enumerável e escreveremos $S = \{s_j : j \in \mathbb{N}\}$. Nosso *objetivo* será construir uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ com $\sup\{f(x) : x \in S\} = +\infty$. isto implica que X não é compacto porque a função contínua $-f$ não atinge seu ínfimo sobre X.

Defina $r := \delta/4 > 0$. Vamos começar a prova com a seguinte observação. Dado $x \in X$, existe no máximo um índice $j = j(x) \in \mathbb{N}$ com $\mathsf{d}(x, s_j) < 2r$.

A razão para isto é que, se houvesse outro índice $k \in \mathbb{N}$ com $\mathsf{d}(x, s_k) < 2r$, a desigualdade triangular implicaria

$$\mathsf{d}(s_j, s_k) \leq \mathsf{d}(x, s_j) + \mathsf{d}(x, s_k) < 4r = \delta,$$

o que contraria o fato de que a distância mínima entre elementos de S é δ.

Continuando, definimos, para cada $j \in \mathbb{N}$, uma função contínua $f_j : X \to \mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$f_j(x) := j \times \max\{r - \mathsf{d}(s_j, x), 0\} \ (x \in X).$$

Exercício 24 *Prove que f_j é mesmo contínua. [Dica: Primeiro prove que $x \mapsto \max\{x, 0\}$ é função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e depois aplique composições.]*

Agora vamos definir uma função $f : X \to \mathbb{R}$ da seguinte forma.

$$f(x) := \begin{cases} f_j(x) & \text{se } j \in \mathbb{N} \text{ é o único índice tal que } \mathsf{d}(x, s_j) < 2r; \\ 0 & \text{se não há } s_j \text{ com } \mathsf{d}(x, s_j) < 2r \end{cases}$$

Veja que f é ilimitada: de fato, para todo $j \in \mathbb{N}$ temos $f(s_j) = f_j(s_j) = j.r \to +\infty$ (pois $r > 0$). Portanto $\sup\{f(x) : x \in X\} = +\infty$. Falta mostrar que ela é contínua. Para isto, fixamos $\{x_n\}_n \cup \{x\} \subset X$ com $x_n \to x$; vamos provar que $f(x_n) \to f(x)$. Consideraremos dois casos.

- $\mathsf{d}(x, s_j) \geq 3r/2$ para todo j. Neste caso $f(x) = 0$, pois $f_j(x) = 0$ sempre que $\mathsf{d}(x, s_j) \geq r$. Por outro lado, observe que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $\mathsf{d}(x, x_n) < r/2$, o que implica que $\mathsf{d}(x_n, s_j) > r$ para todo $n \geq n_0$. Neste caso também $f_j(x_n) = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, donde segue que $f(x_n) = 0$ para $n \geq n_0$. Ou seja, $f(x_n) \to 0$ neste caso.

- $\mathsf{d}(x, s_j) < 3r/2$ para algum j. Neste caso, como observamos acima, $j = j(x) \in \mathbb{N}$ é o único índice com $\mathsf{d}(x, s_j) < 2r$; além disto, $f(x) = f_j(x)$. Observe que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ vale $\mathsf{d}(x, x_n) < r/2$, de modo que $\mathsf{d}(x_n, s_j) < 2r$ para todo $n \geq n_0$. Usando a definição de f, deduzimos

  $$n \geq n_0 \Rightarrow f(x_n) = f_j(x_n).$$

  Como f_j é contínua, $f_j(x_n) \to f_j(x) = f(x)$. A implicação acima nos diz que $f(x_n) \to f(x)$ neste caso.

□

5.3 O critério das subsequências convergentes

Nesta seção vamos mostrar que a compacidade de um espaço métrico pode ser avaliada a partir de subsequências.

Definição 12 *Dados um conjunto infinito $N \subset \mathbb{N}$ e uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, a subsequência $\{x_n\}_{n\in N}$ é definida da forma $\{\tilde{x}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ com $\tilde{x}_j := \{x_{n_j}\}$, onde $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ é a única enumeração crescente dos elementos de N. Também escrevemos $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ diretamente. Falamos que $\lim_{n\in N} x_n = x$ se $x_{n_j} \to x$ quando $j \to +\infty$.*

Exercício 25 *Mostre que $x_n \to x$ implica $x_{n_j} \to x$.*

A propriedade 3 do teorema é muitas vezes tomada como ponto de partida da definição de compacidade em espaços métricos. Como veremos abaixo, ela implica facilmente a nossa definição de compacidade (=funções contínuas atingem o ínfimo). Antes disto, veremos um exemplo de aplicação.

Teorema 8 *Considere um espaço métrico (K, d_K). As seguintes propriedades são equivalentes.*

1. *(K, d_K) é compacto.*
2. *(K, d_K) é completo e totalmente limitado.*
3. *Toda sequência em K possui uma subsequência convergente.*

Prova: [do Teorema 8] A implicação $1 \Rightarrow 2$ foi vista no Lema 2 acima. Vamos ver agora que $3 \Rightarrow 1$ e $2 \Rightarrow 3$.
Prova de $3 \Rightarrow 1$. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua. Vamos primeiramente supôr que $\ell := \inf\{f(x) : x \in K\} > -\infty$. Neste caso sabemos que para cara $n \in \mathbb{N}$ há um $x_n \in K$ com $\ell \leq f(x_n) \leq \ell + 1/n$; deste modo, $f(x_n) \to \ell$ quando $n \to +\infty$.

Agora observe que, pela propriedade 3, a sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente $\{x_n\}_{n\in N}$ com limite $x_* \in K$. Por continuidade, $f(x_*) = \lim_{n\in N} f(x_n)$. Mas veja que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é subsequência de $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, logo

$$\lim_{n\in N} f(x_n) = \lim_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) = \ell = \inf\{f(x) : x \in K\}.$$

Portanto $f(x_*) = \inf$.

Falta mostrar que não é possível ter $\ell = -\infty$. Para provar isto, vamos supôr que $\ell = -\infty$. Neste caso, podemos construir x_n com $f(x_n) < -n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que $\lim_n f(x_n) = -\infty$. Um argumento semelhante ao que demos acima nos mostraria que uma subsequência dos x_n converge a um $x_* \in K$; mas então $f(x_*) = \lim_{n\in N} f(x_n)$, o que contradiz o fato de que $f(x_n) \to -\infty$.

Prova de que $2 \Rightarrow 3$. Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$. Nosso *objetivo* será provar que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência de Cauchy. Como (K, d_K) é completo, isto basta para provar que sempre há uma subsequência convergente.

Não é muito simples achar esta subsequência, então vamos começar com o resultado mais fraco que apenas garante o seguinte: sempre há uma subsequência "apertadinha".

Afirmação 1 *Dado qualquer* $r > 0$ *existe uma subsequência* $\{x_n\}_{n\in N}$ *tal que* $\forall m, n \in N$, $\mathsf{d}_K(x_m, x_n) < r$.

De fato, como estamos supondo que K é totalmente limitado, a Proposição 8 nos diz que podemos cobrir K por um número finito de bolas de raio $r/2$. Como o número de bolas é finito, uma das bolas, que chamaremos de $B(z, r/2)$, é tal que o conjunto

$$N := \{n \in \mathbb{N} \,:\, x_n \in B(z, r/2)\}$$

é *infinito*, e um argumento simples mostra que $\{x_n\}_{n\in N}$ tem a propriedade desejada.

O que vem a seguir é uma espécie de "truque diagonal" que mostra como esta afirmação pode ser usada para achar uma subsequência convergente. A *primeira ideia deste truque diagonal* é que, aplicando a afirmação infinitas vezes, podemos encontrar subsequências encaixadas e cada vez mais apertadas. Mais precisamente:

1. A afirmação implica que existe $N_1 \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $\mathsf{d}_K(x_n, x_m) < 1/2$ para todos $n, m \in N_1$.

2. Suponha (recursivamente) que existem conjuntos infinitos $N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_k$, todos contidos em $\mathbb{N}$, tais que, para qualquer $1 \le i \le k$ e quaisquer $n, m \in N_i$, vale a desigualdade $\mathsf{d}_K(x_n, x_m) < 2^{-i}$. Vamos mostrar como construir um conjunto N_{k+1} de forma a estender por mais um passo esta construção. Para isto, aplicaremos a afirmação à sequência
$$\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \text{ onde } \{n_j \,:\, j \in \mathbb{N}\} = N_k.$$
com $r = 2^{-k-1}$. Isto nos dá um conjunto N e podemos definir $N_{k+1} := \{n_j \,:\, j \in N\}$, de modo a termos as propriedades desejadas.

Nossa tarefa final é extrair destas subsequências encaixadas e cada vez mais apertadas uma subsequência de Cauchy. Uma tentativa poderia ser definir $\{x_n\}_{n\in N}$ com $N := \cap_k N_k$, mas isto não pode funcionar em geral: afinal,

$$n, m \in N \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\, n, m \in N_k \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\, \mathsf{d}_K(x_n, x_m) \leq 2^{-k} \Rightarrow x_n = x_m.$$

Portanto N não pode ser um conjunto infinito (a não ser que a sequência original tenha infinitos termos iguais).

A segunda ideia do truque diagonal é uma maneira "diagonal" de selecionar um subconjunto infinito N_* de modo que $N_* \subset N_k$ "quase vale", isto é, $N_* \subset N_k$ tem apenas um número finito de termos. Vamos escrever

$$N_* := \{n_1 < n_2 < n_3 < \dots\}$$

onde os n_k são definidos recursivamente.

1. Em primeiro lugar, definimos $n_1 = \min N_1$ (isto é válido porque $N_1 \neq \emptyset$ é subconjunto dos naturais).

2. Definidos $n_1 < \dots < n_k$, observamos que, como N_{k+1} é infinito,

$$N_{k+1} \backslash [n_k] \neq \emptyset.$$

   Como ele também é subconjunto dos naturais, podemos definir

$$n_{k+1} := \min(N_{k+1} \backslash [n_k])$$

   e observamos que $n_{k+1} \notin [n_k]$, de modo que $n_{k+1} > n_k$.

Pela construção temos $n_1 < n_2 < \dots$. Além disto, para $k, r \in \mathbb{N}$ com $k < r$, temos que

$$n_k \in N_k, n_r \in N_r \subset N_k$$

e como $\mathsf{d}_K(x_n, x_m) < 2^{-k}$ para $n, m \in N_k$, isto implica

$$\forall k, r \in \mathbb{N} \,:\, k < r \Rightarrow \mathsf{d}_K(x_{n_k}, x_{n_r}) < 2^{-k}.$$

Exercício 26 *Para terminar a prova, deduza disto que $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ é Cauchy.*

□

Exercício 27 *Use o critério das subsequências para mostrar que todo subconjunto fechado de um compacto é ele próprio compacto.*

5.4 Compactos de $\mathbb{R}^d$: o teorema de Heine-Borel

Teorema 9 (Heine Borel) *Um subconjunto $K \subset \mathbb{R}^d$ é compacto se e somente se é fechado e limitado.*

Prova: [de Heine Borel]Compactos são fechados (v. exercício 18) e totalmente limitados, e vice-versa. Basta provar então que um conjunto em $\mathbb{R}^d$ é limitado se e somente se é totalmente limitado. Mas isto é simples:

- Se K é totalmente limitado, $K \subset \cup_{i=1}^m B(x_i, \delta)$. Mas então a desigualdade triangular mostra que $\mathsf{d}(0, x) \leq \max\{\mathsf{d}(0, x_i)\}_{1\leq i\leq n} + \delta$ para todo $x \in K$, ou seja, K é limitado.

- Se $K \subset \mathbb{R}^d$ é limitado, temos que $K \subset [-n, n]^d$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Dividindo cada intervalo $[-n, n]$ em intervalos de comprimento $< \delta/\sqrt{d}$, vemos que $[-n, n]^d$ é dividido em um número finito de cubos tais que $\|x - x'\| < \delta$ para quaisquer dois elementos no mesmo cubo. Tomando um ponto x_i em cada cubo, vemos que $K \subset [-n, n]^d \subset \cup_{i=1}^m B(x_i, \delta)$ para uma certa coleção finita de pontos. Deste modo, K é totalmente limitado.

□

Exercício 28 *Mostre que um espaço métrico com a métrica discreta e com um número infinito de pontos não é totalmente limitado, apesar de ser fechado (completo) e limitado.*

5.5 Critérios topológicos para a compacidade

Vimos acima que a compacidade – o fato de que "funções contínuas sempre atingem o ínfimo-- tem várias expressões em termos de métricas. Agora veremos uma versão topológica destes critérios.

Teorema 10 *Dado um espaço métrico (K, d_K), são equivalentes:*

1. *K é compacto.*

2. *Toda coleção de abertos $\mathcal{A}$ de K com $\cup_{A\in\mathcal{A}} A = K$ tem uma subcoleção* finita *$\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ com $\cup_{A\in\mathcal{C}} A = K$. (Normalmente abrevia-se este enunciado dizendo que "toda cobertura de K por abertos tem uma subcobertura finita.)*

3. *Toda coleção de fechados $\mathcal{F}$ de K com $\cap_{F\in\mathcal{F}}F = \emptyset$ possui uma sub-coleção finita $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$ com $\cap_{F\in\mathcal{P}}F = \emptyset$.*

Prova: Veja que $2 \Rightarrow 3$ segue se escrevemos $\mathcal{A} := \{X\backslash F \,:\, F \in \mathcal{F}\}$ e notamos que $\cap_{F\in\mathcal{F}}F = \emptyset$ se e somente se $\cup_{A\in\mathcal{A}}A = K$. Provaremos que $3 \Rightarrow 1$ e $1 \Rightarrow 2$ a seguir.

Prova de que $3 \Rightarrow 1$**.** Seja $f : K \to \mathbb{R}$ contínua e chame de $\ell = \inf\{f(x) : x \in K\}$ (em princípio permitimos $\ell = -\infty$). Vamos mostrar que existe um $x_* \in K$ com $f(x_*) = \ell$. Para isto notamos que, se $t \in \mathbb{R}$ e $t > \ell$, tem de existir um $x \in K$ com $f(x) \leq t$. Portanto, os conjuntos

$$F_t := \{x \in K \,:\, f(x) \leq t\} = f^{-1}((-\infty, t])$$

são fechados e não são vazios.

Afirmamos que $\cap_{t>\ell}F_t \neq \emptyset$. Para isto, o item 3 nos diz que basta checar que qualquer coleção finita dos conjuntos F_t tem interseção não-vazia. Tome, então conjuntos $F_{t_1}, \dots, F_{t_k}$ com $t_1, \dots, t_k > \ell$ e verifique que:

$$\bigcap_{i=1}^{k} F_{t_i} = \bigcap_{i=1}^{k} f^{-1}((-\infty, t_i]) = f^{-1}((-\infty, \min_{1\leq i\leq k} t_i]) \neq \emptyset$$

já que $\min t_i > \ell$ quando $t_1, \dot{;} t_k > \ell$. Pelo item 3, isto implica que

$$\bigcap_{t>\ell} F_t \neq \emptyset.$$

Veja que qualquer $x_* \in \cap_{t>\ell}F_t$ tem $\ell \leq f(x_*)$ (pois ℓ é ínfimo) e $f(x_*) \leq t$ para todo $t \geq \ell$, logo $f(x) = \ell$ e (a fortiori) $\ell \neq -\infty$.

Prova de que $1 \Rightarrow 2$**.** Seja $\mathcal{A}$ como no item 2. Observe que todo $x \in K$ pertence a algum aberto $A \in \mathcal{A}$. Portanto existe um $\delta > 0$ com $B(x, \delta) \subset A$ para algum $A \in \mathcal{A}$. Reduzindo δ se necessário, podemos tomar $\delta < 1$.

Isto nos permite *definir uma função* $r : K \to (0, +\infty)$ da seguinte forma:

$$r(x) := \sup\{0 < \delta < 1 \,:\; \text{existe } A \in \mathcal{A} \text{ tal que } B(x, \delta) \subset A\} \;(x \in K).$$

Afirmação 2 *r é contínua.*

Prova: [da Afirmação]Vamos mostrar que r é 1-Lipschitz, o que implica que r é contínua. Para isto basta mostrar que:

$$\textbf{Objetivo: } \forall x, x' \in X \,:\, r(x) - r(x') \leq \mathsf{d}_X(x, x'). \qquad (1)$$

De fato, se temos isto, podemos trocar os papeis de x, x' e mostrar que também vale $r(x') - r(x) \leq \mathsf{d}_X(x, x')$, de modo que $|r(x') - r(x)| \leq \mathsf{d}_X(x, x')$ para todos $x, x' \in X$. Para provar nosso objetivo, tome qualquer $0 < r < r(x)$ e um conjunto $A \in \mathcal{A}$ com $B(x, r) \subset A$. Note que $B(x', r - \mathsf{d}_X(x, x')) \subset B(x, r)$; afinal,

$$\forall y \in B(x', r - \mathsf{d}_X(x, x')) \, : \, \mathsf{d}_X(y, x) \leq \mathsf{d}_X(y, x') + \mathsf{d}_X(x, x') < r.$$

Portanto também temos $B(x', r - \mathsf{d}_X(x, x')) \subset A \in \mathcal{A}$ e isto implica $r(x') \geq r - \mathsf{d}_X(x, x')$. Tomando o supremo em r, vemos que $r(x') \geq r(x) - \mathsf{d}_X(x, x')$, como queríamos demonstrar. *[Fim da prova da afirmação.]* $\square$

Com esta afirmação podemos provar que

$$\exists \delta > 0 \, : \, \forall x \in K, \, \exists A \in \mathcal{A} \text{ com } B(x, \delta) \subset A.$$

De fato, basta tomar $\delta := \inf\{r(x) \, : \, x \in K\}/2$ e notar que:

- $\delta > 0$ porque $r(\cdot)$ contínua e K é compacto implicam que $\inf\{r(x) : x \in K\} = r(x_*)$ para algum $x_* \in K$, de modo que $r(x_*) > 0$ porque r é positiva em todo ponto.

- Dado $x \in X$, $r(x) > \delta$. Pela definição de $r(x)$ como supremo, existem $r \in (\delta, r(x)]$ e $A \in \mathcal{A}$ com $B(x, \delta) \subset B(x, r) \subset A$.

Vamos agora terminar a prova. Já vimos no Teorema 8 que K compacto implica que K é totalmente limitado. Pela Proposição 8, isto quer dizer que $K \subset \cup_{i=1}^k B(x_i, \delta)$ para alguma escolha de $x_1, \dots, x_n \in K$. Mas então escolhemos, para cada $1 \leq i \leq k$, um aberto $A_i \in \mathcal{A}$ com $B(x_i, \delta) \subset A_i$, e observamos que $K \subset \cup_{i=1}^k A_i$. Deste modo, $\mathcal{C} := \{A_i \, : \, 1 \leq i \leq k\}$ é uma subcoleção finita que cobre K. $\square$

Observação 1 *Um dado importante que surgiu na prova acima é que, se K é compacto, então toda cobertura $\mathcal{A}$ de K por abertos possui um* número de Lebesgue*, isto é, um $\delta > 0$ tal que, se $x, x' \in K$ e $\mathsf{d}_K(x, x') < \delta$, então $x, x' \in A$ para algum $A \in \mathcal{A}$. Isto é, se $\mathsf{d}_K(x, x') < \delta$, x, x' pertencem ao* mesmo aberto *da cobertura. Usaremos isto mais adiante.*

5.6 Continuidade uniforme

Vamos mostrar no restante desta seção que uma função contínua em um compacto é sempre uniformemente contínua.

Definição 13 *Dizemos que $f : X \to Z$ é uniformemente contínua se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que, se $x, x' \in X$ e $\mathsf{d}_X(x, x') < \delta$, então $\mathsf{d}_Z(f(x), f(x')) < \varepsilon$.*

Note que isto é diferente da definição de continuidade via ε/δ, que é:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \forall x \in X \, \exists \delta > 0 \, \forall x' \in X \, : \, \mathsf{d}_X(x, x') < \delta \Rightarrow \mathsf{d}_Z(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Já continuidade uniforme pede que:

$$(\star) \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, x' \in X \, : \, \mathsf{d}_X(x, x') < \delta \Rightarrow \mathsf{d}_Z(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Ou seja: dado ε, temos que achar um δ que serve para *todos os x simultaneamente.*

Exercício 29 *Toda função Lipschitz é uniformemente contínua.*

Por outro lado, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ não é uniformemente contínua. De fato,vemos que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \, \forall h > 0 \, : \, f(n + h) - f(n) > 2n.h.$$

Portanto, fixo $\varepsilon > 0$, vemos que $\forall \delta > 0$ existe um $n \in \mathbb{N}$ e um $0 < h < \delta$ (de fato, $2h = \delta/n$ basta) com

$$|h| < \delta \text{ mas } |f(n + h) - f(n)| \geq \delta.$$

O teorema a seguir mostra que este fenômeno *não pode acontecer* se o domínio da função f é compacto.

Teorema 11 *Se (X, d_X) é compacto, então toda função $f : X \to Z$ que é contínua é uniformemente contínua.*

Prova: Seja $f : X \to Z$ contínua e fixe $\varepsilon > 0$. Mostraremos que existe um $\delta > 0$ satisfazendo $(\star)$.

Pela definição ε/δ de continuidade, para qualquer $\varepsilon > 0$ e qualquer $x \in X$ existe um $\delta(x) > 0$ tal que

$$\forall x' \in X \, : \, \mathsf{d}_X(x, x') < \delta \Rightarrow \mathsf{d}_Z(f(x), f(x')) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

A desigualdade triangular implica que:

$$\forall x \in X, \forall x', x'' \in B_X(x, \delta(x)) \,:\, \mathsf{d}_Z(f(x'), f(x'')) < \varepsilon. \qquad (2)$$

Observe que

$$\mathcal{A} := \{B_X(x, \delta(x)) \,:\, x \in X\}$$

é uma coleção de abertos que cobre X. A Observação 1 implica que existe um *número de Lebesgue* $\delta > 0$ tal que, se $a, b \in X$ e $\mathsf{d}_X(a, b) < \delta$, então a, b ambos pertencem a um mesmo aberto desta coleção. Isto é:

$$\mathsf{d}_X(a, b) < \delta \Rightarrow \exists x \in X\; a, b \in B_X(x, \delta(x)) \Rightarrow \mathsf{d}_Z(f(a), f(b)) < \varepsilon \text{ (por (2))}.$$

Concluímos que o número de Lebesgue δ tem exatamente a propriedade que procurávamos. $\square$

Exercício 30 *Construa uma prova alternativa da continuidade uniforme baseada no seguinte argumento.*

1. *Primeiro mostre que f é uniformemente contínua se e somente se vale a seguinte propriedade:*

$$\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X \,:\, \mathsf{d}_X(x_n, y_n) \to 0 \Rightarrow \mathsf{d}_Z(f(x_n), f(y_n)) \to 0.$$

2. *Agora suponha (para chegar a uma contradição) que existem $\{x_n\}_n$, $\{y_n\}_n$ com $\mathsf{d}_X(f(x_n), f(y_n)) \to 0$, mas $\mathsf{d}_Z(f(x_n), f(y_n)) \not\to 0$. Observe que,* se *$x_n$ converge a algum x, y_n também converge a x e portanto $\mathsf{d}_X(f(x_n), f(y_n)) \to 0$, contradição. Depois note que, mesmo que x_n não convirja, é sempre possível achar uma subsequência convergente, e isto já basta para fazer valer a prova.*

5.7 Conjuntos perfeitos

Nesta seção concluímos as notas sobre topologia falando de certos conjuntos em que todo ponto pode ser bem aproximado por outros pontos.

Definição 14 *Seja (X, d_X) um espaço métrico. $P \subset X$ é perfeito se todo $x \in P$ é ponto de acumulação de P, isto é:*

$$\forall p \in P, \forall \delta > 0 \,:\, (B_X(p, \delta)\backslash\{p\}) \cap P \neq \emptyset.$$

Exercício 31 *Mostre que P é perfeito se e somente se para cada $p \in P$ existe uma sequência $\{p_n\}_n \subset P\backslash\{p\}$ que converge a p.*

Exercício 32 *Mostre que* $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *são subconjuntos perfeitos de* $\mathbb{R}$.

Exercício 33 *Mostre que existem conjuntos perfeitos enumeráveis.*

Provaremos abaixo um resultado que mostra que não há conjuntos compactos, perfeitos e enumeráveis.

Teorema 12 *Se* $P \subset X$ *é compacto e perfeito,* P *é não enumerável.*

Veja que a hipótese de que P é compacto não pode ser descartada.
Prova: Na prova vamos supôr sem perda de generalidade que $X = P$.

Tome uma $f : \mathbb{N} \to P$ qualquer; vamos mostrar que ela não é sobrejetiva. A demonstração será bastante parecida com a que usamos para provar que $\mathbb{R}$ não era enumerável. O que faremos será construir irecursivamente *bolas fechadas encaixadas*

$$P \supset F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots$$

de modo que:

1. O raio de cada F_n é positivo.
2. $f(n) \notin F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Antes de embarcar na construção, vamos explicar porque ela basta para provar nossa tese. Veja que

$$\mathcal{F} := \{F_1, F_2, F_3, \dots\}$$

é família de subconjuntos fechados de P tal que, para qualquer subfamília finita $\{F_{n_1}, \dots, F_{n_k}\}$,

$$\bigcap_{i=1}^{k} F_{n_i} = F_{\max\{n_1,\dots,n_k\}} \neq \emptyset;$$

portanto, o fato de que P é compacto implicará que:

$$\cap_n F_n \neq \emptyset.$$

Por fim, notamos que $\cap_n F_n$, que não é vazio, não tem elementos em comum com a imagem de f (afinal, $f(j) \notin F_j$ para todo j), portanto f não pode ser sobrejetiva.

Agora vamos partir para a construção. Para definir F_1, fixe primeiramente um $x_1 \neq f(1)$ e defina $r_1 := \mathsf{d}_X(f(1), x_1)/2$. Tomamos $F_1 := B_X[x_1, r_1]$ e notamos que $f(1) \notin F_1$, $F_1 \neq \emptyset$.

Suponha agora que $F_1, \dots, F_n$ já foram definidas; vamos construir F_{n+1} a seguir. Sabemos que $F_n := B[x_n, r_n]$ com $x_n \in P$ e $r_n > 0$. *Agora usaremos fortemente a hipótese de que P é perfeito* para notar que $B(x_n, r_n/2)\backslash\{x_n\}$ não é vazio, de modo que podemos tomar $y_n \in P$ com $0 < \mathsf{d}_X(x_n, y_n) < r_n/2$.

Vamos construir F_{n+1} considerando dois casos. Se $f(n+1) \neq x_n$, podemos tomar

$$F_{n+1} := B[x_n, r_{n+1}] \text{ com } r_{n+1} := \min\left\{r_n, \frac{\mathsf{d}_X(f(n+1), x_n)}{2}\right\}.$$

Veja que $F_{n+1} \subset F_n$ porque o centro da bola se manteve e o raio não pode aumentar. Além disto, como $\mathsf{d}_X(f(n+1), x_n) > 0$ e $r_n > 0$ (por hipótese da recursão), o raio de F_{n+1} é positivo. Finalmente, $f(n+1) \notin F_{n+1}$ porque a distância entre x_n e $f(n+1)$ é maior do que o raio da bola F_{n+1}.

Resta decidir o que fazer no caso em que $f(n+1) = x_n$. Neste caso, tomaremos uma bola ao redor de y_n

$$F_{n+1} := B[y_n, r_{n+1}] \text{ com } r_{n+1} := \min\left\{\frac{r_n}{2}, \frac{\mathsf{d}_X(f(n+1), y_n)}{2}\right\}.$$

Veja que $f(n+1) \notin F_{n+1}$ porque o raio da bola é menor do que a distância de $f(n+1)$ ao centro da bola. Além disto, o raio é positivo porque tanto esta distância quanto o $r_n > 0$ são positivos. Finalmente, $F_{n+1} \subset F_n$ porque

$$\mathsf{d}_X(y_n, x_n) + r_{n+1} \leq r_n \Rightarrow B[y_n, r_{n+1}] \subset B[x_n, r_n].$$

Isto mostra que podemos definir F_{n+1} com as propriedades desejadas. $\square$