Exercices en Analyse et Algèbre Linéaire

L3 MIASHS/IDS - Université Lyon 2 - 2016/2017

Responsable : Julien Ah-Pine

1 Fonctions numériques réelles à valeurs réelles

1.1 Excercie

Pour chacune des fonctions numériques suivantes : déterminez les domaines $\mathbb{D}_f$ et les limites en 0 lorsqu'elles existent. Le cas échéant, dites si ces fonctions sont continues en 0.

Q1 $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-3}$ (Rq : $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$)

Q2 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

Q3 $f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$

1.2 Excercie

Pour chacune des fonctions composées suivantes : déterminez les domaines $\mathbb{D}_f$ puis leurs définitions.

Q1 $f \circ f$ avec $f(x) = \frac{1}{1-x}$

Q2 $f \circ g$ avec $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ et $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ (Rq : $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$)

1.3 Excercie

Déterminez les dérivées des fonctions suivantes :

Q1 $f(x) = x^2 + 3x + 2$.

Q2 $f(x) = \frac{x^2+3x}{x^2-3}$

Q3 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

Q4 $f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$

Q5 $f(x) = x^2 \exp(\frac{1}{x})$

1.4 Excercie

Soit $f(x) = \ln(\ln(x))$. Déterminez $\mathbb{D}_f$. Montrez que f est strictement concave sur $\mathbb{D}_f$.

1.5 Excercie

Déterminez l'approximation affine des fonctions suivantes au voisinage des points indiqués :

Q1 $f(x) = \exp(x) + \ln(x)$ au voisinage de $x_0 = 1$.

Q2 $g(x) = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}$ au voisinage de $x_0 = 0$.

Q3 $h(x) = x^\alpha$ au voisinage de $x_0 = 1$.

Déduisez en des valeurs approchées de $f(0.9)$, $g(0.2)$ et $h(1.1)$ pour $\alpha = 1/2$.

1.6 Excercie

Soit la fonction suivante :

$$f(x) = (\ln(4x-3))^2$$

Questions :

Q1 Donnez à l'aide de la formule de Taylor, une approximation de f à l'ordre 2 au voisinage de $x_0 = 1$.

Q2 Déduisez-en la position de la tangente localement au voisinage de $x_0 = 1$.

1.7 Excercie

Déterminez les extrema des fonctions f et g suivantes :

Q1 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$.

Q2 $g(x) = \exp(x) + x(\ln(x) - 1 - e)$.

1.8 Excercie

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{3-x}{x+1}$$

Questions :

Q1 Déterminez $\mathbb{D}_f$ ainsi que les différentes limites de f en $-\infty$, $+\infty$ et quand $x \to -1, x < -1$ (limite à gauche de -1) et $x \to -1, x < -1$ (limite à droite de -1).

Q2 Déterminez la dérivée première de f et étudiez son signe sur $\mathbb{D}_f$.

Q3 Tracez le graphe de f sur $\mathbb{D}_f$.

Q4 f a t-elle des extrema sur $\mathbb{D}_f$? Si oui lesquels ? f est-elle convexe ?

1.9 Excercie

Déterminez l'extremum de la fonction f suivante :

$$f(a) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2$$

Indiquez également s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum. Commentez.

1.10 Exercice

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 4x^3 + 3.5x^2 + 40x$$

Questions :

Q1 Utilisez l'algorithme de Newton afin de déterminer numériquement le minimizeur de f dans l'intervalle $[10, 12]$ avec une précision de 0.001

Q2 Utilisez l'algorithme de la sécante afin de déterminer numériquement le minimizeur de f dans l'intervalle $[11, 12]$ avec une précision de 0.001

2 Familles de vecteurs, bases, espaces vectoriels

2.1 Exercice

Montrez que $\mathbb{R}^3$ muni des opérations classiques d'addition et de multiplication forment un ev.

2.2 Exercice

Soient $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$ et $\mathbf{v}_2 = (-1, 1)$.

Q1 Montrez que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Q2 Est-ce que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ forme une base de $\mathbb{R}^2$?

Q3 Soit $\mathbf{u} = (2, 1)$ dans la base canonique. Quelles sont les composantes de $\mathbf{u}$ dans $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$? Représentez ces vecteurs graphiquement.

2.3 Exercice

Soient $\mathbf{v}_1 = (1, -2, -3)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 3, -1)$ et $\mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$. Montrez que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ est une famille libre.

2.4 Exercice

Soient $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 2, 3)$ et $\mathbf{v}_4 = (1, -1, -3)$. Déterminez la dimension de $Vec\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$.

2.5 Exercice

L'étude des familles de vecteurs et des bases d'un ev revient à résoudre des systèmes d'équation linéaires. La méthode du pivot de Gauss est un algorithme permettant de résoudre de tels systèmes. Si besoin entrainez vous sur les exercices suivants :

Q1 Montrez que la solution du système suivant est $(x, y, z) = (1, 2, 3)$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x + y + 2z & = & 9 \\ 2x + 4y - 3z & = & 1 \\ 3x + 6y - 5z & = & 0 \end{array}\right.$$

Q2 Montrez que la solution du système suivant est $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-x_2 - x_5, x_2, -x_5, 0, x_5)$ avec $x_2, x_5 \in \mathbb{R}$ (variables libres) ou encore $\mathbf{x} \in Vec\{(-1, 1, 0, 0, 0); (-1, 0, -1, 0, 1)\}$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 & = & 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 & = & 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 & = & 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

3 Applications linéaires et représentation matricielle

3.1 Exercice

Soit $\left\{\begin{array}{ll} f: & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ & (x_1, x_2, x_3) \to (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + x_2 - 3x_3, 3x_1 + 2x_2 - 4x_3) \end{array}\right.$

Q1 Déterminez une base du sev $Ker(f)$.

Q2 Déterminez une base du sev $Im(f)$.

Q3 Donnez l'écriture matricielle de f en supposant la base canonique.

3.2 Exercice

$$\text{Soit}\left\{\begin{array}{ll} f: & \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \\ & (x_1,x_2,x_3,x_4) \to \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

1. Montrez que $Ker(f)$ est $Vec\{(1,2,0,1);(2,1,-1,0)\}$.
2. Montrez que $Im(f)$ est $Vec\{(1,1,1);(0,1,2)\}$.

3.3 Exercice

Soit $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'application suivante : $\left\{\begin{array}{ll} f: & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ & (x_1,x_2,x_3) \to (x_1 - x_2, x_3 - x_2) \end{array}\right.$

Q1 Déterminez $M(f)_{\mathbf{e}_i,\epsilon_j}$.

Q2 Déterminez l'image par f de $\mathbf{x} = (3,2,1)$ en utiilsant la représentation algébrique puis en utilisant la représentation matricielle.

3.4 Exercice

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui dans la base canonique est représentée par $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & 11 & 3 \end{pmatrix}$.

Q1 Déterminez l'ecriture algébrique de l'endomorphisme associé à $\mathbf{A}$.

Q2 Déterminez une base du sev $Ker(f)$.

Q3 Déterminez les images des vecteurs $\mathbf{u} = (0,1,-2)$ et $\mathbf{v} = (-1,6,-19)$. Que peut-on conclure sur f ?

Q4 Déterminez le déterminant de $\mathbf{A}$. Pourquoi pouvait-on connaître la réponse à l'aide des questions précédentes ?

3.5 Exercice

Calculez les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix} \quad ; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix}$$

3.6 Exercice

Les nombres $136, 221, 595$ sont divisibles par 17. Montrez, sans le calculer, que le déterminant suivant est divisible par 17 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 9 & 5 \end{vmatrix}$$

3.7 Exercice

Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$ est inversible ? Calculez dans ce cas son inverse.

4 Formes bilinéaires et espace euclidens

4.1 Exercice

Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Q1 Déterminez les valeurs propres.

Q2 Déterminez les vecteurs propres. $\mathbf{A}$ est-elle diagonalisable ?

4.2 Exercice

Soit $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} & 2 \\ 2\sqrt{2} & 3 & 2\sqrt{2} \\ 2 & 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

Q1 Etudier le signe de $\mathbf{Q}$ à l'aide du critère de Sylvester.

Q2 Etudier le signe de $\mathbf{Q}$ à l'aide de la détermination de son spectre.

Q3 Déterminez les vecteurs propres de $\mathbf{Q}$.

Q4 Vérifiez que les vecteurs propres associés à une valeur propre sont orthogonaux aux vecteurs propres des autres valeurs propres.

4.3 Exercice

Soit $\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} t & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & t & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Q1 Sans calculer le polynôme caractéristique, montrer que $\lambda = t - 1$ est une valeur propre.

Q2 Déterminez $\mathbb{E}_{t-1} = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}_t\mathbf{x} = (t-1)\mathbf{x}\}$ le sous-espace propre associé à la valeur propre $t - 1$. Que peut-on dire de l'ordre de multiplicité de $t - 1$?

Q3 En déduire le spectre de $\mathbf{A}_t$.

Q4 Pour quelle valeur de t avons-nous $det(\mathbf{A}_t) = 0$?

4.4 Exercice

Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ les formes bilinéaires de $\mathbb{R}^3$ ci-dessous définissent-elles un produit scalaire ? Dans le cas d'un produit scalaire, écrire la matrice représentative dans la base canonique.

Q1 $s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 10x_2y_2 + 6x_1y_2 + \lambda x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2$

Q2 $s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3\lambda x_1y_3 + 3\lambda x_3y_1$

Q3 $s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 7x_1y_2 + 7x_2y_1 + 8x_2y_2 - 3x_3y_3 + \lambda x_2y_3 + \lambda x_3y_2$

Q4 $s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 8x_2y_2 - 3x_3y_3 + \lambda x_2y_3 + \lambda x_3y_2$

4.5 Exercice

Sur $\mathbb{R}^3$ on définit l'application $s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3 + x_1 y_2 + x_2 y_1$$

Q1 Déterminez $\mathbf{S}$ la matrice représentant s en supposant la base canonique. Est-ce que $\mathbf{S}$ définit un produit scalaire ?

Q2 Sans faire de calcul expliquez pourquoi s définie ci-dessous forme un produit scalaire :

$$s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} x_1 - x_2 + x_3\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}} y_1 - y_2 + y_3\right) + (x_2 - x_3)(y_2 - y_3) + x_3 y_3$$

4.6 Exercice

Sur $\mathbb{R}^3$ on définit les vecteurs suivants :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt permet de déterminer une base orthonormée à partir d'une base quelconque. Appliquez ce procédé à la base de $\mathbb{R}^3$ ci-dessus :

Q1 Soit le vecteur suivant :

$$\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - Proj_{\mathbf{v}_1}(\mathbf{v}_2)\mathbf{v}_1$$

Montrez formellement que $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_2 \rangle = 0$. Calculez ensuite $\mathbf{v}'_2$ pour les exemples numériques donnés ci-dessus.

Q2 Calculez :

$$\mathbf{v}'_3 = \mathbf{v}_3 - Proj_{\mathbf{v}_1}(\mathbf{v}_3)\mathbf{v}_1 - Proj_{\mathbf{v}'_2}(\mathbf{v}_3)\mathbf{v}'_2$$

Q3 Vérifiez que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}'_2$ et $\mathbf{v}'_3$ sont mutuellement orthogonaux.

Q4 Normez $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}'_2$ et $\mathbf{v}'_3$.

4.7 Exercice

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrez les relations suivantes en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

Q1 $\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)^2 \leq n \sum_{j=1}^n x_j^2$.

Q2 Si $x_1, \ldots, x_n > 0$ et $x_1 + \ldots + x_n = 1$ alors $\sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j} \geq n^2$ (Rq :$1 = \sqrt{x_j}/\sqrt{x_j}$).

Q3 Pour les deux relations précédentes identifiez les cas où l'on a l'égalité.

5 Fonctions de plusieurs variables

5.1 Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ (la norme euclidienne issue du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$). Questions :

Q1 Déterminez $\mathbb{L}_c$ avec $c < 0$.

Q2 Déterminez $\mathbb{L}_c$ avec $c \geq 0$.

Q3 Si $n = 2$ à quoi correspond $\mathbb{L}_c$ avec $c \geq 0$.

5.2 Exercice

Précisez le domaine de définition des fonctions suivantes et déterminez ensuite leur vecteur gradient :
Q1 $f(\mathbf{x}) = x^2\sqrt{y}$.
Q2 $f(\mathbf{x}) = xy/(x^2 + y^2)$.
Q3 $\exp(x^2 + y^2 + z^2)$.
Q4 $\ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

5.3 Exercice

Soit la fonction de plusieurs variables suivante :

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{(x^2+1)y^2}{x^2+y^2+2z^2} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Q1 Déterminez les fonctions partielles en $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ que vous noterez $f_x^{\mathbf{x}_0}$, $f_y^{\mathbf{x}_0}$ et $f_z^{\mathbf{x}_0}$. Est-ce que f est continue en $\mathbf{0}$?
Q2 Déterminez les dérivées partielles $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ et $\partial f/\partial z$.

5.4 Exercice

Soit $q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij}x_ix_j$ où $q_{ij} = q_{ji}$ pour $i, j = 1, \dots, n$.
Questions :
Q1 Déterminez les dérivées partielles $\partial q/\partial x_i$.
Q2 En déduire une écriture matricielle du gradient de $\mathbf{x}^\top\mathbf{Q}\mathbf{x}$ où $\mathbf{Q}$ est symétrique.

5.5 Exercice

Précisez si les fonctions suivantes sont de classe $\mathbb{C}^1$ sur leur domaine de définition. Puis, calculez leur matrice hessienne et précisez si elles sont de classe $\mathbb{C}^2$ sur leur domaine de définition. Enfin, étudiez la convexité de ces fonctions en les points donnés et terminez par donner une approximation quadratique au voisinage de ces points.
Q1 $f(\mathbf{x}) = x^2\sqrt{y}$, $\mathbf{a} = (1, 1)$.
Q2 $\exp(x^2 + y^2 + z^2)$, $\mathbf{a} = (0, 0, 0)$.

5.6 Exercice

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = q\ln(x) + \sin(py)$$

Q1 Déterminez les valeurs de p et q telles que f est convexe.

5.7 Exercice

Déterminez les solutions analytiques des problèmes d'optimisation non contraints suivants. Indiquer si une solution existe ou pas, si elle est unique ou pas et s'il s'agit d'un optimiseur local, global, strict.
Q1 $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) = e^{x_1-x_2} + e^{x_2-x_1}$.
Q2 $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) = x^2 - y^2 - 4x + 6y - 5$.

5.8 Exercice

Utilisez l'algorithme à pas fixe afin de déterminer numériquement le minimiseur des fonctions suivantes en partant de la solution intiale précisée :

Q1 $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2)^2 + x_2$ en prenant pour point initial $\mathbf{x} = (-1/2, -1/2)$ et avec un pas $\alpha = 0.5$.

Q2 $f(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$ en prenant pour point initial $\mathbf{x} = (0, 0)$ et avec un pas $\alpha = 0.5$. Dans ce cas particulier faites uniquement une itération. Que constatez-vous ?

5.9 Exercice

Utilisez l'algorithme de Newton afin de déterminer numériquement le minimiseur des fonctions suivantes en partant de la solution intiale précisée :

Q1 $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2)^2 + x_2$ en prenant pour point initial $\mathbf{x} = (-1/2, -1/2)$.

Q2 $f(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$ en prenant pour point initial $\mathbf{x} = (0, 0)$.

5.10 Exercice

Utilisez l'algorithme à pas optimal afin de déterminer numériquement le minimiseur des fonctions suivantes en partant de la solution intiale précisée. Pour l'optimisation unidimensionelle vous prendrez la méthode de la sécante avec à chaque fois l'interval inital $\alpha \in [0, 1]$.

Q1 $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2)^2 + x_2$ en prenant pour point initial $\mathbf{x} = (-1/2, -1/2)$.

Q2 $f(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$ en prenant pour point initial $\mathbf{x} = (0.99, 1.01)$. Dans ce cas particulier faites uniquement deux itérations. Que constatez-vous ?