



Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio

Máster Universitario en Sistemas Espaciales

Análisis del Hito 1

Ampliación de Matemáticas I

23 de septiembre de 2022

Autor:

- Rafael Rivero de Nicolás

Índice

1. Introducción	1
2. Resultados	1
2.1. Esquema: Euler	1
2.2. Esquema: Runge Kutta dde 4º Orden	2
2.3. Esquema: Crank-Nicolson	3
2.4. Conservación de la energía	3

1. Introducción

Se recogen en este documento los resultados obtenidos en el Problema de Cauchy dado por la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}, \quad (1)$$

y las condiciones iniciales

$$\vec{r}(t=0) = \vec{r}_o = (1, 0), \quad \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{t=0} = \dot{\vec{r}}_o = (0, 1),$$

tras implementar distintos esquemas numéricos en Python. Para ello se han empleado distintas mallas temporales, abarcando todas ellas un tiempo adimensional $t \in [0, 20]$.

2. Resultados

2.1. Esquema: Euler

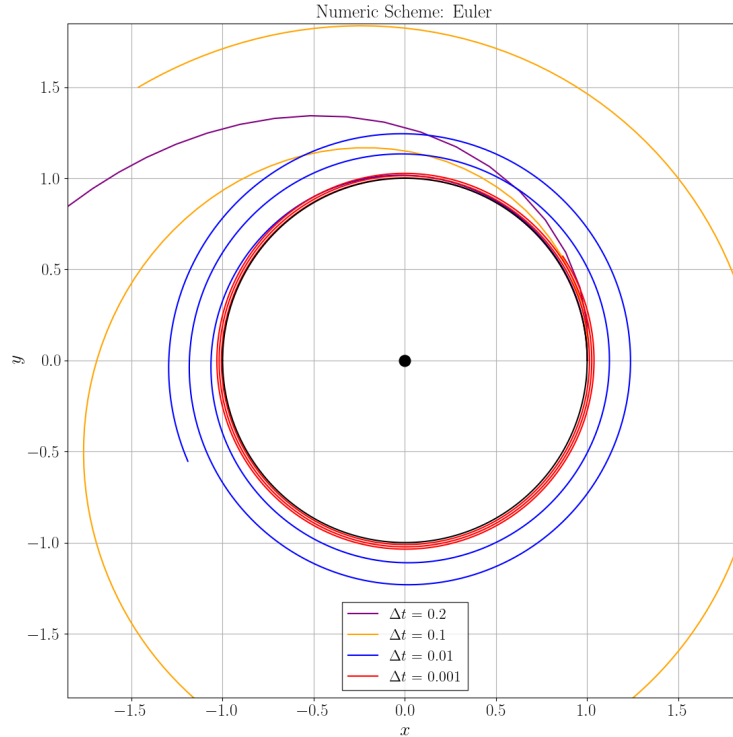


Figura 1: Órbitas calculadas mediante un esquema Euler.

Como se aprecia en la Figura 1, independientemente del Δt empleado las órbitas resultantes de la aplicación de este esquema numérico para el Problema de Cauchy presentado son espirales en las que $\|\vec{r}\| \rightarrow \infty$ y $\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| \rightarrow \infty$ para $t \rightarrow \infty$.

2.2. Esquema: Runge Kutta dde 4º Orden

En la Figura 2 se recogen las órbitas simuladas con este este esquema para distintos Δt . Incluso para el más pequeño de ellos, de un 10 % del valor del tiempo final de simulación, la órbita simulada prácticamente no difiere de la analítica, representada como una circunferencia de color negro de radio unidad en torno al $(0,0)$.

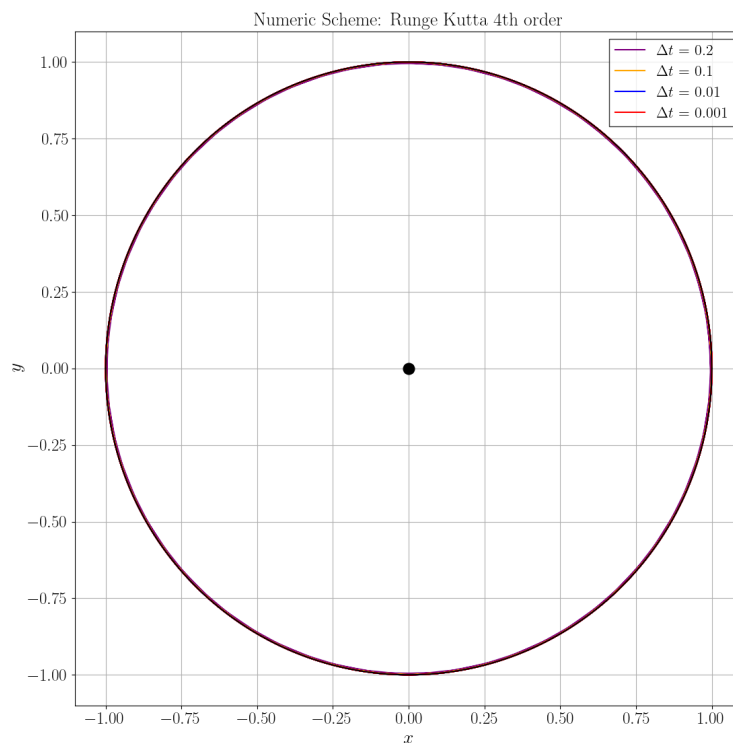


Figura 2: Órbitas calculadas mediante un esquema Runge Kutta de 4º orden.

Como hemos visto en clase, el orden de este esquema es mayor que el de Euler, por lo que su velocidad de convergencia es mucho mayor, justificando esto la solución tan precisa que se consigue.

2.3. Esquema: Crank-Nicolson

Observando la Figura 3 se llega a la misma conclusión que con el esquema anterior, las órbitas con este esquema son muy fieles a la solución analítica incluso con Δt en el límite de lo que se podría considerar pequeño frente al tiempo máximo de simulación $t = 20$.

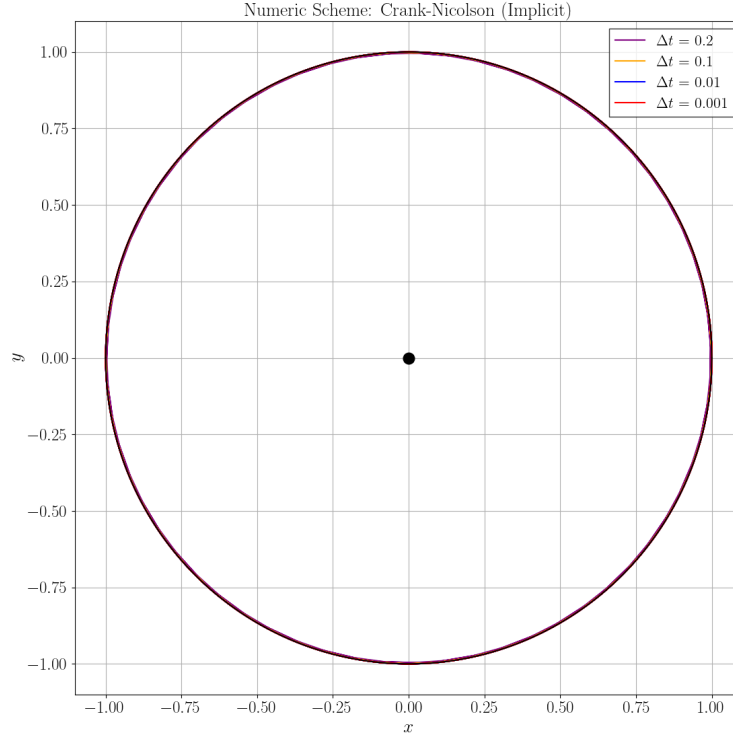


Figura 3: Órbitas calculadas mediante un esquema Crank-Nicolson.

2.4. Conservación de la energía

En las órbitas planetarias, debido a la ausencia de fuerzas externas en el caso ideal, se conserva la energía mecánica por unidad de masa:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{\|\vec{r}\|} = cte. \quad (2)$$

Donde μ es una constante de gravitación dependiente del cuerpo que ejerce la atracción sobre el cuerpo estudiado y $v^2 = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}$.

La solución analítica al problema de Cauchy planteado es una órbita en la que se conserva tanto la energía cinética como la potencial por separado al tratarse de una órbita circular. Aproximando la energía cinética por unidad de masa al módulo de la velocidad al cuadrado se tiene

$$\frac{v^2}{2} \propto \left\| \dot{\vec{r}} \right\|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \quad (3)$$

y aproximando la energía potencial por unidad de masa como la inversa del módulo del radio vector se tiene

$$\frac{\mu}{\|\vec{\mathbf{r}}\|} \propto \|\vec{\mathbf{r}}\|^{-1}. \quad (4)$$

Estos valores se han representado en la Figura 4 y en la Figura 5, con un tiempo adimensional de simulación $t = 5000$, de las que se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- El esquema Euler es el que peor conserva tanto la energía cinética como la potencial, incluso con $\Delta t = 0.001$, mientras que los otros esquemas sí reflejan la conservación de estas magnitudes de forma mucho más aproximada.
- En el esquema Runge Kutta, la peor aproximación se logra con $\Delta t = 0.2$ y con el esquema Crank-Nicolson esto ocurre con $\Delta t = 0.1$, implicando esto que en este esquema refinar la partición espacial no implica lograr una mejor aproximación.
- Tanto la energía potencial como la cinética muestran tendencias prácticamente idénticas para un mismo esquema para cualquier Δt a pesar de que se tratan de magnitudes diferentes.

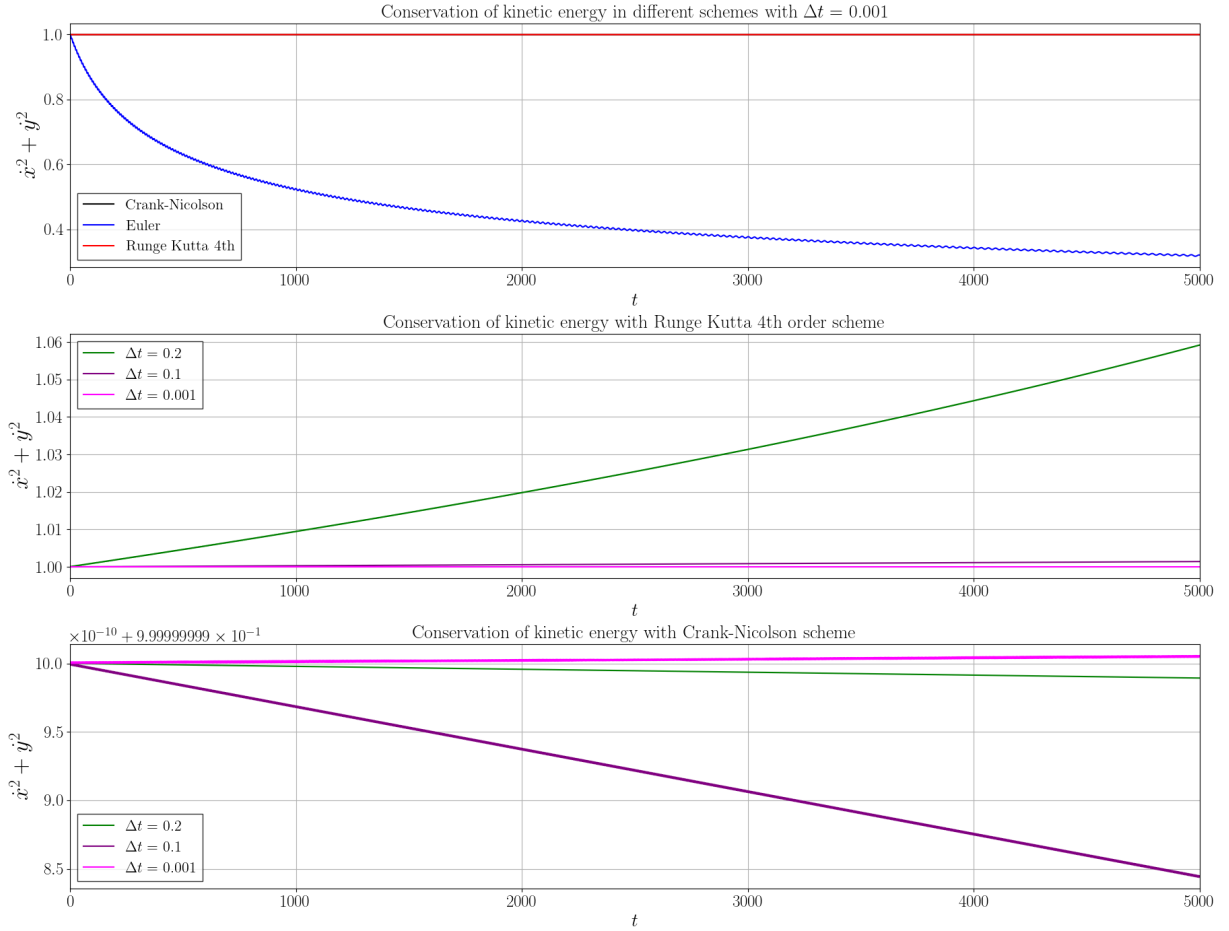


Figura 4: Energía cinética para las distintas órbitas y esquemas.

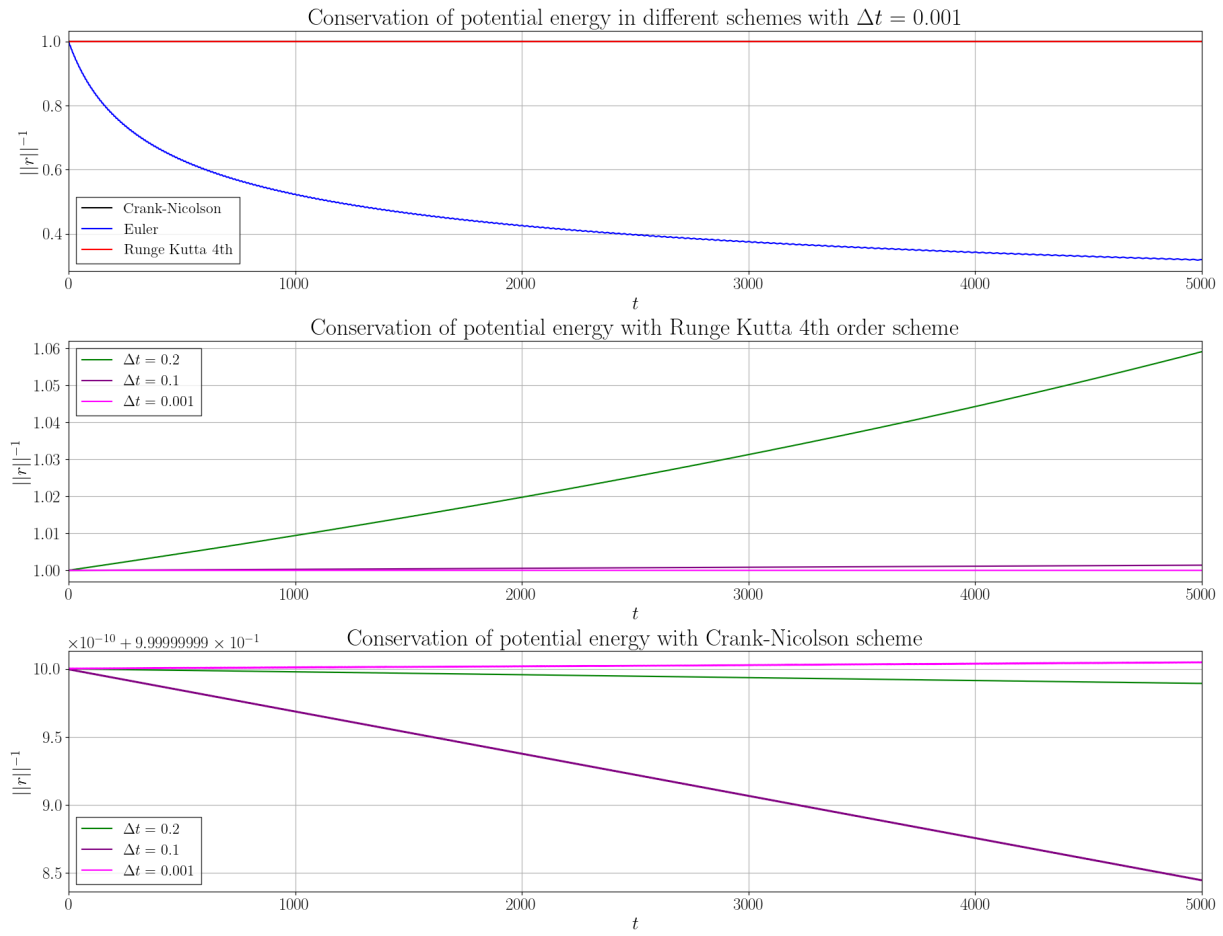


Figura 5: Energía potencial para las distintas órbitas y esquemas.

Referencias

- [1] Hernández, Juan Antonio, *Cálculo Numérico en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, 2018.